جبرخطی کاربردی

درس۱۱

مقادیر ویژه و بردارهای ویژه

گروه سیستم و کنترل - ۱۳۸۸

مدرس: صدقی زاده

تبدیل های همانندی (Similarity Transformation)

- برای قطری سازی ماتریس حالت از تبدیل های همانندی استفاده می نماییم.

- طبق تعریف دو ماتریس $A_{n\times n}$ و $B_{n\times n}$ را همانند (similar) گویند، اگر یک ماتریس غیرمنفرد T وجود داشته باشد بطوریکه رابطه زیر را برآورده سازد،

$$\boxed{T^{-1}AT = B}$$

ماتریس غیرمنفرد T را ماتریس تبدیل گویند.

خواص ماتریس های همانند

۱- دترمینان ماتریس های همانند $A_{n\times n}$ و $B_{n\times n}$ برابر است،

$$\boxed{|B| = |T^{-1}AT| = |T^{-1}||A||T| = \frac{1}{|T|}|A||T| = |A|}$$

۲- معادله مشخصه ماتریس های همانند $A_{n\times n}$ و $B_{n\times n}$ برابر است،

$$\begin{array}{lll} A & \rightarrow & |\lambda I - A| = 0 \\ B & \rightarrow & |\lambda I - B| = |\lambda I - T^{-1}AT| = |\lambda T^{-1}T - T^{-1}AT| = |T^{-1}(\lambda I - A)T| \\ & & = |T^{-1}||\lambda I - A||T| = \frac{1}{|T|}|\lambda I - A||T| = |\lambda I - A| = 0 \end{array}$$

لذا با اعمال تبدیل همانندی مقادیر ویژه ماتریس تغییر نمی کند.

اعمال تبدیل همانندی بر معادلات حالت سیستم

- فرم کلی دستگاه معادلات حالت را در نظر بگیرید،

$$\boxed{\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}(t) + D\mathbf{u}(t) \end{cases}}$$

تحت تبدیل همانندی T متغیرهای حالت $\mathbf{x}(t)$ را به $\mathbf{z}(t)$ تبدیل می نماییم،

$$\mathbf{x}(t) = T\mathbf{z}(t)$$

$$\boxed{\begin{cases} T\dot{\mathbf{z}}(t) = AT\mathbf{z}(t) + B\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = CT\mathbf{z}(t) + D\mathbf{u}(t) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot{\mathbf{z}}(t) = T^{-1}AT\mathbf{z}(t) + T^{-1}B\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = CT\mathbf{z}(t) + D\mathbf{u}(t) \end{cases}}$$

لذا با این کار نمایش جدیدی از فضای حالت بدست می آوریم که معادل با قبلی خواهد بود.

بررسی تابع تبدیل نمایش فضای حالت جدید و قدیم

- تابع تبدیل نمایش فضای حالت قدیم بصورت زیر بدست می آید،

$$\boxed{T_1(s) = C(sI - A)^{-1}B + D}$$

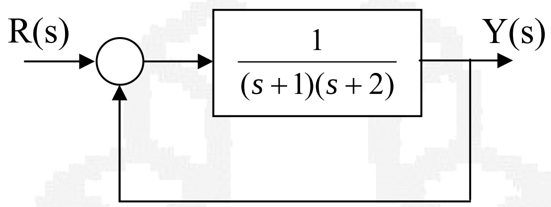
- حال تابع تبدیل نمایش فضای حالت جدید را بدست میآوریم،

$$\boxed{\begin{aligned} T_2(s) &= (CT)(sI - T^{-1}AT)^{-1}(T^{-1}B) + D \\ &= (CT)(sT^{-1}T - T^{-1}AT)^{-1}(T^{-1}B) + D \\ &= (CT)(T^{-1}(sI - A)T)^{-1}(T^{-1}B) + D \\ &= (CT)T^{-1}(sI - A)^{-1}T(T^{-1}B) + D \\ &= C(sI - A)^{-1}B + D \end{aligned}}$$

لذا با تبدیل همانندی تابع تبدیل سیستم تغییر نمی کند.

مثال ۱

- سیستم حلقه بسته زیر را در نظر بگیرید،



در درسهای قبلی دو تحقق فضای حالت مختلف برای این سیستم حلقه بسته بدست آوردیم،

تحقق اول

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \end{cases}$$

و

تحقق دوم

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{z}_1(t) \\ \dot{z}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} \end{cases}$$

از آنجاییکه این دو تحقق هم مرتبه و هر دو متعلق به یک تابع تبدیل هستند، می توان یک تبدیل همانندی بین آنها بدست آورد که $\mathbf{x} = T\mathbf{z}$ باشد،

قطری سازی معادلات حالت

- در قطری سازی معادلات حالت را با یک تبدیل همانندی به فرمی تبدیل می کنیم که ماتریس حالت آن قطری باشد،

$$\boxed{\begin{cases}\dot{\mathbf{x}}(t)=A\mathbf{x}(t)+B\mathbf{u}(t)\\ \mathbf{y}(t)=C\mathbf{x}(t)+D\mathbf{u}(t)\end{cases}\quad\rightarrow\quad\begin{cases}\dot{\mathbf{z}}(t)=\Lambda\mathbf{z}(t)+B_n\mathbf{u}(t)\\ \mathbf{y}(t)=C_n\mathbf{z}(t)+D\mathbf{u}(t)\end{cases}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\Lambda&=T^{-1}AT\\ B_n&=T^{-1}B\\ C_n&=CT\end{aligned}}$$

- ماتریس تبدیل T که چنین کاری را انجام می دهد ماتریس مُدال (modal matrix) نام دارد.

