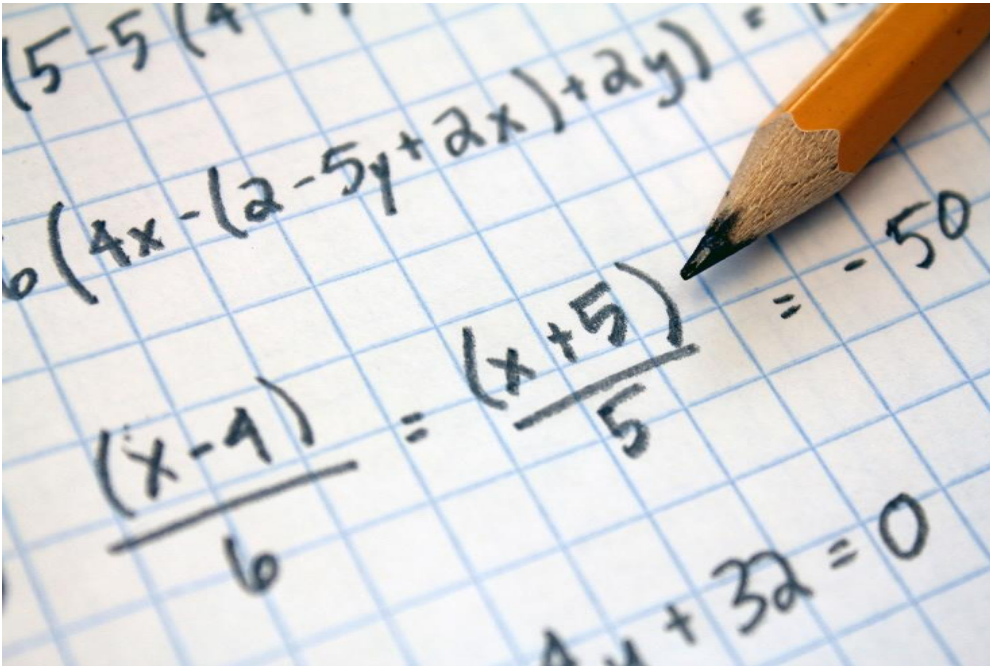


مروری بر ریاضیات پایه



مهندس محمد زارع





این نوشتار با هدف یادآوری مفاهیم پایه در ریاضیات که عمدتاً در دروس فنی و مهندسی مورد استفاده قرار می‌گیرند، تهیه و تدوین شده است. در تهیه این مجموعه تلاش شده است مفاهیم مورد نیاز، به اختصار و با رعایت بیان علمی ارائه شوند. امید است دانشجویان محترم از این مجموعه بهره لازم را ببرند.

در تهیه این مجموعه، دانشجویان محترم مهندسی برق آقایان مهدی نیازکار و سیدمهدی حسینی کمک شایانی نموده‌اند که از ایشان تشکر و قدردانی می‌شود.

از کلیه دانشجویان عزیز و خوانندگان محترم تقاضا می‌شود ایرادهای احتمالی، پیشنهادات و انتقادهای خود را از طریق وبسایت شخصی مهندس مجید زارع به آدرس www.majidzare.ir مکاتبه نمایند.

با آرزوی توفیق

برای عوض کردن زندگیمان، برای تغییر دادن خودمان، هیچگاه دیر نیست.

هرچند سال که داشته باشیم، هرگونه که زندگی کرده باشیم، هر اتفاقی که از سر گذرانده باشیم، بازهم نوشدن ممکن است.

حتی اگر یک روزمان درست مثل روز قبلش باشد، باید افسوس بخوریم.

باید در هر لحظه و نفسی نوشد!

برای رسیدن به زندگی نو باید پیش از مرگ مرد!

الیف شافاک

در مورد تاریخچه ریاضی چه می دانید؟

در بررسی تاریخچه علم ریاضی می توان گفت که تقریباً تمام کارهای مهم ریاضی قرن چهارم بوسیله دوستان یا شاگردان افلاطون انجام شده بود. برای بررسی تاریخچه اعداد صحیح ($\{ \dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots \}$) باید به تاریخچه اعداد منفی بپردازیم. نخستین ظهور اعداد منفی در ریاضی به پنجاه تا صد سال قبل از میلاد و سرزمین چین باز می گردد.

تاریخچه علم ریاضی

انسان اولیه نسبت به اعداد بیگانه بود و شمارش اشیاء اطراف خود را به حسب غریزه یعنی همانطور که مثلاً مرغ خانگی تعداد جوجه هایش را می داند انجام می داد اما به زودی مجبور شد وسیله شمارش دقیق تری بوجود آورد لذا به کمک انگشتان دست دستگاه شماری پدید آورد که مبنای آن ۶۰ بود. این دستگاه شمار که بسیار پیچیده می باشد قدیمی ترین دستگاه شماری است که آثاری از آن در کهن ترین مدارک موجود یعنی نوشته های سومری مشاهده می شود. سومریها که تمدنشان مربوط به حدود هزار سال قبل از میلاد مسیح است در جنوب بین النهرین یعنی ناحیه بین دو رود دجله و فرات ساکن بودند. آنها در حدود ۲۵۰۰ سال قبل از میلاد با امپراطوری سامی عکاد متحد شدند و امپراطوری و تمدن آشوری را پدید آوردند.

سه قرن اول ریاضیات یونانی که با تلاشهای اولیه در هندسه برهانی بوسیله تالس در حدود ۶۰۰ سال قبل از میلاد شروع شده و با کتاب برجسته اصول اقلیدس در حدود ۳۰۰ سال قبل از میلاد به اوج رسید، دوره ای از دستاوردهای خارق العاده را در ریاضی تشکیل می دهد. در حدود ۱۲۰۰ سال قبل از میلاد بود که قبایل بدوی "دوریایی" با ترک دژهای کوهستانی شمال برای دستیابی به قلمروهای مساعدتر در امتداد جنوب راهی شبه جزیره یونان شدند و متعاقب آن قبیله بزرگ آنها یعنی اسپارت را بنا کردند. بخش مهمی از سکنه قبلی برای حفظ جان خود، به آسیای صغیر و زایر یونانی و جزایر یونانی دریای اژه گریختند و بعدها در آنجا مهاجرنشینهای تجاری یونانی را برپا کردند. در این مهاجرنشینها بود که در قرن ششم (ق.م) اساس مکتب یونانی نهاده شد و فلسفه یونانی شکوفا شد و هندسه برهانی تولد یافت. در این ضمن ایران بدل به امپراطوری بزرگ نظامی شده بود و به پیروزی از یک برنامه توسعه طلبانه در سال ۵۴۶ (ق.م) شهر یونیا و مهاجرنشینهای یونانی آسیای صغیر را تسخیر نمود. در نتیجه عده ای از فیلسوفان یونانی مانند فیثاغورث موطن خود را ترک و به مهاجرنشینهای در حال رونق جنوب ایتالیا کوچ کردند. مدارس فلسفه و ریاضیات در "کروتونا" زیر نظر فیثاغورث در "الیا" زیر نظر کسنوفانس، زنون و پارمیندس پدید آمدند.

در حدود ۴۸۰ سال قبل از میلاد آرامش پنجاه ساله برای آتنی ها پیش آمد که دوره درخشانی در تاریخ ریاضی برای آنان بود و ریاضیدانان زیادی به آتن جذب شدند. در سال ۴۳۱ (ق.م) با آغاز جنگ "پلوپونزی" بین آتنیهای و اسپارتهای، صلح به پایان رسید و با شکست آتنیها دوباره رکورد جدیدی در تاریخ ریاضیات حاصل شد.

ظهور افلاطون و نقش وی در تولید علم ریاضی

اگرچه با پایان جنگ پلوپونزی مبادله قدرت سیاسی کم اهمیت تر شد، اما رهبری فرهنگی خود را دوباره بدست آورد. افلاطون در آتن یا حوالی آن و در سال ۴۲۷ (م) که در همان سال نیز طاعون بزرگی شیوع یافت و یک چهارم جمعیت آتن را هلاک کرد و موجب شکست آنها شد، به دنیا آمد، افلاطون فلسفه را در آنجا زیر نظر سقراط خواند و سپس در پی کسب حکم عازم سیر و سفرهای طولانی

شد. وی بدین ترتیب ریاضی را زیر نظر تیودوروس در ساحل آفریقا تحصیل کرد. افلاطون در بازگشت به آتن در حدود سال ۳۸۷ (ق.م) آکادمی معروف خود را تاسیس کرد.

در بررسی تاریخچه ریاضی می توان گفت که تقریباً تمام کارهای مهم ریاضی قرن چهارم بوسیله دوستان یا شاگردان افلاطون انجام شده بود. آکادمی افلاطون به عنوان حلقه ارتباط ریاضیات فیثاغورثیان اولیه و ریاضیات اسکندریه در آمد. تاثیر افلاطون بر علم ریاضی، معلول هیچ یک از کشفیات ریاضی وی نبود، بلکه به خاطر این اعتقاد شورانگیز وی بود که مطالعه ریاضیات عالیترین زمینه را برای تعلیم ذهن فراهم می آورد و از این رو در پرورش فیلسوفان و کسانی که می بایست دولت آرمانی را اداره کنند، نقش اساسی داشت. این اعتقاد، شعار معروف او را بر سر در آکادمی وی توجیه می کند: "کسی که هندسه نمی داند، داخل نشود".

بنابراین به دلیل رکن منطقی و نحوه برخورد ذهنی نابی که تصور می کرد مطالعه ریاضیات در شخص ایجاد می کند، ریاضیات به نظر افلاطون از بیشترین اهمیت برخوردار بود، و به همین جهت بود که جای پر ارزش را در برنامه درس آکادمی اشغال می کرد.

تاریخچه اعداد در ریاضی

سیستم چوب خط به عنوان قدیمی ترین سیستم نمایش اعداد در ریاضی شناخته می شود.

تاریخچه اعداد طبیعی در ریاضی

استخوان ها و تکه چوبهایی بسیار قدیمی یافت شده که روی آنها شیارهایی وجود دارد. دانشمندان معتقدند این شیارها نماد نخستین استفاده ی بشر از اعداد هستند و می تواند نشانگر تعداد روزهای سپری شده یا تعداد دام های بشر اولیه باشد. این سیستم نمایش اعداد که "سیستم چوب خط" نامیده می شود (مثل خطوطی که زندانیان در فیلم ها برای روزهای سپری شده در زندان روی دیوار می کشند) نشانگر اعداد طبیعی است ($\{1, 2, 3, \dots\}$). سیستم چوب خط دارای مفهوم "ارزش مکانی" نیست (مثل جایگاه دهگان، صدگان، هزارگان در سیستم با مبنای ده) و به همین خاطر دارای محدودیت نمایش اعداد بزرگ است. با این وجود سیستم چوب خط به عنوان قدیمی ترین سیستم نمایش اعداد شناخته می شوند.

قدیمی ترین سیستم نمایش اعداد ریاضی که دارای مفهوم ارزش مکانیست، سیستم نمایش اعداد با مبنای شصت است که به بابلیان در ۳۴۰۰ سال قبل از میلاد برمی گردد. همچنین قدیمی ترین سیستم نمایش اعداد ریاضی با مبنای ده (مثل اعداد امروزی) به مصریان در ۳۱۰۰ سال قبل از میلاد باز می گردد.

