احتمال و اندازه گیری شانس

احتمال: برای بیان اندازه شانس رخ دادن یک اتفاق ، از یک عدد استفاده می کنیم و آن را احتمال رخ دادن آن اتفاق می نامیم .

مثلا در پرتاب یک سکه احتمال اینکه سکه رو بیاید ٪۵۰ یا $\frac{۱}{۲}$ است.

احتمال رخ دادن یک اتفاق همواره عددی بین ۰ و ۱ است. اگر احتمال صفر باشد قطعا اتفاق رخ نخواهد داد و اگر احتمال ۱ باشد قطعا اتفاق رخ خواهد داد

محاسبه احتمال رخ دادن یک اتفاق

$$\text{احتمال رخ دادن یک اتفاق} = \frac{\text{تعداد حالت های مطلوب}}{\text{تعداد کل حالت های ممکن}}$$

مثال : احتمال این که در پرتاب یک تاس عدد زوج ظاهر شود چقدر است ؟

پاسخ :

کل حالت ها = ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶ : ۶حالت

حالت مطلوب = ۲, ۴, ۶ : ۳حالت

$$\text{احتمال عدد زوج آمدن} = \frac{\text{تعداد حالت های مطلوب}}{\text{تعداد کل حالت های ممکن}} = \frac{۳}{۶} = \frac{۱}{۲}$$

مثال : در پرتاب دو سکه ، با چه احتمالی هر دو سکه پشت می آیند؟

پاسخ :

پشت = p رو= r

تعداد کل حالت ها = $(\mathrm{r},\mathrm{r}), (r, p), (p, p), (p, r)$: ۴حالت

تعداد حالت مطلوب = (p, p) : ۱حالت

$$\text{احتمال پشت آمدن} = \frac{\text{تعداد حالت های مطلوب}}{\text{تعداد کل حالت های ممکن}} = \frac{۱}{۴}$$

نکته : برای اینکه تعداد حالت های پرتاب ۱ سکه ، ۲ سکه، سه سکه و.. را به دست آوریم می توانیم از نمودار درختی و جدول استفاده کنیم

مثال : در پرتاب هم زمان سه سکه چقدر احتمال دارد ، یکی از تعداد (پشت) یا (رو) های ظاهر شده دو برابر تعداد دیگری باشد ؟

پاسخ :

سکهٔ ۱	سکهٔ ۲	سکهٔ ۳	
r	r	r	×
r	r	p	✓
r	p	r	✓
r	p	p	✓
p	r	r	✓
p	r	p	✓
p	p	r	✓
p	p	p	×

$$\text{احتمال} = \frac{\text{تعداد حالت های مطلوب}}{\text{تعداد کل حالت های ممکن}} = \frac{۶}{۸} = \frac{۳}{۴}$$

نکته : در پرتاب هم زمان n سکه ۲^{n} حالت مختلف وجود دارد

مثلا :   در پرتاب هم زمان سه سکه : $۲^{۳} = ۸$ حات مختلف وجود دارد

کل حالت های پرتاب دو تاس :

تعداد کل حالات روشدن عددهای دو تاس	تعداد حالت‌ها	حالت‌های دو تاس	تاس دوم	تاس اول
$\underbrace{۶+\cdots+۶}_{۶\text{تا}}=۳۶=۶^۲$	۶تا	(۱,۱),(۱,۲),(۱,۳),(۱,۴),(۱,۵),(۱,۶)	۱,۲,۳,۴,۵,۶	۱
	۶تا	(۲,۱),(۲,۲),(۲,۳),(۲,۴),(۲,۵),(۲,۶)	۱,۲,۳,۴,۵,۶	۲
	۶تا	(۳,۱),(۳,۲),(۳,۳),(۳,۴),(۳,۵),(۳,۶)	۱,۲,۳,۴,۵,۶	۳
	۶تا	(۴,۱),(۴,۲),(۴,۳),(۴,۴),(۴,۵),(۴,۶)	۱,۲,۳,۴,۵,۶	۴
	۶تا	(۵,۱),(۵,۲),(۵,۳),(۵,۴),(۵,۵),(۵,۶)	۱,۲,۳,۴,۵,۶	۵
	۶تا	(۶,۱),(۶,۲),(۶,۳),(۶,۴),(۶,۵),(۶,۶)	۱,۲,۳,۴,۵,۶	۶

مثال : در پرتاب دو تاس احتمال آن که حاصل ضرب ۲ عددی که تاس ها نشان می دهند ، عددی فرد باشد چقدر است ؟

پاسخ :

برای این‌که حاصل‌ضرب دو عدد تاس، فرد شود، هر دو عدد باید فرد باشند.

