

باسمه تعالی



دفترچه‌ی سوالات آزمون آزمایشی تستی مرحله‌ی اول

وبسایت المپیاد کامپیوتر شازرز

دی ۱۳۹۶

تعداد سوالات	مدت آزمون (دقیقه)
۲۵	۱۸۰

طراحی شده توسط:

طلاهای دوره‌ی ۲۷

با تشکر از:

ایمان غلامی، حمیدرضا هدایتی و امیرکیوان محتشمی

توضیحات

استفاده از ماشین حساب ممنوع است

- ۱- لطفاً تمام مشخصات خواسته شده در پاسخ‌برگ را وارد نمایید.
- ۲- دفترچه‌ی سوالات (به جز این صفحه) شامل هفت صفحه است. بلافاصله پس از شروع آزمون، دفترچه‌ی خود را بررسی نمایید و در صورت وجود هرگونه نقص، مسئول جلسه را مطلع نمایید.
- ۳- پاسخ درست به هر سوال ۴ نمره‌ی مثبت و پاسخ نادرست یک نمره‌ی منفی دارد.
- ۴- استفاده از هرگونه کتاب، جزوه، یادداشت، هرگونه منابع الکترونیکی (مانند اینترنت و موبایل) و وسایلی از این قبیل ممنوع است.

تمامی حقوق این آزمون برای وبسایت شازرز محفوظ است

آدرس اینترنتی: <http://shaazzz.ir>

(۱) یک جدول 2×4 داریم به چند حالت می‌توان اعداد ۱ تا ۸ را در آن نوشت به طوری که ب.م.م هر دو خانه مجاور برابر ۱ باشد؟

الف) ۱۹۶ (ب) ۲۱۶ (ج) ۳۹۲ (د) ۴۳۲ (ه) ۴۸۰

(۲) چند زوج مرتب (p, q) وجود دارد به طوری که $p + q = 300$, $p \vee q = 218$ باشد؟ (همان OR باینری است)

الف) ۰ (ب) ۲ (ج) ۴ (د) ۸ (ه) ۱۶

(۳) حسن یک جایگشت p به طول n دارد او در یک مرحله می‌تواند $n - 1$ عضو اول یا $n - 1$ عضو آخر را انتخاب کند و آن‌ها را به ترتیب صعودی مرتب کند.

او $f(p)$ را برابر با کمترین تعداد عملیات که لازم داریم تا جایگشت را مرتب کنیم تعریف می‌کند. حال او از شما می‌خواهد تا جمع $f(p)$ را برای جایگشت‌های زیر پیدا کنید.

$$-1 < 2, 3, 4, 1 >$$

$$-2 < 1, 2, 3, 5, 4 >$$

$$-3 < 5, 3, 4, 2, 1 >$$

$$-4 < 4, 1, 3, 2 >$$

الف) ۴ (ب) ۵ (ج) ۶ (د) ۷ (ه) ۸

(۴) در سوال بالا باقی‌مانده جمع $f(p)$ برای همه‌ی جایگشت‌های ۸ تایی، بر ۵ را به دست آورید.

الف) ۰ (ب) ۱ (ج) ۲ (د) ۳ (ه) ۴

(۵) یک نوار ۲۰ سانتی‌متری موجود است. می‌خواهیم روی آن ۵ مربع با اضلاعی به طول صحیح بگذاریم به طوری که کل نوار را بپوشانند. به ازای هر حالت مجموع مساحت مربع‌ها را برابر f آن حالت قرار می‌دهیم. مجموع f ها به ازای هر حالت چقدر است. (مربع‌ها نباید با هم اشتراک داشته باشند)

الف) ۴۷۸۵۵۴ (ب) ۴۶۵۱۲۰ (ج) ۳۴۸۰۹۲ (د) ۹۸۶۵۵۸ (ه) هیچکدام

(۶) محمد عدد یک را روی تخته نوشته است. او در هر مرحله اگر عدد نوشته شده x باشد می‌تواند به ازای یک i دلخواه، عدد نوشته شده را ضرب در i کند و $i + 1$ اسکناس بپردازد. کمترین تعداد اسکناسی که باید خرج کند تا عدد ۱۰۰۰ را روی تخته بنویسد چه قدر است؟