تاریخچه اعداد حسابی در علم ریاضی

اعداد حسابی در ریاضی همان مجموعه ی اعداد طبیعی به اضافه ی عدد صفر است ($\{0, 1, 2, \dots\}$) در نتیجه تاریخچه اعداد حسابی در واقع همان تاریخچه ی عدد صفر می باشد. اولین استفاده از صفر به عنوان عدد در ریاضی به استفاده از آن در "سیستم نمایش اعداد با ارزش مکانی" به عنوان "مکان نگه دار" برمی گردد. مثلاً در سیستم با مبنای ده، تفاوت عدد یک با عدد ده تنها در یک صفر است. در واقع عدد صفر اینجا نقش مکان نگه دار را دارد یعنی مکان یکان را برای عدد ده نگه داشته است تا عدد یک نقش دهگان را

داشته باشد. در بررسی تاریخچه ریاضیات باید گفت بابلیان، مصریان و هندیان در متون خود از عدد صفر استفاده کرده اند. همچنین اسناد بجا مانده نشان می دهد که مایاها (قوم مایا در قاره امریکا) نیز از عدد صفر استفاده می کرده اند.

یونانیان باستان در مورد استفاده از صفر به عنوان یک عدد دچار شک بوده اند. آنها از خود می پرسیده اند "چگونه هیچ چیز می تواند چیزی باشد؟" که منظور از "هیچ چیز" همان صفر به مفهوم هیچ، عدم وجود یا خلا است. این سوال بحث های فلسفی جالبی را در آن زمان به راه انداخت.

تاریخچه اعداد صحیح ریاضی

برای بررسی تاریخچه اعداد صحیح ($\dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots$) باید به تاریخچه اعداد منفی بپردازیم. نخستین ظهور اعداد منفی در ریاضی به پنجاه تا صد سال قبل از میلاد و سرزمین چین باز می گردد. در کتاب "نه فصل درباره ی هنر ریاضی" که جزو قدیمی ترین کتب چینی در زمینه ی ریاضیات است از اعداد منفی در محاسبه ی مساحت شکل های هندسی استفاده شده است.

"دیوفانت اسکندرانی" ریاضیدان یونانی اولین دانشمند غربی بود که در قرن سوم میلادی و در حل معادلات درجه یک، به اعداد منفی برخورد کرد اما آن را غیرمعقول و مضحک توصیف کرد. هندی ها در قرن ششم از اعداد منفی در ریاضی برای نمایش بدهی استفاده می کردند. همچنین دانشمند هندی "براهما گوپتا" در سال ۶۲۸ در کتاب خود از اعداد منفی ریاضی برای نمایش ریشه های معادله ی درجه دو استفاده می کند. فرمولی که او بکار برد امروزه نیز در ریاضیات بکار می رود. اروپاییان تا قرن هفدهم غالباً در برابر استفاده از اعداد منفی در ریاضی مقاومت می کردند و جواب های منفی معادلات را نادیده می گرفتند و آن را بی معنی تعبیر می کردند (هرچند "فیبوناچی" در قرن سیزدهم جواب های منفی را در مساله های مالی پذیرفته می دانست و آن را به عنوان بدهی تعبیر می کرد).

در قرن هجدهم "رنه دکارت" از اعداد منفی در نمایش "دستگاه مختصات دکارتی" استفاده کرد.

تاریخچه اعداد گویا در ریاضیات

در بررسی تاریخچه اعداد گویا در ریاضیات باید گفت که احتمالاً مفهوم اعداد گویا $\frac{a}{b}$ بطوریکه a, b اعداد طبیعی باشند یا اعداد کسری به زمان بسیار قدیم باز می گردد. مصریان قدیم از "کسرهای مصری" برای نمایش اعداد گویا در متون ریاضی خود استفاده کرده اند. دانشمندان یونانی و هندی نیز مطالعاتی را بر روی اعداد گویا به عنوان زیرشاخه ای از "نظریه اعداد" انجام داده اند که شناخته شده ترین این مطالعات به اقلیدس در ۳۰۰ سال پیش از میلاد باز می گردد.

تاریخچه اعداد گنگ در ریاضیات

اعداد حقیقی ای که در ریاضی گویا نباشند گنگ نامیده می شوند. نخستین استفاده از اعداد گنگ در ریاضی در متون هندی (هشتصد تا پانصد سال قبل از میلاد) دیده می شود اما نخستین اثبات وجود اعداد گنگ در ریاضیات به "فیثاغوریان" منتصب است. فیثاغورثیان، پیروان و شاگردان فیثاغورث فیلسوف و ریاضیدان یونانی بودند که توانستند اثباتی هندسی برای وجود عدد گنگ $\sqrt{2}$ در ریاضی ارائه کنند. نقل است که در رقابت های علمی ریاضی که در آن زمان بین گروه های مختلف در جریان بود این عدد در ریاضیات نقش برگ برنده را برای فیثاغورثیان بازی کرد. آنان تلاش کردند تا در ریاضی این عدد را بصورت کسری نمایش دهند اما موفق نشدند

(امکان نمایش کسری عدد گنگ در ریاضی وجود ندارد که در غیر اینصورت آن عدد گویا خواهد بود نه گنگ). عدد گنگ $\sqrt{2}$ یک "عدد جبری" در ریاضیات است (عدد جبری عددیست که ریشه ی یک چند جمله ای یک متغیره با ضرایب گویا باشد).

اعداد غیر جبری در ریاضی را "اعداد متعالی" می نامند. اگر خود را به مجموعه ی اعداد حقیقی محدود کنیم اعداد متعالی زیر مجموعه ی اعداد گنگ هستند و مهمترین آنان "عدد نپر" و "عدد پی" است. بنا به شواهد تاریخی نخستین بار عدد پی توسط بابلیان (۳,۱۲۵) و مصریان (۳,۱۶۰۴) در ۱۹۰۰ سال قبل از میلاد محاسبه شد که هر دو تا یک رقم اعشار صحیح است. همچنین عدد نپر به منتصب به "جان نپر" دانشمند اسکاتلندی و معرف لگاریتم است که در قرن شانزدهم و هفدهم می زیست.

تاریخچه اعداد مختلط در علم ریاضی

مفهوم اعداد مختلط در ریاضی رابطه ی مستقیمی با ریشه ی یک اعداد منفی دارد. در مورد تاریخچه اعداد مختلط در ریاضی می توان گفت، نخستین برخورد با ریشه ی یک عدد منفی برمی گردد به قرن اول میلادی جایی که دانشمند یونانی "هرون اسکندریه" مشغول محاسبه ی حجم "هرم ناقص" بود. همچنین همانطور که در مبحث تاریخچه اعداد منفی گفته شد "براهما گوپتا" دانشمند هندی فرمولی برای ریشه های معادله ی مرتبه دو ارائه کرد که او نیز در آنجا با ریشه ی اعداد منفی روبرو شد. این موضوع بعدها در قرن شانزدهم یعنی زمانی که دانشمندان اروپایی به دنبال یافتن فرمول های مشخص برای نمایش ریشه های معادلات مرتبه سه و چهار در ریاضی بودند برجسته تر شد. این مساله زمانی بغرنج تر می شد که به یاد بیاوریم که در آن زمان اروپاییان اعداد منفی را در ریاضی هم نادیده می گرفتند چه برسد به ریشه ی اعداد منفی!!! در سال ۱۶۳۷ "رنه دکارت" واژه ی موهومی را به این اعداد در ریاضی نسبت داد.

بعدها در قرن هجدهم "آبراهام دمویر" و "لئونارد اویلر" فرمول های برای اعداد مختلط ارائه دادند. وجود اعداد مختلط بطور کامل پذیرفته نشده بود تا اینکه در سال ۱۷۹۹ "کاسپر وسل" تعبیری هندسی برای اعداد مختلط ریاضی ارائه کرد. در همین سال "کارل فردریش گاوس" اثبات یکی از مهمترین قضایای ریاضی یعنی "قضیه اساسی جبر" را ارائه کرد که نشان می دهد هر چند جمله ای مرتبه ی n با ضرایب مختلط دارای n ریشه ی مختلط است.

تاریخچه عدد بی نهایت در ریاضی

نخستین بار مفهوم ریاضی بی نهایت در یک دستخط هندی دیده می شود که می گوید "اگر مقداری به بینهایت اضافه کنیم یا مقداری از بینهایت کم کنیم آنچه باقی می ماند همچنان بینهایت خواهد بود". مفهوم بینهایت عنوان رایجی برای مطالعات فلسفی بوداییان هندی در ۴۰۰ سال قبل از میلاد بود. ارسطو نماد سنتی بینهایت تعریف کرد. گالیله در قرن هفدهم و در کتاب "دو علم جدید" در مورد ایده ی تناظر یک به یک بین مجموعه های نامتناهی ریاضی صحبت کرد. اما پیشرفت مهم بعدی در این زمینه به نظریه ی "جورج کانتور" بر می گردد.

مسیرهای تکامل ریاضیات در یونان

در تکامل علم ریاضی، پس از فیثاغورث باید از زنون، ریاضیدان یونانی نام ببریم. در بررسی تاریخچه تکامل ریاضی طی ۳۰۰ سال اول، سه خط سیر مهم و متمایز را می توان تشخیص داد.

• ابتدا، بسط مطالبی در ریاضی است که در اصول مدون شد، که با توانایی توسط فیثاغورثیان شروع شد و بعدها بقرط، ایودوروس، تیائیتوس، دیگران مطالبی به آن اضافه کردند.

• خط سیر دوم تکامل ریاضی شامل بسط مفاهیمی است در رابطه با بی نهایت کوچکها و روندهای حدی و مجموع یابی که تا بعد از اختراع حساب دیفرانسیل و انتگرال در دوارن معاصر به وضوح نهایی دست نیافتند. پارادوکسهای زنون؛ روش افنای آنتیخوان و ایودوکسوس و نظر اتمی بودن جهان که به نام دموکریتوس مربوط است، به مسیر رشد دوم تعلق دارند.

• سومین مسیر تکامل ریاضی مربوط به هندسه عالی یا هندسه منحنی هایی بجز دایره و خط مستقیم و سطوحی غیر از کره و صفحه است. شگفت آنکه قسمت عمده این هندسه عالی در تلاشهای مستمر برای حل سه مساله ترسیم که امروزه هم مشهورند عبارتند از: تضعیف مکعب، تثلیث زاویه و تربیع دایره اختصاص دارد.

دانشمندان موثر در تکامل علم ریاضی

نخستین دانشمند معروف یونانی طالاس ملطلی (۶۳۹-۵۴۸ ق. م.) است که در پیدایش علوم نقش مهمی به عهده داشت و می توان وی را موجد علوم فیزیک، نجوم و هندسه دانست. در اوایل قرن ششم ق. م. فیثاغورث (۵۷۲-۵۰۰ ق. م.) از اهالی ساموس یونان کم کم ریاضیات را بر پایه و اساسی قرار داد و به ایجاد مکتب فلسفی خویش همت گماشت. در تکامل دانش ریاضی، پس از فیثاغورث باید از زنون فیلسوف و ریاضیدان یونانی که در ۴۹۰ ق. م. در ایلیا متولد شده است نام ببریم. در اوایل نیمه دوم قرن پنجم بقرط از اهالی کیوس قضایای متفرق آن زمان را گردآوری کرد و در حقیقت همین قضایا است که مبانی هندسه جدید ما را تشکیل می دهند.

در قرن چهارم قبل از میلاد افلاطون در باغ آکادموس در آتن مکتبی ایجاد کرد که نه قرن بعد از او نیز همچنان برپا ماند. این فیلسوف بزرگ به تکمیل منطق که رکن اساسی ریاضیات است همت گماشت و چندی بعد منجم و ریاضی دان معاصر وی ادوکس با ایجاد تئوری نسبتها نشان داد که کمیات اندازه نگرفتنی که تا آن زمان در مسیر علوم ریاضی گودالی حفر کرده بود هیچ چیز غیرعادی ندارد و می توان مانند سایر اعداد قواعد حساب را در مورد آنها به کار برد.

