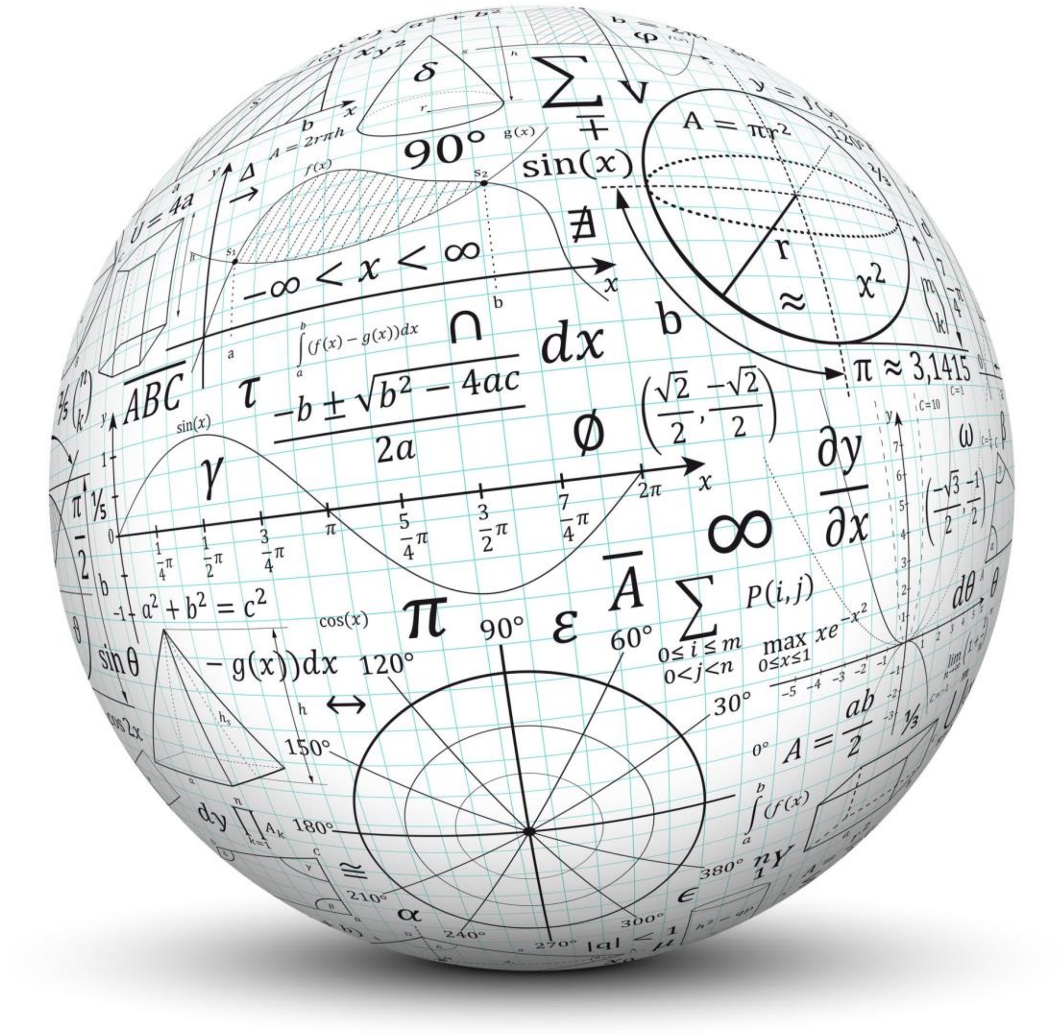
# جزوه ریاضیات مهندسی



# Engineering Mathematics

تهیه کننده: سعید حسنوند

**فصل اول**

آنالیز فوریه

**فصل دوم**

معادلات با مشتقات جزئی و مسائل مقدار مرزی

**فصل سوم**

توابع مختلط و نگاشت

**فصل چهارم**

انتگرال مختلط و حساب مانده ها

**منابع**


ریاضی مهندسی فرزین حاجی جمشیدی

ریاضیات مهندسی عبد ا... شیدفر

ریاضیات مهندسی پیشرفته اروین کرویت سیگ


**ارزشیابی**

میان ترم ۸-۹

پایان ترم ۸-۹

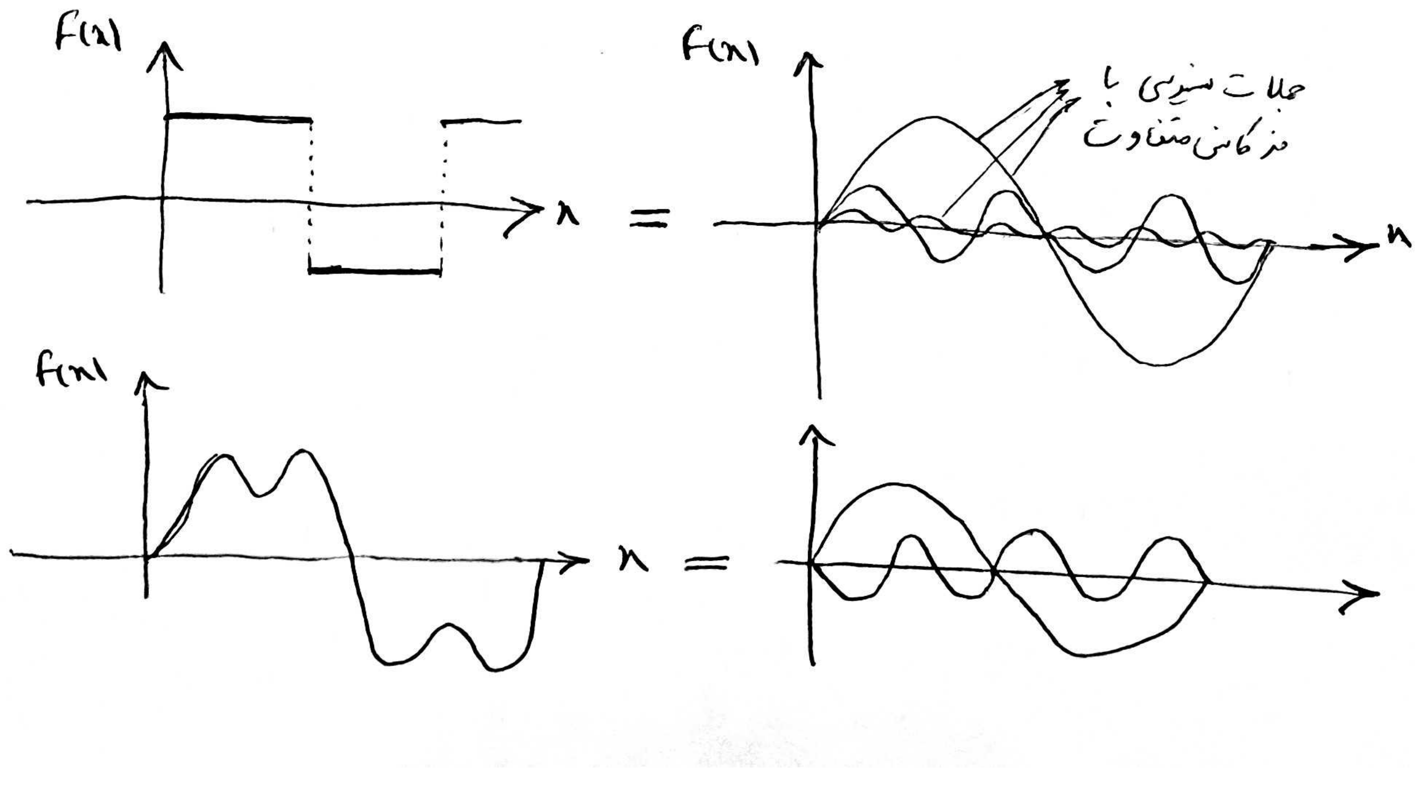
تمرین و کوییز ۲-۴

# فصل اول

## آنالیز فوریه

### ۱- سری فوریه

سیگنال های متغیر با زمان مانند جریان و ولتاژ و .... در واقعیت مانند شکل های در مدار و الکترونیک یک شکل موج سینوسی خالص نیستند. بلکه شامل چندین تابع سینوسی با دامنه و فازهای مختلف هستند که با یکدیگر ترکیب شده اند و ظاهر آنها شبیه موج سینوسی شده است. علاوه بر این شکل موج های دیگر مانند مربعی، مثلثی، دندان اره ای و .... نیز به عنوان سیگنال های شناخته شده هستند که معمولاً مشتق ناپذیر و یا گسسته هستند. برای تحلیل این شکل موج ها از سری فوریه استفاده می شود. در واقع سری فوریه هر تابع متناوب را به صورت جمع چند جمله ی سینوسی یا یه سری در می آورد که انجام تحلیل ها روی آنها به جای تابع اولیه را ساده تر می کند. در شکل های زیر جملات سینوسی سازنده ۲ تابع رسم شده اند.



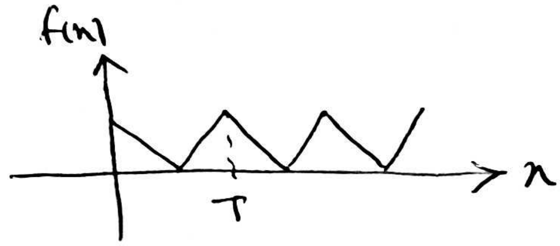
بنابراین به کمک سری فوریه هر تابع توسط تعداد زیادی جمله سینوسی نوشته می شود که در پردازش سیگنال (صوت، تصویر، قلب، مغز و ...) طراحی فیلترها، تبدیل ها، کدینگ، طراحی فرستنده، گیرنده، آنتن ها و ... کاربرد دارد.

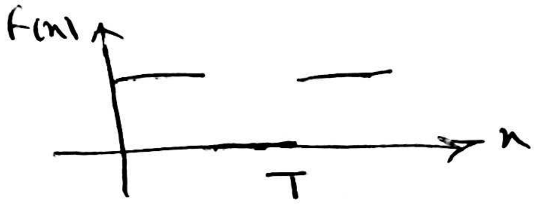
• محاسبه ی جملات سینوسی توسط سری فوریه.

* تعریف تابع متناوب: تابع $f(x)$ دارای دوره ی تناوب $T$ است اگر داشته باشیم

$$f(x+T)=f(x)$$

مثال:




* تعریف پیوسته تکه ای: تابع در تمامی نقاط به غیر از تعداد متناهی نقطه پیوسته و مشتق پذیر باشد.

⇐ هر تابع متناوب و پیوسته تکه ای را می توان توسط مجموعی از توابع سینوسی و کسینوسی به صورت زیر نوشت که به سری بدست آمده سری فوریه گویند.

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{L}x+b_n\sin\frac{n\pi}{L}x\right)$$

$$a_0=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\,dx$$

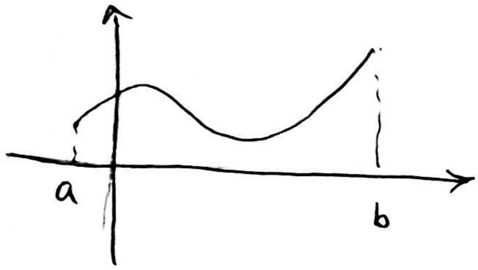
$L$ نصف دوره ی تناوب

$$a_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx$$

$$L=\frac{T}{2}$$

$$b_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx$$

نکته ۱- اگر تابع در دوره‌ی تناوب خود متقارن نباشد به صورت زیر عمل می‌شود.




$$T = b - a$$