الف) ۲۲ (ب) ۲۴ (ج) ۲۶ (د) ۲۸ (ه) ۳۰

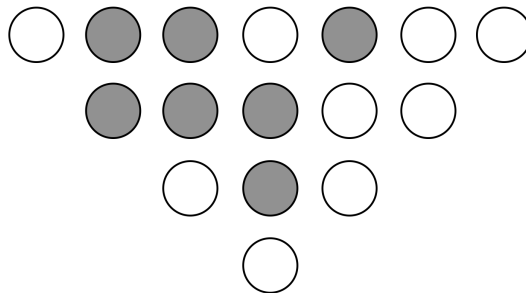
در هر گراف ساده تعدادی مسیر وجود دارد. برای مثال در گراف P_4 که یک مسیر با ۴ راس و ۳ یال است، ۶ مسیر متفاوت وجود دارد. (دو مسیر با هم متفاوت اند اگر مجموعه‌ی یال‌هایشان با هم متفاوت باشند)

با توجه به توضیحات بالا به سوالات ۷ و ۸ پاسخ دهید

(۷) در میان تمام گراف‌های ساده که ۴ یال دارند، بیش‌ترین تعداد مسیر چند است؟
 الف) ۹ (ب) ۱۰ (ج) ۱۱ (د) ۱۲ (ه) ۱۳

(۸) در میان تمام گراف‌های ساده که ۷ یال دارند، بیش‌ترین تعداد مسیر چند است؟
 الف) ۴۸ (ب) ۵۲ (ج) ۵۰ (د) ۵۴ (ه) ۴۹

علی ۱۶ توپ سفید رنگ دارد که مطابق شکل روبرو قرار گرفته اند؛ او می‌خواهد تعدادی از ۱۶ توپ روبرو را به رنگ آبی رنگ‌آمیزی کند؛ او ۷ توپ ردیف اول را به شکل دلخواه آبی می‌کند؛ اما از ردیف دوم به بعد، او هر توپ را تنها در صورتی آبی می‌کند که زوج تا از سه توپ بالا - بالا راست - بالا چپ این توپ آبی شده باشد؛ در غیراینصورت او آن توپ را آبی نمی‌کند. برای مثال شکل روبرو یکی از حالات رنگ‌آمیزی توپ‌ها توسط علی است.



با توجه به توضیحات بالا به سوالات ۹ و ۱۰ پاسخ دهید

(۹) حداکثر تعداد توپ‌هایی که علی می‌تواند آبی کند چندتا است؟

الف) ۷ (ب) ۱۰ (ج) ۱۲ (د) ۱۱ (ه) ۱۳

(۱۰) مجموع تعداد توپ‌های آبی در بین همه حالات رنگ‌آمیزی توسط علی چند است؟

الف) ۱۰۲۴ (ب) ۷۶۸ (ج) ۲۵۶ (د) ۱۵۳۶ (ه) ۱۷۱۴

(۱۱) اگر گراف K_6 را بتوان به t مسیر افراز کرد (یعنی هر یال در دقیقاً یک مسیر آمده باشد) کمینه t چند است؟ (گراف K_6 گراف کامل ۶ راسی است)

- الف) ۳ (ب) ۴ (ج) ۵ (د) ۶ (ه) ۱۵

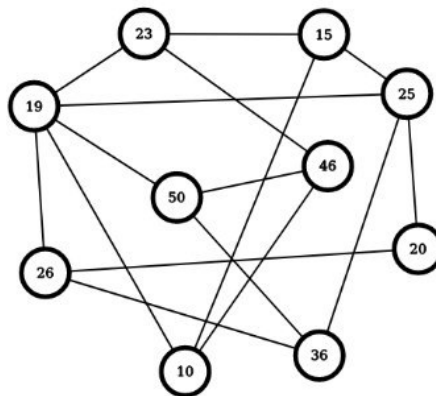
(۱۲) به چند روش می‌توان سه اسب یکسان را در یک جدول 4×4 قرار داد به طوری که هیچ دوتایی یکدیگر را تهدید نکنند؟