در قرن دوم نام تنها ریاضی دانی که بیش از همه تجلی داشت ابرخس یا هیپارک بود. این ریاضیدان و منجم بزرگ گامهای بلند و استادانه ای در علم نجوم برداشت و مثلثات را نیز اختراع کرد. بطلمیوس که به احتمال قوی با امپراطوران بطالسه هیچگونه ارتباطی ندارد در تعقیب افکار هیپارک بسیار کوشید. در سال ۶۲۲ م. که حضرت محمد (ص) از مکه هجرت نمود در واقع آغاز شکفتگی تمدن اسلام بود. در زمان مأمون خلیفه عباسی تمدن اسلام به حد اعتلای خود رسید به طوری که از اواسط قرن هشتم تا اواخر قرن یازدهم زبان عربی زبان علمی بین المللی شد. از ریاضیدانان بزرگ اسلامی این دوره یکی خوارزمی می باشد که در سال ۸۲۰ به هنگام خلافت مأمون در بغداد کتاب مشهور الجبر و المقابله را نوشت. دیگر ابوالوفا (۹۳۸-۹۹۸) است که جداول مثلثاتی ذیقیمتی پدید آورد و بالاخره محمد بن هیثم (۹۶۵-۱۰۳۹) معروف به الحسن را باید نام برد که صاحب تألیفات بسیاری در ریاضی و نجوم است. قرون وسطی از قرن پنجم تا قرن دوازدهم یکی از دردناکترین ادوار تاریخی اروپاست. عامه مردم در منتهای فلاکت و بدبختی به سر می بردند. برجسته ترین نامهایی که در این دوره ملاحظه می نماییم در مرحله اول لئونارد بوناکسی (۱۱۷۰-۱۲۲۰) ریاضیدان ایتالیایی است. دیگر نیکلارسم فرانسوی می باشد که باید او را پیش قدم هندسه تحلیلی دانست.

در قرون پانزدهم و شانزدهم دانشمندان ایتالیایی و شاگردان آلمانی آنها در حساب عددی جبر و مکانیک ترقیات شایان نمودند. در اواخر قرن شانزدهم در فرانسه شخصی به نام فرانسوا ویت (۱۵۴۰-۱۶۰۳م) به پیشرفت علوم ریاضی خدمات ارزنده‌ای نمود. وی یکی از واضعین بزرگ علم جبر و مقابله جدید و در عین حال هندسه دان قابل بود.

در نیمه دوم قرن هفدهم ریاضی بطور دقیق دنبال شد. سه نابغه فنا ناپذیر این دوره یعنی نیوتن انگلیسی، لایب نیتس آلمانی و هویگنس هلندی جهان علم را روشن کرده بودند. لایب نیتس در سال ۱۶۸۴ با انتشار مقاله‌ای درباره حساب عناصر بی نهایت کوچک انقلابی برپا کرد. هویگنس نیز در تکمیل دینامیک و مکانیک استدلالی با نیوتن همکاری کرد و عملیات مختلف آنها باعث شد که ارزش واقعی حساب انتگرال در توسعه علوم دقیقه روشن شود.

در قرن هجدهم دیگر تمام طوفانهای قرن هفدهم فرو نشست و تحولات این قرن عجیب به یک دوره آرامش مبدل گردید. دالامبر فرانسوی آنالیز ریاضی را در مکانیک به کار برد و از روشهای آن استفاده کرد. کلرو رقیب او در ۱۸ سالگی کتابی به نام تفحصات درباره منحنی‌های دو انحنايي انتشار داد و در مدت شانزده سال رساله‌ای تهیه و به آکادمی علوم تقدیم نمود که شامل مطالب قابل توجهی مخصوصاً در مورد مکانیک آسمانی و هندسه بی نهایت کوچکها بود. دیگر لئونارد اویلر ریاضیدان بزرگ سوئیسی است که در ۱۵ آوریل ۱۷۰۷ م. در شهر بال متولد شد و در ۱۷ سپتامبر ۱۷۸۳ م. در روسیه درگذشت.

لاگرانژ از جمله بزرگترین ریاضیدانان تمام ادوار تاریخ بشر است. مکانیک تحلیلی او که در سال ۱۷۸۸. عمومیت یافت بزرگترین شاهکار وی به شمار می‌رود. لاپلاس که در تدریس ریاضی دانشسرای عالی پاریس معاون لاگرانژ بود کتابی تحت عنوان مکانیک آسمانی در پنج جلد انتشار داد. گاسپار مونژ این نابغه دانشمند وقتی که هنوز بیست سال نداشت شاخه جدید علم هندسه به نام هندسه ترسیمی را بوجود آورد.

ژان باتیست فوریه در مسأله انتشار حرارت روش بدیع و جالبی اختراع کرد که یکی از مهمترین مباحث آنالیز ریاضی گردید. از دیگر دانشمندان بزرگ ریاضی این قرن سیمون دنی پواسون (۱۷۸۱-۱۸۴۰) فرانسوی و شاگرد لاپلاس می‌باشد که اکتشافات مهمی در ریاضیات نمود گاوس ریاضیدان شهیر آلمانی تئوری کامل مغناطیس را بوجود آورد. مطالعات او درباره انحناء و ترسیم نقشه‌ها و نمایش سطوح بر صفحات اصلی و اساسی می‌باشد. کوشی فرانسوی که در سراسر نیمه اول قرن پانزدهم بر دیگر هموطنان برتری داشت با منطق دقیق خود تئوری‌های زیادی از حساب انتگرال را در ریاضی توسعه داد.

آبل در سال ۱۸۲۴ ثابت نمود که صرفنظر از معادلات درجه اول تا درجه چهارم هیچ دستور جبری که بتواند معادله درجه پنجم را به نتیجه برساند وجود ندارد. گالوا که در ۲۶ اکتبر ۱۸۱۱ م. در پاریس متولد شد تئوری گروهها را که قبلاً بوسیله کوشی و لاگرانژ مطالعه شده بود در معادلات جبری به کار برد و گروه جانشینی هر معادله را مشخص کرد. دیگر از دانشمندان بزرگ ریاضی در این قرن ژنرال پونسله فرانسوی می‌باشد که آثاری همچون «موارد استعمال آنالیز در ریاضی» و «خواص تصویری اشکال» دارد همچنین لازار کانو فرانسوی که اکتشافات هندسی او دارای اهمیت فوق العاده می‌باشد. میشل شال هندسه مطلق را با بالاترین درجه استادی به بالاترین حد ممکن ترقی داد. در نیمه اول قرن نوزدهم ریاضیدان روسی نیکلاس ایوانویچ لوباچوشکی نخستین کشف خود را درباره هندسه غیراقلیدسی به جامعه ریاضیات و فیزیک قازان تقدیم کرد. ادوارد کومرنیز در نتیجه اختراع نوعی از اعداد در ریاضی به نام اعداد ایده آل، جایزه ریاضیات آکادمی علوم پاریس را از آن خود کرد. در اینجا ذکر نام دانشمندانی نظیر شارل وایرستراس و شارل هرمیت که در مورد

توابع بیضوی کشفیات مهمی نمودند ضروری است. ژرژ کانتور ریاضیدان آلمانی مکه در روسیه تولد یافته بود در ربع آخر قرن نوزدهم با وضع فرضیه مجموعه ها اساس هندسه اقلیدسی را در هم کوفت ولی ابتکاری و تصویری هنری پوانکاره یا غول فکر ریاضی آخرین دانشمند جهانی است که به همه علوم واقف بود. وی در بیست و هفت سالگی بزرگترین اکتشاف خود یعنی توابع فوشین را به دنیای علم ریاضی تقدیم نمود. بعد از پوانکاره ریاضیدان سوئدی متیاگ لفلر کارهای او را ادامه داد و سپس ریاضیدان نامی فرانسوی امیل پیکارد در این راه قدم نهاد.

در اواخر قرن نوزدهم علم فیزیک ریاضی به منتها درجه تکامل خود رسید و دانش نجوم مکانیک آسمانی تکمیل گردید. امروزه ریاضی بیش از پیش در حریم سایر علوم نفوذ کرده و نه فقط علوم نجوم و فیزیک و شیمی تحت انضباط آن درآمدند بلکه اصولاً ریاضیات دانش مطلق و روح علم شده است.

مهمترین اکتشافات و اختراعات ریاضی در قرن ۱۷

از مهمترین اکتشافات و شاید هم اختراعات ریاضی در قرن ۱۷ می توان به مطالب زیر اشاره کرد:

-کشف لگاریتم در ریاضی

-تدوین علامات و نمادگذاریهای کنونی جبری در علم ریاضی

-گشوده شدن پهنه جدیدی در هندسه محض به ویژه هندسه تصویری

-آغاز اتصال جبر و هندسه با کشف هندسه تحلیلی

-پیشرفتی شگرف در نظریه اعداد در ریاضی و نیز تولد نظریه احتمال

-کشف یکی از بزرگترین دستاوردهای بشر در زمینه ریاضی یعنی حساب دیفرانسیل و انتگرال

تاریخچه ی انتگرال در ریاضی

در تاریخ ریاضی نخستین بار لایب نیتس، نماد استاندارد برای انتگرال معرفی کرد. بیش از دو هزار سال پیش، ارشمیدس (۲۸۷-۲۱۲ قبل از میلاد) فرمول هایی را برای محاسبه سطح وجه ها، ناحیه ها و حجم های جامد مثل کره، مخروط و سهمی یافت. روش انتگرال گیری ارشمیدس در ریاضی استثنایی و فوق العاده بود جبر، نقش های بنیادی، کلیات و حتی واحد اعشار را هم نمی دانست.

یینیز (۱۷۱۶-۱۶۴۶) و نیوتن (۱۷۲۷-۱۶۴۲) حسابان را کشف کردند. عقیده کلیدی آنها این بود که مشتق گیری و انتگرال گیری اثر یکدیگر را خنثی می کنند با استفاده از این ارتباط ها آنها توانستند تعدادی از مسائل مهم در ریاضی، فیزیک و نجوم را حل کنند. فوریر (۱۸۳۰-۱۷۶۸) در مورد رسانش گرما بوسیله سلسله زمان های مثلثاتی را می خواند تا نقش های بنیادی را نشان دهد. رشته های فوریر و جابجایی انتگرال امروزه در زمینه های مختلفی چون داروسازی و موزیک اجرا می شود.

گائوس (۱۷۷۷-۱۸۵۵) اولین جدول انتگرال را نوشت و همراه دیگران سعی در عملی کردن انتگرال در ریاضی و علوم فیزیک کرد. کایوچی (۱۷۸۹-۱۸۵۷) انتگرال را در یک دامنه همبستگی تعریف کرد. ریمان (۱۸۲۶-۱۸۶۶) و لیبیزگو (۱۸۷۵-۱۹۴۱) انتگرال معین را بر اساس یافته های مستدل و منطقی استوار کردند.

لیوویل (۱۸۰۹-۱۸۸۲) یک اسکلت محکم برای انتگرال گیری بوجود آورد بوسیله فهمیدن اینکه چه زمانی انتگرال نامعین از نقش های اساسی دوباره در مرحله جدید خود نقش اساسی مرحله بعد هستند. هرمیت (۱۸۲۲-۱۹۰۱) یک شیوه علمی برای انتگرال گیری به صورت عقلی و فکری (یک روش علمی برای انتگرال گیری سریع) در دهه ۱۹۴۰ بعد از میلاد استراسکی این روش را همراه لگاریتم توسعه بخشید.

در دهه بیستم میلادی قبل از بوجود آمدن کامپیوترها ریاضیدانان تئوری انتگرال گیری و عملی کردن آن روی جداول انتگرال را توسعه داده بودند و پیشرفت هایی حاصل شده بود. در میان این ریاضیدانان کسانی چون واتسون، تیچمارش، بارنر، ملین، میچر، گرانبیر، هوفریتر، اردلی، لوئین، لیوک، مگنوس، آپل، بلت، ابرتینگر، گرادشتاین، اکستون، سریواستوا، پرودنیکیف، برایچیکف و ماریچیف حضور داشتند.