حالت‌های مطلوب = {(۱،۱)،(۱،۳)،(۳،۱)،(۱،۵)،(۵،۱)،(۳،۳)،(۳،۵)،(۵،۳)،(۵،۵)}

⟸ تعداد حالت‌های مطلوب = ۹ ، تعداد کل حالت‌ها = ۶ × ۶ = ۳۶

⟸ احتمال مورد نظر = $\frac{۹}{۳۶}$

مثال : در انداختن دو تاس با هم ، تعداد اعضای کدام بیشتر است ؟

۱) مجموعه اعداد رو شده اول باشد

۲) مجموع اعداد رو شده ، عدد فرد کوچکتر از ۱۰ باشد

۳)مجموع اعداد رو شده زوج و کمتر از ۱۰ باشد

۴) عدد ظاهر شده روی یکی از تاس ها ۶ باشد

پاسخ :

گزینهٔ (۱): باید مجموع اعداد، ۲، ۳، ۵، ۷ و ۱۱ باشد که باید دو تاس به‌صورت زیر بیایند:

{(۱،۱)،(۱،۲)،(۲،۱)،(۱،۴)،(۴،۱)،(۲،۳)،(۳،۲)،(۱،۶)،(۶،۱)

(۲،۵)،(۵،۲)،(۳،۴)،(۴،۳)،(۵،۶)،(۶،۵)} ⇐ تعداد = ۱۵

گزینهٔ (۲): باید مجموع اعداد، ۳، ۵، ۷ و ۹ بیاید که به‌صورت زیر می‌باشند:

{(۱،۲)،(۲،۱)،(۱،۴)،(۴،۱)،(۲،۳)،(۳،۲)،(۱،۶)،(۶،۱)،(۲،۵)

(۵،۲)،(۳،۴)،(۴،۳)،(۳،۶)،(۶،۳)،(۴،۵)،(۵،۴)} ⇐ تعداد = ۱۶

گزینهٔ (۳): باید مجموع اعداد، ۲، ۴، ۶، ۸ بیاید که به‌صورت زیر می‌باشند:

{(۱،۱)،(۱،۳)،(۳،۱)،(۲،۲)،(۱،۵)،(۵،۱)،(۲،۴)،(۴،۲)،(۳،۳) ،

(۲،۶)،(۶،۲)،(۵،۳)،(۳،۵)،(۴،۴)} ⇐ تعداد = ۱۴

گزینهٔ (۴):

{(۱،۶)،(۲،۶)،(۳،۶)،(۴،۶)،(۵،۶)،(۶،۶)،(۶،۱)،(۶،۲)،(۶،۳)،

(۶،۴)،(۶،۵)} ⇐ تعداد = ۱۱

بنابراین تعداد عضوهای گزینهٔ (۲) از بقیه بیش‌تر است.

قانون ضرب احتمال

اگر دو اتفاق بر روی هم تا ثیری نداشته باشند احتمال وقوع هم زمان آن ها برابر ضرب وقوع تک تک آن ها

مثال: رمز یک کیف با سه رقم مشخص می شود . احتمال اینکه شماره رمز این کیف ، عدد فردی بیشتر از ۵۰۰ باشد چقدر است ؟

۱۰۰۰ = ۱۰ × ۱۰ × ۱۰ = تعداد کل رمزهای ۳ رقمی

۲۵۰ = ۵ × ۱۰ × ۵ = تعداد حالت‌هایی که رمز عددی فرد بیش‌تر از ۵۰۰ باشد.

۱، ۳، ۵، ۷، ۹ قرار می‌گیرند.	تمام ارقام ۰ تا ۹ قرار می‌گیرند.	ارقام ۵، ۶، ۷، ۸، ۹ می‌توانند قرار بگیرند.