محاسبه ماتریس انتقال حالت با روش قطری سازی

- فرم قطری سازی شده ماتریس $A_{n\times n}$ با استفاده از ماتریس مدال بصورت زیر بدست می آید،

$$\boxed{\Lambda=T^{-1}AT}$$

- ماتریس انتقال حالت سیستم به شکل زیر محاسبه می شود،

$$\boxed{\begin{aligned}e^{At}&=I+At+\frac{1}{2!}(At)^2+\frac{1}{3!}(At)^3+\cdots\\ &=I+(T\Lambda T^{-1})t+(T\Lambda T^{-1})(T\Lambda T^{-1})\frac{t^2}{2!}+(T\Lambda T^{-1})(T\Lambda T^{-1})(T\Lambda T^{-1})\frac{t^3}{3!}+\cdots\\ &=T(I+\Lambda t+\Lambda^2\frac{t^2}{2!}+\Lambda^3\frac{t^3}{3!}+\cdots)T^{-1}=Te^{\Lambda t}T^{-1}\end{aligned}}$$

بدست آوردن ماتریس مُدال

- محاسبه ماتریس مُدال بستگی به مقادیر ویژه ماتریس حالت A دارد.

- برای بدست آوردن ماتریس مُدال حالت های زیر را در نظر می گیریم،

۱- مقادیر ویژه متمایز و حقیقی ← قطری کامل (diagonal)
۲- مقادیر ویژه تکراری ← قطری بلوکی جردن
۳- مقادیر ویژه مختلط مزدوج ← قطری بلوکی (block diagonal)

قطری سازی ماتریس حالت با مقادیر ویژه متمایز و حقیقی

- اگر یک ماتریس $A_{n\times n}$ دارای n مقدار ویژه متمایز باشد، آنگاه می توان آن را به یک ماتریس قطری کامل تبدیل نمود.

$$\boxed{\Lambda = T^{-1}AT \quad \rightarrow \quad \Lambda = diag\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}}$$

ماتریس مُدال (Modal Matrix)

$$A\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i \quad , \quad i = 1, \ldots, n$$

$$A\underbrace{[\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{v}_n]}_{T} = \underbrace{[\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{v}_n]}_{T} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \Rightarrow T^{-1}AT = \Lambda$$

مثال۲

سیستم زیر را به فرم قطری تبدیل نمایید.

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\begin{bmatrix}4 & 0 & 1\\ -1 & -6 & -2\\ 5 & 0 & 0\end{bmatrix}\mathbf{x}(t)+\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}u(t)$$

$$y(t)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\end{bmatrix}\mathbf{x}(t)$$

مقادیر ویژه ماتریس A را بدست می آوریم،

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-4 & 0 & -1\\ 1 & \lambda+6 & 2\\ -5 & 0 & \lambda\end{vmatrix}=0 \quad\rightarrow\quad \lambda^3+2\lambda^2-29\lambda-30=0$$

حل معادله مشخصه مقادیر ویژه بصورت زیر بدست می آیند،

$$\lambda^3+2\lambda^2-29\lambda-30=(\lambda+6)(\lambda+1)(\lambda-5)=0 \quad\rightarrow\quad \lambda_1=-6, \lambda_2=-1, \lambda_3=5$$

لذا ماتریس A سه مقدار ویژه متمایز و حقیقی دارد.

حال می توان سه بردار ویژه مستقل خطی متناظر با هر یک از مقادیر ویژه بدست آورد.

$$A\mathbf{v}_i=\lambda_i\mathbf{v}_i \rightarrow (\lambda_i I - A)\mathbf{v}_i=0 \rightarrow \begin{bmatrix}\lambda_i-4 & 0 & -1\\ 1 & \lambda_i+6 & 2\\ -5 & 0 & \lambda_i\end{bmatrix}\mathbf{v}_i=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\lambda_1=-6 \rightarrow \begin{bmatrix}-10 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 2\\ -5 & 0 & -6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases}-10x_1-x_3=0\\ x_1+2x_3=0\\ -5x_1-6x_3=0\end{cases} \rightarrow \quad \mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$$

$$\lambda_2=-1 \rightarrow \begin{bmatrix}-5 & 0 & -1\\ 1 & 5 & 2\\ -5 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_4\\x_5\\x_6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases}-5x_4-x_6=0\\ x_4+5x_5+2x_6=0\end{cases} \rightarrow \quad \mathbf{v}_2=\begin{bmatrix}1\\ \frac{9}{5}\\ -5\end{bmatrix}$$

$$\lambda_3=5 \rightarrow \begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & 11 & 2\\ -5 & 0 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_7\\x_8\\x_9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases}x_7-x_9=0\\ x_7+11x_8+2x_9=0\\ -5x_7+5x_9=0\end{cases} \rightarrow \quad \mathbf{v}_3=\begin{bmatrix}1\\ \frac{-3}{11}\\ 1\end{bmatrix}$$

ماتریس مُدال T بصورت زیر بدست می آید،

$$T=[\mathbf{v}_1\,|\,\mathbf{v}_2\,|\,\mathbf{v}_3]=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & \frac{9}{5} & \frac{-3}{11}\\ 0 & -5 & 1\end{bmatrix}$$

می توان فرم قطری سازی شده معادلات حالت را بدست آورد.