در سال ۱۹۶۹ رایسیچ پیشرفت بزرگی در زمینه روش علمی گرفتن انتگرال نامعین در ریاضی حاصل کرد. او کارش را بر پایه تئوری عمومی و تجربی انتگرال گیری با قوانین بنیادی منتشر کرد روش او عملاً در همه گروه های قضیه بنیادی کارگر نیست تا زمانی که در وجود آن یک معادله سخت مشتق گیری هست که نیاز دارد تا حل شود. تمام تلاش ها از آن پس بر روی حل این معادله با روش علمی برای موفقیت های مختلف قضیه اساسی گذاشته شد. این تلاش ها باعث پیشرفت کامل سیر و روش علمی رایسیچ شد. در دهه ۱۹۸۰ پیشرفت هایی نیز برای توسعه روش او در موارد خاص از قضیه های مخصوص و اصلی او شد.

از قابلیت تعریف انتگرال معین در ریاضی به نتایجی دست میابیم که نشان دهنده قدرتی است که در ریاضیات می باشد (۱۹۸۸) جامعیت و بزرگی به ما دیدگاه موثر و قوی در مورد گسترش در ریاضیات و همچنین کارهای انجام شده در قوانین انتگرال می دهد. گذشته از این ریاضی توانایی دارد تا به تعداد زیادی از نتیجه های مجموعه های مشهور انتگرال پاسخ دهد (اینک بهفهمیم این اشتباهات ناشی از غلط های چاپی بوده است یا نه).

ریاضیات این را ممکن می سازد تا هزاران مسئله انتگرال را حل نماییم به طوری که تا کنون در هیچ یک از کتابهای دستنویس قبلی نیامده باشد. در آینده دیگر وظیفه ضروری انتگرال این است که به آزمایش تقارب خطوط، ارزش اصلی آن و مکانیسم فرض ها بپردازد.

اعداد در ریاضیات

اعداد طبیعی: $N = \{1.2.3.4 \dots\}$

اعداد حسابی: $W = \{0.1.2.3.4 \dots\}$

اعداد صحیح: $Z = \{\dots -3. -2. -1. 0 . 1 . 2 . 3 \dots\}$

اعداد گویا: $Q = \{\frac{a}{b} . b \neq 0 . a, b \in Z\}$

اعداد حقیقی: مجموعه ای از اعداد طبیعی، حسابی، صحیح، گویا و گنگ را اعداد حقیقی می نامیم و آن را با حرف R نشان می دهیم.

اعداد گنگ: هر عدد حقیقی که گویا نباشد را عددی گنگ گویند. به عبارت دیگر $R - Q$ اعداد گنگ می نامیم.

نکته:

$$N \subset W \subset Z \subset Q \subset R$$

توان

تعریف: a به توان n را به شکل a^n می نویسیم و معنای آن این است که عدد a را n بار در خودش ضرب کنیم. اگر a و b هر دو اعدادی حقیقی و m و n اعدادی صحیح باشند آنگاه روابط زیر همواره برقرار هستند:

$$\begin{array}{lll} 1) a^m \times a^n = a^{m+n} & 2) a^n \times b^n = (ab)^n & 3) \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \\ 4) (a^m)^n = a^{mn} & 5) a^n = \frac{1}{a^{-n}} & 6) \frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m \end{array}$$

رادیکال

تعریف: عبارتی مانند $\sqrt[n]{a}$ را ریشه n ام، a گویند و n را معمولا عددی طبیعی می باشد فرجه رادیکال می نامند.

قضایای رادیکالها:

$$1) \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \quad 2) a \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n \times b} \quad 3) \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} \quad 4) \sqrt[m]{\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}} = \sqrt[mnk]{a}$$

مثال: حاصل عبارت $A = 2\sqrt[3]{54} + \sqrt{12} - \sqrt[3]{128}$ را به دست آورید.

$$A = 2\sqrt[3]{27 \times 2} + \sqrt{3 \times 4} - \sqrt[3]{4^3 \times 2} = 6\sqrt[3]{2} + 2\sqrt{3} - 4\sqrt[3]{2} = 2\sqrt[3]{2} + 2\sqrt{3}$$

اتحاد های جبری

تعریف: اگر دو عبارت جبری به گونه ای باشند که به ازای هر مقداری برای متغیرهایشان، مقدار های یکسانی به دست آید، عبارت حاصل از تساوی بین آنها را اتحاد می نامیم. به عنوان مثال تساوی $(a-1)^2 = a^2 - 2a + 1$ یک اتحاد می باشد زیرا به ازای تمامی مقادیر a برقرار است ولی تساوی $a^2 - 1 = 3$ اتحاد نیست زیرا فقط به ازای $a = \pm 2$ برقرار است. در ادامه انواع اتحاد های مهم که حفظ آنها سرعت محاسبات را در بعضی از مسائل افزایش می دهد جمع آوری شده است.

اتحاد مربع دو جمله ای: برای هر دو عدد a و b با محاسبه ی $(a+b)(a+b)$ رابطه ی زیر نتیجه می شود:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

اتحاد مزدوج:

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

اتحاد جمله مشترک:

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

اتحاد مکعب دو جمله ای:

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

اتحاد مجموع و تفاضل مکعبات دو جمله:

$$(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$

$$(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$

تجزیه عبارت های جبری

تعریف: اگر بتوان یک چند جمله ای را به صورت ضرب دو یا چند، چند جمله ای نوشت به طوری که درجه ی آنها کمتر باشد، گوییم آن چند جمله ای را تجزیه کرده ایم. به عبارت دیگر تجزیه عکس عمل اتحاد ها می باشد.

مثال: عبارات جبری زیر را تجزیه کنید.

$$A = \frac{(x^4 - 2x^3 + x - 2) \times (x^2 + 3x + 2)}{(x^2 - 4) \times (x^2 - x + 1)}$$

$$A = \frac{[x^3(x-2) + (x-2)](x+2)(x+1)}{(x-2)(x+2)(x^2-x+1)} = \frac{(x^3+1)(x-2)(x+2)(x+1)}{(x-2)(x+2)(x^2-x+1)}$$

$$= \frac{(x^3+1)(x+1)}{x^2-x+1} = \frac{(x+1)(x^2+1-x)(x+1)}{(x^2-x+1)} = (x+1)^2$$

معادله

معادله یک مجهولی درجه اول: صورت کلی این معادله بصورت $ax + b = 0$ به شرط $a \neq 0$ است که در این حالت ریشه معادله به راحتی با استفاده از عبارت $x = -\frac{b}{a}$ به دست می آید.

معادله یک مجهولی درجه دوم: صورت کلی این معادله بصورت $ax^2 + bx + c = 0$ که در آن a و b و c اعداد حقیقی هستند به شرط $a \neq 0$ را معادله درجه دوم می نامیم.

روش حل معادله درجه دوم:

برای حل یک معادله درجه دوم ابتدا باید دلتا را با استفاده از فرمول $\Delta = b^2 - 4ac$ به دست آوریم. پس از به دست آوردن Δ ، سه حالت مختلف ممکن است پیش آید:

(۱) اگر $\Delta > 0$ باشد آنگاه معادله دو ریشه حقیقی متمایز دارد که از رابطه $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ قابل محاسبه می باشد.

(۲) اگر $\Delta < 0$ باشد آنگاه معادله دارای ریشه مختلط است.

(۳) اگر $\Delta = 0$ باشد آنگاه معادله ریشه مضاعف دارد و از رابطه $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$ قابل محاسبه می باشد.

دو نکته بسیار مهم

۱. اگر در معادله درجه دوم $a + b + c = 0$ باشد آنگاه یکی از ریشه ها 1 و ریشه دیگر $(\frac{c}{a})$ است.

۲. اگر در معادله درجه دوم $a + c = b$ باشد آنگاه یکی از ریشه ها -1 و ریشه دیگر $(-\frac{c}{a})$ است.

نامعادله

نامعادله یک مجهولی درجه اول: نامعادله یک مجهولی درجه اول پس از انتقال به همه جمله ها به یک طرف نامعادله و ساده سازی به شکل کلی زیر تبدیل خواهد شد. همچنین باید توجه داشت که هرگاه طرفین یک نامساوی را در یک مقدار منفی ضرب و یا تقسیم کنیم جهت نامساوی عوض خواهد شد.

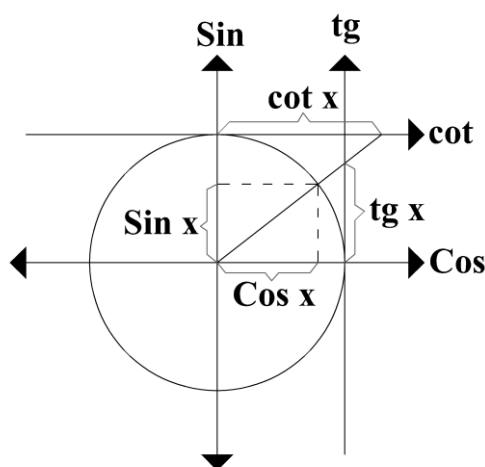
$$\begin{cases} ax + b > 0 \\ \text{یا} \\ ax + b \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ax + b < 0 \\ \text{یا} \\ ax + b \leq 0 \end{cases}$$

مثال: نامعادله $-\frac{3}{2}x - 1 < \frac{1}{2}x + 4$ را حل کنید.

$$\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}x > -5 \rightarrow 2x > -5 \xrightarrow{\div 2} x > -\frac{5}{2}$$

مثلات



x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sin x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tg x	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	تعریف نشده	0	تعریف نشده	0
cot x	تعریف نشده	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	تعریف نشده	0	تعریف نشده

نکته: واحد های استفاده شده در جدول فوق بر حسب رادیان (R) می باشد. در صورتی که واحد بر حسب درجه (D) بیان شود از فرمول $\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi}$ جهت تبدیل واحدها به یکدیگر استفاده می شود.

$$1) \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$2) \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$3) \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$4) \operatorname{tg} \alpha \times \cot \alpha = 1 \quad (\alpha \neq \frac{k\pi}{2})$$

$$5) 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \quad (\alpha \neq n\pi + \frac{\pi}{2})$$

$$6) 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \quad (\alpha \neq n\pi)$$

$$7) \sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2} \sin(\alpha + \frac{\pi}{4})$$

$$8) \sin \alpha - \cos \alpha = \sqrt{2} \sin(\alpha - \frac{\pi}{4})$$

$$9) \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \times \cos \alpha$$

$$10) \sin 4\alpha = 2 \sin 2\alpha \times \cos 2\alpha$$

$$11) \sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \times \cos \frac{\alpha}{2}$$

$$12) \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

$$13) \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

فرمول های تبدیل حاصلضرب نسبت های مثلثاتی به حاصل جمع نسبت ها:

$$1) \sin \alpha \times \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$$

$$2) \cos \alpha \times \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$$

$$3) \sin \alpha \times \sin \beta = -\frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)]$$

لگاریتم

تعریف: به ازای هر دو عدد مثبت N و a داریم:

$$\operatorname{Log}_a N = x \Leftrightarrow a^x = N$$

نکته: عدد مثبت a ($a \neq 1$) را مبنای لگاریتم 10 باشد، معمولاً آنرا نمی نویسیم.

$$1) \log_a a = 1$$

$$2) \log_a 1 = 0$$

$$3) a^{\log_a M} = M$$

$$4) \log_a M.N = \log_a |M| + \log_a |N|$$

$$5) \log_{a^m} N^n = \frac{n}{m} \log_a |N|$$

$$6) \log_a \frac{M}{N} = \log_a |M| - \log_a |N|$$

$$7) \log_a N = \frac{1}{\log_N a}$$

$$8) \log_b a \times \log_c b = \log_c a$$

$$9) \log_e x = \ln x$$

فاکتوریل

فاکتوریل عددی مانند n را به فرم $n!$ نمایش می دهند. $n!$ یعنی حاصلضرب اعداد طبیعی از 1 تا n .

