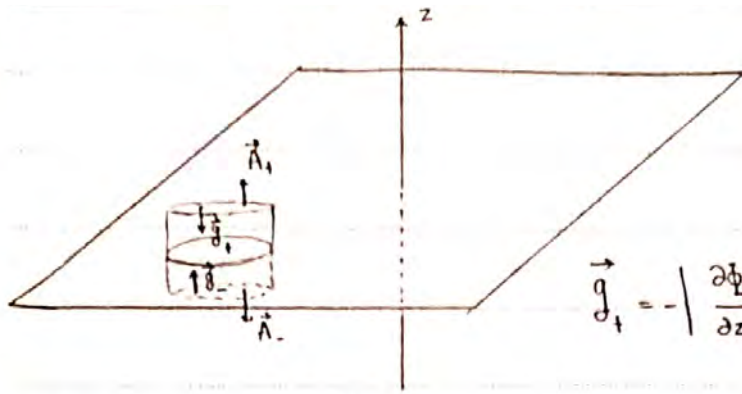


# سوال ۱

الف)



مجموع سار عدوی از سطح را بررسی می کنیم

$$\vec{g}_+ = - \left| \frac{\partial \Phi(z_0)}{\partial z} \right|_{z=0} \hat{z}, \quad \vec{A}_+ = A \hat{z}$$

$$\Phi(R, z) = - \frac{GM}{\sqrt{R^2 + (a_k + z)^2}}$$

$$\vec{g}_- = + \left| \frac{\partial \Phi(z_0)}{\partial z} \right|_{z=0} \hat{z}, \quad \vec{A}_- = -A \hat{z}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = + \frac{GM(a_k \pm z)}{(R^2 + (a_k \pm z)^2)^{3/2}} \rightarrow \Phi = - \frac{2GMa_k}{(R^2 + a_k^2)^{3/2}} A$$

از قانون گاوس می دانیم  $\Rightarrow \Phi = -4\pi GM_{in} = -4\pi G \sum_k A$

$$\Rightarrow \sum_k (R) = \frac{a_k}{2\pi} \frac{M}{(R^2 + a_k^2)^{3/2}} \quad \sum_k = \frac{dM}{dA}$$

$$\Rightarrow dM = 2\pi R \frac{a_k}{2\pi} \frac{M}{(R^2 + a_k^2)^{3/2}} dR \stackrel{(R/a_k \equiv x)}{=} M \frac{x}{(1+x^2)^{3/2}} dx$$

$$\Rightarrow M_{tot} = M \int_0^\infty \frac{x dx}{(1+x^2)^{3/2}} = M \times \frac{1}{2} \int_1^\infty \frac{d(1+x^2)}{(1+x^2)^{3/2}} = M \left[ -(1+x^2)^{-1/2} \right]_1^\infty$$

$$\Rightarrow M_{tot} = M$$

ب. چنان که بالا و پایین دسک نسبت به یکدیگر قریب هستند  $(\Phi(R, z) = \Phi(R, -z))$  به ذره ای که روی دسک

قرار دارد نیروی وارد نمی شود و در حالت تعادل قرار دارد.

$$z=0 \text{ پتانسیل را حول } \Phi(R, z) = \Phi(R, 0) + \left. \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right|_{z=0} z + \left. \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right|_{z=0} \frac{z^2}{2} + \dots$$

سطح می دهیم

در نقطه تعادل = 0

$$\Rightarrow \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \left. \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right|_{z=0} z$$

$$\ddot{z} = - \frac{\partial \Phi}{\partial z} =, \quad \ddot{z} + \left( \left. \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right|_{z=0} \right) z = 0 \rightarrow \text{شرط پایداری: } \left. \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right|_{z=0} > 0$$

$$z > 0: \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{GM(a_k + z)}{(R^2 + (a_k + z)^2)^{3/2}} \rightarrow \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = -3 \frac{GM(a_k + z)^2}{(R^2 + (a_k + z)^2)^{5/2}} + \frac{GM}{(R^2 + (a_k + z)^2)^{3/2}}$$

$$z < 0: \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = -\frac{GM(a_k - z)}{(R^2 + (a_k - z)^2)^{3/2}} \rightarrow \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = -3 \frac{GM(a_k - z)^2}{(R^2 + (a_k - z)^2)^{5/2}} + \frac{GM}{(R^2 + (a_k - z)^2)^{3/2}}$$

$$\Rightarrow \left. \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right|_{z=0} = \frac{GM}{(R^2 + a_k^2)^{5/2}} (R^2 - 2a_k^2) \rightarrow R^2 > 2a_k^2 \rightarrow \boxed{R > \sqrt{2} a_k}$$

$$\left. \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right|_{z=0} = \nu^2 \rightarrow \ddot{z} + \nu^2 z = 0 \rightarrow z(t) = Z \sin(\nu t + \alpha) \quad \text{حرکت نوسانی}$$

$$\Rightarrow \boxed{T_\nu = 2\pi \frac{(R^2 + a_k^2)^{5/4}}{\sqrt{GM(R^2 - 2a_k^2)}}} \quad \text{دوره نوسان حرکت}$$

10

$$\ddot{R} - R\dot{\phi}^2 = -\frac{\partial \Phi}{\partial R} \quad \text{از اصل نسبی $\rightarrow$ از اصل نسبی $\rightarrow$ از اصل نسبی} \quad L_z = R^2 \dot{\phi} = \text{const.} \quad (c)$$

$$\rightarrow \ddot{R} - \frac{L_z^2}{R^3} = -\frac{\partial \Phi}{\partial R} \Rightarrow \ddot{R} = -\frac{\partial \Phi_{\text{eff}}}{\partial R}, \quad \Phi_{\text{eff}} = \Phi(R, z) + \frac{L_z^2}{2R^2}$$

در اینجا  
مشتق می‌گیریم

$$15 \rightarrow \Phi_{\text{eff}}(R) = \Phi_{\text{eff}}(R_0) + \left. \frac{\partial \Phi_{\text{eff}}}{\partial R} \right|_{R_0} (R - R_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 \Phi_{\text{eff}}}{\partial R^2} \right|_{R_0} (R - R_0)^2$$

در اینجا \$\frac{\partial \Phi\_{\text{eff}}}{\partial R} = 0\$

$$\rightarrow \ddot{R} = -\frac{\partial \Phi_{\text{eff}}}{\partial R} = -\left. \frac{\partial^2 \Phi_{\text{eff}}}{\partial R^2} \right|_{R_0} (R - R_0), \quad R - R_0 \equiv x \rightarrow \ddot{x} + \left( \left. \frac{\partial^2 \Phi_{\text{eff}}}{\partial R^2} \right|_{R_0} \right) x = 0$$

$$20 \quad \Phi_{\text{eff}} = \Phi(R, z) + \frac{L_z^2}{2R^2} \rightarrow \frac{\partial^2 \Phi_{\text{eff}}}{\partial R^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2} + 3 \frac{L_z^2}{R^4}, \quad L_z = R_0^2 \Omega_0$$

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial R} \right|_{z=0} = \frac{GMR}{(R^2 + a_k^2)^{3/2}} \rightarrow \left. \frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2} \right|_{z=0} = \frac{GM}{(R^2 + a_k^2)^{3/2}} - 3 \frac{GMR^2}{(R^2 + a_k^2)^{5/2}} = \frac{GM}{(R^2 + a_k^2)^{5/2}} (a_k^2 - 2R^2)$$

$$25 \quad \Omega_0^2 = \frac{1}{R_0} \left. \frac{\partial \Phi}{\partial R} \right|_{R_0} = \frac{GM}{(R_0^2 + a_k^2)^{3/2}} \Rightarrow \left. \frac{\partial^2 \Phi_{\text{eff}}}{\partial R^2} \right|_{R_0} = \frac{GM}{(R_0^2 + a_k^2)^{5/2}} (R_0^2 + 4a_k^2)$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + \kappa^2 x = 0, \quad \kappa^2 = \frac{GM}{(R_0^2 + a_k^2)^{5/2}} (R_0^2 + 4a_k^2)$$

$$\Rightarrow x(t) = X \sin(\kappa t + \gamma)$$



$$\dot{\phi} = \frac{L_z}{R^2} = \frac{R_0^2 \Omega_0}{R_0^2 (1 - \chi/R_0)^2} \approx \Omega_0 \left( 1 - \frac{2\chi}{R_0} \right) \rightarrow d\phi = \Omega_0 \left( 1 - 2 \frac{\chi}{R_0} \sin(\kappa t + \varphi) \right) dt$$

$$\Rightarrow \phi(t) = \Omega_0 t - \frac{2\chi\Omega_0}{R_0} \int \sin(\kappa t + \varphi) dt + \phi_0 = \Omega_0 t + \frac{2\Omega_0 \chi}{\kappa R_0} \cos(\kappa t + \varphi) + \phi_0$$

$$y = R \sin(\delta\phi) \rightarrow y \approx R \cdot \delta\phi = R_0 (\phi - \Omega_0 t) = R_0 \left( \frac{2\chi\Omega_0}{\kappa R_0} \cos(\kappa t + \varphi) + \phi_0 \right)$$

$$R = R_0 + \chi$$



$$\Rightarrow y = \frac{2\chi\Omega_0}{\kappa} \cos(\kappa t + \varphi) + R_0 \phi_0 \equiv Y$$

$$\begin{cases} y(t) = R_0 \phi_0 + Y \cos(\kappa t + \varphi) \\ x(t) = X \sin(\kappa t + \varphi) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\chi^2}{X^2} + \frac{(y - R_0 \phi_0)^2}{Y^2} = 1$$

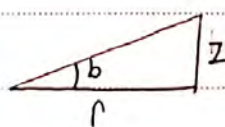
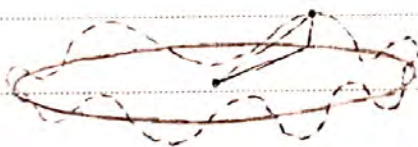
معادله یک بیضی که بر روی محور y جابجا شده است.

$$\text{برای آنکه مرکز بیضی مرکز باشد} \rightarrow \phi_0 = 0 \rightarrow \frac{\chi^2}{X^2} + \frac{y^2}{Y^2} = 1$$