⇐ احتمال مورد نظر = $\frac{۲۵۰}{۱۰۰۰} = \frac{۲۵}{۱۰۰} = ۰/۲۵$

مثال : در کیسه ای ۲ مهره سفید ، ۲ مهره سیاه ، ۲ مهره قرمز وجود دارد . ۳ مهره را به طور تصادفی و بدون جایگزینی ، یکی یکی از کیسه درآوردیم . احتمال این که مهره اول سفید ، مهره دوم سیاه و مهره سوم قرمز باشد چقدر است ؟

پاسخ:

در هر بار برداشتن یک مهره از کیسه، چون آن را برنمی‌گردانیم، یک مهره از کل کیسه کم می‌شود.

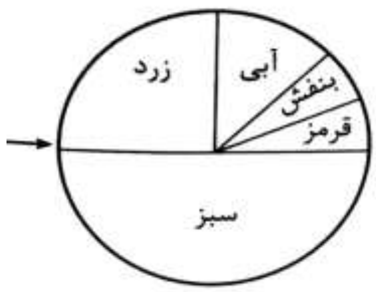
$$\frac{۲}{۶} \times \frac{۲}{۵} \times \frac{۲}{۴} = \frac{۸}{۱۲۰} = \frac{۱}{۱۵}$$

$\frac{۲}{۶}$ ↓ احتمال آمدن مهرهٔ سفید در بار اول

$\frac{۲}{۵}$ ↓ احتمال آمدن مهرهٔ سیاه در بار دوم

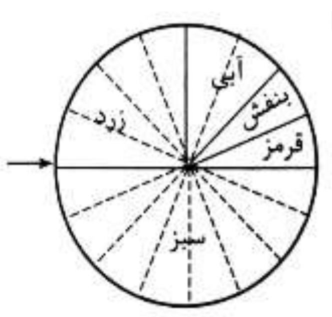
$\frac{۲}{۴}$ ↓ احتمال آمدن مهرهٔ قرمز در بار سوم

مثال : با توجه به شکل زیر احتمال ایستادن عقربه روی رنگ سبز چند برابر احتمال ایستادن عقربه روی رنگ زرد و قرمز است ؟



پاسخ :

دایره را به قسمت های مساوی تقسیم می کنیم با توجه به شکل به ۱۶ قسمت مساوی تقسیم می شود



احتمال سبز $= \frac{۸}{۱۶} = \frac{۱}{۲}$

احتمال زرد و قرمز $= \frac{۴}{۱۶} + \frac{۱}{۱۶} = \frac{۵}{۱۶}$

نسبت $= \frac{\frac{۱}{۲}}{\frac{۵}{۱۶}} = \frac{۱۶}{۱۰} = ۱/۶$

مثال : در جعبه ای تعدادی مهره آبی قرار دارد . سه برابر این تعداد، مهره قرمز ، ربع تعداد مهره های قرمز ، مهره سبز و دو برابر ثلث خمس تعداد مهره های سبز مهره زرد درجعبه قرار دارند مهره ای به تصادف از جعبه بیرون می آوریم . احتمال اینکه این مهره زرد باشد چقدر است ؟

پاسخ :

مهره آبی $= x$ ، مهره قرمز $= ۳x$ ، مهره زرد $= ۲ \times \frac{۱}{۳} \times \frac{۱}{۵} \times \frac{۳}{۴}x = \frac{۱}{۱۰}x$

مهره سبز $= \frac{۱}{۴} \times ۳x = \frac{۳}{۴}x$

کل مهره $= x + ۳x + \frac{۳}{۴}x + \frac{۱}{۱۰}x = \frac{۲۰x+۶۰x+۱۵x+۲x}{۲۰} = \frac{۹۷x}{۲۰}$

تعداد مهره های زرد داخل ظرف $\frac{۱}{۱۰}x$ است ، پس احتمال اینکه مهره زرد باشد :

$$\frac{\frac{x}{۱۰}}{\frac{۹۷x}{۲۰}} = \frac{۲۰x}{۹۷x \times ۱۰} = \frac{۲x}{۹۷x} = \frac{۲}{۹۷}$$