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$$

تذکره ۱: $n!$ را می توان به فرم $n \times (n-1)!$ نیز نوشت.

تذکره ۲: طبق قرارداد $0! = 1$ می باشد.

مفهوم ترکیب

هرگاه در انتخاب k عنصر از n عنصر، ترتیب انتخاب مهم نباشد، ترکیب k از n تعریف می شود و آن را با نماد C_n^k یا $\binom{n}{k}$ نشان می دهیم و با استفاده از رابطه زیر قابل محاسبه است.

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! k!}$$

مثال: حاصل عبارت $A = \frac{\binom{5}{3} \times 2!}{\binom{6}{3} \times 3!}$ را بدست آورید.

$$\begin{cases} \binom{5}{3} = \frac{5!}{(5-3)! \times 3!} = \frac{4! \times 5}{2! \times 3!} = \frac{3! \times 4 \times 5}{3! \times 1 \times 2} = 10 \\ \binom{6}{3} = \frac{6!}{(6-3)! \times (3!)} = \frac{5! \times 6}{3! \times 3!} = \frac{3! \times 4 \times 5 \times 6}{3! \times 1 \times 2 \times 3} = 20 \end{cases}$$

$$\rightarrow A = \frac{10 \times 2!}{20 \times 3!} = \frac{10 \times 2!}{20 \times 3 \times 2!} = \frac{10}{60} = \frac{1}{6}$$

حد و پیوستگی

تعریف: تابع یا ضابطه $y = f(x)$ و نقطه ای به طول a را در نظر بگیرید. فرض کنید $f(x)$ در همسایگی a تعریف شده باشد. اگر که x به سمت a میل کند، مقادیر $f(x)$ به هر میزان دلخواهی به L نزدیک می شود آنگاه L را حد تابع $f(x)$ گوییم و به شکل زیر نمایش می دهیم.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

نکته: وقتی عددی غیر صفر را بر $\pm \varepsilon$ (عددی بسیار بسیار کوچک) تقسیم می کنیم، با توجه به علامت این عدد مقدار کسر برابر $\pm \infty$ خواهد شد. اما زمانی که در مخرج کسر به صفر مطلق می رسیم، حاصل کسر بی معنا است. به چند رابطه زیر در مورد صفر حدی و صفر مطلق توجه کنید:

۱. اگر در مخرج کسر صفر مطلق باشد، دیگر مهم نیست در صورت کسر چه باشد، در هر صورت حاصل کسر برابر تعریف نشده خواهد بود.

$$\frac{\text{عدد}}{\text{صفر مطلق}} = \text{تعریف نشده}$$

$$\frac{\infty}{\text{صفر مطلق}} = \text{تعریف نشده}$$

$$\frac{\text{صفر حدی}}{\text{صفر مطلق}} = \text{تعریف نشده}$$

$$\frac{\text{صفر مطلق}}{\text{صفر مطلق}} = \text{تعریف نشده}$$

۲. اگر در مخرج کسر صفر حدی باشد خواهیم داشت:

$$\frac{\infty}{\text{صفر حدی}} = \infty$$

$$\frac{1}{\text{صفر حدی}} = \infty$$

$$\frac{\text{صفر مطلق}}{\text{صفر حدی}} = \text{صفر مطلق}$$

$$\frac{\text{عدد}}{\text{صفر حدی}} = \text{صفر حدی}$$

صورت های مبهم و رفع ابهام آن ها

صورت های $\frac{0}{0}$ ، $\frac{\infty}{\infty}$ ، $0 \times \infty$ ، $\infty - \infty$ ، 1^∞ ، 0^0 ، ∞^0 را صورت های مبهم یا تعریف نشده می نامیم. از این هفت حالت دو حالت اول را مورد بررسی قرار می دهیم چراکه پنج حالت دیگر را با روش های محاسباتی می توان به دو حالت اول تبدیل کرد و سپس به رفع ابهام آنها پرداخت.

نکته: حالت های 0^∞ ، ∞^∞ و $\infty \times \infty$ مبهم نیستند چرا که :

$$0^{\pm\infty} = 0$$

$$+\infty^{+\infty} = +\infty$$

$$(+\infty) \times (+\infty) = +\infty$$

حالت های مبهم $\frac{\infty}{\infty}$ و $\frac{0}{0}$

در این حالت ها معمولا یک عامل مبهم کننده وجود دارد که با استفاده از روش های هوپیتال، هم ارزی و دیگر روش ها به رفع ابهام آنها می پردازیم.

قاعده هوپیتال

تعریف: اگر f, g دو تابع مشتق پذیر در همسایگی $x = a$ باشند، و حد این دو تابع در این نقطه برابر صفر یا بی نهایت باشد، یعنی:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty}$$

آنگاه :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

البته در صورتیکه بعد از استفاده از هوییتال مجدداً حاصل حد $\frac{0}{0}$ شود دوباره از هوییتال استفاده کرده و مشتق دوم توابع را محاسبه می کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f''(x)}{g''(x)} = L$$

مثال: حد عبارت $A = \frac{x - \sqrt[3]{x}}{\ln(2-x)}$ را وقتی $x \rightarrow 1$ به دست آورید.

حل: با جایگذاری به حالت $\frac{0}{0}$ برخورد خواهیم کرد، لذا با استفاده از قاعده هوییتال داریم:

$$A = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}}{-\frac{1}{2-x}} = \frac{2 - \frac{1}{3}}{-\frac{1}{2-1}} = \frac{-5}{3}$$

مشتق

مشتق یکی از مهمترین مفاهیم ریاضی است. بوسیله مشتق می توان برخی از مفاهیم فیزیکی مانند سرعت و شتاب را با تعاریف ریاضی بیان نمود. همچنین اگر منحنی یک تابع را در فضای دو بعدی در نظر بگیریم بوسیله مشتق می توانیم شیب خط مماس بر منحنی را در هر نقطه دلخواه بدست آوریم. البته باید به این نکته توجه کرد که هر تابعی در هر نقطه نمی تواند مشتق داشته باشد و به طور کلی مشتق پذیری یک تابع در یک نقطه شرایط خاصی را می طلبد.

تعریف: فرض می کنیم تابع $y = f(x)$ روی فاصله (a, b) معین و در نقطه $x_0 \in (a, b)$ پیوسته باشد، تابع f در نقطه x_0 مشتق پذیر است هرگاه حد زیر وجود داشته باشد، این حد را که با $f'(x_0)$ نمایش می دهیم.

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

که رابطه بالا را معمولاً به شکل زیر نمایش می دهیم:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

برای محاسبه مشتق یک تابع نیازی نیست هر بار از تعریف مشتق استفاده شود. چراکه قبلاً به کمک این رابطه فرمولهای مشتق برای حالت‌های مختلف بدست آمده و فقط کافیست آنها را به خاطر بسپاریم. ما ابتدا فرمول کلی را نوشته و سپس برای هر فرمول مثال‌هایی آورده‌ایم تا راحت تر آن فرمول را به خاطر بسپارید. توجه شود که در این فرمول‌ها a, k, n و m اعداد ثابت و u, v تابعی بر حسب x می باشند.

به مثال های زیر توجه کنید:

- 1) $y = x \rightarrow y' = 1$
- 2) $y = x^3 \rightarrow y' = 3x^2$
- 3) $y = x^n \rightarrow y' = n \times x^{n-1}$

تذکر: مشتق یک عدد ثابت همواره صفر است.

$$y = c \rightarrow y' = 0 \quad (c \in R)$$

خلاصه قواعد مشتق گیری

تابع	مشتق تابع	مثال	حل مثال
$y = u^n$	$y' = n \times u^{n-1} \times u'$	$y = (5x^2 + 3x + 1)^4$	$y' = 4(5x^2 + 3x + 1)^3 \times (10x + 3)$
$y = \sqrt[n]{n^m}$	$y' = \frac{mu'}{n \times \sqrt[n]{u^{n-m}}}$	$y = \sqrt[3]{(x^2 - 1)^2}$	$y' = \frac{2(2x)}{3 \times \sqrt[3]{x^2 - 1}}$
$y = \sin u$	$y' = u' \times \cos u$	$y = \sin x^2$	$y' = 2x \times \cos x^2$
$y = \cos u$	$y' = -u' \times \sin u$	$y = \cos 2x$	$y' = -2 \times \sin 2x$
$y = \operatorname{tg} u$	$y' = u' \times (1 + \operatorname{tg}^2 u)$	$y = \operatorname{tg} x^2$	$y' = (2x) \times (1 + \operatorname{tg}^2 x^2)$
$y = \cot u$	$y' = -u' \times (1 + \cot^2 u)$	$y = \cot 3x$	$y' = -3 \times (1 + \cot^2 3x)$
$y = e^u$	$y' = u' \times e^u \times \ln e$	$y = -2 \times e^{x^2-1}$	$y' = -2 \times (2x) \times e^{x^2-1} = -4xe^{x^2-1}$
$y = a^u$	$y' = u' \times a^u \times \ln a$ ($a > 0$)	$y = 3^{\operatorname{tg} x}$	$y' = (1 + \operatorname{tg}^2 x) \times (3^{\operatorname{tg} x}) \times \ln 3$
$y = \log_a u$	$y' = \frac{u'}{u} \times \log_a e$ ($u > 0$)	$y = \log_3 x$	$y' = \frac{1}{x} \times \log_3 e$
$y = \ln u$	$y' = \frac{u'}{u}$	$y = \ln \cos x$	$y' = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\operatorname{tg} x$
$y = \operatorname{Arc} \sin u$	$y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$y = \operatorname{Arc} \sin x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

	$(u < 1)$		
$y = \text{Arc cos } u$	$y' = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$y = \text{Arc cos } x^2$	$y' = \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = \text{Arc tg } u$	$y' = \frac{u'}{1+u^2}$	$y = \text{Arc tg}(x^2 - 1)$	$y' = \frac{2x}{1+(x^2-1)^2}$
$y = \text{Arc cot } u$	$y' = \frac{-u'}{1+u^2}$	$y = \text{Arc cot } g\sqrt{x}$	$y' = \frac{\frac{-1}{2\sqrt{x}}}{1+(\sqrt{x})^2} = \frac{-1}{2\sqrt{x} \times (1+x)}$
$y = \sinh u$	$y' = u' \times \cosh u$	$y = \sinh 5x$	$y' = 5 \times \cosh 5x$
$y = \cosh u$	$y' = -u' \times \sinh u$	$y = \cosh \frac{x^3}{3}$	$y' = x^2 \times \sinh \frac{x^3}{3}$
$y = \text{tgh } u$	$y' = u' \times (1 - \text{tgh}^2 u)$	$y = \text{tgh } 3x$	$y' = 3 \times (1 - \text{tgh}^2 3x)$
$y = \text{coth } u$	$y' = u' \times (1 - \text{coth}^2 u)$	$y = \text{coth } x^2$	$y' = 2x \times (1 - \text{coth}^2 x^2)$
$y = \text{Arc sinh } u$	$y' = \frac{u'}{\sqrt{1+u^2}}$	$y = \text{Arc sinh } x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$y = \text{Arc cosh } u$	$y' = \frac{u'}{\sqrt{u^2-1}}$	$y = \text{Arc cosh } x^2$	$y' = \frac{2x}{\sqrt{x^4-1}}$
$y = \text{Arc tgh } u$ $(u > 1)$	$y' = \frac{u'}{1-u^2}$	$y = \text{Arc tgh } 3x$	$y' = \frac{3}{1-9x^2}$
$y = \text{Arc coth } u$ $(u < 1)$	$y' = \frac{u'}{1-u^2}$	$y = \text{Arc coth } x^3$	$y' = \frac{3x^2}{1-x^6}$
$y = u \times v$	$y' = (u' \times v) + (v' \times u)$	$y = x \cos x$	$y' = \cos x - x \times \sin x$
$y = \frac{u}{v}$	$y' = \frac{(u' \times v) - (v' \times u)}{v^2}$	$y = \frac{e^x}{x^3}$	$y' = \frac{(e^x \times x^3) + (3x^2 \times e^x)}{x^6}$
$y = u \pm v$	$y' = u' \pm v'$	$y = \text{tg } x - (x - 1)$	$y' = 1 + \text{tg}^2 x - 1 = \text{tg}^2 x$