بیضی شود

$$X = 3.96 \text{ pc}, \quad Z = 0.24 \text{ pc} \quad (7)$$

ستاره هم در حال گردش روی یک بیضی در صفحه که همان است که همینان در راستای z نوسان می کند، عرض کهانی اندازه گیری شده در مرزها به صورت زیر است:



$$\tan b = \frac{Z}{r} = \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2}}$$

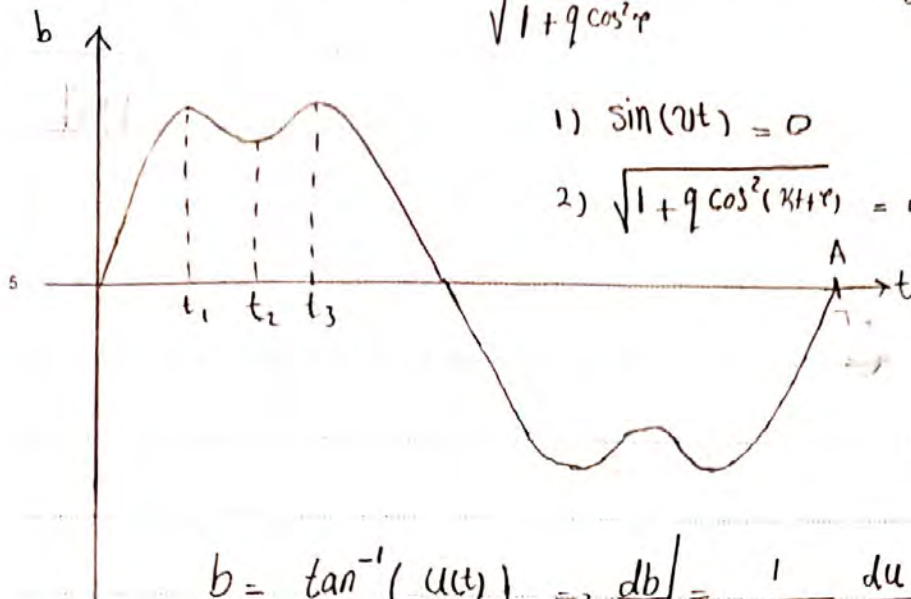
$$\Rightarrow b = \tan^{-1} \left( \frac{Z \sin(\nu t + \alpha)}{\sqrt{X^2 \sin^2(\kappa t + \varphi) + Y^2 \cos^2(\kappa t + \varphi)}} \right) \quad \text{تابع عرض کهانی در مرزها}$$

$$\frac{Z}{X} = a, \quad \left( \frac{Y}{X} \right)^2 = 4 \frac{\Omega_0^2}{\kappa^2} = 4 \times \frac{R_0^2 + a\kappa^2}{R_0^2 + 4a\kappa^2} \rightarrow b = \tan^{-1} \left( \frac{a \sin(\nu t + \alpha)}{\sqrt{1 + q \cos^2(\kappa t + \varphi)}} \right)$$

$$q = \frac{4 R_0^2 + a\kappa^2}{R_0^2 + 4a\kappa^2} - 1$$

مقدار b بر حسب t داده شده است.

$$b(t=0) = 0 \rightarrow \frac{a \sin \alpha}{\sqrt{1+q \cos^2 \pi}} = 0 \rightarrow \boxed{\alpha = 0}$$



$$1) \sin(\nu t) = 0$$

برای آنکه  $b=0$  شود :

$$2) \sqrt{1+q \cos^2(\kappa t + \pi)} = \infty \rightarrow \text{مکن نیست چرا که صفره}$$

مقداری محدود دارد.

$$t(A) = T_0 : A \text{ در نقطه}$$

$$\Rightarrow t(A) = T_0 = \text{تکرار نوسان}$$

راستی

$$b = \tan^{-1}(u(t)) \Rightarrow \left. \frac{db}{dt} \right|_{(1,2,3)} = \frac{1}{1+u^2} \left. \frac{du}{dt} \right|_{(1,2,3)} = 0 \rightarrow \left. \frac{du}{dt} \right|_{(1,2,3)} = 0$$

$$u(t) = \frac{a \sin(\nu t)}{\sqrt{1+q \cos^2(\kappa t)}}$$

همچنین می دانیم در نقطه ابتدای شروع نوسان، هم از این نیم قطر اصل قرار دارند

$$\varphi = 0 : X(t=0) = 0$$

$$\frac{du}{dt} = a \left[ \frac{\nu \cos(\nu t)}{\sqrt{1+q \cos^2(\kappa t)}} + \frac{\kappa q \sin(\nu t) \cos(\kappa t) \sin(\kappa t)}{(1+q \cos^2(\kappa t))^{3/2}} \right]$$

$$\Rightarrow \frac{du}{dt} = \frac{a \sin(\nu t)}{\sqrt{1+q \cos^2(\kappa t)}} \left( \nu \cot(\nu t) + \kappa q \frac{\sin(\kappa t) \cos(\kappa t)}{1+q \cos^2(\kappa t)} \right) = 0$$

$$\textcircled{I} \rightarrow \nu \cot(\nu t) + \kappa q \frac{\sin(\kappa t) \cos(\kappa t)}{1+q \cos^2(\kappa t)} = 0 \quad \left( 1+q \cos^2(\kappa t) \right)^{-1} = \frac{u^2}{a^2 \sin^2(\nu t)}$$

$$q = \frac{(a/u \sin(\nu t))^2 - 1}{\cos^2(\kappa t)} \Rightarrow \nu \cot(\nu t) + \kappa \frac{(a/u \sin(\nu t))^2 - 1}{\cos^2(\kappa t)} \times \frac{u^2}{a^2 \sin^2(\nu t)} \times \sin(\kappa t) \cos(\kappa t) = 0$$

$$\Rightarrow \nu \cos(\nu t) \sin(\nu t) + \kappa \tan(\kappa t) \left( \sin^2(\nu t) - \frac{u^2}{a^2} \right) = 0$$

$$\Rightarrow (\nu t) \cos(\nu t) \sin(\nu t) = -(\kappa t) \tan(\kappa t) \left( \sin^2(\nu t) - \frac{u^2}{a^2} \right)$$

$$\Rightarrow \textcircled{II} (\kappa t) \tan(\kappa t) = \frac{(\nu t) \cos(\nu t) \sin(\nu t)}{\frac{u^2}{a^2} - \sin^2(\nu t)} = n$$



نقاط 1 و 2 و 3 نقاط اکسترم هستند که  $\frac{db}{dt} = 0$  است. ثابت کردیم هرگاه  $\frac{db}{dt} = 0$  است

$\frac{du}{dt} = 0$  با مشتق گرفتن از  $u$  به معادله (I) می‌رسیم، مجهولات معادله ما  $u$  و  $q$  هستند که می‌توانیم

با استفاده از  $u$  و  $q$  راضف کنیم و پس از ساده سازی به معادله (II) برسیم.

$$T_0 = 275.64 \text{ Myr} \Rightarrow t(A) = 275.64 \text{ Myr} \rightarrow \text{از روی نمودار}$$

$t(A)$  را اندازی کنیم

$$t_1 = 40.93, \quad u_1 = 0.04587 \rightarrow n = -6.144 \xrightarrow{\text{جواب اول}} T_K = 137.82 \text{ Myr}$$

$$t_2 = 68.91, \quad u_2 = 0.03833 \rightarrow n = 0 \xrightarrow{\text{جواب دوم}} T_K = 137.82 \text{ Myr} \quad 10$$

$$t_3 = 96.887, \quad u_3 = 0.04587 \rightarrow n = 14.537 \xrightarrow{\text{جواب دوم}} T_K = 137.82 \text{ Myr}$$

از هر سه اکسترم استفاده می‌کنیم و اولین جواب مشترک آنها برای  $T_K$  را علامت کرده و به عنوان جواب

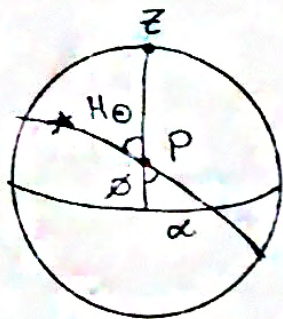
گزینش می‌کنیم. (برای حل معادله هم از نمودار هم از مابین حساب تمام به استفاده هستند) 15

$$\Rightarrow \begin{cases} T_0 = 275.64 \text{ Myr} \\ T_K = 137.82 \text{ Myr} \end{cases}$$

$$\frac{\kappa^2}{v^2} = 4 = \frac{R_0^2 + 4a_K^2}{R_0^2 - 2a_K^2} \Rightarrow R_0 = 2a_K \Rightarrow a_K = 4.25 \text{ kpc} \quad (ه)$$

$$\kappa^2 = \frac{8}{5^{3/2}} \frac{GM}{a_K^3} \Rightarrow M = 2.5 \times 10^{11} M_\odot$$





$$\cos \delta_0 \cos \delta = \sin \delta \cot \alpha - \sin \delta_0 \cot H_0$$

$$\Rightarrow \sin \delta \cot \alpha = \cot H_0 \Rightarrow \tan H_0 = \frac{\tan \alpha}{\sin \delta}$$

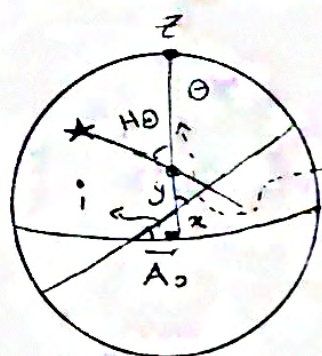
$$\Rightarrow |H_0| = 55,44^\circ$$

$$\Rightarrow H_0 = -55,44^\circ$$

که مثبت است پس غروب است در حال طلوع است.

$$\Delta H = \Delta \lambda \Rightarrow H_{\text{مهری}} = -100,44^\circ$$

در صورتی که در این بخش زاویه ساعتی نسبت به مرز بزرگ صفری محاسبه شده بود، نمره کامل داده شده است.