$$L = \frac{b-a}{2}$$

نکته ۲- از آنجا که تابع sin ذاتاً فرد است. اگر تابعی که می‌خواهیم سری فوریه‌ی آن را بنویسیم یعنی $f(x)$ فرد باشد، فقط جملات sin در سری فوریه ظاهر می‌شوند و جملات cos صفر خواهند بود. یعنی:

$$a_0 = 0$$

$$a_n = 0$$

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x$$

نکته ۳- از آنجا که تابع cos ذاتاً زوج است، اگر تابع $f(x)$ زوج باشد. داریم:

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\, dx$$

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi}{L} x \, dx$$

$$b_n = 0$$

نکته ۴- روابط مفید برای محاسبه‌ی انتگرال

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}\left[\cos(x-y) + \cos(x+y)\right]$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}\left[\sin(x-y) + \sin(x+y)\right]$$

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}\left[\cos(x-y) - \cos(x+y)\right]$$

نکته ۵ - روابط زیر برای ساده سازی مناسب هستند

$$\cos n\pi = (-1)^n = \begin{cases} 1 & n \text{ زوج} \\ -1 & n \text{ فرد} \end{cases}$$

$$\cos \frac{n\pi}{2} = \begin{cases} (-1)^k & n \text{ زوج } n = 2k \\ 0 & n \text{ فرد} \end{cases}$$

$$\sin \frac{n\pi}{2} \begin{cases} 0 & n \text{ زوج} \\ (-1)^{k+1} & n \text{ فرد } n = 2k-1 \end{cases}$$

---

مثال ۱- برای تابع زیر ثابت سری فوریه را حساب کنید.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & -1 < x < 0 \\ x & 0 < x < 1 \end{cases}$$

---

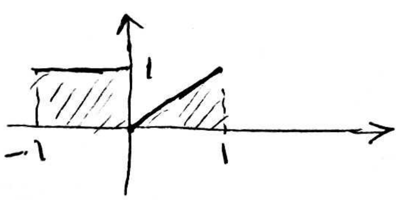
نکته: دقت شود $\frac{a_0}{2}$ همان مقدار متوسط یا مقدار DC تابع است

و از روابط زیر بدست می آید

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_0^T f(x)\, dx$$

$$\text{مقدار DC} = \frac{\text{سطح زیر نمودار در یک دوره تناوب}}{\text{طول دوره تناوب}}$$

مثال:




$$\text{مقدار DC} = \frac{1 + \frac{1}{2}}{2} = \frac{3}{4}$$

مثال ۲- سری فوریه تابع زیر را بدست آورید.

$$f(x)=\begin{cases} 0 & -\pi<x<0 \\ \pi-x & 0<x<\pi \end{cases} \qquad f(x+2\pi)=f(x)$$

مثال ۳- تابع $f(x)=|\sin \pi x|$ مفروض است.
دوره تناوب و ضرایب $a_n b_n$ را حساب کنید.

---

مثال ۴- بسط فوریه تابع دلتای دیراک $\delta(x)$ (تابع ضربه) در فاصله $-\pi < x < \pi$
را بدست آورید.

مثال ۵ـ سری فوریه تابع $f(x)=4\sin x\cos^2 x$ را بدست آورید.

---

مثال ۶ـ تابع $f(x)=\begin{cases}0 & -\pi<x<0\\ x & 0<x<\pi\end{cases}$ مفروض است، چنانچه بخواهیم این تابع را در فاصله‌ی داده شده به صورت $A+B\cos x+C\sin x$ تقریب بزنیم اعداد ثابت A و B و C را بدست آورید. به صورتی که بهترین تقریب زده شود.