مشتق توابع ضمنی

اگر y تابعی از x باشد و داشته باشیم $f(x, y) = 0$ آنگاه :

$$y'_x = -\frac{f'_x(x, y)}{f'_y(x, y)} = -\frac{\text{مشتق } f \text{ نسبت به } x \text{ با فرض ثابت بودن } y}{\text{مشتق } f \text{ نسبت به } y \text{ با فرض ثابت بودن } x}$$

مثال: مشتق توابع ضمنی زیر را حساب کنید.

$$1. \quad y - x^2y + xy = 1 \rightarrow y' = -\frac{(-2xy)+y}{1-x^2+x} = \frac{y-2xy}{x^2-x-1}$$

$$2. \quad y + \sin(xy) + \cos(xy) = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} f'_x = y \times \cos xy - y \times \sin xy \\ f'_y = 1 + x \times \cos xy - x \times \sin xy \end{cases} \rightarrow y'_x = -\frac{y \times \cos xy - y \times \sin xy}{1 + x \times \cos xy - x \times \sin xy}$$

مشتق توابع قدر مطلق

برای محاسبه ی مشتق تابع قدر مطلق می توانید از تابع زیر استفاده نمایید:

$$y = |u| \rightarrow y' = \frac{u' \times u}{|u|} \quad (u \neq 0)$$

مثال: مشتق تابع $y = |x^3 - 2x|$ را در نقطه $x_0 = 1$ محاسبه کنید.

$$y' = \frac{(3x^2 - 2) \times (x^3 - 2x)}{|x^3 - 2x|} = \frac{(3 - 2) \times (1 - 2)}{|1 - 2|} = \frac{(+1) \times (-1)}{|-1|} = -1$$

قاعده زنجیره ای مشتق

اگر $y = f(u)$ و $u = g(x)$ باشند، آنگاه مشتق تابع y نسبت به x به فرم زیر تعریف می شود:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

مثال: اگر $y = \sqrt{u^2 + u}$ و $u = x^3 - 3x$ آنگاه y'_x در نقطه $x_0 = 2$ را پیدا کنید.

حل:

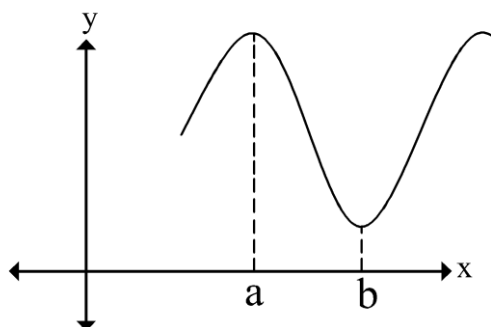
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = \frac{2u + 1}{2\sqrt{u^2 + u}} \times (3x^2 - 3) \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2 \times 2 + 1}{2\sqrt{6}} \times 9 = \frac{5 \times 9}{2\sqrt{6}} = \frac{5 \times 9 \times \sqrt{6}}{2 \times 6} = \frac{15\sqrt{6}}{4}$$

کاربرد مشتق

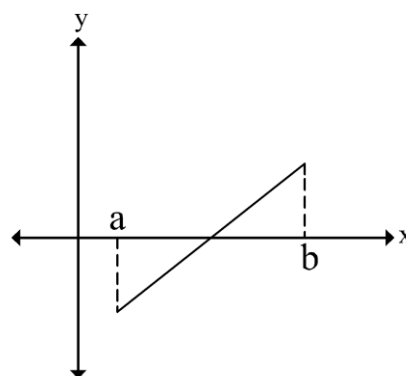
نقاط اکسترمم تابع (نقاط Min و Max تابع)

نقاط اکسترمم تابع به نقاطی گفته می شود که در آن نقاط مقدار عرض تابع بیشتر از نقاط ماکزیمم و یا کمتر از نقاط مینیمم است. همچنین برای اینکه تابع $y = f(x)$ در نقطه $x = c$ دارای اکسترمم نسبی باشد باید مشتق در نقطه c برابر صفر صفر بوده یا وجود نداشته باشد و علاوه اینکه مشتق حول نقطه c تغییر علامت دهد. به عبارت دیگر ممکن است مشتق تابع در نقطه ای برابر صفر شود ولی مشتق حول این نقطه تغییر علامت ندهد در این صورت آن نقطه نمی تواند جزء اکسترمم های تابع محسوب شود.

نکته: ابتدا و انتهای هر بازه هرگز نمی تواند Min و Max نسبی باشند.



شکل ۱



شکل ۲

شکل ۱: نقطه b مینیمم نسبی و نقطه a ماکزیمم نسبی است.

شکل ۲: b ماکزیمم مطلق و نقطه a مینیمم مطلق است و تابع max و min نسبی ندارد.

انتگرال

تابع پیوسته f را در نظر بگیرید. اگر تابع اولیه آن را با F نمایش دهیم، خواهیم داشت :

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

یا به زبان ساده انتگرال معکوس عمل مشتق گیری است. در این بخش ما با مشتق توابع رو به رو می شویم که تابع اولیه آن از ما خواسته می شود. توجه شود که اگر از سمت راست تساوی بین خود انتگرال و فرمول آن مشتق گرفته شود باید به $f(x)$ برسیم.

نکته: حرف c به معنای یک عدد ثابت می باشد.

فرمول محاسباتی	انتگرال
$\frac{u^{n+1}}{n+1} + c$ ($n \neq -1$)	$\int u^n \times du$
$\ln u + c$	$\int \frac{du}{u}$
$\frac{a^u}{\ln a} + c$ ($a > 0$. $a \neq 1$)	$\int a^u \times du$
$e^u + c$	$\int e^u \times du$
$-\cos u + c$	$\int \sin u \times du$

$\int \cos u \times du$	$\sin u + c$
$\int (1 + tg^2 u) \times du$	$\int \frac{du}{\cos^2 u} = tg u + c$
$\int (1 + \cot^2 u) \times du$	$\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\cot u + c$
$\int tg u \times du$	$-\ln \cos u + c$
$\int \cot u \times du$	$\ln \sin u + c$
$\int \frac{du}{a^2 + u^2}$	$\frac{1}{a} \times \text{Arc } tg \times \frac{u}{a} + c$
$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}}$	$\text{Arc } \sin\left(\frac{u}{a}\right) + c$
$\int \frac{du}{u^2 - a^2}$	$\frac{1}{2a} \times \ln\left \frac{u-a}{u+a}\right + c$
$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}}$	$\ln\left u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right + c$
$\int \frac{du}{\sin u}$	$\ln\left tg\left(\frac{u}{2}\right)\right + c$ $= \ln \csc u + \cot u + c$
$\int \frac{du}{\cos u}$	$\ln\left tg\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right + c$ $= \ln tg u + \sec u + c$
$\int \sinh u \times du$	$\cosh u + c$
$\int \cosh u \times du$	$\sinh u + c$

قضایای انتگرال گیری

- 1) $\int f(u) + g(u)du = \int f(u)du + \int g(u)du$
- 2) $\int k \times f(x)dx = k \times \int f(x)dx \quad K \in R$
- 3) $\int f(u) \times g(u)du \neq \int f(u)du \times \int g(u)du$

مثال: حاصل انتگرال های زیر را به دست آورید.

- 1) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + c = 2x^{\frac{1}{2}} + c = 2\sqrt{x} + c$
- 2) $\int \frac{dx}{x+2} = \ln|x+2| + c$

$$3) \int 3^x dx = \frac{3^x}{\ln 3} + c$$

$$4) \int 5e^x = 5e^x + c$$

$$5) \int \sin 3x dx = \int \left(\frac{3}{3}\right) \sin 3x dx = \frac{1}{3} \int (\sin 3x) 3dx = -\frac{1}{3} \cos 3x + c$$

$$6) \int \cos 7x dx = \int \frac{7}{7} \cos 7x dx = \frac{1}{7} \int (\cos 7x) 7dx = \frac{1}{7} \sin 7x + c$$

$$7) \int (2 + tg^2 x) dx = \int [1 + (1 + tg^2 x)] dx = \int dx + \int (1 + tg^2 x) dx = x + tgx + c$$

$$8) \int \pi(1 + \cot g^2 x) dx = -\pi \cot gx + c$$

$$9) \int tg\pi x dx = -\frac{1}{\pi} \ln |\cos \pi x| + c$$

$$10) \int \left(\frac{\sin x + \cos x}{\sin x}\right) dx = \int \frac{\sin x}{\sin x} dx + \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = x + \ln |\sin x| + c$$

$$11) \int \frac{dx}{9+x^2} = \frac{1}{3} \operatorname{Arctg} \left(\frac{x}{3}\right) + c$$

$$12) \int \frac{dx}{\sqrt{3-x^2}} = \operatorname{Arc} \sin \left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + c$$

$$13) \int \frac{dx}{x^2-4} = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + c$$

$$14) \int \frac{dx}{\sqrt{(x-2)^2+9}} = \ln |(x-2) + \sqrt{(x-2)^2+9}| + c$$

$$15) \int \frac{3dx}{\sin 3x} = \ln \left| tg \frac{3x}{2} \right| + c = \ln |\cos ec 3x - \cot g 3x| + c$$

$$16) \int \frac{2dx}{\cos 2x} = \ln \left| tg \left(x + \frac{\pi}{4}\right) \right| + c = \ln |tg 2x + \sec 2x| + c$$

$$17) \int \cosh 8x dx = \frac{1}{8} \sinh 8x + c$$

$$18) \int \frac{1}{9} \sinh 9x dx = \frac{1}{81} \cosh 9x + c$$

مثال: حاصل انتگرال های زیر را با استفاده از روش تغییر متغیر به دست آورید.

$$I = \int (3x + 5)^{17} dx \rightarrow u = 3x + 5 \rightarrow du = 3dx \rightarrow dx = \frac{du}{3}$$

$$\rightarrow I = \int u^{17} \cdot \frac{du}{3} = \frac{1}{3} \int u^{17} du = \frac{1}{3} \left(\frac{u^{18}}{18} \right) + c = \frac{(3x+5)^{18}}{54} + c$$

$$I = \int \cos(1 + \pi x) dx \rightarrow u = \pi x + 1 \rightarrow du = \pi dx \rightarrow dx = \frac{du}{\pi}$$

$$\rightarrow I = \int (\cos u) \frac{du}{\pi} = \frac{1}{\pi} \int \cos u du = \frac{1}{\pi} \sin u + c = \frac{1}{\pi} \sin(1 + \pi x) + c$$

$$I = \int \frac{dx}{(\arccos x)^5 \sqrt{1-x^2}} \rightarrow u = \arccos x \rightarrow du = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\rightarrow I = \int \frac{-du}{u^5} = -\int u^{-5} du = \frac{1}{4} u^{-4} + c = \frac{1}{4(\arccos x)^4} + c$$

$$I = \int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx \rightarrow \sqrt{x} = u \rightarrow \frac{dx}{2\sqrt{x}} = du \rightarrow dx = 2\sqrt{x} du$$

$$\rightarrow I = \int 2 \sin u du = -2 \cos u + c = -2 \cos \sqrt{x} + c$$

$$I = \int \frac{2x+3}{2x+1} dx = \int dx + \underbrace{\int \frac{2dx}{2x+1}}_{I_1}$$