$$i = 90 - \alpha_z = 30^\circ \quad A_0 = 10^\circ$$

$$\cos A_0 \cos \delta_0 = \sin A_0 \cot \alpha - \sin \delta_0 \cot i$$

$$\Rightarrow \cot \alpha \sin A_0 = \cot i \Rightarrow \tan \alpha = \tan i \sin A_0$$

$$\Rightarrow \alpha = 2,7^\circ$$

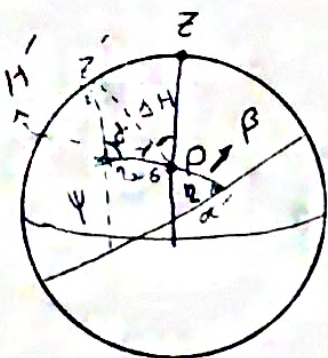
$$\cos \alpha \cos \delta_0 = \sin \alpha \cot A_0 - \sin \delta_0 \cot \theta \Rightarrow \tan \theta = \frac{\tan A_0}{\sin \alpha}$$

$$\Rightarrow \theta = 40,5^\circ$$

$$y = \delta - \alpha = 35,2 - 2,7 = 32,5^\circ$$

$$\cos y \cos \theta = \sin y \cot \alpha' - \sin \theta \cot H_0 \Rightarrow \cot \alpha' = \frac{\cos y \cos \theta + \sin \theta \cot H_0}{\sin y}$$

$$\Rightarrow \alpha' = 41,7^\circ$$



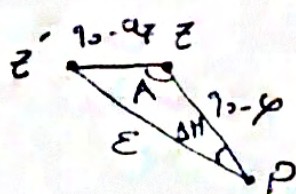
$$\cos \alpha' \cos \theta = \sin \alpha' \cot y - \sin \theta \cot \eta$$

$$\Rightarrow \tan \eta = \frac{\sin \theta}{\sin \alpha' \cot y - \cos \alpha' \cos \theta} \Rightarrow \eta = 33,19^\circ$$

$$\cos \beta = \cos \alpha' \cos y + \sin \alpha' \sin y \cos \theta$$

$$\Rightarrow \beta = 51,09^\circ$$

$$\Rightarrow \delta_0 = 33,5^\circ \quad \text{در انقلاب تابستانی هستیم}$$



$$\cos \epsilon = \sin \alpha_z \sin \beta + \cos \alpha_z \cos \beta \cos A_z$$

$$\Rightarrow \epsilon = 44,11 \Rightarrow \beta' = 90 - \epsilon = 45,89^\circ$$

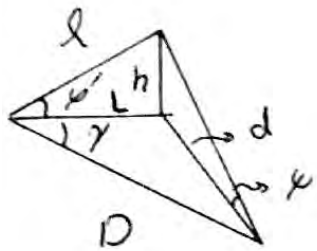
$$\sin \alpha_z = \sin \beta \cos \epsilon + \sin \epsilon \cos \beta \cos \Delta H$$

$$\Rightarrow \Delta H = 44,97^\circ \Rightarrow H' = H_{\text{مهری}} - \Delta H = 44,47^\circ$$

$$\cos(H') \sin \delta_0 = \cos \delta_0 \cot \epsilon - \sin H' \cot \delta \Rightarrow \delta = 73,17^\circ$$

$$\cos(110 - \delta) \cos(90 - \delta + \beta) = \sin(90 - \delta + \beta) \cot \varphi - \sin(110 - \delta) \cot \eta$$

$$\Rightarrow \varphi = 29,04^\circ$$



$$\tan \gamma = \tan H' \sin \varphi' \Rightarrow \gamma = 44,04^\circ$$

$$L = l \cos \varphi' = 0,4020 \text{ m}$$

$$h = l \sin \varphi'$$

$$\tan \varphi = \frac{h}{d} \Rightarrow d = h \cot \varphi = l \sin \varphi' \cot \varphi = 0,3124 \text{ m}$$

$$d^2 = D^2 + L^2 - 2DL \cos \gamma$$

$$\Rightarrow D^2 - 2DL \cos \gamma + (L^2 - D^2)$$

$$\Rightarrow D = L \cos \gamma \pm \sqrt{d^2 - L^2 \sin^2 \gamma}$$

$$= 0,4142 \pm 0,2028$$

$$\Rightarrow D = \begin{cases} 0,17 \text{ cm} \\ 11,1 \text{ cm} \end{cases}$$

$$\Rightarrow D = 0,17 \text{ cm}$$

باتوجه به موقعیت نور نسبت به Z



سرعت زاویه ای همواره  $A\hat{z}$  و سرعت زاویه ای توپ را  $\vec{\omega}$  فرض می کنیم. سرعت توپ نسبت به آزمایشگر برابر با سرعت توپ نسبت به میز به علاوه سرعت میز نسبت به آزمایشگر می باشد. از آنجایی که  $\vec{v}$  در مختصات محلی است، سرعت توپ نسبت به میز  $R\hat{z} \times \vec{\omega}$  می باشد. ( شعاع توپ است) بنابراین سرعت توپ نسبت به آزمایشگر برابر است با  $\vec{v} = A\hat{z} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (R\hat{z})$

تکانه زاویه ای توپ برابر است با:  $L = I\vec{\omega}$  اصطکار با سطح هم تکانه خطی و هم تکانه زاویه ای توپ را تغییر می دهد. در مورد تکانه خطی می توان نوشت

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \quad \text{II}$$

و از آنجایی که  $\vec{L} = I\vec{\omega}$  (نسبت به مرکز توپ) و  $\vec{\tau} = (R\hat{z}) \times \vec{F}$  پس:

$$(R\hat{z}) \times \vec{F} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad \text{III}$$

با جایگزینی I و II داخل III،  $(-R\hat{z}) \times (m \frac{d\vec{v}}{dt}) = I \frac{d\vec{\omega}}{dt} \Rightarrow \frac{d\vec{\omega}}{dt} = -\left(\frac{Rm}{I}\right) \hat{z} \times \frac{d\vec{v}}{dt}$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = A\hat{z} \times \frac{d\vec{r}}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times (R\hat{z}) = A\hat{z} \times \vec{v} - \left(\left(\frac{Rm}{I}\right) \hat{z} \times \frac{d\vec{v}}{dt}\right) \times R\hat{z}$$

از آنجایی که  $\frac{d\vec{v}}{dt}$  در صفحه افقی قرار دارد.

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = A\hat{z} \times \vec{v} - \left(\frac{R^2 m}{I}\right) \frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} = \left(\frac{A}{1 + \frac{R^2 m}{I}}\right) \hat{z} \times \vec{v} \quad \text{و} \quad I = \frac{2}{5} m R^2$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{2}{7} A \hat{z} \times \vec{v}$$

مختصات منوسل زاویه ای



یک دستگاه لغت (نویزبرخا) روی مرکز هیز قرار می دهیم پس :

$$\vec{v} = \dot{x} \hat{i} + \dot{y} \hat{j} \Rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{x} \hat{i} + \ddot{y} \hat{j} = \left(\frac{2}{7} A\right) \times (-\dot{y} \hat{i} + \dot{x} \hat{j})$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{x} = -\frac{2}{7} A \dot{y} \quad , \quad \ddot{y} = \frac{2}{7} A \dot{x}} \quad *$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \left(\frac{2}{7} A\right) \hat{k} \times \vec{v} \Rightarrow \vec{v} - \vec{v}_0 = \left(\frac{2}{7} A\right) \hat{k} \times (\vec{r} - \vec{r}_0) \quad \boxed{\frac{2}{7} A = k}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} \dot{x} &= -ky + (ky_0 + \dot{x}_0) \\ \dot{y} &= kx + (y_0 - kx_0) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} \ddot{x} &= -k^2 x + k(\dot{y}_0 - k\dot{x}_0) \\ \ddot{y} &= -k^2 y + k(\dot{x}_0 + k\dot{y}_0) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x = B \sin(kt) + \left(x_0 - \frac{y_0}{k}\right) \quad , \quad y = B \cos(kt) + \left(\frac{\dot{x}_0}{k} + y_0\right)$$

$$\left(x - \left(x_0 - \frac{y_0}{k}\right)\right)^2 + \left(y - \left(\frac{\dot{x}_0}{k} + y_0\right)\right)^2 = B^2$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \left(\frac{2}{7} A\right) \hat{k} \times \vec{v} \Rightarrow \vec{v} - \vec{v}_0 = \left(\frac{2}{7} A\right) \hat{k} (\vec{r} - \vec{r}_0)$$

$$\vec{v} = \left(\frac{2}{7} A\right) \hat{k} \times (\vec{r} - (\vec{r}_0 + \frac{7}{2A} (\hat{k} \times \vec{v}_0)))$$

که این معادله حرکت دایره ای را بر روی دایره ای که بردار مکان مرکز آن از دید آزمایشگر

$$\vec{r}_c = \vec{r}_0 + \left(\frac{7}{2A}\right) (\hat{k} \times \vec{v}_0) \quad *$$

می باشد ، را بیان می کند . بنا بر این شعاع چنین دایره ای برابر با  $\left|\frac{7}{2A} (\hat{k} \times \vec{v}_0)\right|$  است حال می توان چند حالت خاص مذکور را بررسی کرد .

• اگر  $v_0 = 0$  باشد ، ( حرکت جبرئتی ) توپ کاملاً حرکت دورانی حاصل از نیروی مغناطیسی میز را خنثی می کند .  
توپ همواره در یک مکان ثابت می ماند .

• اگر  $\vec{v}_0$  موازی مرکز دایره بر مرکز میز منطبق شود ، با استفاده از معادله \* در می یابیم که  $\frac{7}{2} A (\hat{k} \times \vec{v}_0) = -\vec{v}_0$  این رابطه بیان می کند که  $v_0 = \left(\frac{2}{7} A\right) v_0$  و همچنین  $v_0$  در جهت مخالف حرکت میز خواهد بود .

• غلطه چون داخل 7 تا اجزای مغناطیسی توپ 2 دایره را طی می کند . افرادی شخصی که با میوه می چرخند قبل از رسیدن به مکان اولیداشتی 5 بار حرکت مارپیج داشته است .

توجه شود که برای تمام اثبات ها غرض در نظر گرفته شده است.