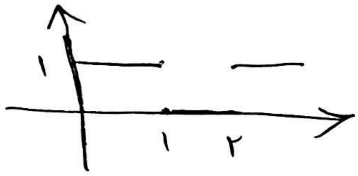
حل: بهترین تقریب یعنی در جملات سری فوریه اولین جمله را در نظر بگیریم.

• قضیه دیریکله و بحث همگرایی سری های فوریه

قضیه دیریکله نشان می دهد که :

۱- اگر $f(x)$ در $x_0$ پیوسته باشد، آنگاه $f(x_0)$ برابر مقدار سری فوریه در $x=x_0$ است

۲- " " " " " گسسته " " $\frac{f(x_0^-)+f(x_0^+)}{2}$ " " " " " " " .



مثال حالت اول واضح است

مثال حالت دوم مانند شکل روبرو

$$x_0=1 \text{ مقدار سری فوریه در } = \frac{f(1^-)+f(1^+)}{2} = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}$$

---

مثال ۷- تابع $f(x)=e^{-x}$ و $0<x<2$ مفروض است. مقدار سری فوریه در $x_0=5$ را بدست آورید. سپس با استفاده از آن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ چقدر است؟

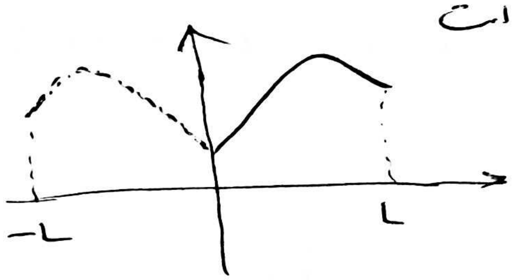
• گسترش زوج و فرد یک تابع و سری فوریه کسینوسی و سینوسی

۱- گسترش زوج: اگر تابع $f(x)$ در بازه $(0, L)$ تعریف شده باشد و آن را در فاصله ی $(-L, 0)$ به صورت زوج گسترش دهیم و برای تابع بدست آمده سری فوریه بنویسیم
چنین سری فوریه، سری فوریه کسینوسی گفته می شود و بدیهی است در این حالت $b_n = 0$ است

$$a_0 = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,dx$$

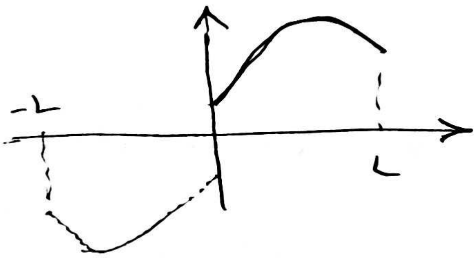
$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx$$

$$b_n = 0$$



۲- اگر تابع $f(x)$ را در بازه ی $(-L, 0)$ به صورت فرد گسترش دهیم، سری فوریه سینوسی بدست خواهد آمد. و $a_0 = a_n = 0$

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx$$



---

مثال ۸- تابع زیر مفروض است. سری فوریه سینوسی آن را بدست آورید.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ \frac{1}{2} & 1 < x < 2 \end{cases}$$

• مشتق گیری و انتگرال گیری از سری های فوریه

فرض کنید تابع $f(x)$ در بازه‌ی $(-L, L)$ تعریف شده باشد دارای سری فوریه به فرم زیر است.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{L} x + b_n \sin \frac{n\pi}{L} x\right)$$

۱- مشتق گیری: اگر $f(L) = f(-L)$ باشد می‌توان از طرفین مشتق گیری کرده و سری فوریه $f'(x)$ را در $(-L, L)$ بدست آورد

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{L} \left(-a_n \sin \frac{n\pi}{L} x + b_n \cos \frac{n\pi}{L} x\right)$$

نکته: گاهی اوقات بدست آوردن سری فوریه مشتق یک تابع سخت‌تر از حالتی که سری فوریه خود تابع را بدست آوریم و مشتق بگیریم

۲- انتگرال گیری: می‌توان از طرفین انتگرال گیری کرد و سری فوریه تابع $\int f(x)\,dx - \frac{a_0}{2}x$ را در $[-L, L]$ بدست آورد چون

$$\int f(x)\,dx = \frac{a_0}{2}x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L}{n\pi}\left(a_n \sin \frac{n\pi}{L} x - b_n \cos \frac{n\pi}{L} x\right) + K$$

طرف راست یک جمله $\frac{a_0}{2}x$ دارد که در سری فوریه همچنین جمله‌ای نباید وجود داشته باشد اگر این جمله را به سمت چپ ببریم:

$$\int f(x)\,dx - \frac{a_0}{2}x = K + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L}{n\pi}\left(a_n \sin \frac{n\pi}{L} x - b_n \cos \frac{n\pi}{L} x\right)$$

$\Leftarrow$ مقدار $K$ با قرار دادن یک مقدار $x_0$ در طرفین بدست می‌آید یا برابر با مقدار $a_0$ در سری فوریه تابع سمت چپ است.

مثال ۹ـ سری فوریه تابع $f(x)=\frac{x}{2}$ در فاصله‌ی $-\pi<x<\pi$ به صورت زیر است، سری فوریه تابع $g(x)=x^2$ را بدست آورید.

$$f(x)=\sin x-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\cdots$$

---

مثال ۱۰ـ تابع $f(x)=x^2$ در $-\pi<x<\pi$ تعریف شده است که به صورت زیر بیان می‌شود، آنگاه سری فوریه $g(x)=x^3-\pi^2 x$ را بدست آورید؟

$$f(x)=\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2}\cos nx$$

• **فرم مختلط سری فوریه**

اگر $f(x)$ دارای سری فوریه $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{L}x+b_n\sin\frac{n\pi}{L}x\right)$

باشد با استفاده از روابط

$$\sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\qquad \cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$$

فرم مختلط سری فوریه به این صورت خواهد بود

$$f(x)=\sum_{-\infty}^{+\infty}C_n e^{\frac{in\pi x}{L}}$$

$$C_n=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}f(x)\,e^{-\frac{in\pi x}{L}}\,dx\qquad n=0,\pm1,\pm2,\dots$$

مثال ۱۱ـ فرم مختلط سری فوریه برای تابع زیر را بدست آورید.

$$f(x)=e^{x}\qquad -\pi<x<\pi$$

• محاسبه‌ی سری های عددی با استفاده از سری فوریه

برای این کار مقدار معین $x=x_0$ را جایگذاری کرده و $x$ در سری فوریه حذف می‌شود و مجموع سری نامتناهی $a_n$ یا $b_n$ بدست می‌آید. معمولا اعداد ۰ و $\pi$ و $\frac{\pi}{2}$ و ... جایگذاری می‌کنیم.

مثال ۱۲: با استفاده از سری فوریه تابع $f(x)=\begin{cases}-1 & -\pi<x<0 \\ 1 & 0<x<\pi\end{cases}$ مجموع سری

$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$ را بدست آورید.

• اگر با جایگذاری سری خواسته شده بدست نیاید از اتحاد پارسوال استفاده می‌کنیم.

■ اتحاد پارسوال برای سری فوریه: برای هر تابع متناوب $f(x)$ داریم

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f^2(x)\,dx=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$$

با حل کردن اتحاد بالا می‌توان جواب برخی سری های عددی را بدست آورد.