- الف) ۳۲۴ (ب) ۴۳۲ (ج) ۳۷۲ (د) ۲۷۶ (ه) ۲۲۴

(۱۳) به چند طریق می‌توان دو عدد طبیعی انتخاب کرد به طوری که جمع آن‌ها ۹۱۶ باشد و \wedge (AND بیتی) آن‌ها بیشتر از ۴۵۴ باشد؟ (دو حالت متمایزند اگر دو عدد انتخاب شده فرق داشته باشند)

- الف) ۰ (ب) ۱ (ج) ۳ (د) ۴ (ه) ۵

(۱۴) در گراف زیر می‌توان در هر مرحله یک یال و یک عدد صحیح x انتخاب کرده و عدد هر دو راس یال انتخاب شده را x واحد کم کرد. اگر کمترین تعداد مرحله برای صفر کردن اعداد تمام راس‌ها t باشد کدام گزینه بهترین باند بالا (سقف) برای t است؟



الف) $t \leq 4$ (ب) $t \leq 10$ (ج) $t \leq 30$ (د) $t \leq 100$ (ه) این کار امکان پذیر نیست

(۱۵) مجید در ابتدا روی مبدا مختصات $(0, 0)$ ایستاده و در هر مرحله اگر مجید روی نقطه (x, y) باشد به یکی از سه نقطه‌ی $(2x, 2y + 1)$ ، $(2x, 2y)$ و $(2y, 2x)$ می‌تواند برود. مجید با انجام تعدادی حرکت به چند تا از نقطه‌های مجموعه زیر می‌تواند برسد؟

- $(5, 11), (2, 10), (2, 8), (10, 0), (0, 10), (17, 4), (2, 0), (2, 8), (1, 4), (3, 40), (2, 5), (6, 9)$

- الف) ۵ (ب) ۸ (ج) ۱۰ (د) ۱۲ (ه) ۷

(۱۶) حسن جفت مرتب (۳, ۵) را دارد او در هر مرحله می‌تواند زوج مرتب (x, y) را به یکی از زوج مرتب‌های زیر تبدیل کند:

$$۱ - (x - y, y)$$

$$۲ - (x, x - y)$$

$$۳ - (x, x + y)$$

$$۴ - (x + y, x)$$

او می‌خواهد بداند به چند زوج مرتب می‌تواند برسد که هر دو عضو آن طبیعی و کم‌تر از ۱۲ باشد؟

الف) ۸۳ (ب) ۸۴ (ج) ۴۲ (د) ۴۱ (ه) ۲۱

(۱۷) در بندر شازرز هر ۱۳۹۶ ساعت یک بار یک کشتی لنگر می‌اندازد (با شروع از ساعت صفر) و هر ۲۰۱۷ ساعت یک بار تمام کشتی‌هایی که در بندر هستند (با شروع از ساعت ۰) بندر را ترک می‌کنند (توجه کنید که اگر در همان زمانی که کشتی‌ها بندر را ترک می‌کنند یک کشتی به بندر بیاید آن کشتی ۰ ساعت در بندر می‌ماند). امید ریاضی زمانی که کشتی‌ها در بندر می‌مانند چه قدر است؟ (کف جواب را انتخاب کنید)