ابتدا با توجه به اندازه  $dH$  پارامتر چگالی این کیهان را بدست می آوریم:

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G \rho}{3} - \frac{kc^2}{a^2} = H^2 \Rightarrow -kc^2 = a^2 H^2 - \frac{8\pi G \rho}{3} a^2 = \text{cte}$$

تقریباً می کنیم:  $\rho_c \equiv \rho(a=0) \Rightarrow H^2 = \frac{8\pi G \rho_c}{3} \Rightarrow \rho_c(a) = \frac{3H^2}{8\pi G}$

پارامتر چگالی  $\Rightarrow \Omega \equiv \frac{\rho}{\rho_c} = \frac{8\pi G \rho}{3H^2}$

مادلون اول ترمودینامیک:  $du = dq + dw$  و  $dw = -Pdv$

برای برقرار بودن شرط همگنی کیهان لازم است  $dq=0$  تا شارش انرژی نداشته باشیم (جهت ارفع نداشته باشیم) و همگنی

$$\Rightarrow du = -Pdv$$

اما انرژی درونی را می توانیم به صورت ضرب چگالی انرژی  $\rho$  در حجم بنویسیم:

$$du = d(uV) = -Pdv$$

اما  $\Rightarrow u = \frac{dE}{dV} = \frac{dm}{dV} c^2 = \rho c^2$  و  $V du + u dV = -P dV$

$$\omega \equiv \frac{P}{\rho c^2} = \frac{P}{u} \Rightarrow \frac{du}{u} + \frac{dV}{V} = -\omega \frac{dV}{V}$$

$$V \propto a^3 \propto a^3$$

همچنین مناسب باطلر بتوان 3 ات

$$\Rightarrow \frac{dV}{V} = 3 \frac{da}{a}, \quad \rho c^2 = u \Rightarrow \frac{d\rho}{\rho} = \frac{du}{u}$$

$$\Rightarrow \frac{d\rho}{\rho} + 3(1+\omega) \frac{da}{a} = 0$$

$$\Rightarrow \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\rho} = -3(1+\omega) \int_1^a \frac{da}{a}$$

$$\Rightarrow \rho = \rho_0 a^{-3(1+\omega)}$$

$$\rho_m = \rho_{m0} a^{-3}$$

$$-kc^2 = a^2 H^2 - \frac{8\pi G \rho_0}{3} a^{-1} = H_0^2 - \frac{8\pi G \rho_0}{3} = \text{cte}$$



هم در طرف معادله را بر  $H_0^2$  تقسیم می‌کنیم:

$$a^2 \frac{H^2}{H_0^2} - \Omega_0 a^{-1} = 1 - \Omega_0$$

$$\Rightarrow H = H_0 \sqrt{\Omega_0 a^{-3} + (1 - \Omega_0) a^{-2}}$$

$$\Rightarrow H = H_0 \sqrt{\Omega_0} \sqrt{a^{-3} - \left(\frac{\Omega_0 - 1}{\Omega_0}\right) a^{-2}} \quad (I) \quad \text{و } a > 1 \quad \leftarrow \text{انحناشت}$$

حال رابط  $a$  و فرکانس را به دست می‌آوریم:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2 \left( \frac{dx^2}{1 - kx^2} + x^2 d\Omega^2 \right) \rightarrow \text{اگر بخواهیم داشته باشیم}$$

برای فوتونی که در راستای شعاعی حرکت می‌کند  $d\theta = d\varphi = 0 \quad ds = 0$

$$\Rightarrow \frac{c^2 dt^2}{a^2} = \frac{dx^2}{1 - kx^2}$$

$$\frac{cdt}{a(t)} = \pm \frac{dx}{\sqrt{1 - kx^2}} \quad \leftarrow \text{برای فوتونی که به سمت ما می‌آید } dx < 0, dt > 0$$

$$\Rightarrow dp_0 = \int_{t_e}^{t_0} \frac{cdt}{a(t)} = \int_x^0 \frac{dx}{\sqrt{1 - kx^2}} = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1 - kx^2}} = etc$$

$$dp_0 = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1 - kx^2}} = \frac{1}{\sqrt{k}} \sin^{-1}(\sqrt{k} x)$$

چون طول  $\lambda$  و  $k$  ثابت است:

فرض می‌کنیم دو فوتون از یک منبع در زمان  $t_e$  و  $t_e + dt_e$  تابش و در زمان  $t_0$  و  $t_0 + dt_0$  مشاهده شوند:

$$dp_0 = \int_{t_e}^{t_0} \frac{cdt}{a(t)} = \int_{t_e + dt_e}^{t_0 + dt_0} \frac{cdt}{a} = \int_{t_e}^{t_e + dt_e} \frac{cdt}{a} + \int_{t_0}^{t_0 + dt_0} \frac{cdt}{a}$$

$$\Rightarrow \int_{t_e}^{t_e + dt_e} \frac{cdt}{a(t)} = \int_{t_0}^{t_0 + dt_0} \frac{cdt}{a(t)} \Rightarrow \frac{cdt_e}{a(t_e)} = \frac{cdt_0}{a(t_0)}$$

$$\frac{\lambda_e}{a(t_e)} = \frac{\lambda(t_0)}{a_0}$$

و اما اثر  $cdt_e$ ، اما نه بین دو قله فوتون بلریم:

$$z = \frac{\Delta \lambda}{\lambda_i} = \frac{\lambda_f - \lambda_i}{\lambda_i} = \frac{\lambda_f}{\lambda_i} - 1 = \frac{\lambda(t_0)}{\lambda_e} - 1 = \frac{a_0}{a(t_e)} - 1$$

$$a_0 = 1 \quad \text{باید نظر فرکانس} \Rightarrow \boxed{a(t) = \frac{1}{1+z}}$$

حال رابطه (I) را بوی مرتب‌ترایی می‌نویسیم:

$$H(z) = H_0 \sqrt{\Omega_0} \sqrt{(1+z)^3 + \left(\frac{\Omega_0-1}{\Omega_0}\right)(1+z)^2}$$

فوتون  $t_{\text{emit}}$  در  $z=0$  و فوتون  $t_{\text{obs}}$  در  $z$  (وقتی به ما برسد  $z=0$ )  
 از رابطه فاصله ویژه داریم  $\rightarrow dp_0 = \int_{t_e}^{t_{\text{obs}}} \frac{cdt}{a(t)} = - \int_z^0 \frac{cdz}{H(z)} = \int_0^z \frac{cdz}{H(z)}$

همین می‌دانیم:  $\frac{dt}{a} = \frac{1}{a} \frac{dt}{da} \frac{da}{dz} dz = - \frac{a}{\dot{a}} dz = - \frac{dz}{H(z)} \left\{ \begin{array}{l} a = (1+z)^{-1} \\ \Rightarrow da/dz = -a^2 dz \end{array} \right.$

پس رابطه فاصله ویژه در زمان حال ( $dp_0$ ) را تابع  $z$  بدست می‌آوریم:

$$dp_0(z) = \int_0^z \frac{cdz}{H_0 \sqrt{\Omega_0} \sqrt{(1+z)^3 + \left(\frac{\Omega_0-1}{\Omega_0}\right)(1+z)^2}} = \int_1^{1+z} \frac{cdx}{H_0 \sqrt{\Omega_0} \sqrt{u^3 - au^2}}$$

$$u = (1+z) \rightarrow du = dz, \quad a = \frac{\Omega_0-1}{\Omega_0}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{du}{\sqrt{u^3 - au^2}} &= \int \frac{du}{u^{3/2} \sqrt{1 - a/u}} \\ \Rightarrow \int \frac{du}{u^{3/2} \sqrt{1 - a/u}} &= \int \frac{2}{\sqrt{a}} \frac{dn}{\sqrt{1 - n^2}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{a}} \sin^{-1}(n) = \frac{2}{\sqrt{a}} \sin^{-1}\left(\sqrt{1 - a/u}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - a/u} &= n \\ \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1 - a/u}} \frac{a}{u^2} du &= dn \\ \Rightarrow \frac{du}{u^{3/2} \sqrt{1 - a/u}} &= \frac{2u^{1/2} dn}{a} \\ 1 - a/u &= n^2 \Rightarrow \sqrt{u} = \sqrt{\frac{a}{1 - n^2}} \end{aligned}$$

بگذاریم به حل اشتغال داریم:

$$dp_0(z) = \int_1^{1+z} \frac{cdx}{H_0 \sqrt{\Omega_0} \sqrt{u^3 - au^2}} = \frac{2c}{H_0 \sqrt{\Omega_0 - 1}} \sin^{-1}\left(\sqrt{1 - \frac{\Omega_0 - 1}{\Omega_0(1+z)}}\right) \Big|_1^{1+z}$$

$$dp_0(z) = \frac{2c}{H_0 \sqrt{\Omega_0 - 1}} \left[ \sin^{-1}\left(\sqrt{1 - \frac{\Omega_0 - 1}{\Omega_0(1+z)}}\right) - \sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{\Omega_0}}\right) \right]$$

برای آفت زره می‌دانیم بازه های اشتغال به صورت  $\begin{cases} t_e = 0 \\ t_{\text{obs}} - t_e \end{cases}$  می باشد پس هر هانده فوتون فاصله ویژه فوتونی است که از  $z \rightarrow \infty$  تابش شده و در زمان حال دریافت شود:

$$dp_H = \int_0^\infty \frac{cdz}{H(z)} = \frac{2c}{H_0 \sqrt{\Omega_0 - 1}} \left[ \frac{\pi}{2} - \sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{\Omega_0}}\right) \right]$$



حال باید  $\Omega$  را محاسبه کنیم:

$$\text{dph}(\varphi_{H_0}) = \frac{2}{\sqrt{\Omega_0-1}} \left( \pi/2 - \text{am}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{\Omega_0}}\right) \right) = 0.9669$$

از روش نیوتن - رافسون استفاده می‌کنیم: (بدون آکسین جواب از طریق حل معادله ماشین حساب غرض ندارد.)

$$f(x_i) = 0 \Rightarrow x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

$$f(\Omega_0) = \frac{\pi}{\sqrt{\Omega_0-1}} - \frac{2 \text{am}^{-1}(1/\sqrt{\Omega_0})}{\sqrt{\Omega_0-1}} - 0.9669 = 0$$

$$f'(\Omega_0) = - \frac{(\pi/2 - \text{am}^{-1}(1/\sqrt{\Omega_0}))}{(\Omega_0-1)^{3/2}} + \frac{1}{\Omega_0^{3/2}(\Omega_0-1)^{1/2}(1-1/\Omega_0)^{1/2}}$$

$$\text{am } u = \alpha \leadsto \text{C} u du = \sqrt{1-u^2} du = d\alpha \quad \text{برای گرفتن مشتق } \text{am}^{-1} \alpha$$

$$\text{am}^{-1} \alpha = u \Rightarrow du = d(\text{am}^{-1} \alpha) = \frac{d\alpha}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$f'(\Omega_0) = \frac{\text{am}^{-1}(1/\sqrt{\Omega_0}) - \pi/2}{(\Omega_0-1)^{3/2}} + \frac{1}{\Omega_0^{1/2}(\Omega_0-1)}$$

توجه شود که تنظیمات ماشین حساب باید بر روی rad (رادیان) قرار گیرد.

| $x_i$ | $x_{i+1}$  |
|-------|------------|
| 2     | 9.674      |
| -1.14 | math error |

حدس اولیه را 2 می‌زنیم:

با توجه به افتاد به تابع پیدا کردن پاسخ باروش نیوتن - رافسون بسیار سخت است.