$$\Lambda=T^{-1}AT=\begin{bmatrix}\frac{-4}{55} & 1 & \frac{19}{55}\\ \frac{1}{6} & 0 & \frac{-1}{6}\\ \frac{5}{6} & 0 & \frac{1}{6}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 0 & 1\\ -1 & -6 & -2\\ 5 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & \frac{9}{5} & \frac{-3}{11}\\ 0 & -5 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-6 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{bmatrix}$$

$$B_n=T^{-1}B=\begin{bmatrix}\frac{-4}{55} & 1 & \frac{19}{55}\\ \frac{1}{6} & 0 & \frac{-1}{6}\\ \frac{5}{6} & 0 & \frac{1}{6}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{51}{55}\\ \frac{1}{6}\\ \frac{5}{6}\end{bmatrix}$$

$$C_n=CT=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & \frac{9}{5} & \frac{-3}{11}\\ 0 & -5 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -4 & 2\end{bmatrix}$$

مثال۳

ماتریس انتقال حالت سیستم زیر را با روش قطری سازی بدست آورید،

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\begin{bmatrix}4 & 0 & 1\\ -1 & -6 & -2\\ 5 & 0 & 0\end{bmatrix}\mathbf{x}(t)+\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 0\end{bmatrix}u(t)$$

$$y(t)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\end{bmatrix}\mathbf{x}(t)$$

با توجه به مثال ۱ ماتریس مُدال T و فرم قطری سازی شده ماتریس حالت بصورت زیر بدست می آید،

$$T=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & \frac{9}{5} & \frac{-3}{11}\\ 0 & -5 & 1\end{bmatrix}\quad \text{و} \quad \Lambda=T^{-1}AT=\begin{bmatrix}-6 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{bmatrix}$$

حال ماتریس انتقال حالت سیستم بشکل زیر بدست می آید،

$$e^{At}=Te^{\Lambda t}T^{-1}=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&\frac{9}{5}&\frac{-3}{11}\\0&-5&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{-6t}&0&0\\0&e^{-t}&0\\0&0&e^{5t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{-4}{55}&1&\frac{19}{55}\\\frac{1}{6}&0&\frac{-1}{6}\\\frac{5}{6}&0&\frac{1}{6}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{1}{6}e^{-t}+\frac{5}{6}e^{5t}&0&\frac{1}{6}e^{5t}-\frac{1}{6}e^{-t}\\\frac{-4}{55}e^{-6t}+\frac{3}{10}e^{-t}-\frac{5}{22}e^{5t}&e^{-6t}&\frac{-1}{22}e^{5t}+\frac{19}{55}e^{-6t}-\frac{3}{10}e^{-t}\\\frac{-5}{6}e^{-t}+\frac{5}{6}e^{5t}&0&\frac{5}{6}e^{-t}+\frac{1}{6}e^{5t}\end{bmatrix}$$

حالت خاص: ماتریس حالت به صورت همبسته (companion form)

- صورت همبسته از روی متغیرهای فاز (phase variable) بدست می آید،

$$\boxed{A_C=\begin{bmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\\-a_0&-a_1&-a_2&\cdots&-a_{n-1}\end{bmatrix}}$$

- در اینصورت ماتریس مُدال بصورت وَندرموند خواهد بود.

$$\boxed{T=\begin{bmatrix}1&1&1&\cdots&1\\\lambda_1&\lambda_2&\lambda_3&\cdots&\lambda_n\\\lambda_1^2&\lambda_2^2&\lambda_3^2&&\lambda_n^2\\\vdots&\vdots&\vdots&\cdots&\vdots\\\lambda_1^{n-1}&\lambda_2^{n-1}&\lambda_3^{n-1}&\cdots&\lambda_n^{n-1}\end{bmatrix}}$$

حالت خاص: ماتریس حالت به صورت همبسته (companion form)

- صورت همبسته از روی متغیرهای فاز (phase variable) بدست می آید،

$$A_C = \begin{bmatrix} -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- در اینصورت ماتریس مُدال بصورت وَندرموند خواهد بود.

$$T = \begin{bmatrix} \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \lambda_3^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & & \lambda_n^2 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \cdots & \lambda_n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

مثال۴

فرم قطری سازی شده ماتریس همبسته A_C را بدست آورید،

$$A_C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}$$

معادله مشخصه و مقادیر ویژه ماتریس A_C بصورت زیر بدست می آید،

$$|\lambda I_3 - A_C| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 6 & 11 & \lambda+6 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = -3$$

ماتریس A_C همبسته و سه مقدار ویژه متمایز دارد، پس می توان برای قطری سازی آن ماتریس وندرموند را بدست آورد،

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

فرم قطری ماتریس A_C به شکل زیر می باشد،

$$\Lambda = T^{-1} A_C T = \begin{bmatrix} 3 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ -3 & -4 & -1 \\ 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

قطری سازی ماتریس حالت با مقادیر ویژه مختلط

- مقادیر ویژه و بردارهای ویژه مختلط ← ماتریس مَدال حاصل ماتریس مختلط است

نمایش فضای حالت مختلط خواهیم داشت؟

- باید به نحوی ماتریس تبدیل را اصلاح نماییم.

$$\underbrace{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{m+1}}_{\text{مقادیر ویژه مختلط مزدوج}},\underbrace{\lambda_{m+2},\ldots,\lambda_n}_{\text{مقادیر ویژه متمایز}}$$

$$\boxed{\mathrm{T}=[\mathrm{Re}\{\mathbf{v}_1\}\,|\,\mathrm{Im}\{\mathbf{v}_1\}\,|\,\mathrm{Re}\{\mathbf{v}_3\}\,|\,\mathrm{Im}\{\mathbf{v}_3\}\,|\cdots|\,\mathrm{Re}\{\mathbf{v}_m\}\,|\,\mathrm{Im}\{\mathbf{v}_m\}\,|\,\mathbf{v}_{m+2}\,|\cdots|\,\mathbf{v}_n]}$$