مثال ۱۳ـ با استفاده سری فوریه تابع $f(x)=x$ در $-2<x<2$

سری عددی $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ چقدر است؟

مثال ۱۴ـ با استفاده از سری فوریه تابع متناوب $f(x)=|x|$ در بازه $(-\pi,\pi)$

مجموع سری عددی $\sum_{n=1,\ \text{فرد}}^{\infty}\frac{1}{n^4}$ را بدست آورید.

$$f(x)=\frac{\pi}{2}+\sum_{n=1,\ \text{فرد}}^{+\infty}\frac{-4}{\pi n^2}\cos nx$$

• انتگرال فوریه

اگر تابع $f(x)$ تکه‌ای پیوسته و در هر نقطه دارای مشتق چپ و راست باشد و نیز مطلقاً انتگرال‌پذیر باشد یعنی $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx < \infty$ باشد آنگاه می‌توان تابع مذکور را توسط انتگرال زیر که انتگرال فوریه نام دارد نوشت.

$$f(x) = \int_0^{\infty} [A(\omega)\cos\omega x + B(\omega)\sin\omega x]\,d\omega$$

ضرایب آن
$$\begin{cases} A(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\omega x\,dx \\ B(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\omega x\,dx \end{cases}$$

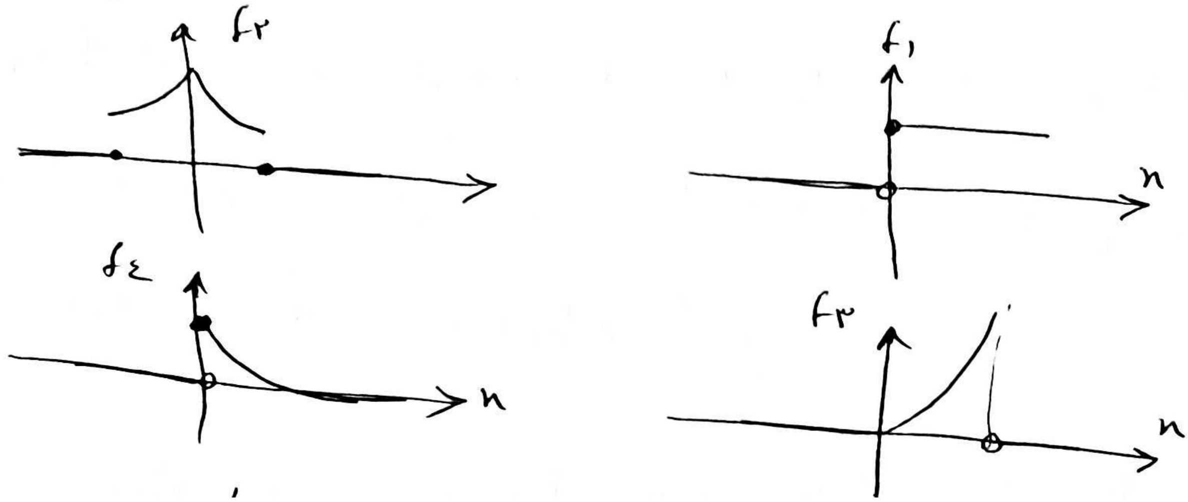
• قضیه دیریکله در انتگرال فوریه

۱- اگر $f(x)$ در نقطه‌ای پیوسته باشد مقدار انتگرال فوریه آن در آن نقطه برابر $f(x)$ است.

۲- 〃 〃 گسسته 〃 〃 〃 〃 〃 〃 〃 $\dfrac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$

مثال ۱۵ - انتگرال فوریه تابع $f(x) = \begin{cases} 1 & 0<x<1 \\ -x & -1<x<0 \\ 0 & |x|>1 \end{cases}$ را بدست آورید.

مثال ۱۶ - کدام یک از توابع زیر را می‌توان توسط انتگرال فوریه نمایش داد.




حل:

• انتگرال فوریه توابع زوج و فرد:

۱- اگر تابع $f(x)$ تمام شرایطی که گفته شد را داشته باشد و زوج باشد آنگاه

$$A(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\cos\omega x\,dx \qquad B(\omega)=0$$

۲- اگر $f(x)$ فرد باشد

$$B(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\sin\omega x\,dx \qquad A(\omega)=0$$

مثال ۱۷ - انتگرال فوریه تابع زیر را بدست آورید:

$$f(x)=\begin{cases}\cos x & |x|<\frac{\pi}{2}\\ 0 & |x|>\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

● فرم مختلط انتگرال فوریه

اگر تابع $f(x)$ شرایط گفته شده را داشته باشد نمایش مختلط انتگرال فوریه به صورت زیر است:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} C(\omega)\, e^{-i\omega x}\, dx$$

$$C(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{i\omega x}\, dx$$

مثال ۱۸ـ انتگرال فوریه مختلط تابع زیر را بدست آورید.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < \pi \\ 0 & |x| > \pi \end{cases}$$

● تبدیل فوریه

اگر تابع $f(x)$ شرایط گفته شده برای انتگرال فوریه را داشته باشد آنگاه تبدیل فوریه $f(x)$ را که با $\mathcal{F}\{f(x)\}$ یا $F(\omega)$ نشان می‌دهند به صورت زیر است

$$F(\omega) = \mathcal{F}\{f(x)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\omega x}\, dx$$

و عکس تبدیل فوریه $\omega$

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{i\omega x}\, d\omega$$

• نکته: در بعضی کتب تبدیل فوریه در ضریب آن تفاوت دارد یعنی

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\omega x}\, dx \qquad f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{i\omega x}\, dx$$

مثال ۱۹- تبدیل فوریه $x>0$ و $f(x)=e^{-ax}$ و $g(x)=\begin{cases}1 & |x|<a\\ 0 & |x|>a\end{cases}$

را بدست آورید.

$- \quad 1 \quad , \infty$

● خواص تبدیل فوریه

$$f\{a f(x)+b g(x)\}=a F(\omega)+b G(\omega)$$

$$f\{f^{(n)}(x)\}=i^n F^{(n)}(\omega)$$

$$f\{f(ax)\}=\frac{1}{a} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

$$f\{f(x-a)\}=e^{-i\omega a} F(\omega)$$

$$f\{e^{iax} f(x)\}=F(\omega-a)$$

$$f\{f(x) * g(x)\}=\sqrt{2\pi}\, F(\omega)\, G(\omega)$$

$$f\{f(x)\cdot g(x)\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, f(\omega) * G(\omega)$$

نکته: اگر در تبدیل فوریه $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ را منظور نکنیم و تغییر متغیر $\omega = is$ را انجام دهیم تبدیل لاپلاس بدست می آید.

• تبدیل فوریه کسینوسی و سینوسی

$$F_c(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x) \cos \omega x \, dx$$

$$F_s(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x) \sin \omega x \, dx$$

مثال ۲۰- تبدیل فوریه کسینوسی تابع $e^{-2x}$ را بدست آورید.

نکته: تبدیل فوریه کسینوسی یک تابع زوج برابر با تبدیل فوریه آن است.
" " سینوسی " " فرد " " " " " " " "

• اتحاد پارسوال برای تبدیل فوریه

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

# فرمولهای انتگرال

## انتگرال های پایه ای

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1}, \quad n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x|$$

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln |ax+b|$$

## انتگرال های کسری

$$\int \frac{1}{(x+a)^2} dx = -\frac{1}{x+a}$$

$$\int (x+a)^n dx = \frac{(x+a)^{n+1}}{n+1}, n \neq -1$$

$$\int x(x+a)^n dx = \frac{(x+a)^{n+1}((n+1)x-a)}{(n+1)(n+2)}$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \tan^{-1} x$$

$$\int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a}$$

## انتگرال های رادیکالی

$$\int \sqrt{x-a} \quad dx = \frac{2}{3}(x-a)^{3/2}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x \pm a}} \quad dx = 2\sqrt{x \pm a}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a-x}} \quad dx = -2\sqrt{a-x}$$