پس از روش دیگر برای حل معادله استفاده می‌کنیم: (تقریب ثابت)

$\Omega$  را صراحتاً در معادله پیدا می‌کنیم:

$$\Omega = 1 + \left( \frac{2}{0.9669} \left( \pi/2 - \text{am}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{\Omega}}\right) \right) \right)^2$$

ابتدا یک حدس اولیه می‌زنیم پس معادله را در ماشین حساب وارد کرده آنقدر مساوی را

می‌زنیم تا به عدد ثابت برسیم.

برای حل معادله داریم:

| $x_i$        | $x_{i+1}$ |
|--------------|-----------|
| 2            | 3.639     |
| 3.639        | 5.443     |
| 5.443        | 6.442     |
| 6.442        | 6.815     |
| 6.815        | 6.934     |
| 6.934        | 6.970     |
| 6.970        | 6.981     |
| 6.981        | 6.984     |
| 6.984        | 6.985     |
| 6.985        | 6.985     |
| <b>6.985</b> |           |

$$\Omega_0 = 6.985$$

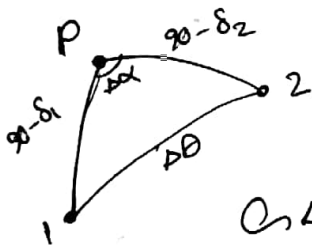
پس با دقت چگالی برابر است با:

حال طول ویژه هر کپشون و جیبی زاویه آن دو را بدست می آوریم:

$$dp_0(1) = 0.566 (\% H_0)$$

$$dp_0(2) = 0.477 (\% H_0)$$

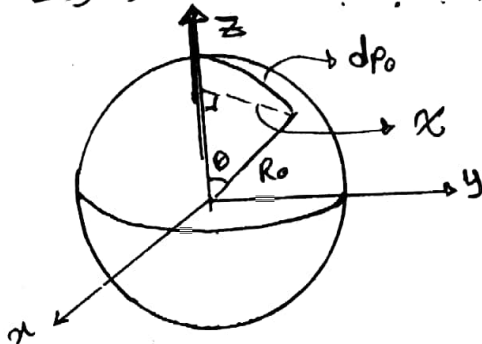
برای جیبی زاویه ای از مثلث کردی داریم:



$$\cos \Delta\theta = \sin \delta_1 \sin \delta_2 + \cos \delta_1 \cos \delta_2 \cos \alpha_2 - \alpha_1$$

$$\Rightarrow \Delta\theta = 81.60^\circ$$

کپشان با انحنای مثبت را می توان با توجه به تعریف  $k$ ، کره ای به شعاع  $R_0 = \frac{1}{\sqrt{k}}$  در نظر گرفت. در این کپشان فواصل ویژه به صورت دایر عظیمه بر روی کره و طول همراه  $(x)$  با توجه به رابطه بدست آمده فاصله از محور  $z$  می باشد:



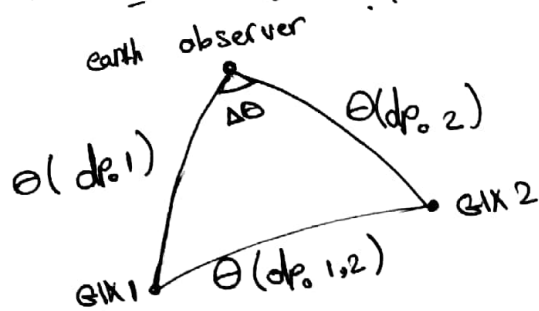
$$\Rightarrow \theta^{\text{rad}} = dp_0 / R_0 = \sqrt{k} dp_0$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{k}} \sin(\sqrt{k} dp_0)$$

تقریباً متناظر با رابطه بدست آمده از تریک



حال فاصله ویژه که نشان ۱ از  $\underline{z}$  به رابطه می آوریم: (که به دلیل همسانگردی و همگنی برابر فاصله ویژه ۲ از  $\underline{z}$  است.)



$$\rightarrow C_{\theta_{12}} = C_{\theta_1} C_{\theta_2} + S_{\theta_1} S_{\theta_2} C_{\Delta\theta}$$

حل ثابت  $k$  را محاسبه می کنیم:

$$-kc^2 = H_0^2 - \frac{8\pi G \delta_0}{3} = H_0^2 (1 - \Omega_0)$$

$$\Rightarrow \cancel{\text{...}} k = \frac{H_0^2}{c^2} (\Omega_0 - 1)$$

$$\Rightarrow R_0 = \frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{c}{H_0} \frac{1}{\sqrt{\Omega_0 - 1}}$$

$$\Rightarrow \frac{R_0}{(c/H_0)} = \frac{1}{\sqrt{\Omega_0 - 1}} = 0.409$$

$$\Rightarrow \theta_1 = 1.385 \text{ rad}, \quad \theta_2 = 1.166 \text{ rad}, \quad \Delta\theta = 81.60^\circ$$

$$\Rightarrow \theta_{12} = 1.364 \text{ rad}$$

$$\rightarrow \text{پس طول ویژه} \quad dp_0^{(12)} = R_0 \theta_{12} = 0.558 \text{ (c/H}_0\text{)}$$

باجایگزینی در رابطه فاصله ویژه به حسب  $\underline{z}$ :  $dp_{1,2} \equiv dp_0^*$

$$dp_0^* (c/H_0) = \frac{2}{\sqrt{\Omega_0 - 1}} \left( \text{sn}^{-1} \left( \sqrt{1 - \frac{\Omega_0 - 1}{\Omega_0(1+z^*)}} \right) - \text{sn}^{-1} (1/\sqrt{\Omega_0}) \right)$$

$$\Rightarrow \text{sn}^{-1} \left( \sqrt{1 - \frac{\Omega_0 - 1}{\Omega_0(1+z^*)}} \right) = \text{sn}^{-1} (1/\sqrt{\Omega_0}) + \frac{\sqrt{\Omega_0 - 1}}{2} dp_0^* = 1.070$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{\Omega_0 - 1}{\Omega_0(1+z^*)} = \text{sn}^2(1.070) = 0.770$$

$$1 - 0.770 = \frac{\Omega_0 - 1}{\Omega_0(1+z^*)} \Rightarrow z^* = \frac{\Omega_0 - 1}{\Omega_0(1 - 0.770)} - 1$$

$$\Rightarrow \boxed{z^* = 2.72} \quad : \text{ الف) قرمز گرایی که نشان ۱ از  $\underline{z}$  به}$$

برای حل کردن قسمت بعدی باید رابطه‌ای برای شار جرم در کیهان بدست آوریم:

فرض می‌کنیم تابش کیهانی که در  $\lambda$  قرار دارد  $L_e$  باشد که به دلیل انبساط کیهان ما  $L_{obs}$  را رصد می‌کنیم. این تابش بر روی سطح کره‌ای پخش می‌شود که مساحت آن را از متریک بدست می‌آوریم:

$$t = t_{obs} \rightarrow ds^2 = a(t_{obs})^2 \chi^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

$dt = 0, d\chi = 0$

المان مساحت برابر با ضرب ابعاد عبارات‌های موجود است:

$$S = \int dA = \int a(t_{obs}) \chi d\theta \cdot a(t_{obs}) \chi \sin \theta d\phi$$

$$S = a(t_{obs})^2 \chi^2 4\pi$$

با انتگرال گیری روی کل زاویه فضایی:

$$L_{obs} = \frac{dE_{obs}}{dt_{obs}}, \quad L_e = \frac{dE_e}{dt_e}$$

و اما برای تابش:

$$\frac{dt_{obs}}{a(t_{obs})} = \frac{dt_e}{a(t_e)} \quad *$$

با توجه به روابط قبل

$$\rightarrow dE_{obs} \propto \sum \text{photon} \propto \frac{hc}{\lambda} \propto \frac{1}{\lambda}$$

چون انرژی رسیده متناسب با انرژی فوتون است

$$\Rightarrow \frac{dE_{obs}}{dE_e} = \frac{\lambda_e}{\lambda_{obs}} = \frac{a(t_e)}{a(t_{obs})}$$

$$\Rightarrow L_{obs} = \frac{dE_{obs}}{dt_{obs}} = \left( \frac{a(t_{obs})}{a(t_e)} \right)^2 \frac{1}{dt_e} \frac{a(t_e)}{a(t_{obs})} dE_e = \left[ \frac{a(t_e)}{a(t_{obs})} \right]^2 L_e$$

$$\rightarrow \text{پس شار} \quad F = \frac{L_{obs}}{S} = \frac{a(t_e)^2}{a(t_{obs})^2} \frac{L_e}{4\pi a(t_{obs})^2 \chi^2}$$

$$t_{obs} = t_0 \text{ حال الان} \Rightarrow F = \frac{L}{4\pi \chi^2 (1+z)^2}$$

$$\text{فاصله درختی تعریف می‌شود} \quad d_L \equiv \sqrt{\frac{L}{4\pi F}} = \chi (1+z)$$

حال تابش کیهان را محاسبه می‌کنیم: (در صفحه بعد)