فرم کلی ماتریس قطری بلوکی شده

$$\boxed{\Lambda=T^{-1}AT=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}\sigma_1 & \omega_1\\ -\omega_1 & \sigma_1\end{bmatrix} & & & & & & 0\\ & \begin{bmatrix}\sigma_3 & \omega_3\\ -\omega_3 & \sigma_3\end{bmatrix} & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \begin{bmatrix}\sigma_m & \omega_m\\ -\omega_m & \sigma_m\end{bmatrix} & & & \\ & & & & \lambda_{m+2} & & \\ & 0 & & & & \ddots & \\ & & & & & & \lambda_n\end{bmatrix}}$$

- در این حالت ماتریس قطری کامل نخواهد بود.

مثال۵

برای ماتریس A با مقادیر ویژه داده شده فرم قطری بلوکی به شکل زیر بدست می آید،

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm 3j\,, \qquad \lambda_{3,4} = -2 \pm 5j\,, \qquad \lambda_5 = -4$$

$$\begin{bmatrix} 1+3j & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-3j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2+5j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2-5j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \Lambda = \left[\begin{array}{cc:cc:c} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -2 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right]$$

مثال۶

فرم قطری سازی شده معادلات حالت و ماتریس انتقال حالت را بدست آورید،

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} x(t)$$

معادله مشخصه ماتریس A بصورت زیر بدست می آید،

$$|\lambda I_3 - A| = \begin{vmatrix} \lambda+1 & -2 & 1 \\ 0 & \lambda+2 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda+2 \end{vmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda^3 + 5\lambda^2 + 9\lambda + 6 = 0$$

پس از حل معادله مشخصه مقادیر ویژه بصورت زیر بدست می آیند،

$$\lambda^3 + 5\lambda^2 + 9\lambda + 6 = (\lambda+2)(\lambda^2 + 3\lambda + 3) = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_1 = -2, \lambda_{2,3} = \tfrac{-3}{2} \pm j\tfrac{\sqrt{3}}{2}$$

بنابراین ماتریس A یک مقدار ویژه حقیقی و دو مقدار ویژه مختلط مزدوج دارد.

بردارهای ویژه متناظر با این مقادیر ویژه را با استفاده از تعریف بردار ویژه بدست می آوریم،

$$A\mathbf{v}_i=\lambda_i\mathbf{v}_i \rightarrow \begin{bmatrix}\lambda+1 & -2 & 1\\ 0 & \lambda+2 & 0\\ -1 & 0 & \lambda+2\end{bmatrix}\mathbf{v}_i=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\lambda_1=-2 \rightarrow \begin{bmatrix}-1 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\rightarrow \begin{cases}-x_1-2x_2+x_3=0\\ -x_1=0\end{cases}\rightarrow \mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}$$

$$\lambda_2=\tfrac{-3}{2}+j\tfrac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \begin{bmatrix}\frac{-1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2} & -2 & 1\\ 0 & \frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2} & 0\\ -1 & 0 & \frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_4\\x_5\\x_6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\rightarrow \mathbf{v}_2=\begin{bmatrix}1\\0\\ \frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}$$

$$\lambda_3=\tfrac{-3}{2}-j\tfrac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \begin{bmatrix}\frac{-1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2} & -2 & 1\\ 0 & \frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2} & 0\\ -1 & 0 & \frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_7\\x_8\\x_9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\rightarrow \mathbf{v}_3=\begin{bmatrix}1\\0\\ \frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}$$

لذا ماتریس تبدیل T بشکل زیر بدست می آید،

$$\mathrm{T}=[\mathbf{v}_1\,|\,\mathrm{Re}\{\mathbf{v}_2\}\,|\,\mathrm{Im}\{\mathbf{v}_2\}]=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 2 & \frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}$$

حال ماتریس قطری- بلوکی شده Λ را بدست می آوریم،

$$\Lambda=T^{-1}AT=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{4}{\sqrt{3}} & \frac{-2}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 2 & -1\\ 0 & -2 & 0\\ 1 & 0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 2 & \frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{c|cc}-2 & 0 & 0\\ \hline 0 & \frac{-3}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ 0 & \frac{-\sqrt{3}}{2} & \frac{-3}{2}\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c|cc}\lambda_1 & 0 & 0\\ \hline 0 & \sigma_1 & \omega_1\\ 0 & -\omega_1 & \sigma_1\end{array}\right]$$

$$B_n=T^{-1}B=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{4}{\sqrt{3}} & \frac{-2}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\ \frac{5}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}$$

$$C_n=CT=\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 2 & \frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 1 & -\sqrt{3}\end{bmatrix}$$

حال باید ماتریس انتقال حالت را بیابیم،

$$\Lambda = T^{-1}AT = \left[\begin{array}{c:cc} -2 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & \frac{-3}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{-\sqrt{3}}{2} & \frac{-3}{2} \end{array}\right] \quad \rightarrow \quad e^{\Lambda t} = \left[\begin{array}{c:c} e^{-2t} & 0 \\ \hdashline 0 & e^{\begin{bmatrix} \frac{-3}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{-\sqrt{3}}{2} & \frac{-3}{2} \end{bmatrix} t} \end{array}\right]$$