## انتگرا لهای لگاریتمی

$$\int \ln ax \quad dx = x \ln ax - x$$

$$\int x \ln x \quad dx = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{x^2}{4}$$

$$\int x^2 \ln x \quad dx = \frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{x^3}{9}$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C$$

$$\int \log_a x \, dx = x \log_a x - \frac{x}{\ln a} + C$$

## انتگرال های توانی

$$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \qquad \int e^{ax} \quad dx = \frac{1}{a} e^{ax}$$

## انتگرال مثلثاتی

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C \qquad \int \sinh x \, dx = \cosh x + C$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C \qquad \int \cosh x \, dx = \sinh x + C$$

$$\int \tan x \, dx = -\ln |\cos x| + C \qquad \int \tanh x \, dx = \ln |\cosh x| + C$$

$$\int \cot x \, dx = \ln |\sin x| + C \qquad \int \operatorname{csch} x \, dx = \ln \left| \tanh \frac{x}{2} \right| + C$$

$$\int \sin ax \quad dx = -\frac{1}{a} \cos ax \qquad \int \cos ax \quad dx = \frac{1}{a} \sin ax$$

# فصل دوم

• معادلات با مشتقات جزئی

تعریف: هرمعادله با مشتقات نسبی رابطه ای است بین یک متغیر وابسته (مثلاً z) و چند متغیر مستقل (مثلاً x و y و ...) و مشتقات نسبی متغیر وابسته نسبت به متغیرهای مستقل به صورت زیر:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial z}{\partial x} + yz + \sin z = 0$$

وقتی متغیر مستقل فقط وابسته به یک متغیر باشد علامت دیفرانسیل $d$ است:

$$y = x^2 + 2x + 5 \qquad \frac{dy}{dx}$$

اما وقتی متغیر مستقل وابسته به چند متغیر باشد علامت دیفرانسیل $\partial$ است:

$$z = 5x^2y + xy^6 + 6 \qquad \frac{\partial z}{\partial y} , \frac{\partial z}{\partial x} \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

• مرتبه ی یک معادله: برابر با بالاترین مرتبه مشتقات نسبی (جزئی) موجود در معادله است برای مثال

$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}$ مرتبه ۳

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ مرتبه ۲

• معادله خطی: معادله ای خطی است که برحسب متغیر وابسته و مشتقات آن باشد:

$$x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + z = xy$$ خطی

$$z\frac{\partial z}{\partial x} + y + x = 0$$ به خاطر جمله $z\frac{\partial z}{\partial x}$ غیر خطی

• معادله همگن، معادله ای که شامل جمله ای که فقط متغیر های مستقل یا

یا عدد ثابت است، نباشد

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + xy^2 + z\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$ به خاطر $xy^2$ همگن نیست

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z$$ همگن است.

■ تشکیل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

۱- حذف ثابت های معادله اصلی

وقتی معادله دارای ثابت های باشد با مشتق گرفتن می توان ثابت ها را حذف

کرد و معادله دیفرانسیل حاصل می شود.

مثال ۱- معادله دیفرانسیل متناظر با معادله $ax^2 + by + a - z = 0$ را بدست آورید.

۲- حذف توابع

اگر یک تابع اختیاری نامعلوم مانند $\varphi$ در معادله وجود داشته باشد با مشتق گرفتن

می توان آن را حذف کرد و به معادله دیفرانسیل رسید.

مثال ۲- رابطه ی $z=y^2 \varphi(xy)$ که در آن $\varphi$ یک تابع اختیاری است مفروض می باشد. معادله با مشتقات جزئی حاکم بر $z$ را بدست آورید.

## ● حل معادلات با مشتقات جزئی

برای حل معادلات با مشتقات جزئی آنها را به مرتبه ی اول، دوم و.... تقسیم بندی کرده و برای هر حالت یک روش ارائه می شود. با این کار معادلات ساده تر حل خواهند شد.

### ۱- معادلات با مشتقات جزئی مرتبه ی اول

در این حالت سایر متغیرها را ثابت فرض کرده و معادله به یک معادله دیفرانسیل معمولی تبدیل می شود. در پایان دقت شود که ثابت هایی که بدست می آیند نباید عدد ثابت (مانند $C$) باشند بلکه توابعی از سایر متغیرها ($\varphi(x)$ و $\varphi(y)$) هستند.

مثال ۳ـ معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی زیر را حل کنید:

$$2t + \frac{\partial z}{\partial x} + yx^2 = 0$$

## ۲- حل عمومی معادلات مشتقات جزئی مرتبه‌ی اول - روش لاگرانژ

$$A_1(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial x} + A_2(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial y} = R(x,y,z)$$

برای معادله کلی به فرم بالا دو جواب مستقل از دستگاه زیر که برابر با عدد ثابت هستند

یعنی $u_1$ و $u_2$ وجود دارد و در نهایت جواب عمومی $\varphi(u_1,u_2)=0$ است

$$\frac{dx}{A_1} = \frac{dy}{A_2} = \frac{dz}{R}$$ دستگاه لاگرانژ

مثال ۴- جواب عمومی معادله زیر را بدست آورید.

$$x\frac{\partial z}{\partial x} - y^2\frac{\partial z}{\partial y} = z$$

## ۳- معادلات خطی همگن مرتبه‌ی اول با ضرایب ثابت

$$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} + cz = 0$$ $a$ و $b$ و $c$ عدد ثابت هستند

با دستگاه لاگرانژ یکی از دو جواب جواب نهایی است

$$z = \begin{cases} e^{-\frac{c}{a}x}\,\varphi(ay-bx) & a \neq 0 \\ e^{-\frac{c}{b}y}\,\varphi(ay-bx) & b \neq 0 \end{cases}$$

۴ - معادلات خطی ناهمگن مرتبه‌ی اول با ضرایب ثابت

$$a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}+cz=R(x,y)$$

جواب عمومی مانند حالت قبل (۳) است و جواب خصوصی به روش ضرایب نامعین بدست می‌آید. به این ترتیب که تابعی مشابه $R$ با ضرایب ثابت نامعین $(A,B,\dots)$ را جواب خصوصی فرض کرده و با جای‌گذاری آن در معادله ضرایب بدست می‌آیند.

مثال ۵- جواب کلی معادله زیر را بدست آورید.

$$3\frac{\partial z}{\partial x}-4\frac{\partial z}{\partial y}=x+y^2-2z$$

نکته مهم: اگر $R(x,y)$ مثل جواب عمومی باشد باید جواب خصوصی با ضرایب نامعین را در $x$ یا $y$ ضرب کنیم.

- معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی مرتبه ی دوم

فرم کلی آن به صورت زیر است و در حالت های مختلف بررسی می کنیم.

$$f\left(x,y,z,\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)=0$$

الف- اگر معادله فقط دارای مشتق مرتبه ی دوم باشد:

در این حالت معادله به یکی از صورت های زیر است، آنگاه با دوبار انتگرال گیری از طرفین حل خواهد شد.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=R(x,y) \quad \text{یا} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=R(x,y) \quad \text{یا} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=R(x,y)$$

مثال ۶- معادله زیر را حل کنید.

$$y\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-x=0$$

ب) اگر معادله مرتبه ۲ فاقد تابع $z$ باشد و فقط یکی از دو جمله ی $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ یا $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ موجود باشد یعنی به صورت یکی از حالات زیر:

$$A(x,y)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+B(x,y)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+C(x,y)\frac{\partial z}{\partial x}=R(x,y) \qquad \text{I}$$

$$A(x,y)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+B(x,y)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+C(x,y)\frac{\partial z}{\partial y}=R(x,y) \qquad \text{II}$$

آنگاه با تغییر متغیر $p=\frac{\partial z}{\partial x}$ برای معادله I و $q=\frac{\partial z}{\partial y}$ برای II

معادلات به معادله مرتبه اول تبدیل می‌شوند که با حل آن p و q و سپس یک بار

دیگر اگر انتگرال بگیریم z بدست می‌آید.