با مقایسه قدر با قدر خوشه داریم  $\Rightarrow m - m_0 = -2.5 \log(F/F_0)$

$$F = \frac{L}{4\pi d^2}$$

ابتدا  $x$  که کتلان‌ها را محاسبه می‌کنیم  $\rightarrow x = R_0 \sin(\theta) \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0.402 (\%H_0) \\ x_2 = 0.376 (\%H_0) \end{cases}$

و پس با بندی به دست می‌آید:  $d_L = x(1+z) \Rightarrow \begin{cases} d_{L1} = 1.548 (\%H_0) \\ d_{L2} = 1.011 (\%H_0) \end{cases}$

و پس در خوشه کتلان‌ها به دست می‌آید  $F = F_0 10^{\frac{m-m_0}{-2.5}}$   $L = 4\pi d^2 F \Rightarrow \begin{cases} L_1 = 5.97 \times 10^{41} L_0 \\ L_2 = 6.64 \times 10^{42} L_0 \end{cases}$

با توجه به کمترین طول ویژه بین کتلان 1 و 2 از  $d_{PH}$  پس کتلان 2 از دید ناظر کتلان 1 قابل مشاهده است و حال قدر آن را محاسبه می‌کنیم:

$$x_{12} = R_0 \sin(\theta_{12}) = 0.400 (\%H_0) \quad d_{L12} = x_{12}(1+z_{12}) = 1.488 (\%H_0)$$

طول هابل  $\rightarrow r_H \equiv \%H_0 = 4.348 \text{ Gpc}$

$$m_{2,1} = m_{2, \text{نیم}} - 2.5 \log\left(\frac{F_{2,1}}{F_{2, \text{نیم}}}\right) = m_{2, \text{نیم}} - 2.5 \log\left(\frac{d_{L2, \text{نیم}}^2}{d_{L2,1}^2}\right)$$

$\Rightarrow \boxed{m_{2,1} = 83.74 \text{ mag}}$  (با قدر 2 از دید 1)

در حل قسمت ج باید توجه شود که پالی که در حال حاضر از موجود کتلان 2 دریافت شده در زمانی گذشته  $(t_0 - t_1)$  ارسال شده است زمانی که قرمزگرایی کیهان برابر  $z_1 = z_2 = 1.69$  قرار داشته است پس باید فاصله افق زده را در زمان  $z_1$  با فاصله ویژه دو کتلان در آن زمان مقایسه کنیم: (ادامه در صفحه بعد)



رابطه فاصله ویژه بر حسب  $z$  را برای کیهان در  $z_c$  بدست می آوریم:

$$dp(t) = a(t) \int_{t_c}^{t_{obs}} \frac{cdt}{a(t)}$$

$$t = t_{obs} \Rightarrow z(t) = z_c$$

فاصله ویژه را در زمانی می خواهم بدانم که کیهان در  $z_c$  بوده است و به همین دلیل هنگام رصد فوکلن رسیده قرمز برای آن برابر قرمز برای کیهان در آن زمان و یا همان  $z_c$  است:

$$dp(z) = \frac{1}{1+z_c} \int_{z_c}^{z_c} \frac{cdz}{H(z)} = \frac{1}{1+z_c} \int_{z_c}^{z_c} \frac{cdz}{H(z)}$$

$$dp_0 = \int_{t_c}^{t_{obs}} \frac{cdt}{a(t)} = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-kx^2}}$$

اما با توجه به متریک داریم:

اما  $x$  برای یک کیهان در طول زمان ثابت است پس:

$$dp(z) = \frac{1}{1+z_c} dp_0(z)$$

فاصله ویژه در  $z_c$  را با  $dp'$  نشان می دهیم:

$$dp'_{(1,2)} = 0.200 (\%)$$

$$dp'_{PH} = \frac{1}{1+z_c} \int_{z_c}^{\infty} \frac{cdz}{H(z)} \quad \text{و اما برای افق دهر داریم:} \quad z' \rightarrow \infty$$

$$\Rightarrow dp'_{PH} = \frac{1}{1+z_c} \left[ \frac{zc}{H_0 \sqrt{\Omega_0 - 1}} \left( \pi/2 - \sin^{-1} \left( \sqrt{1 - \frac{\Omega_0 - 1}{\Omega_0(1+z)}} \right) \right) \right]$$

$$\Rightarrow dp'_{PH} = 0.182 (\%)$$

$$dp'_{(1,2)} < dp'_{PH}$$

پس کیهان در زمانی که ناظر کیهان در  $z_c$  باشد به سمت زمین فرستاده

برای او قابل مشاهده نبوده است.

بارم بندی سوال :

الف { 85 نمره

نوشتن رابط  $H$  برب  $r$  و  $z$  3 نمره

اثبات معادله شار و رابط  $r$  و  $a$  4 نمره

اثبات رابط  $a$  و  $z$  3 نمره

اثبات رابط  $dp(z)$  و آنکسال لیری 25 نمره

بیت آوردن رابط  $dp_H$  و اندازه گیری 15 نمره

نوشتن ایده کری در تمرین کیهان و رابط  $dp$  و  $\alpha$  10 نمره

بیت آوردن فاصله کیهان ها و فاصله نسی 15 نمره

بیت آوردن  $z$  نسی 10 نمره

ب { 25 نمره

اثبات کامل  $d_L$  10 نمره

بیت آوردن قدر 15 نمره

ج { 30 نمره [ نمره کامل به توضیحات و استلال های کامل و درست داده می شود ]

\* توضیح کوتاه در رابط با کری فرض کردن کیهان :

برای بیت آوردن فاصله بین دو نقطه که هم مختصه  $\varphi$  و  $\theta$  و  $\alpha$  آنها با هم فرق دارد باید از رابط کلی متریک استفاده کرد اما اگر دستگاه مختصات خود را به گونه ای بچرخانیم که تنها مختصه  $\theta$  آن دو نقطه متفاوت باشد و  $d\varphi=0$  شود، متریک به شکل متریک میگویند و بعدی فهم شده در بعد سوم که موجودات آن 2 بعدی هستند و روی سطح آن زندگی می کنند ساده شده و از تعریف  $\alpha$  و  $dp$  در آن کیهان استفاده می کنیم:

$$dS^2 = -c^2 dt^2 + a^2 \left( \frac{dx^2}{1-kx^2} + x^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right)$$

$$d\varphi=0 \rightarrow dS^2 = -c^2 dt^2 + a^2 \left( \frac{dx^2}{1-kx^2} + x^2 d\theta^2 \right)$$

الف)  $\phi = \oint \vec{g} \cdot d\vec{A} = -4\pi G M_{in}$  (نکته: سطح گاوس، ارتفاع  $H$ )

$\vec{g} \cdot \vec{A} = -4\pi G M_{in}$

$M_{in} = \int_0^H \int_0^{2\pi} \int_0^r \rho(r) dr d\theta dz = 2\pi H \int_0^r \rho(r) dr$

$\rightarrow M_{in} = \mu(r) H$

$\Rightarrow g = -\frac{2G\mu(r)}{r}$

ب)  $\rho(r) \rightarrow P(r) = \int_r^R \rho(r') dr'$  (از این رابطه استفاده می‌کنیم). (تقریبی برآورد استفاده نمی‌کنیم)

بررسی کرده نیروهای وارد بر آن

$(P(r) - P(r+dr))A + dm g = dm \ddot{r}$

$-dP$

$dm = \rho A dr \Rightarrow \ddot{r} = g - \frac{dP}{\rho dr}$

ج)  $\ddot{r} = 0 \rightarrow \frac{dP}{dr} = \rho g$   $P = K \rho^{1+1/n} \rightarrow \frac{dP}{dr} = K(1+1/n) \rho^{1/n} \frac{d\rho}{dr}$

$\rightarrow \frac{K(1+n)}{n} \rho^{1/n} \frac{d\rho}{dr} = -\frac{2G\mu(r)}{r} \rho \rightarrow \frac{K(1+n)}{2Gn} \frac{d}{dr} (\rho^{1/n-1} \frac{d\rho}{dr}) = \frac{d\mu}{dr} = 2\pi r \rho$

$\rho = \rho_c \theta^n \rightarrow \frac{d\rho}{dr} = n \rho_c \theta^{n-1} \frac{d\theta}{dr} \Rightarrow -\frac{K(1+n)}{4\pi G} \frac{1}{n} \frac{d}{dr} (\rho_c^{1/n-1} \theta^{1-n} \cdot n \rho_c \theta^{n-1} \frac{d\theta}{dr}) = r \rho_c \theta^n$

$\Rightarrow \frac{K(n+1)}{4\pi G} \rho_c^{1/n-1} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \frac{d\theta}{dr}) = -\theta^n$   $r = \alpha \xi, \alpha^2 = \frac{K(n+1)}{4\pi G} \rho_c^{1/n-1}$

$\Rightarrow \frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} (\xi \frac{d\theta}{d\xi}) = -\theta^n$

$\mu = \int_0^r 2\pi r \rho(r) dr = \int_0^\xi 2\pi \alpha^2 \rho_c \xi \theta^n d\xi = 2\pi \alpha^2 \rho_c \int_0^\xi \xi \theta^n d\xi$

از اینجا ج:  $\xi \theta^n d\xi = -d(\xi \theta')$   $\mu(\xi) = 2\pi \alpha^2 \rho_c \xi \theta'$

$(\frac{d\theta}{d\xi} = \theta')$

$\alpha^2 = \frac{R^2}{\xi_1^2} \Rightarrow \mu(\xi) = -2\pi \frac{R^2}{\xi_1^2} \rho_c \xi \theta'$



$$\rho_c = K \rho_c^{1/n+1}$$

$$\alpha^2 = \frac{k(n+1)}{4\pi G} \rho_c^{1/n-1} = \frac{R^2}{\xi_1^2} \quad (2)$$