برای محاسبه $e^{\begin{bmatrix} \frac{-3}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{-\sqrt{3}}{2} & \frac{-3}{2} \end{bmatrix} t}$ می توان از روش تبدیل لاپلاس استفاده نمود،

$$\left(\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{-3}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{-\sqrt{3}}{2} & \frac{-3}{2} \end{bmatrix}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} s+\frac{3}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & s+\frac{3}{2} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{(s+\frac{3}{2})^2+\frac{3}{4}} \begin{bmatrix} s+\frac{3}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{-\sqrt{3}}{2} & s+\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

حال از یک یک درایه ها معکوس لاپلاس می گیریم،

$$L^{-1}\left(\begin{bmatrix} \dfrac{s+\frac{3}{2}}{(s+\frac{3}{2})^2+\frac{3}{4}} & \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{(s+\frac{3}{2})^2+\frac{3}{4}} \\ \dfrac{\frac{-\sqrt{3}}{2}}{(s+\frac{3}{2})^2+\frac{3}{4}} & \dfrac{s+\frac{3}{2}}{(s+\frac{3}{2})^2+\frac{3}{4}} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} e^{\frac{-3}{2}t}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t) & e^{\frac{-3}{2}t}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t) \\ -e^{\frac{-3}{2}t}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t) & e^{\frac{-3}{2}t}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t) \end{bmatrix}$$

$$e^{\Lambda t} = \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\frac{-3}{2}t}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t) & e^{\frac{-3}{2}t}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t) \\ 0 & -e^{\frac{-3}{2}t}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t) & e^{\frac{-3}{2}t}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t) \end{bmatrix}$$

نهایتاً مقدار e^{At} بدست می آید،

$$e^{At} = Te^{\Lambda t}T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & \frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\frac{-3}{2}t}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t) & e^{\frac{-3}{2}t}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t) \\ 0 & -e^{\frac{-3}{2}t}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t) & e^{\frac{-3}{2}t}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{4}{\sqrt{3}} & \frac{-2}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{\frac{-3}{2}t}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t)+\frac{1}{\sqrt{3}}e^{\frac{-3}{2}t}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t) & \frac{4}{\sqrt{3}}e^{\frac{-3}{2}t}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t) & \frac{-2}{\sqrt{3}}e^{\frac{-3}{2}t}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t) \\ 0 & e^{-2t} & 0 \\ \frac{2\sqrt{3}}{3}e^{\frac{-3}{2}t}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t) & 2e^{-2t}+\frac{2}{\sqrt{3}}e^{\frac{-3}{2}t}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t)-2e^{\frac{-3}{2}t}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t) & \frac{-1}{\sqrt{3}}e^{\frac{-3}{2}t}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t)+e^{\frac{-3}{2}t}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t) \end{bmatrix}$$

قطری سازی ماتریس ها با مقادیر ویژه تکراری

- ماتریس $A_{n\times n}$ را در نظر بگیرید،

$$\underbrace{\lambda_1,\lambda_1,\ldots,\lambda_1}_{k\text{ مقادیر ویژه تکراری}},\underbrace{\lambda_{k+1},\ldots,\lambda_n}_{\text{مقادیر ویژه متمایز}}$$

- اگر $\boxed{\mathrm{rank}(\lambda_1 I - A) = n-1}$ ← یک بردار ویژه مستقل خطی ← یک بلوک جردن

- برای بدست آوردن ماتریس تبدیل T به تعداد $k-1$ بردار مستقل خطی دیگر نیاز داریم.

- استفاده از بردارهای ویژه تعمیم یافته (generalized eigenvector)

- فرم کلی ماتریس تبدیل

$$\boxed{T=[\mathbf{v}_1\,|\,\varphi_1\,|\,\varphi_2\,|\cdots|\,\varphi_{k-1}\,|\,\mathbf{v}_{k+1}\,|\,\mathbf{v}_{k+2}\,|\cdots|\,\mathbf{v}_n]}$$

۲۶

فرم ماتریس بلوکی جردن (Jordan Block Form)

- با این تبدیل ماتریس به فرم قطری بلوکی جُردن تبدیل می شود.
- اگر ماتریس بلوکی فقط یک بلوک جردن داشته باشد، فرم کلی زیر را خواهد داشت،

بلوک جردن

$$\Lambda=\left[\begin{array}{ccccc|ccc}
\lambda_1 & 1 & & & 0 & & & \\
 & \lambda_1 & 1 & & & & & \\
 & & \lambda_1 & \ddots & & & 0 & \\
 & & & \ddots & 1 & & & \\
0 & & & & \lambda_1 & & & \\
\hline
 & & & & & \lambda_{k+1} & & 0 \\
 & & 0 & & & & \ddots & \\
 & & & & & 0 & & \lambda_n
\end{array}\right]$$

۲۷

خصوصیات بلوک های جردن

- فرم کلی یک بلوک جردن،

$$J_{P_i}=\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{bmatrix}$$

۱- کلیه عناصر روی قطر اصلی، مقادیر ویژه تکراری ماتریس A هستند.

۲- کلیه عناصر زیر قطر اصلی صفر هستند.

۳- عناصر بلافاصله بالای قطر اصلی یک یا صفر هستند.

۴- تعداد بلوک های جردن متناظر با یک مقدار ویژه داده شده مانند λ_i، برابر با تعداد بردارهای مستقل خطی متناظر با آن مقدار ویژه است.