مثال ۷- معادله زیر را حل کنید.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}+\frac{\partial z}{\partial x}=xy$$

ج) اگر مشتقات جزئی فقط بر حسب یک متغیر باشند

$$A(x,y)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+B(x,y)\frac{\partial z}{\partial x}+C(x,y)z=R(x,y) \quad \text{I}$$

$$A(x,y)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+B(x,y)\frac{\partial z}{\partial y}+C(x,y)z=R(x,y) \quad \text{II}$$

آنگاه، با ثابت فرض کردن y در I و x در II به معادلات خطی مرتبه‌ی دوم

معمولی تبدیل می‌شوند و شبیه درس معادلات دیفرانسیل خواهد بود.

مثال ۸- جواب کلی معادله زیر را بدست آورید:

$$\frac{1}{y}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\frac{\partial z}{\partial x} + yz = xy$$

د) فرم کانونی معادلات مرتبه‌ی دوم خطی

فرم کانونی معادلات مرتبه دوم به صورت زیر است. که ضرایب می‌توانند صفر هم باشند

$$A\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + C\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + D\frac{\partial z}{\partial x} + E\frac{\partial z}{\partial y} + Fz = R$$

اگر $\Delta = B^2 - 4AC$ را تشکیل دهیم، بسته به مقدار آن ۳ حالت رخ می‌دهد که با استفاده از روش‌های زیر معادله را به یک معادله ساده‌تر تبدیل کرده که قابل حل است

۱- اگر $\Delta > 0$ باشد معادله از نوع هذلولوی است.

آنگاه معادله $A\alpha^2 + B\alpha + C = 0$ دارای دو ریشه حقیقی $\alpha_1$ و $\alpha_2$ است و با تغییر متغیر $u = y + \alpha_1 x$ و $v = y + \alpha_2 x$ فرم کانونی معادله هذلولوی به صورت زیر درخواهد آمد و با تغییر متغیر $p = \frac{\partial z}{\partial v}$ حل می‌شود.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v} = F\left(u, v, z, \frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v}\right)$$

۱۰/۴

۲- اگر $\Delta=0$ باشد از نوع سهموی است.

آنگاه معادله $A\alpha^2+B\alpha+C=0$ دارای ریشه‌ی مضاعف $\alpha$ است و با تغییر متغیر $u=y+\alpha x$ و $v=$ (تابع دلخواهی از $x$ و $y$) فرم کانونی معادله سهموی بدست می‌آید

$$\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=F\left(u,v,z,\frac{\partial z}{\partial u},\frac{\partial z}{\partial v}\right)$$

۳- اگر $\Delta<0$ باشد از نوع بیضوی است.

آنگاه معادله $A\alpha^2+B\alpha+C=0$ دارای ۲ ریشه‌ی مختلط مزدوج $\alpha_1$ و $\alpha_2$ است که با تغییر متغیر $u=y+Re(\alpha_1)x$ و $v=y-Im(\alpha_1)x$ فرم کانونی معادله بیضوی بدست می‌آید:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=F\left(u,v,z,\frac{\partial z}{\partial u},\frac{\partial z}{\partial v}\right)$$

مثال ۸- فرم کانونی معادله زیر را بدست آورده و آن را حل کنید.

$$4\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+5\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=1$$

$\Delta=B^2-4AC=5^2-4(4\times1)=25-16=9>0 \rightarrow$ هذلولی

$4\alpha^2+5\alpha+1=0 \qquad \alpha_1=-1 \qquad \alpha_2=-\frac{1}{4}$

از نوع هذلولی است بنابراین با تغییر متغیرهای $u=y-x$ ، $v=y-\frac{1}{4}x$ معادله ساده‌تر می‌شود.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial z}{\partial u}+\left(-\frac{1}{4}\right)\frac{\partial z}{\partial v}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}$$

۱۱/۴

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{1}{4}\frac{\partial z}{\partial v}\right)=\frac{\partial}{\partial u}\left(-\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{1}{4}\frac{\partial z}{\partial v}\right)\cancelto{-1}{\frac{\partial u}{\partial x}}$$

$$+\frac{\partial}{\partial v}\left(-\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{1}{4}\frac{\partial z}{\partial v}\right)\cancelto{-\frac{1}{4}}{\frac{\partial v}{\partial x}}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{1}{4}\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{1}{4}\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{1}{16}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$$

$$=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{1}{16}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}\right)=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}\right)=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}\right)\cdot\cancelto{-1}{\frac{\partial u}{\partial x}}+$$

$$+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}\right)\cancelto{-\frac{1}{4}}{\frac{\partial v}{\partial x}}=-\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}-\frac{1}{4}\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}-\frac{1}{4}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$$

$$=-\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-\frac{5}{4}\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}-\frac{1}{4}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$$

جای‌گذاری جملات بالا در معادله $\rightarrow$ $4\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+5\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial x}=2$

معادله ساده شده پس از جایگذاری $\quad \frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}-\frac{1}{3}\frac{\partial z}{\partial v}=-\frac{8}{9}$

با تغییر متغیر: $\quad P=\frac{\partial z}{\partial v}\longrightarrow \frac{dP}{du}-\frac{1}{3}P=-\frac{8}{9}$

$m-\frac{1}{3}=0 \Rightarrow m=\frac{1}{3} \qquad P_h=f(v)e^{\frac{1}{3}u}$

$P_p=A \longrightarrow 0-\frac{1}{3}A=-\frac{8}{9} \Rightarrow A=\frac{8}{3} \Rightarrow P_p=\frac{8}{3}$

$P=P_h+P_p=f(v)e^{\frac{1}{3}u}+\frac{8}{3}$

$\frac{\partial z}{\partial v}=f(v)e^{\frac{1}{3}u}+\frac{8}{3}\longrightarrow z=\int\left(f(v)e^{\frac{1}{3}u}+\frac{8}{3}\right)dv$

$\Rightarrow z=f_1(v)e^{\frac{1}{3}u}+f_2(u)+\frac{8}{3}v$

$\Rightarrow z=f_1\left(y-\frac{1}{4}x\right)e^{\frac{1}{3}(y-x)}+f_2(y-x)+\frac{8}{3}\left(y-\frac{1}{4}x\right)$

## ه) روش تفکیک متغیرها

برای حل به روش تفکیک متغیرها، جواب عمومی را به صورت ضرب ۲ تابع برحسب $x$ و $y$ به صورت $z(x,y) = F(x)\,G(y)$ در نظر می‌گیریم و با جایگذاری در معادله به صورت تفکیک شده $P(x) = Q(y)$ مرتب می‌کنیم (یعنی همه‌ی متغیرهای $x$ یک طرف تساوی و $y$ طرف دیگر)، شرط برقراری این تساوی این است که هر دو عدد ثابت باشند:

$P(x) = K \qquad Q(y) = K$

درنهایت $z$ با حل معادله دیفرانسیل هرکدام از ۲ تساوی بالا بدست می‌آید.

مثال ۴ـ جواب عمومی معادله زیر را به روش تفکیک متغیرها بدست آورید:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2 \partial y} - y\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

# مسائل مقدار مرزی

مسائل مقدار مرزی، معادلات دیفرانسیل با مشتق های نسبی هستند که از مدل سازی مسائل فیزیکی بوجود می آیند و دارای شرایط مکانی و شرایط اولیه می باشند که به آنها شرایط مرزی گفته می شود. جواب مسائل مقدار مرزی به صورت منحصر بفرد براساس شرایط مرزی بدست می آید.