مثال : در کیسه ای تعدادی مهره سبز ، زرد و آبی موجود است . احتمال انتخاب مهره زرد $\frac{۲}{۵}$ است و احتمال این که مهره آبی انتخاب نشود $\frac{۱۸}{۲۵}$ احتمال انتخاب مهره سبز چقدر است ؟

پاسخ :

احتمال اینکه مهره آبی انتخاب شود:

$$۱ - \frac{۱۸}{۲۵} = \frac{۷}{۲۵}$$

۱= احتمال انتخاب مهره آبی+ احتمال انتخاب مهره سبز+ احتمال انتخاب مهره زرد

$$\frac{۲}{۵} + x + \frac{۷}{۲۵} = ۱ \quad \rightarrow \quad \frac{۱۷}{۲۵} + x = ۱ \quad \rightarrow \quad x = \frac{۸}{۲۵}$$

احتمال و تجربه

اگر احتمال رخ دادن یک اتفاق در آزمایشی p باشد و آن آزمایش را k بار تکرار کنیم ، انتظار داریم p×k مرتبه اتفاق رخ می دهد

مثال : در یک شهر ۴۰۰ خانواده سه فرزندی زندگی می کنند ، انتظار داریم چندتا از این خانواده ها فقط فرزندان دختر یا فقط فرزندان پسر داشته باشد

پاسخ:

جدول وضعیت فرزندان

	فرزند ۳	فرزند ۲	فرزند ۱
✓	د	د	د
×	پ	د	د
×	د	پ	د
×	پ	پ	د
×	د	د	پ
×	پ	د	پ
×	د	پ	پ
✓	پ	پ	پ

$$۴۰۰ \times \frac{۲}{۸} = ۴۰۰ \times \frac{۱}{۴} = ۱۰۰$$

مثال : در کیسه ای ۱۰۰ مهره سبز ، ۱۵۰ مهره آبی و ۲۵۰ مهره قرمز داریم . تعدادی مهره از این کیسه بیرون می آوریم . اگر انتظار داشته باشیم از این تعداد ۶۰ تا آبی باشند ، انتظار داریم چند تا از این مهره ها سبز باشند ؟

پاسخ :

کل مهره ها = ۱۰۰+ ۱۵۰ +۲۵۰ =۵۰۰

احتمال مهره سبز= $\frac{۱۰۰}{۵۰۰} = \frac{۱}{۵}$

احتمال مهره آبی= $\frac{۱۵۰}{۵۰۰} = \frac{۳}{۱۰}$

احتمال مهره قرمز= $\frac{۲۵۰}{۵۰۰} = \frac{۱}{۲}$

فرض کنید n مهره از کیسه بیرون آوریم پس انتظار داریم $\frac{۳}{۱۰}$ آبی باشد

$\frac{۳}{۱۰} \times n = ۶۰ \quad \rightarrow \quad n = \frac{۶۰ \times ۱۰}{۳} = ۲۰۰$ تا

پس انتظار داریم از بین این ۲۰۰ تا $\frac{۱}{۵}$ سبز باشد

$\frac{۱}{۵} \times ۲۰۰ = ۴۰$

مثال : یک سکه سالم و یک سکه خراب را با هم ۹۰ مرتبه پرتاب می کنیم اگر انتظار داشته باشیم مجموعا ۷۵ بار رو ظاهر شده باشد ، انتظار داریم در ۶۰ مرتبه پرتاب سکه خراب چند مرتبه سکه پشت ظاهر شود ؟

پاسخ :

انتظار داریم یک سکه سالم $۴۵ = ۹۰ \times \frac{۱}{۲}$ مرتبه رو بیاید چون مجموعا ۷۵ بار انتظار داریم رو ظاهر شود پس انتظار داریم سکه خراب ۳۰ مرتبه رو بیاید .

بنابراین احتمال ظاهر شدن رو در یک مرتبه پرتاب سکه خراب $\frac{۱}{۳} = \frac{۳۰}{۹۰}$ در نتیجه انتظار ظاهر شدن پشت در یک مرتبه پرتاب سکه خراب $۱ - \frac{۱}{۳} = \frac{۲}{۳}$ است .

در ۶۰ مرتبه پرتاب سکه خراب : $\frac{۲}{۳} \times ۶۰ = ۴۰$ مرتبه پشت می آید

موسوی