مثال۷

فرض کنید ماتریس حالت $A_{7\times7}$ دارای هفت مقدار ویژه بصورت زیر است،

$$\underbrace{\lambda_7,\lambda_6}_{\text{دو مقدار ویژه متمایز}},\underbrace{\lambda_1,\lambda_1,\lambda_1,\lambda_1,\lambda_1}_{\text{یک مقدار ویژه تکراری با مرتبه پنج}}$$

دو مقدار ویژه متمایز ← دو بردار ویژه مستقل خطی

یک مقدار ویژه تکراری با مرتبه پنج ← دو بردار ویژه مستقل خطی

$$\Lambda_{7\times7}=\begin{bmatrix} J_1(\lambda_1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_2(\lambda_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_7 \end{bmatrix}=\left[\begin{array}{ccc|cc|c|c} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_6 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_7 \end{array}\right]$$

بدست آوردن بردارهای ویژه تعمیم یافته

- در تعریف بردار ویژه داشتیم،

$$A\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i \rightarrow (\lambda_i I - A)\mathbf{v}_i = 0$$

- اگر برداری مانند φ_1 باشد، که رابطه زیر را برقرار نماید، به آن بردار ویژه تعمیم یافته گویند،

$$\boxed{A\varphi_1 = \lambda_1\varphi_1 + \mathbf{v}_1 \rightarrow (A-\lambda_1 I)\varphi_1 = \mathbf{v}_1}$$

- برای بدست آوردن بردارهای ویژه تعمیم یافته دیگر به همین ترتیب عمل می کنیم.

$$\boxed{\begin{aligned} &(A-\lambda_1 I)\varphi_2 = \varphi_1 \\ &(A-\lambda_1 I)\varphi_3 = \varphi_2 \\ &\qquad\vdots \\ &(A-\lambda_1 I)\varphi_{k-1} = \varphi_{k-2} \end{aligned}}$$

مثال۸

فرم جردن ماتریس حالت زیر را بیابید.

$$A_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ابتدا مقادیر ویژه ماتریس $A_{3\times3}$ را بدست می آوریم،

$$|\lambda I - A| = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 1 & \lambda-2 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^3 = 0 \rightarrow \lambda_{1,2,3} = 1$$

ماتریس $A_{3\times3}$ یک مقدار ویژه مکرر مرتبه سه دارد $(k=3)$. حال تعداد بردارهای ویژه مستقل خطی متناسب با این مقدار ویژه را تعیین می نماییم، برای این منظور داریم،

$$\text{rank}(\lambda_1 I - A) = 2 = n-1$$

لذا تنها یک بردار ویژه مستقل خطی $\mathbf{v}_1$ متناظر با مقدار ویژه $\lambda_1 = 1$ وجود دارد. پس فقط یک بلوک جردن وجود دارد.

برای بدست آوردن بردارهای ویژه همانطور که قبلاً بیان شد دو روش را می توان پیش گرفت،

روش اول: استفاده از تعریف بردار ویژه،

ابتدا بردار ویژه $\mathbf{v}_1$ را بدست می آوریم،

$$(\lambda_1 I - A)\mathbf{v}_1 = \mathbf{0} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ -x_1 = 0 \end{cases} \rightarrow \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

برای تشکیل ماتریس تبدیل باید دو بردار ویژه تعمیم یافته دیگر نیز بیابیم. برای این منظور از تعریف بردارهای تعمیم یافته استفاده می کنیم،

$$(A - \lambda_1 I)\varphi_1 = \mathbf{v}_1 \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} -x_4 + x_5 = 0 \\ x_4 = 1 \end{cases} \rightarrow \quad \varphi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(A - \lambda_1 I)\varphi_2 = \varphi_1 \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_7 \\ x_8 \\ x_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} -x_7 + x_8 = 1 \\ x_7 = 0 \end{cases} \rightarrow \quad \varphi_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

روش دوم: استفاده از ماتریس الحاقی،

$$\mathrm{Adj}(\lambda I - A) = \mathrm{Adj}\begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 1 & \lambda - 2 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda^2 - 3\lambda + 2 & \lambda - 1 & 0 \\ 1 - \lambda & \lambda^2 - \lambda & 0 \\ \lambda - 2 & 1 & \lambda^2 - 2\lambda + 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 1 \quad \rightarrow \quad \mathrm{Adj}(1I - A) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

برای بدست آوردن دو بردار ویژه تعمیم یافته دیگر از مشتقات اول و دوم ماتریس الحاقی استفاده می کنیم،

$$\frac{d}{d\lambda}\left[\mathrm{Adj}(\lambda I - A)\right] = \begin{bmatrix} 2\lambda - 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2\lambda - 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2\lambda - 2 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 1 \quad \rightarrow \quad \frac{d}{d\lambda}\left[\mathrm{Adj}(1I - A)\right] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \varphi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{2!}\frac{d^2}{d\lambda^2}[Adj(\lambda I - A)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \varphi_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

لذا ماتریس تبدیل T بصورت زیر بدست می آید،

$$T = [\mathbf{v}_1 \,|\, \varphi_1 \,|\, \varphi_2] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

حال فرم کانونیکال جردن ماتریس A را بدست می آوریم،

$$\Lambda = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}$$

همانطور که پیشتر گفته شد فرم کانونیکال جردن فقط یک بلوک جردن با مرتبه سه دارد.

بدست آوردن ماتریس تبدیل برای فرم جردن

- ماتریس $A_{n\times n}$ را در نظر بگیرید،

$$\underbrace{\lambda_1, \lambda_1, \ldots, \lambda_1}_{k\ \text{مقادیر ویژه تکراری}}, \underbrace{\lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_n}_{\text{مقادیر ویژه متمایز}}$$

- اگر $\boxed{\mathrm{rank}(\lambda_1 I - A) = n - \alpha}$ $\leftarrow$ α بردار ویژه مستقل خطی $\leftarrow$ α بلوک جردن

- برای بدست آوردن ماتریس تبدیل T به تعداد $k-\alpha$ بردار مستقل خطی دیگر نیاز داریم.