از مهمترین مسائل مقدار مرزی، معادله موج، معادله گرما، معادله لاپلاس و معادله پواسن است.

روش کلی حل این مسائل:

۱ـ با استفاده از روش تفکیک متغیرها معادله به معادله دیفرانسیل معمولی تبدیل می شود.

۲ـ جواب معادلات دیفرانسیل معمولی با توجه به شرایط مرزی تعیین می شود.

۳ـ با توجه به شرایط اولیه، جوابهای بدست آمده در مرحله ۲ را باهم ترکیب کرده تا جواب نهایی حاصل شود.

## ۱ـ معادله موج یک بعدی همگن

معادله موج دارای یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی است که بسته به شرایط مختلف حالت های متفاوتی دارد که در ادامه بررسی خواهند شد.

### ۱ـ۱ـ تار با طول متناهی و دو سر ثابت

دارای معادلاتی به صورت زیر است:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & 0<x<L \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 & \text{شرایط مرزی} \\ u(x,0) = f(x) \quad u_t(x,0) = g(x) & \text{شرایط اولیه} \quad t>0 \end{cases}$$

روش کلی حل این معادله طبق ۳ مرحله گفته شده است.

مرحله اول جداسازی متغیرها

$u(x,t) = F(x)\,G(t)$

$\rightarrow F(x)\,G''(t) = c^2\,F''(x)\,G(t)$

$\longrightarrow \dfrac{F''(x)}{F(x)} = \dfrac{G''(t)}{c^2 G(t)} = K \Rightarrow \begin{cases} F''(x) - K\,F(x) = 0 & \text{I} \\ G''(t) - c^2 K\,G(t) = 0 & \text{II} \end{cases}$

مرحله دوم: شرایط مرزی عبارتند از

$\begin{cases} u(0,t) = 0 & F(0)\,G(t) = 0 \\ u(L,t) = 0 & F(L)\,G(t) = 0 \end{cases}$

اگر $G(t) = 0$ باشد آنگاه $u = 0$ که جواب بدیهی است لذا $G(t) \neq 0$ و خواهیم داشت

$F(0) = F(L) = 0 \quad (1)$

$\Rightarrow F''(x) = 0 \Rightarrow F(x) = Ax + B$

الف) اگر $K = 0$ باشد

با اعمال شرط (1) در معادله I نتیجه می‌شود $A = B = 0$ یعنی $F(x) = 0$ که $u = 0$ می‌شود و جواب بدیهی و قابل قبول نیست

ب) اگر $K > 0$ مثلاً $K = p^2$

معادله مشخصه I به صورت $m^2 - p^2 = 0$ می‌شود یعنی $m = \pm p$

$\Rightarrow F(x) = Ae^{px} + Be^{-px}$

با اعمال شرط (1) نتیجه می‌شود. $A = B = 0$

یعنی $F(x) = 0$ در نتیجه $u = 0$ که جواب بدیهی و قابل قبول نیست.

ج) بنابراین $K<0$ یعنی $K=-p^2$

معادله مشخصه دارای ریشه‌های موهومی است و جواب $\sin$ می‌شود.

$$f(x)=A\cos px+B\sin px \qquad \begin{cases} F(0)=0 \Rightarrow A=0 \\ F(L)=0 \Rightarrow B\sin pL=0 \end{cases}$$

واضح است که $B\neq 0$ چراکه $u=0$ خواهد شد. بنابراین با فرض $B=1$

$$\sin pL=0 \Rightarrow pL=n\pi \Rightarrow p=\frac{n\pi}{L} \qquad n=1,2,\dots$$

$$F_n(x)=\sin\frac{n\pi}{L}x$$

همچنین داریم
$$G''(t)+\left(\frac{cn\pi}{L}\right)^2 G(t)=0$$

$$\Rightarrow G_n(t)=A_n\cos\frac{cn\pi}{L}t+B_n\sin\frac{cn\pi}{L}t$$

با فرض $\lambda_n=\frac{cn\pi}{L}$

$$u_n(x,t)=F_n(x)\,G_n(t)=(A_n\cos\lambda_n t+B_n\sin\lambda_n t)\times\sin\frac{n\pi}{L}x$$

توابع $F_n$ و $G_n$، توابع ویژه و $\lambda_n$ ها مقادیر ویژه هستند. چون معادله خطی و همگن است.

بنابراین مجموع $u_n$ ها نیز جواب است.

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos\lambda_n t+B_n\sin\lambda_n t)\sin\frac{n\pi}{L}x \leftarrow \bigstar$$

شرایط اولیه
$$\begin{cases} u(x,0)=f(x) \longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\frac{n\pi}{L}x=f(x) \\ u_t(x,0)=g(x) \longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}B_n\lambda_n\sin\frac{n\pi}{L}x=g(x) \end{cases}$$

یعنی $A_n$ و $\lambda_n B_n$ ضرایب سری فوریه سینوسی $f(x)$ و $g(x)$ هستند

$$A_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx$$

$$B_n\lambda_n=\frac{2}{L}\int_0^L g(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx \longrightarrow B_n=\frac{2}{cn\pi}\int_0^L g(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx$$

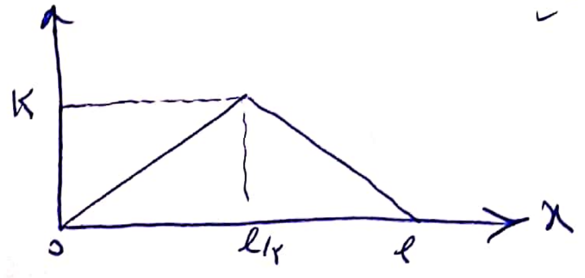
جواب نهایی $\bigstar$ است.

مثال ۱۰- جواب مسئله مقدار مرزی زیر یعنی $u(x,t)$ را بدست آورید.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \qquad 0<x<1 \qquad t>0$$

$$u(0,t) = u(L,t) = u(x,0) = 0 \qquad u_t(x,0) = x$$

مثال ۱۱- نخی به طول $l$ را مطابق شکل زیر از وسط به ارتفاع $K$ بالا برده و رها می‌کنیم.
انحراف این نخ را در هر لحظه بدست آورید.



۱-۲- تار با طول متناهی و دو سر آزاد

حالت دوم مسئله موج مربوط به تاری است که ۲ سر آن آزاد است و دارای معادله زیر است.

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \qquad \begin{cases} u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0 \\ u(x,0) = 0 \qquad u_t(x,0) = f(x) \end{cases}$$

جواب نهایی $\rightarrow u(x,t) = A_1 t + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \lambda_n t \cos \frac{n\pi}{L} x$

سری فوریه $\begin{cases} A_1 = \frac{1}{L} \int_0^L f(x)\, dx \\ B_n = \frac{2}{cn\pi} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi}{L} x \, dx \end{cases} \qquad \lambda_n = \frac{cn\pi}{L}$

مثال ۱۲ـ جواب معادله زیر را بدست آورید:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \begin{cases} u(x,0) = 0 & u_t(x,0) = 1 \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0 \end{cases}$$

۱ـ۳ـ تار با طول نامتناهی

اگر طول تار مورد بررسی بسیار بلند باشد برابر $\infty$ در نظر گرفته می‌شود و معادله و شرایط مرزی آن به صورت زیر است:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad -\infty < x < \infty$$

$$\begin{cases} |u(-\infty,t)| \text{ و } |u(\infty,t)| < M \\ u(x,0) = f(x) \qquad u_t(x,0) = 0 \end{cases}$$