حاصل انتگرال اول برابر x می باشد. برای حل انتگرال دوم داریم:

$$2x+1 = u \rightarrow 2dx = du \rightarrow I_1 = \int \frac{2dx}{2x+1} = \int \frac{du}{u} = \ln |u| + c = \ln |2x+1| + c \rightarrow$$

$$I = x + \ln |2x+1| + c$$

$$I = \int \frac{\arcsin x + x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \underbrace{\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx}_{I_1} + \underbrace{\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx}_{I_3}$$

$$\begin{cases} I_1 : \arcsin x = u \rightarrow \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = du \\ I_2 : 1-x^2 = t \rightarrow -2x dx = dt \rightarrow x dx = -\frac{dt}{2} \end{cases}$$

$$\rightarrow I = \int u du - \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{u^2}{2} - t^{\frac{1}{2}} + c$$

$$\xrightarrow{(2),(1)} I = \frac{(\arcsin x)^2}{2} - \sqrt{1-x^2} + c$$

$$I = \int \frac{\ln \sqrt{x}}{x} dx = \int \frac{\ln x^{\frac{1}{2}}}{x} dx = \frac{1}{2} \int \frac{\ln x}{x} dx \rightarrow \ln x = u \rightarrow \frac{dx}{x} = du \rightarrow$$

$$I = \frac{1}{2} \int u du = \frac{1}{2} \left(\frac{u^2}{2} \right) + c = \frac{1}{4} (\ln x)^2 + c$$

$$I = \int \frac{dx}{1 + \cos^2 x} = \int \frac{dx}{1 + \frac{1}{1 + \tan^2 x}} = \int \frac{(1 + \tan^2 x) dx}{2 + \tan^2 x} \rightarrow \tan x = u \rightarrow (1 + \tan^2 x) dx = du \rightarrow$$

$$I = \int \frac{du}{2 + u^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{Arctg} \left(\frac{u}{\sqrt{2}} \right) + c = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{Arc tg} \left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}} \right) + c$$

$$I = \int x^2 \cos(x^3 + 3) dx \rightarrow x^3 + 3 = u \rightarrow 3x^2 dx = du \rightarrow x^2 dx = \frac{du}{3}$$

$$I = \frac{1}{3} \int \cos u du = \frac{\sin u}{3} + c = \frac{\sin(x^3 + 3)}{3} + c$$

$$I = \int x(2x+5)^{10} dx \rightarrow 2x+5 = u \rightarrow \begin{cases} 2x = u-5 \rightarrow dx = \frac{du}{2} \\ x = \frac{u-5}{2} \end{cases} \rightarrow$$

$$I = \int \left(\frac{u-5}{2}\right)(u)^{10} \left(\frac{du}{2}\right) = \frac{1}{4} \int (u-5)u^{10} du = \frac{1}{4} \int (u^{11} - 5u^{10}) du = \frac{1}{4} \left[\frac{u^{12}}{12} - \frac{5}{11} u^{11} \right] + c = \frac{1}{4} \left[\frac{(2x+5)^{12}}{12} - \frac{5(2x+5)^{11}}{11} \right] + c$$

$$I = \int \frac{e^x}{e^x - 1} dx \rightarrow e^x - 1 = u \rightarrow e^x dx = du \rightarrow I = \int \frac{du}{u} = \ln |u| + c = \ln |e^x - 1| + c$$

$$I = \int \frac{a^x dx}{1 + a^{2x}} \rightarrow a^x = u \rightarrow a^x \ln a dx = du \rightarrow a^x dx = \frac{du}{\ln a}$$

$$\rightarrow I = \int \frac{a^x dx}{1 + (a^x)^2} = \frac{1}{\ln a} \int \frac{du}{1 + u^2} = \frac{1}{\ln a} [\arctg u] + c = \frac{\arctg(a^x)}{\ln a} + c$$

انتگرال گیری به روش جزء به جزء

از این روش معمولاً در محاسبه انتگرال هایی به فرم $\int f(x) \times g(x) du$ استفاده می شود که f تابعی است که بدست آوردن مشتق آن به سادگی امکان پذیر باشد. برای حل اینگونه انتگرال ها در حالت کلی به این شکل است که ابتدا یکی از توابع را U در نظر می گیریم و بقیه عبارت زیر انتگرال را برابر dV در نظر می گیریم و با استفاده از فرمول کلی $\int U \times dV = UV - \int V \times dU$ انتگرال را محاسبه می کنیم. انتگرال گیری به روش جزء به جزء از جمله روشهای بی قاعده در انتگرال گیری می باشد ولی یک قاعده تقریباً کلی در انتخاب U و dV این است که معمولاً آن تابعی را که انتگرالش ساده است را همراه dx و dv انتخاب کرده و تابعی که محاسبه مشتق آن آسان به نظر می رسد را U در نظر می گیریم. به مثال های زیر توجه کنید.

مثال: حاصل انتگرال $I = \int \text{Arcsin} x dx$ را به دست آورید.

$$\begin{cases} \text{Arc sin } x = u \rightarrow \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = du \\ dv = dx \rightarrow x = v \end{cases} \quad \left[\int \text{Arc sin } x dx = x \text{Arc sin } x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx \right]$$

$$= x \text{Arc sin } x + \sqrt{1-x^2} + C$$

مثال: حاصل انتگرال $I = \int x \sin x dx$ را به دست آورید.

$$\begin{cases} x = u \rightarrow dx = du \\ \sin x dx = dv \rightarrow v = -\cos x \end{cases} \quad \left[\int x \sin x dx = -x \cos x - \int -\cos x dx \rightarrow \right]$$

$$\rightarrow I = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + c$$

حاصل $I = \int \ln x \, dx$ را بدست آورید.

$$\begin{cases} \ln x = u \rightarrow \frac{dx}{x} = du \\ dx = dv \rightarrow x = v \end{cases} \rightarrow I = x \ln x - \int x \left(\frac{dx}{x}\right) = x \ln x - x + c$$

حاصل $I = \int \frac{\ln x}{x^2} \, dx$ را بدست آورید.

$$\begin{cases} u = \ln x \rightarrow du = \frac{dx}{x} \\ dv = \frac{dx}{x^2} \rightarrow v = -\frac{1}{x} \end{cases} \rightarrow I = -\frac{\ln x}{x} - \int \left(-\frac{1}{x}\right) \left(\frac{dx}{x}\right) = -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + c$$

انتگرال گیری به کمک تشکیل جدول

در این روش مطابق جدول زیر، $f(x)$ و مشتقهایش را در سمت چپ و تابع $g(x)$ و انتگرالهایش را در سمت راست قرار می دهیم و تا وقتی که مشتق تابع $f(x)$ صفر شود از تابع $g(x)$ انتگرال گرفته و در نهایت مانند پیکانهای مشخص شده توابع مربوط با پیکان در هم ضرب و آنها را با علامت روی آنها با جمله بعد جمع یا تفریق می نماییم که البته این علامتها از بالا به پایین یک در میان مثبت یا منفی هستند. به مثال زیر توجه فرمایید:

مثال: حاصل انتگرال $I = \int x \times e^{2x} \, dx$ را به کمک روش جدول به دست آورید.

$f(x)$ و مشتقهایش	$g(x)$ و انتگرالهایش
x	e^{2x}
1	$\frac{e^{2x}}{2}$
0	$\frac{e^{2x}}{4}$

$$\begin{cases} f(x) = x & . & g(x) = e^{2x} \\ I = x \left(\frac{e^{2x}}{2}\right) - \left(1 \times \frac{e^{2x}}{4}\right) + c \end{cases}$$

انتگرال معین

انتگرالی که دارای کرانه های بالا و پایین باشد را انتگرال معین گوئیم. توجه شود که در انتگرال معین ثابت C وجود ندارد و همانگونه که از نامش پیداست، حاصل آن عددی معین خواهد بود.

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

به مثالهای زیر توجه فرمایید:

مثال: حاصل انتگرال $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{Tg x}{\sqrt{\cos x}}$ را به دست آورید.

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x dx}{\cos x \sqrt{\cos x}} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x dx}{\cos^{\frac{3}{2}} x} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \underbrace{(\cos x)^{-\frac{2}{3}}}_u \underbrace{\sin x dx}_{-du} = \left[\frac{2}{\sqrt{\cos x}} \right]_0^{\frac{\pi}{3}} = 2\sqrt{2} - 2$$

حاصل $I = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx$ را بدست آورید.

$$\begin{aligned} I = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx &\rightarrow \begin{cases} x^2+1 = u \rightarrow 2xdx = du \rightarrow xdx = \frac{du}{2} \\ x=0 \rightarrow u=1, \quad x=1 \rightarrow u=2 \end{cases} \rightarrow I = \int_1^2 \frac{\frac{du}{2}}{\sqrt{u}} \\ &= \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{du}{\sqrt{u}} = \left[\frac{1}{2} \times 2\sqrt{u} \right]_1^2 = \sqrt{2} - 1 \end{aligned}$$

حاصل $I = 60 \int_1^2 (x^2 - 4x)(x-2)^9 dx$ را بدست آورید.

$$\begin{aligned} I &= 60 \int [(x-2)^2 - 4](x-2)^9 dx = 60 \int [(x-2)^{11} - 4(x-2)^9] dx \\ &= 60 \left[\frac{(x-2)^{12}}{12} - \frac{4(x-2)^{10}}{10} \right]_1^2 = 19 \end{aligned}$$

اعداد مختلط

- شکل دکارتی هر عدد مختلط به صورت $z = x + iy$ نمایش داده می شود که x و y دو عدد حقیقی و $i = \sqrt{-1}$ و لذا $i^2 = -1$ می باشد که از این رابطه در ضرب، تقسیم و روابط محاسباتی اعداد مختلط به صورت مکرر استفاده می شود.
- مزدوج عدد مختلط $z = x + iy$ را با $\bar{z}$ نشان می دهیم و به صورت زیر آن را تعریف می کنیم:

$$\bar{z} = x - iy$$

- اندازه یک عدد مختلط $z = x + iy$ همواره عددی حقیقی و مثبت خواهد بود و آن را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

جمع در اعداد مختلط

مجموع دو عدد مختلط $z_1 = x_1 + iy_1$ و $z_2 = x_2 + iy_2$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

تفریق در اعداد مختلط

تفاضل دو عدد مختلط $z_1 = x_1 + iy_1$ و $z_2 = x_2 + iy_2$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$

ضرب در اعداد مختلط

به منظور ضرب دو عدد مختلط $z_1 = x_1 + iy_1$ و $z_2 = x_2 + iy_2$ کافی است دو عدد را به طور معمولی و جمله به جمله در هم ضرب کنیم و بجای i^2 مقدار -1 را قرار دهیم.

$$z_1 \times z_2 = (x_1 + iy_1) \times (x_2 + iy_2) = x_1x_2 + ix_1y_2 + ix_2y_1 + i^2y_1y_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

مثال: حاصل $A = (1 + 2i) \times (i + 2)$ را به دست آورید.

$$A = (1 + 2i) \times (i + 2) = 2 + i + 4i + 2i^2 = 2 + 5i - 2 = 5i$$

تقسیم در اعداد مختلط

برای به دست آوردن خارج قسمت دو عدد مختلط $z_1 = x_1 + iy_1$ و $z_2 = x_2 + iy_2$ ، صورت و مخرج کسر را در مزدوج مخرج ضرب می کنیم.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} \times \frac{x_2 - iy_2}{x_2 - iy_2} = \frac{x_1x_2 - ix_1y_2 + ix_2y_1 - i^2y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

مثال: حاصل $A = \frac{1+\sqrt{3}i}{\sqrt{3}-i}$ را به دست آورید.

$$A = \frac{1+\sqrt{3}i}{\sqrt{3}-i} = \frac{1+\sqrt{3}i}{\sqrt{3}-i} \times \frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}+i} = \frac{\sqrt{3}+i+3i+\sqrt{3}i^2}{3+1} = \frac{4i}{4} = i$$

شکل قطبی اعداد مختلط

هر عدد مختلط $z = x + iy$ را می توان به شکل $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ نوشت. این نوع نمایش را شکل قطبی عدد مختلط می نامیم. در رابطه فوق r (اندازه) و θ (آرگومان) از فرمولهای زیر به دست می آیند:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \theta = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

نکته مهم: در تعیین مقدار θ از رابطه $\operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x}$ استفاده می شود، باید دقت نمود که نقطه (x, y) در کدام ناحیه دستگاه مختصات قرار دارد و با توجه به آن θ را تعیین کنیم. به عنوان مثال اگر نقطه (x, y) در ناحیه دوم قرار داشته باشد، بایستی θ نیز در ناحیه دوم مثلثاتی انتخاب شود.