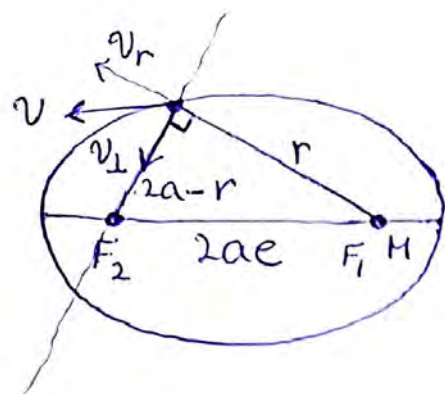
$$\Rightarrow K = \frac{4\pi G}{n+1} \rho_c^{1-1/n} \frac{R^2}{\xi_1^2}$$

$$\mu_1 = -2\pi R^2 \rho_c \frac{1}{\xi_1} \theta'_1 \rightarrow R^2$$

$$\rightarrow R^2 = \frac{\mu_1}{2\pi \rho_c} \frac{\xi_1}{-\theta'_1} \Rightarrow K = \frac{4\pi G}{n+1} \rho_c^{1-1/n} \frac{1}{\xi_1^2} \frac{\mu_1}{2\pi \rho_c} \frac{\xi_1}{-\theta'_1} \quad 5$$

$$\Rightarrow \rho_c = \left( \frac{2G}{n+1} \frac{1}{-\xi_1 \theta'_1} \right) \mu_1 \rho_c$$


---



$$M = 1.429 M_{\odot}$$

$$\frac{r}{a} \equiv \eta$$

الف) برای وجود نقطه بجرانش باید یک  $r$  وجود داشته باشد که در آن شرط گفته شده

اتفاق بیفتد یعنی باید  $\eta$  حقیقی وجود داشته باشد.

$$\Rightarrow \text{طبق مثلث} \quad (2ae)^2 = r^2 + (2a-r)^2 \Rightarrow 4a^2e^2 = r^2 + 4a^2 + r^2 - 4ar$$

$$\Rightarrow (2r^2 - 4ar + 4a^2(1-e^2) = 0) \times \frac{1}{4a^2}$$

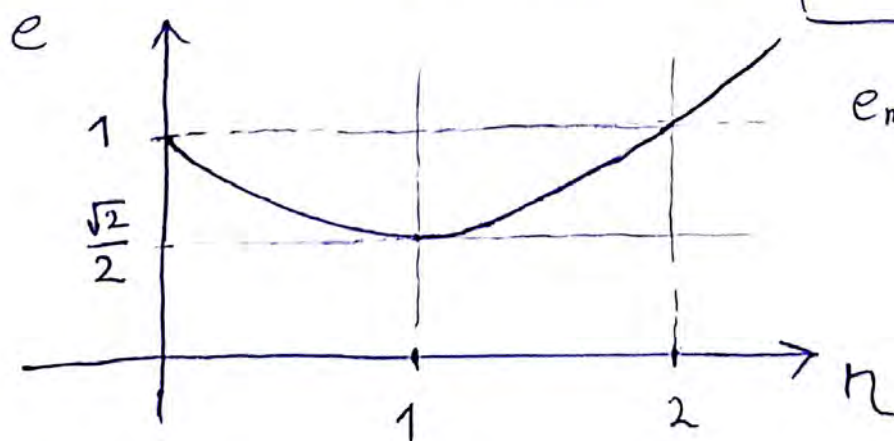
$$\frac{1}{2} \left(\frac{r}{a}\right)^2 - \frac{r}{a} + (1-e^2) = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{1}{2} \eta^2 - \eta + (1-e^2) = 0} \quad (*)$$

$$\Delta \geq 0 \Rightarrow (-1)^2 - 4 \times \frac{1}{2} \times (1-e^2) \geq 0$$

$$\Rightarrow 1 - 2 + 2e^2 \geq 0 \Rightarrow e^2 \geq \frac{1}{2} \Rightarrow e \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{e \geq \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$(*) \Rightarrow e^2 = \frac{1}{2} \eta^2 - \eta + 1 \Rightarrow \boxed{e = \sqrt{1 + \frac{1}{2} \eta^2 - \eta}} \quad (ب)$$



$$e_{\min}: 2ee' = 2\eta \times \frac{1}{2} - 1$$

$$e' = \frac{de}{d\eta} = 0$$

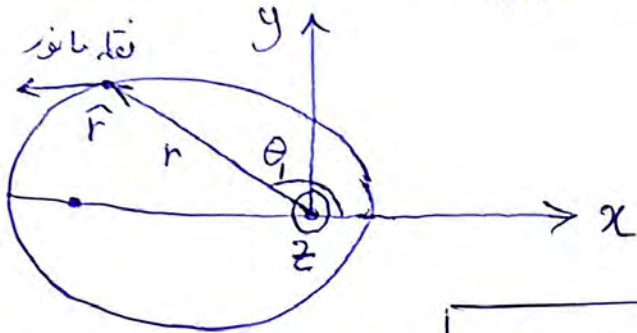
$$\Rightarrow \eta - 1 = 0 \Rightarrow \eta = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{e_{\min} = \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

(ج) مدار نقطه بحرانی دارد:  $e \gg \frac{\sqrt{2}}{2}$  و خروج از مرکز کمترین مقدار ممکن است.

$$\hookrightarrow e = e_{\min} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{پس برای این مدار} \quad e = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \boxed{\eta = 1}$$

$$\eta = \frac{r_{\text{بحرانی}}}{a} = 1 \Rightarrow r_{\text{بحرانی}} = a \Rightarrow a = 2.27 \text{ AU}$$



$$r = 2.516 \text{ AU}, \quad \dot{r} > 0$$

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos \theta_1}, \quad 1-e^2 = 1/2$$

$$\Rightarrow \boxed{\theta_1 = 140.918^\circ}$$

\* سرعت مداری در دستگاه مختصات معیار مداری را می‌دانیم: (Perifocal)

$$\vec{v}_1 = \frac{GM}{h_1} \left[ -\sin \theta_1 \hat{i} + (e + \cos \theta_1) \hat{j} \right]$$

$$h_1 = \sqrt{GMa(1-e^2)} \Rightarrow \frac{GM}{h_1} = 33388.838 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

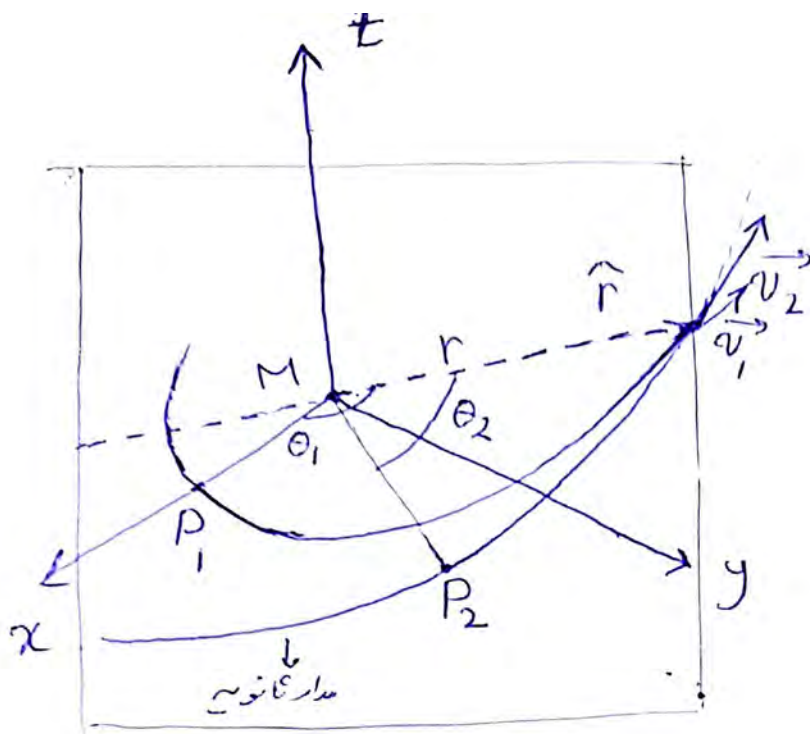
$$\boxed{\vec{v}_1 = \left[ -21049.391 \hat{i} + (-2308.428) \hat{j} \right] \frac{\text{m}}{\text{s}}} \quad \textcircled{\text{I}}$$

$$\left. \begin{array}{l} e' = 0.36 \\ \theta_2 = 63^\circ \\ r = 2.516 \text{ AU} \end{array} \right\} \begin{array}{l} r = \frac{a'(1-e'^2)}{1+e' \cos \theta_2} \Rightarrow a' = \frac{r(1+e' \cos \theta_2)}{1-e'^2} \\ \Rightarrow \boxed{a' = 3.363 \text{ AU}} \end{array}$$

مدار ثانویه:

$$\frac{GM}{h_2} = \sqrt{\frac{GM}{a'(1-e'^2)}} = 20791.047 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$





\* چون مسطح مدار ثانویه به مدار اولیه

$$\hat{v}_{\perp 2} = \hat{K}$$

و از دوران جهت‌ها می‌دانیم:

$$\hat{r} = \cos \theta_1 \hat{i} + \sin \theta_1 \hat{j}$$

$$\vec{v}_2 = \frac{GM}{h_2} \left[ e' \sin \theta_2 \hat{r} + (1 + e' \cos \theta_2) \hat{v}_{\perp 2} \right]$$

$$\vec{v}_2 = \frac{GM}{h_2} \left[ e' \sin \theta_2 \cos \theta_1 \hat{i} + e' \sin \theta_2 \sin \theta_1 \hat{j} + (1 + e' \cos \theta_2) \hat{K} \right]$$

$$\theta_2 = 63^\circ \quad e' = 0.36 \quad \theta_1 = 140.918^\circ \quad \frac{GM}{h_2} = 20791.047 \frac{m}{s}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_2 = \left[ -5176.763 \hat{i} + 4204.341 \hat{j} + 24189.065 \hat{K} \right] \frac{m}{s}$$

(II)

بردار تغییرات سرعت را  
می‌خواهیم

$$\vec{v}_1 + \Delta \vec{v} = \vec{v}_2 \Rightarrow \Delta \vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 \quad \text{(III)}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array} \right\} \Delta \vec{v} = \left[ 15872.628 \hat{i} + 6512.769 \hat{j} + 24189.065 \hat{K} \right] \frac{m}{s}$$

حال صفحات نقطه اوج مدار ثانویه  
را بهت می آوریم.

$$r_A = a'(1 + e')$$

$$r_A = 4.574 \text{ AU}$$

$$\vec{r}_A = r_A (\sin \theta_2 \hat{k} - \cos \theta_2 \hat{r})$$

$$\vec{r}_A = r_A (-\cos \theta_2 \cos \theta_1 \hat{i} - \cos \theta_2 \sin \theta_1 \hat{j} + \sin \theta_2 \hat{k})$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{r}_A = [1.612 \hat{i} - 1.309 \hat{j} + 4.075 \hat{k}] \text{ AU}} \quad (2)$$

\* می دانیم که سرعت امواج الکترومغناطیس ثابت و برابر سرعت نور است پس:

$$t = \frac{\Delta S}{c}$$

↓  
سرعت نور

\* زمان لازم برای ارسال پالس است و  $\Delta S$  مسافتی که نور باید  
به طور کلی طی کند تا به مقصد برسد که برای سنجش کردن  $t$   
باید  $\Delta S$  را کمینه کنیم که به طور بدیهی کوتاه ترین فاصله بین دو نقطه  
خط گذرنده از آن نقطه است.