الف) ۱۰۰۸ (ب) ۱۷۰۶ (ج) ۶۹۸ (د) ۹۳۰ (ه) ۱۳۹۶

(۱۸) موسی ۱۶ لامپ دارد و ۱۶ کلید؛ اما او نمی‌داند کدام کلید به کدام لامپ است؛ او می‌خواهد که بداند که کدام کلید لامپ شماره ۱ را روشن می‌کند. برای همین از مولو کمک می‌گیرد. دقت کنید که کلیدهای موسی دو حالت بالا و پایین دارد و هر کلید معلوم نیست که در چه وضعیتی لامپ مربوط به خود را روشن می‌کند. مولو در هر مرحله می‌تواند تعدادی از کلیدها را رو به بالا و بقیه را رو به پایین قرار دهد؛ سپس موسی شماره اولین لامپ خاموش را به مولو می‌گوید. مولو در حداقل چند گام می‌تواند خواسته موسی را برآورده کند؟

الف) ۱۱ (ب) ۵ (ج) ۱۶ (د) ۱۵ (ه) ۲۴

- عباس مراد شبه الگوریتم زیر را نوشته است که مقدار n را ورودی می‌گیرد و مقدار A که ابتدا برابر ۰ است را تغییر می‌دهد.
- ۱ - مقدار i را برابر با ۱ قرار بده.
 - ۲ - مقدار X را برابر با i قرار بده.
 - ۳ - A را یک واحد افزایش بده
 - ۴ - D را برابر با باقی‌مانده X بر ۲ قرار بده.
 - ۵ - X را بر ۲ تقسیم کن و از حاصل کف بگیر.
 - ۶ - اگر D برابر با ۰ بود به مرحله ۸ برو.
 - ۷ - X را بر ۲ تقسیم کن و از حاصل کف بگیر.
 - ۸ - اگر X برابر با ۰ نبود به مرحله ۳ برو.
 - ۹ - i را یک واحد افزایش بده.
 - ۱۰ - اگر i برابر با $n + 1$ نبود به مرحله ۲ برو.

با توجه به توضیحات بالا به سوالات ۱۹ تا ۲۱ پاسخ دهید

(۱۹) به ازای $n = 2047$ مقدار A چند است؟

- الف) ۱۴۱۰۵ (ب) ۱۴۱۰۸ (ج) ۱۴۱۰۹ (د) ۱۳۰۰۱ (ه) ۱۳۰۳۳

(۲۰) فرض کنید به ازای همه k های طبیعی کمتر از ۱۹۶، مقدار $1 - 2^k$ را به الگوریتم داده‌ایم و مقادیر A را جمع زده‌ایم. این مقدار به پیمانه ۵ چند است؟

- الف) ۱ (ب) ۲ (ج) ۳ (د) ۴ (ه) ۰

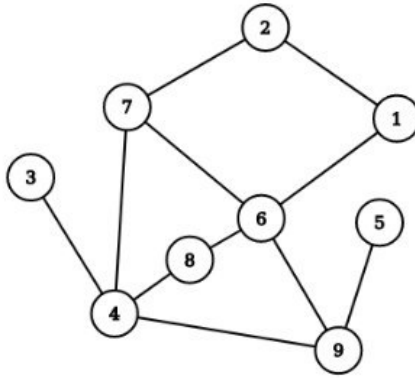
(۲۱) به ازای $n = 579$ مقدار A چند است؟

- الف) ۲۳۳۸۳ (ب) ۳۳۳۸۱ (ج) ۴۳۲۰۱ (د) ۵۳۳۸۵ (ه) ۳۲۰۳

(۲۲) حامد می‌خواهد روی گراف زیر حرکت کند؛ طوری که از راس شماره ۱ شروع کرده و در هر گام از راس فعلی‌اش به یکی از راس‌های همسایه برود و در نهایت وقتی هر راس را حداقل یک بار دید، به کارش خاتمه می‌دهد. حامد در ابتدا عدد $X = 0$ را در نظر گرفته است. در مرحله i ام؛ اگر او وارد راسی بشود که قبلاً وارد آن شده باشد؛ او تغییری در عددش ایجاد نمی‌کند. در غیراینصورت اگر برای اولین بار وارد راس جدیدی با شماره y شده باشد:

- (* چنانچه i عددی فرد باشد؛ او عدد X را بعلاوه y می‌کند.
- (* چنانچه i عددی زوج باشد؛ او عدد X را منهای y می‌کند.