- استفاده از بردارهای ویژه تعمیم یافته (generalized eigenvector)

- فرم کلی ماتریس تبدیل

$$\boxed{T = [\mathbf{v}_1 \,|\, \varphi_1 \,|\, \varphi_2 \,|\cdots|\, \varphi_{P_1-1} \,|\, \mathbf{v}_2 \,|\, \xi_1 \,|\, \xi_2 \,|\cdots|\, \xi_{P_2-1} \,|\cdots|\, \mathbf{v}_\alpha \,|\, \eta_1 \,|\, \eta_2 \,|\cdots|\, \eta_{P_\alpha-1} \,|\, \mathbf{v}_{k+1} \,|\, \mathbf{v}_{k+2} \,|\cdots|\, \mathbf{v}_n]}$$

مثال ۷

فرم قطری بلوکی جردن ماتریس A را بیابید.

$$A_{4\times 4}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 3\\ 0 & -1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1 & -2\end{bmatrix}$$

معادله مشخصه ماتریس A بصورت زیر قابل محاسبه است،

$$|\lambda I_4 - A| = 0 \rightarrow \begin{vmatrix}\lambda & -1 & 0 & -3\\ 0 & \lambda+1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & \lambda & -1\\ 0 & 0 & 1 & \lambda+2\end{vmatrix} = \lambda(\lambda+1)^3 = 0 \rightarrow \lambda_{1,2,3} = -1, \lambda_4 = 0$$

لذا ماتریس A یک مقدار ویژه متمایز و یک مقدار ویژه مکرر مرتبه سه دارد.

برای مقدار ویژه مکرر $\lambda_1 = -1$ داریم،

$$\text{rank}(\lambda_1 I_4 - A) = 2 = n-2 \quad \rightarrow \quad \alpha = 2$$

لذا $\alpha = 2$ است، پس دو بلوک جردن برای مقدار ویژه مکرر $\lambda_1 = -1$ وجود دارد و دو بردار ویژه مستقل خطی $\mathbf{v}_1$ و $\mathbf{v}_2$ متناظر آن داریم.

$$(A-\lambda_1 I)\mathbf{v}_1 = \mathbf{0} \rightarrow \begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix} = \mathbf{0} \rightarrow \begin{cases}x_1 + x_2 + 3x_4 = 0\\ x_3 + x_4 = 0\end{cases} \quad \rightarrow \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix}2\\ 1\\ 1\\ -1\end{bmatrix}$$

$$(A-\lambda_1 I)\mathbf{v}_2 = \mathbf{0} \rightarrow \begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix} = \mathbf{0} \rightarrow \begin{cases}x_1 + x_2 + 3x_4 = 0\\ x_3 + x_4 = 0\end{cases} \quad \rightarrow \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix}1\\ -1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

حال یک بردار ویژه تعمیم یافته متناظر با بردار ویژه $\mathbf{v}_1$ بدست می آوریم،

$$(A-\lambda_1 I)\varphi_1 = \mathbf{v}_1 \rightarrow \begin{bmatrix}1&1&0&3\\0&0&1&1\\0&0&1&1\\0&0&-1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_5\\x_6\\x_7\\x_8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\1\\1\\-1\end{bmatrix}\rightarrow \begin{cases}x_1+x_2+3x_4=2\\x_3+x_4=1\end{cases} \rightarrow \quad \varphi_1=\begin{bmatrix}-1\\0\\0\\1\end{bmatrix}$$

و برای مقدار ویژه متمایز $\lambda_4 = 0$ یک بردار ویژه $\mathbf{v}_4$ بصورت زیر بدست می آید،

$$(A-\lambda_4 I)\mathbf{v}_4 = \mathbf{0} \rightarrow \begin{bmatrix}0&1&0&3\\0&-1&1&1\\0&0&0&1\\0&0&-1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_9\\x_{10}\\x_{11}\\x_{12}\end{bmatrix}=\mathbf{0}\rightarrow \begin{cases}x_{10}+3x_{12}=0\\-x_{10}+x_{11}+x_{12}=0\\x_{12}=0\\-x_{11}+2x_{12}=0\end{cases} \rightarrow \quad \mathbf{v}_4=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

بنابراین ماتریس تبدیل T بصورت زیر بدست می آید،

$$T=[\mathbf{v}_1 \mid \varphi_1 \mid \mathbf{v}_2 \mid \mathbf{v}_4]=\begin{bmatrix}2&-1&1&1\\1&0&-1&0\\1&0&0&0\\-1&1&0&0\end{bmatrix}$$

سپس فرم قطری بلوکی جردن ماتریس A را بدست می آوریم،

$$\Lambda = T^{-1}AT=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&1&1\\0&-1&1&0\\1&1&-2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0&3\\0&-1&1&1\\0&0&0&1\\0&0&-1&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-1&1&1\\1&0&-1&0\\1&0&0&0\\-1&1&0&0\end{bmatrix}$$

$$=\left[\begin{array}{cc:c:c}-1&1&0&0\\0&-1&0&0\\ \hdashline 0&0&-1&0\\ \hdashline 0&0&0&0\end{array}\right]=\begin{bmatrix}J_{P_1}(-1)&&0\\&J_{P_2}(-1)&\\0&&J_1(0)\end{bmatrix}$$

مثال۸

فرم قطری بلوکی ماتریس A را بیابید.