مثال: شکل قطبی عدد مختلط $Z = 1 - \sqrt{3}i$ را بنویسید.

حل: ابتدا مقادیر اندازه و آرگومان را به دست می آوریم

$$r = \sqrt{1+3} = 2 \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{-\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3} \rightarrow \theta = \frac{5\pi}{3} \cdot \frac{2\pi}{3}$$

θ می تواند دو مقدار $\frac{5\pi}{3}$ و $\frac{2\pi}{3}$ باشد ولی مقدار $\frac{2\pi}{3}$ قابل قبول نیست چراکه نقطه ی دیگر یعنی $(1, -\sqrt{3})$ در ناحیه چهارم قرار دارد و بنابراین زاویه ای قابل خواهد بود که در ناحیه چهارم باشد.

$$z = 2 \left[\cos \left(\frac{5\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{5\pi}{3} \right) \right]$$

ضرب اعداد مختلط به فرم قطبی

بایستی بدانیم که جمع و تفریق دو عدد مختلط با استفاده از حالت دکارتی ساده تر از فرم قطبی می باشد ولی برای محاسبه ضرب دو عدد مختلط با استفاده از فرم قطبی اقدام می کنیم تا محاسبات به مراتب ساده تری را داشته باشیم.

$$z_1 \times z_2 = r_1 \times r_2 \times e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

تقسیم اعداد مختلط به فرم قطبی

برای تقسیم دو عدد مختلط نیز از فرم قطبی بهره می جوییم . بدین منظور داریم:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \times e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$$

توان در اعداد مختلط

برای به توان رساندن یک عدد مختلط بهتر است ابتدا آنرا به شکل قطبی بنویسیم و سپس آن را به توان برسانیم. فرض کنید که

$$z = re^{i\theta} = r(\cos \theta + i \sin \theta) \text{ و } n \text{ یک عدد طبیعی آنگاه:}$$

$$z^n = (re^{i\theta})^n = r^n \times e^{i(n\theta)} = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

معادله خط

رابطه ی بین طول (x) و عرض (y) نقاط واقع بر یک خط را معادله ی آن خط می گویند که به صورت یک تساوی نوشته می شود . اگر طول هر نقطه را با x و عرض آن را با Y نشان دهیم ، رابطه $y = x$ را معادله ی خط (L) می نامیم. این تساوی، رابطه ی بین طول و عرض نقاط را مشخص می کند. این خط نیمساز ربع اول و سوم محورهای مختصات می باشد.

نکات

- خطی موازی محور y ها باشد در آن صورت معادله خط به صورت $y = b$ خواهد بود که b یک عدد ثابت است.
- ممکن است خط ها موازی محور طول ها باشند در آن صورت معادله خط به صورت $x = a$ خواهد بود که a یک عدد ثابت است.
- ممکن است خط از مبدأ مختصات بگذرد و معادله ی آن به صورت $y = mx$ می باشد.
- اما بعضی خطوط هستند که نه موازی محورهای طول هستند نه موازی محور عرض و نه از مبدأ مختصات رد می شود، معادله این خطوط به شکل $y = mx + n$ می باشد . این معادله خط در حالت استاندارد می باشد.

فرم استاندارد معادله خط

هر رابطه درجه اول بین x و y مانند: $y = 2x - 1$ و $3x + y = 6$ را معادله خط گویند صورت استاندارد معادله خط $y = mx + n$ می باشد که در آن m و n دو عدد معلوم و مشخص هستند.

عرض از مبدأ

فاصله ای که خط از مبدأ گرفته و محور عرض ها را قطع می کند را عرض از مبدأ خط می گویند. به عبارت دیگر عرض نقطه برخورد خط با محور y ها را عرض از مبدأ گویند. به طور کلی می توان گفت عدد b در معادله $y = ax + b$ را عرض از مبدأ این خط می نامیم. اگر خط از مبدأ مختصات بگذرد عرض از مبدأ آن صفر می شود و معادله $y = ax$ به صورت $y = ax$ در می آید.

نوشتن معادله خط توسط دو نقطه

برای نوشتن هر معادله خطی نیاز به دو مورد الزامی می باشد:

- داشتن مختصات دو نقطه
- داشتن شیب و یک نقطه

فرمول عمومی معادله خط به صورت زیر می باشد:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

شیب خط

شیب به معنی سرازیری است و در ریاضیات هر چه زاویه ای که خط با محور افقی می سازد بیشتر باشد، شیب خط بیشتر است و بر عکس هر چه زاویه ای که خط با محور افقی می سازد کمتر باشد، شیب خط نیز کمتر است. هر چه ضریب x بیشتر باشد شیب خط بیشتر است و هر چه ضریب x کمتر باشد شیب خط کمتر است به طور کلی می توان گفت: اگر معادله $y = ax + b$ نوشته شود، عدد a که ضریب x می باشد، شیب خط نام دارد. اما در فرم عمومی معادله خط یعنی:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

شیب خط m می باشد که گاهی اوقات با a نیز نمایش داده می شود و (x_0, y_0) همان نقطه مورد نظر می باشد که خط مزبور از آن عبور می کند. فرمول شیب خط به طریق زیر محاسبه می شود:

$$m = \frac{y_a - y_b}{x_a - x_b}$$

مثال: معادله خطی را بنویسید که از دو نقطه به مختصات $A = (1, 2)$ و $B = (2, 3)$ می گذرد.

$$m = \frac{y_a - y_b}{x_a - x_b} = \frac{2 - 3}{1 - 2} = 1$$

$$\rightarrow y - y_0 = m(x - x_0) \rightarrow (y - 3) = 1(x - 2)$$

$$\rightarrow y - 3 = x - 2 \rightarrow y = x + 1$$

مثال: شیب خط $3x + 4y = 7$ زیر را بدست آورید.

$$4y = -3x + 7 \rightarrow y = \frac{-3}{4}x + \frac{7}{4} \rightarrow m = \frac{-3}{4}$$

معادلات خطی مرتبه دوم همگن با ضرایب ثابت

فرم کلی این معادلات بصورت زیر می باشد:

$$y'' + ay' + by = 0$$

که a و b اعداد ثابت متعلق به مجموعه اعداد حقیقی هستند. برای حل این معادلات، معادله مشخصه $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ را تشکیل داده و برحسب مقادیر λ (ریشه های معادله مشخصه) به سه حالت زیر خواهیم رسید:

حالت اول

اگر معادله دارای دو ریشه حقیقی غیر مساوی λ_1 و λ_2 باشد، در این صورت جواب عمومی معادله به فرم زیر بیان خواهد شد و می گوییم جواب های معادله همگن میرایی می باشند.

$$y = C_1 \times e^{\lambda_1 x} + C_2 \times e^{\lambda_2 x}$$

حالت دوم

اگر معادله دارای ریشه مضاعف $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ باشد، در این صورت جواب عمومی معادله به فرم زیر بیان خواهد شد و می گوییم جواب های معادله همگن میرایی بحرانی می باشند.

$$y = (C_1 + C_2 x) \times e^{\lambda x}$$

اگر ریشه های معادله مشخصه دو عدد مختلط $\lambda = p \pm iq$ باشند، آنگاه جواب عمومی معادله به فرم زیر است و می گوییم جواب های معادله همگن نوسانی می باشند.

$$y = e^{px}(C_1 \times \cos qx + C_2 \times \sin qx)$$

مثال: جواب معادله دیفرانسیل $y'' + 4y' + 8y = 0$ را به دست آورید.

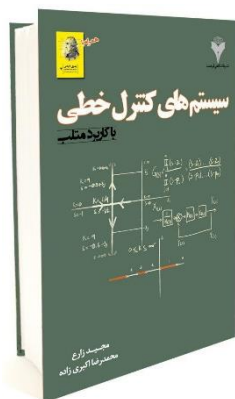
$$\lambda^2 + 4\lambda + 8 = 0 \rightarrow \Delta = (b)^2 - 4ac = (4)^2 - 4(1)(8) = 16 - 32 = -16$$

$$\rightarrow \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = -2 \pm 2i \rightarrow \begin{cases} P = -2 \\ q = 2 \end{cases} \rightarrow y = e^{-2x}(C_1 \times \cos 2x + C_2 \times \sin 2x)$$



عشق را از عشقه گرفته‌اند. و عشقه آن گیاهی است که در باغ پدید آید، در بن درخت. اول، بیخ در زمین سخت کند، پس سر بر آرد و خود را در درخت میپیچد، و همچنان می‌رود تا جمله‌ی درخت را فراگیرد، و همچنان در شکنجه کشد که نم در میان رگ درخت نماند، و هر غذا، که به واسطه‌ی آب و هوا به درخت می‌رسد، با تاراج میبرد، تا آنگاه که درخت خشک شود.

شیخ اشراق شهاب‌الدین سهروردی

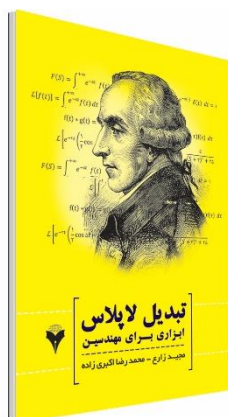


سیستم های کنترل خطی با کاربرد متلب

ناشر: نشر دانشگاهی فرهمند

سال چاپ: ۱۳۹۶

قابل استفاده در درس تئوری و آزمایشگاهی
سیستم های کنترل خطی

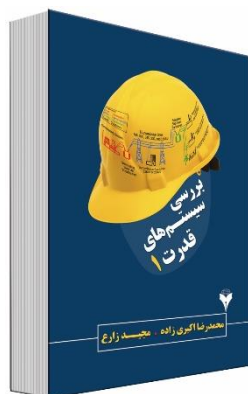


تبدیل لاپلاس ابزاری برای مهندسين

ناشر: نشر دانشگاهی فرهمند

سال چاپ: ۱۳۹۵

قابل استفاده در کلیه دروس فنی و مهندسی

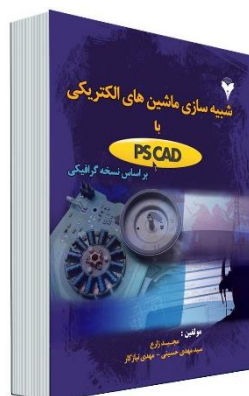


بررسی سیستم های قدرت ۱

ناشر: نشر دانشگاهی فرهمند

سال چاپ: ۱۳۹۵

قابل استفاده دانشجویان مهندسی برق و
مهندسين شاغل در صنعت



شبیه سازی ماشین های الکتریکی با PSCAD

ناشر: نشر دانشگاهی فرهمند

سال چاپ: ۱۳۹۶

قابل استفاده دانشجویان مهندسی برق در
مقاطع کارشناسی و کارشناسی ارشد