برای مثال اگر او از راس ۱ شروع کند و سپس به راس ۲ سپس به راس ۷ برود؛ عدد X برابر $X = +1 - 2 + 7 = 6$ می‌شود (البته دقت کنید که این مثال یک حرکت معتبر نیست چون حامد همه راس‌ها را ندیده است) حال او می‌خواهد طوری روی گراف حرکت کند؛ که در انتها (یعنی وقتی همه راس‌ها را دید)، عدد X بیشینه مقدار را داشته باشد. این مقدار بیشینه چقدر است؟



۸ (ه)

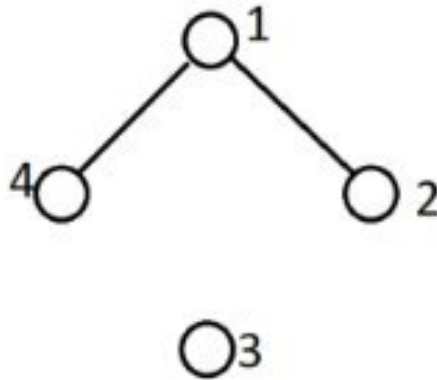
۲۱ (د)

۱۱ (ج)

۵ (ب)

۴۳ (الف)

امین و نیما بازی ای جدید طراحی کرده‌اند! این بازی به این صورت است که ابتدا یک گراف n راسی ساده که راس‌هایش را با اعداد ۱ تا n شماره گذاری شده‌است (لزومی ندارد گراف همبند باشد) انتخاب می‌کنند و امین مهره‌ای روی راس شماره ۱ و نیما مهره‌ای روی راس شماره ۲ می‌گذارد. سپس به ترتیب با شروع از نیما (مهره ۲) بازی می‌کنند یعنی ابتدا نیما حرکت می‌کند و سپس امین و دوباره نیما و بعد امین و... در هر حرکت کسی که نوبتش است باید مهره خود را از راس کنونی، به یکی از همسایه‌های آن راس در گراف ببرد. و فقط در صورتی می‌تواند مهره‌اش را تکان ندهد که راسی که مهره در آن است هیچ همسایه ای نداشته باشد. (تکان ندادن هم حرکت حساب می‌شود) برای مثال اگر در گراف زیر مهره روی خانه ۱ باشد، باید مهره‌اش را به خانه‌ی ۲ یا ۴ ببرد و اگر مهره روی راس ۳ باشد تنها حرکت این است که مهره را تکان ندهد:



نیما در صورتی می‌برد که هر دو مهره در یک خانه باشند و در این حالت امین می‌بازد. نیما و امین همیشه بهینه بازی می‌کنند.

می‌گوییم امین در یک گراف استراتژی نباختن دارد اگر بتواند جوری بازی کند که هرطور نیما بازی کند، امین نبازد. F_x برابر ماکسیمم تعداد یال بین تمام گراف‌های x راسی که امین در آن استراتژی نباختن دارد، برای مثال $F_2 = 0$ و $F_3 = 1$

با توجه به توضیحات بالا به سوالات ۲۳ تا ۲۵ پاسخ دهید

۲۳) اگر $n = 4$ باشد چند گراف وجود دارد که امین استراتژی نباختن دارد؟

- الف) ۱۵ ب) ۱۷ ج) ۱۶ د) ۶۴ ه) ۱

۲۴) چند گراف ۶ راسی وجود دارد که تعداد یال‌های آن F_6 تا است و امین استراتژی نباختن دارد؟

- الف) ۱۸ ب) ۶ ج) ۱ د) ۴۸ ه) ۳

۲۵) حاصل عبارت زیر به پیمانه ۵ چند است؟

$$\sum_{x=3}^y F_x$$

- الف) ۰ ب) ۱ ج) ۲ د) ۳ ه) ۴