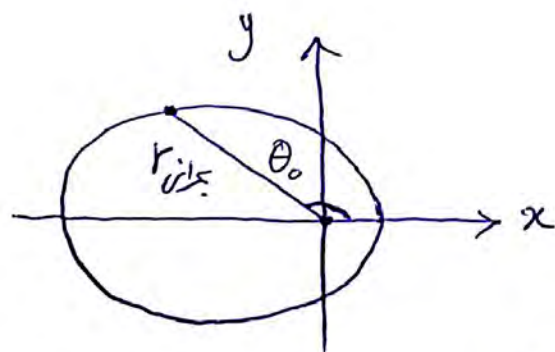
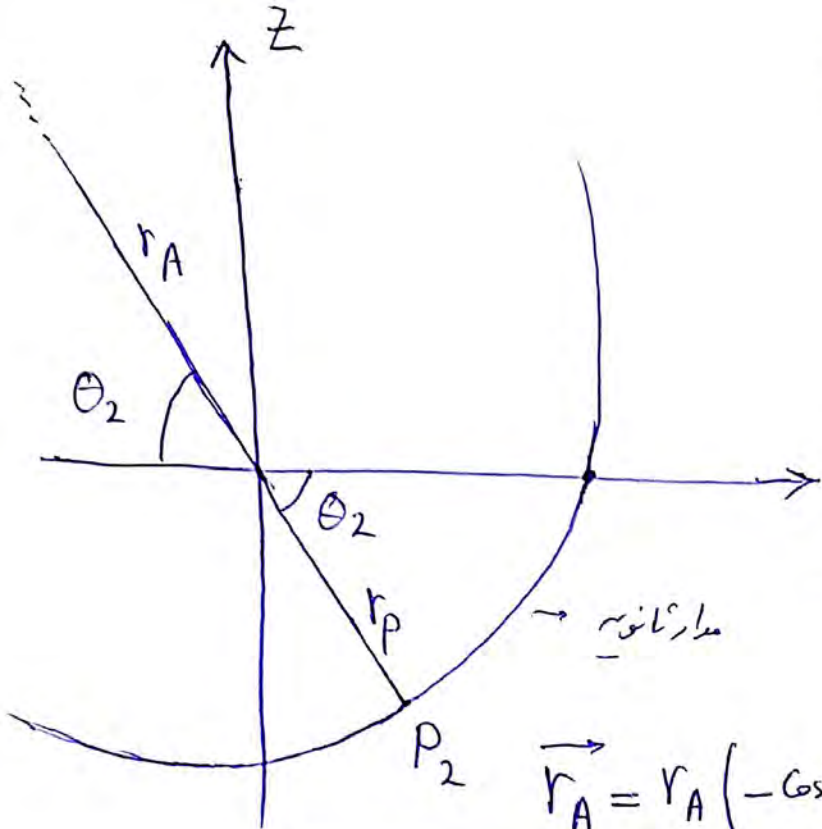
حال مختصات نقطه بجران مذکور را بهت می آوریم:

$$r_{\text{جران}} = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos \theta_0} \Rightarrow \cos \theta_0 = \frac{1}{e} \left( \frac{a(1-e^2)}{r_{\text{جران}}} - 1 \right)$$

$$\Rightarrow \theta_0 = 135^\circ \quad \leftarrow \text{پس برای مدار اولیه } h=1$$

$$\vec{r}_{\text{جران}} = r_{\text{جران}} (\cos \theta_0 \hat{i} + \sin \theta_0 \hat{j}) = r_{\text{جران}} \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} \hat{i} + \frac{\sqrt{2}}{2} \hat{j} \right)$$

$$\vec{r}_{\text{جران}} = [-1.605 \hat{i} + 1.605 \hat{j}] \text{ AU}$$





$$\Delta S = \sqrt{(\vec{r}_A - \vec{r}_{\text{جرانه}}) \cdot (\vec{r}_A - \vec{r}_{\text{جرانه}})} \quad \text{حال مقدار } \Delta S \text{ را به دست آوریم:}$$

$$\Delta S = 5.954 \text{ AU} \Rightarrow t_{\min} = 49.614 \text{ min}$$

$$\Delta S^2 = r_A^2 + r_{\text{جرانه}}^2 + 2r_A r_{\text{جرانه}} \cos \theta_2 \Rightarrow \Delta S = 5.958 \text{ AU}$$

$$t_{\min} = 49.653 \text{ min}$$

$$T'^2 = \frac{4\pi^2}{GM} a'^3 \quad (8)$$

$$\Rightarrow T' = 1891.24787 \text{ day} \\ \approx 5.178 \text{ yr}$$

$$\begin{cases} \theta_2 = 63^\circ \\ \theta_3 = 117^\circ \end{cases}$$

\* برای  $E_2$  و  $E_3$  را به دست آوریم:

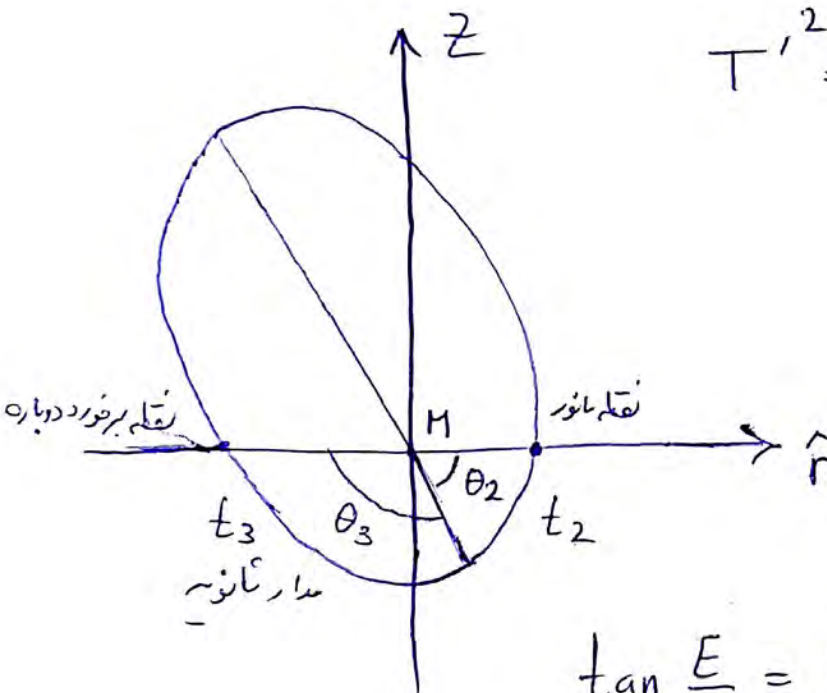
$$\tan \frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1-e'}{1+e'}} \tan \theta_{1/2}$$

$$\Rightarrow E = 2 \tan^{-1} \left[ \sqrt{\frac{1-e'}{1+e'}} \tan \theta_{1/2} \right] \quad \begin{cases} E_2 = 45.6016^\circ \\ E_3 = 96.4510^\circ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} E_2 = 0.7959 \text{ rad} \\ E_3 = 1.6834 \text{ rad} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{2\pi}{T'} t = M = E - e' \sin E$$

$$t = \frac{T'}{2\pi} (E - e' \sin E) \Rightarrow \begin{cases} t_2 = 162.144 \text{ day} \\ t_3 = 399.0316 \text{ day} \end{cases}$$





$t_*$ : زمان خواسته که مدت زمان طریقه از لفظ مانور تا برخورد دوباره با صفحه مدار اولیه

$$\rightarrow t_* = T' - t_2 - t_3$$

$$t_* = 3.64154 \text{ yr}$$

$$\rightarrow t_* = 1330.072 \text{ day}$$

$t_f$ : زمان که یک فرآیند ارسال و دریافت پاسخ

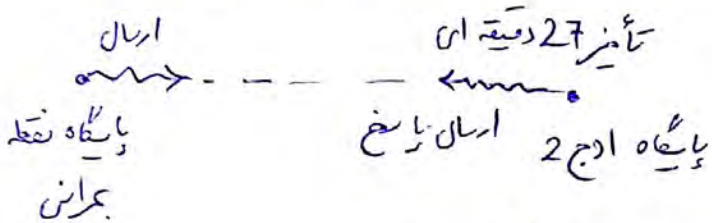
$$t_f = t_i + t_j + t_k + t_w$$

$t_i$ : زمان لازم برای ارسال

$t_j$ : زمان لازم برای دریافت پاسخ

$t_k$ : زمان تأخیر ایستگاه اوج 2 تا پاسخ

$t_w$ : زمان لازم تا ارسال پالس بعد از دریافت پاسخ توسط ایستگاه بفرست



$$\Rightarrow t_i = t_j = \frac{\Delta S}{c}, \quad t_k = 27 \text{ min}, \quad t_w = 0$$

$$\Rightarrow t_f = 126.306 \text{ min} = 2.1051 \text{ h}$$

$$N_f = \frac{t_*}{t_f} = 15163.996 \approx 15164$$

تعداد فرآیند انجام شده در مدت کل  $t_*$

$$N_f = \frac{t_*}{t_f} \approx 15173$$

اگر  $\frac{\Delta S}{c}$  را از راه دیگر برشیم:

M N D D V O A Y D B

V 2 B O K B M B V M

B D ...