$$A_{4\times 4}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -2 & -2\end{bmatrix}$$

معادله مشخصه ماتریس A بصورت زیر قابل محاسبه است،

$$|\lambda I_4 - A| = 0 \rightarrow \lambda_{1,2}=1, \lambda_{3,4}=-1\pm j$$

لذا ماتریس A یک مقدار ویژه مکررمرتبه دو و دو مقدار ویژه مختلط مزدوج دارد. برای مقدار ویژه مکرر $\lambda_1=1$ فقط یک بردار ویژه داریم، لذا فقط یک بلوک جردن داریم،

$$rank(\lambda_1 I - A)=3$$

$$\Lambda=\left[\begin{array}{cc:cc}\lambda_1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0\\ \hdashline 0 & 0 & \sigma_3 & \omega_3\\ 0 & 0 & -\omega_3 & \sigma_3\end{array}\right] \rightarrow \Lambda=\left[\begin{array}{cc:cc}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ \hdashline 0 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -1 & -1\end{array}\right]$$

- در نرم افزار MATLAB از دستور $\boxed{\text{jordan(A)}}$ و $\boxed{\text{[T, J] = jordan(A)}}$ می توان برای بدست آوردن فرم کانونیکال جردن ماتریس A استفاده نمود.
- دستور $\boxed{\text{jordan(A)}}$ فقط ماتریس کانونیکال جردن حاصل را ارائه می دهد.
- دستور $\boxed{\text{[T, J] = jordan(A)}}$ ماتریس T ماتریس تبدیل و J فرم کانونیکال جردن ماتریس A است.
- این دستور برای ریشه های غیر تکراری و مختلط نیز قابل اعمال است و فرم قطری کامل را برای آنها ارائه می دهد.

```
A =[0 1 0;-1 2 0;1 0 1];
[T,J]= jordan(A)
T =
        0    -1     1
        0    -1     0
       -1     1     0
J =
        1     1     0
        0     1     1
        0     0     1
```

محاسبه ماتریس انتقال حالت با روش قطری سازی ← مقادیر ویژه تکراری

- اگر یک ماتریس $A_{n\times n}$ دارای k مقدار ویژه تکراری باشد، آنگاه می توان آن را به فرم قطری بلوکی جردن تبدیل نمود. در اینصورت ماتریس انتقال حالت سیستم به شکل زیر بدست می آید،

$$\boxed{\mathrm{e}^{At} = T\mathrm{e}^{\Lambda t}T^{-1}}$$

$$e^{\Lambda t} = \left[\begin{array}{cccc|ccc} e^{J_{P1}t} & & & 0 & & & \\ & e^{J_{P2}t} & & & & 0 & \\ & & \ddots & & & & \\ 0 & & & e^{J_{P\alpha}t} & & & \\ \hline & & & & e^{\lambda_{k+1}t} & & 0 \\ & 0 & & & & \ddots & \\ & & & & 0 & & e^{\lambda_n t} \end{array}\right]$$

محاسبه ماتریس انتقال حالت با روش قطری سازی ← مقادیر ویژه تکراری

هر یک از $\mathrm{e}^{J_{Pi}t}$ ها بصورت زیر محاسبه می شوند،

$$\mathrm{e}^{J_{Pi}t} = \mathrm{e}^{\lambda_i t}\begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{Pi-1}}{(P_i-1)!} \\ 0 & 1 & t & \cdots & \frac{t^{Pi-2}}{(P_i-2)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & t \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

مثال

$$J = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad e^{Jt} = e^{2t}\begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2t} & te^{2t} & \frac{t^2}{2!}e^{2t} \\ 0 & e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$$

مثال۹

ماتریس حالت زیر را در نظر بگیرید،

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0&3\\0&-1&1&1\\0&0&0&1\\0&0&-1&-2\end{bmatrix}$$

ماتریس انتقال حالت آن را با استفاده از روش قطری سازی بدست آورید.

با توجه به مثال۷ مقادیر مشخصه ماتریس A عبارتند از $\lambda_{1,2,3}=-1,\lambda_4=0$ و فرم قطری بلوکی جردن آن بصورت زیر است،

$$\Lambda=T^{-1}AT=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&1&1\\0&-1&1&0\\1&1&-2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0&3\\0&-1&1&1\\0&0&0&1\\0&0&-1&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-1&1&1\\1&0&-1&0\\1&0&0&0\\-1&1&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&1&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

حال می توان ماتریس انتقال حالت را بدست آورد،

$$\Lambda=\begin{bmatrix}-1&1&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\mathrm{e}^{At}=T\mathrm{e}^{\Lambda t}T^{-1}=\begin{bmatrix}2&-1&1&1\\1&0&-1&0\\1&0&0&0\\-1&1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{-t}&t\mathrm{e}^{-t}&0&0\\0&\mathrm{e}^{-t}&0&0\\0&0&\mathrm{e}^{-t}&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&1&1\\0&-1&1&0\\1&1&-2&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&1-\mathrm{e}^{-t}&-2+2\mathrm{e}^{-t}+2t\mathrm{e}^{-t}&1-\mathrm{e}^{-t}+2t\mathrm{e}^{-t}\\0&\mathrm{e}^{-t}&t\mathrm{e}^{-t}&t\mathrm{e}^{-t}\\0&0&\mathrm{e}^{-t}+t\mathrm{e}^{-t}&t\mathrm{e}^{-t}\\0&0&-t\mathrm{e}^{-t}&\mathrm{e}^{-t}-t\mathrm{e}^{-t}\end{bmatrix}$$