

به نام خداوند جان و خرد

آزمون تئوری ششم

دپارتمان ریاضی و کامپیوتر مشهد

[mathdpt.blog.ir](http://mathdpt.blog.ir)

وقت آزمون : ۳۰۰ دقیقه

نکات آزمون : گراف ها بدون جهت و ساده میباشند (مگر خلاف آن در سوال گفته شده باشد)

هدف از این آزمون شیوه نوشتن و فکر کردن روی همه ی سوال ها میباشد و شدیدن پیشنهاد

میشود که روی همه ی سوال ها فکر کنید و سوالی را خالی نگذارید

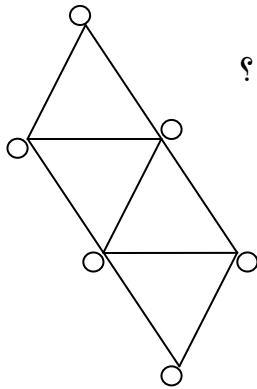
گرفتن کم تر از ۲ امتیاز از یک سوال باعث میشود ۲۵٪ بارم بقیه سوال ها کم شود یعنی اگر از

دو سوال نمره نگیرید بارم بقیه سوال ها نصف میشود

سوال اول : سمیر و بازی با گراف ..... ۳۰ امتیاز

روزی در مزرعه ی خیلی خیلی دور یک کلم متولد شد و اعضای مزرعه اسمش را سمیر گذاشتند. سمیر که از کلم بودن متنفر بود میخواست عضو گروه شلغم ها شود. شلغم ها که به همین راحتی عضو جدید نمیپذیرفتند به سمیر پیشنهاد یک بازی دو نفره دادند. بازی روی یک گراف انجام میشد به این صورت که هر نفر در نوبت خود باید یک مجموعه نا تهی از راس های گراف انتخاب میکرد و آن را حذف میکرد. هیچ کس حق نداشت در نوبت خود بیشتر از یک راس از یک مولفه همبندی انتخاب کند(پس از حذف ممکن بود مولفه های همبندی به هم بخورند). شلغم ها به سمیر اجازه دادند که خود انتخاب کند نفر اول بازی کند یا نفر دوم.

الف ) در گراف روبرو نفر چندم میبرد و چرا ؟



ب ) در یک گراف دلخواه با توجه به خود گراف نفر چندم میبرد چرا ؟

## سوال دوم : دوز به سبک کلم ها ..... ۲۵ امتیاز

پس از این که سمیر بازی شلغم ها را تمام کرد با خودش فکر کرد و تصمیم گرفت در قبال بازی با گراف شلغم ها بازی با مکعب کلم ها را به شلغم بزرگ یاد دهد. سمیر فکر می کرد که با یاد دادن بازی به شلغم ها لطف ایشان را جبران می کند. بازی دوز روی مکعب یک بازی بسیار ساده بود به این صورت که دو نفر روی یک مکعب (یک موجود ۶ وجهی و دوازده یالی) بازی میکنند. نفر اول سه یال که علامت نخورده اند را انتخاب میکند و روی آن ها علامت X میگذارد. نفر دوم نیز سه یال که قبلاً علامت نخورده اند را انتخاب میکند و روی آن ها O میگذارد. اولین کسی که یک وجه را کامل به علامت خود در بیاورد میبرد (ماکسیمم این بازی چهار مرحله خواهد داشت). شلغم بزرگ که متوجه نکته خاصی از این بازی شد از سمیر پرسید : آیا درست است که اگر هر دو نفر بهترین بازی خود را بکنند نفر اول همیشه برنده نمیشود ؟

هدف شما پاسخ دادن به این سوال میباشد ☺

سوال سوم : اولین مسئولیت ..... ۳۵ امتیاز

سمیر اولین مسئولیتش را به عنوان یک شلغم دریافت کرد. مسئولیت او کاشت یک گراف  $n$  راسی زیبا بود. یک گراف زیباست اگر و فقط اگر دور زوج داشته باشد. شلغم سفید (کسی که مسئولیت خرید راس و یال گراف بود) میدانست که فقط با داشتن چهار یال میتوان چنین گرافی درست کرد اما مشکل اساسی اینجا بود که کلمه ها موقع نصب کردن یال ها تنها کاری که میکنند این است که گراف را ساده نگه میدارند(به گونه ای یال ها را به صورت احتمالی و رندوم نصب میکنند). شلغم سفید مجبور بود که تعداد بیشتری یال بخرد طوری که مطمئن باشد گرافی که سمیر میکارد حتمن دور زوج دارد. از طرفی نمیخواهد پول زیادی برای خرید یال ها بدهد برای همین از شما میخواهد مقدار تابع  $f(n)$  که حداقل مقدار یال برای کاشت یک گراف  $n$  راسی زیبا لازم است را بیابید.

## سوال چهارم\* : مزرعه ی آقای میم ..... ۵۰ امتیاز

حتمن متوجه شده اید که اهالی مزرعه ی خیلی خیلی دور به جای میوه در مزرعه های خود گراف می کارند. آقای میم ه لام (به اختصار میم) یکی از ثروت مند ترین شلغم های مزرعه است چرا که گراف های آقای میم نامتناهی ست (بینهایت راس دارد). آقای میم آخرین یک گراف نامتناهی همبند کاشته که درجه رئوس آن متناهی ست. سمیر که آخرین فکر میکرد خیلی خوب سوال حل میکند میخواست ببیند آیا گراف آقای میم مسیر به طول بینهایت دارد یا خیر. اما از آن جا که چیزی از مسیر های نامتناهی نمیدانست از آقای میم کمک گرفت. آقای میم به عنوان راهنمایی به او مسئله دیگری داد.

« اگر گرافم میتواندست راس با درجه نامتناهی داشته باشد... من هم میتوانستم طوری گراف را بکارم که مسیر به طور هر عدد  $n$  ی داشته باشد اما مسیر به طول بینهایت نداشته باشد »

از آن جا که راهنمایی آقای میم بیشتر گیج کننده بود تا راهنمایی کننده از شما خواسته میشود با توجه به راهنمایی مسئله مذکور را حل کنید (یعنی ثابت کنید گراف مزرعه ی آقای میم مسیر نامتناهی دارد).

(حل این سوال به تنهایی نمره کامل دارد. در صورت حل نشدن سوال ، مثال برای راهنمای سوال هم نمره زیادی دارد)



\* یک راهنمایی از طرف نویسنده : حتمن چهار یا پنج بار راه حل خود را مرور کنید