روش حل مانند حالت اول است با این تفاوت چون $-\infty < x < \infty$ به جای سری، انتگرال فوریه داریم:

$$u(x,t) = \int_0^\infty [A(\omega) \cos \omega x + B(\omega) \sin \omega x] \cos c\omega t \, d\omega$$

شرط اولیه $u(x,0) = f(x)$ $\quad f(x) = \int_0^\infty [A(\omega) \cos \omega x + B(\omega) \sin \omega x] \, d\omega$

$A(\omega)$ و $B(\omega)$ ضرایب انتگرال فوریه
$$\begin{cases} A(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty f(x) \cos \omega x \, dx \\ B(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty f(x) \sin \omega x \, dx \end{cases}$$

اگر شرط اولیه به صورت $u(x,0) = 0$ $\quad u_t(x,0) = g(x)$ باشد

$$u(x,t) = \int_0^\infty [A^*(\omega) \cos \omega x + B^*(\omega) \sin \omega x] \sin c\omega t \, d\omega$$

$$\begin{cases} A^*(\omega) = \frac{1}{\pi c \omega} \int_{-\infty}^\infty g(x) \cos \omega x \, dx \\ B^*(\omega) = \frac{1}{\pi c \omega} \int_{-\infty}^\infty g(x) \sin \omega x \, dx \end{cases}$$

مثال ۱۳- جواب مسئله مقدار مرزی زیر را بدست آورید.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad -\infty < x < \infty \qquad t > 0$$

$$\begin{cases} u(x,0) = \begin{cases} 1 & |x| < 2 \\ 0 & |x| > 2 \end{cases} \\ u_t(x,0) = e^{-|x|} \end{cases}$$

## ۲- معادله گرمای تک بعدی همگن

معادله گرما نیز یک معادله دیفرانسیل جزئی با شرایط اولیه است که نسبت به شرایط دارای حالت های مختلف است و در ادامه بررسی خواهند شد.

### ۲-۱- میله نازک متناهی و دمای دو سر میله ثابت

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad 0<x<L \qquad t>0$$

$$\begin{cases} u(0,t) = u(L,t) = 0 \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$$

جواب $\quad u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi}{L}x \, e^{-\lambda_n^2 t}$

$$B_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx \qquad \lambda_n = \frac{cn\pi}{L}$$

نکته مهم: در حالت پایدار دمای تمام میله برابر و تغییرات u نسبت به دما یعنی $t$ صفر می شود. $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$

مثال ۱۴- مسئله مقدار مرزی گرمای زیر را حل کنید و جواب حالت پایدار آن را بدست آورید.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \begin{cases} u(0,t) = 10 \qquad u(3,t) = 40 \\ u(x,0) = 25 \qquad |u(x,t)| < M \end{cases}$$

۲-۲- میله نازک منتهی و دو سر عایق

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad 0<x<L \qquad t>0$$

$$\begin{cases} u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0 \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$$

جواب $u(x,t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{L} x \, e^{-\lambda_n^2 t}$

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f(x)\, dx \\ a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi}{L} x \, dx \end{cases} \qquad \lambda_n = \frac{cn\pi}{L}$$

۲-۳- میله نازک منتهی و یک سر عایق

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\begin{cases} u(0,t) = 0 \qquad u_x(L,t) = 0 \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$$

جواب $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \lambda_n x \, e^{-\lambda_n^2 t}$

$$C_n = \int_0^L f(x) \frac{\sin \lambda_n x}{\frac{L}{2} - \frac{1}{4\lambda_n} \sin 2L\lambda_n} dx \qquad \lambda_n = \frac{cn\pi}{L}$$

۲-۳- میله نازک نامتناهی

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad -\infty < x < \infty$$

$$u(x,0) = f(x)$$

$$u(x,t) = \int_0^\infty [A(\omega) \cos \omega x + B(\omega) \sin \omega x] e^{-c^2 \omega^2 t} d\omega$$

$$\begin{cases} A(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \omega x \, d\omega \\ B(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin \omega x \, d\omega \end{cases}$$

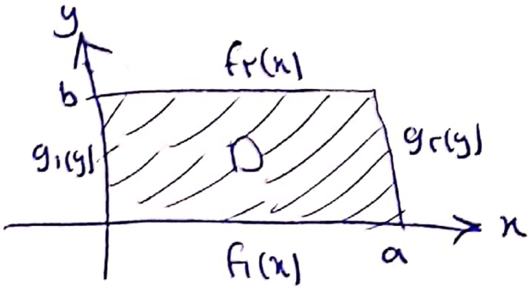
## ۳- معادله لاپلاس ۲ بعدی

معادله انتقال حرارت در ۲ بعد با معادله لاپلاس در ٤ شرط مرزی بدست می‌آید.

یعنی حرارت $u$ در هر نقطه $x$ و $y$ بدست خواهد آمد.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \qquad (x,y)\in D \qquad 0<x<a \qquad 0<y<b$$

$$\begin{cases} u(x,0)=f_1(x) & u(x,b)=f_2(x) \\ u(0,y)=g_1(y) & u(a,y)=g_2(y) \end{cases}$$




حل، مسئله به ٤ حالت زیر تقسیم می‌شود که در هر کدام یک شرط غیرصفر است و جواب نهایی مجموع این جواب‌هاست.

1) $f_2(x)=g_1(y)=g_2(y)=0 \qquad f_1(x)\neq 0$

۲) $f_1(x)=g_1(y)=g_2(y)=0 \qquad f_2(x)\neq 0$

۳) $f_1(x)=f_2(x)=g_2(y)=0 \qquad g_1(y)\neq 0$

٤) $f_1(x)=f_2(x)=g_1(y)=0 \qquad g_2(y)\neq 0$

1) $u_1(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi}{a}x \sinh\frac{n\pi}{a}(b-y) \qquad B_n=\frac{2}{a\sinh\frac{n\pi b}{a}}\int_0^a f_1(x)\sin\frac{n\pi}{a}x\,dx$

۲) $u_2(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi}{a}x \sinh\frac{n\pi}{a}y \qquad B_n=\frac{2}{a\sinh\frac{n\pi b}{a}}\int_0^a f_2(x)\sin\frac{n\pi}{a}x\,dx$

۳) $u_3(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi}{b}y \sinh\frac{n\pi}{a}(a-x) \qquad B_n=\frac{2}{b\sinh\frac{n\pi a}{b}}\int_0^b g_1(y)\sin\frac{n\pi}{b}y\,dy$

٤) $u_4(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi}{b}y \sinh\frac{n\pi}{a}x \qquad B_n=\frac{2}{b\sinh\frac{n\pi a}{b}}\int_0^b g_2(y)\sin\frac{n\pi}{b}y\,dy$

$$u(x,y)=u_1+u_2+u_3+u_4$$

# فصل سوم

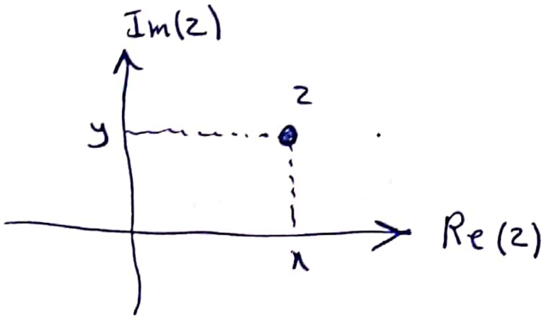
• توابع مختلط و نگاشت

مقدمه ای بر اعداد مختلط

هر عدد مختلط را می‌توان روی صفحه نشان داد زیرا علاوه بر قسمت حقیقی که روی محور مشخص می‌شود، این اعداد دارای قسمت موهومی نیز هستند. به ۲ صورت این اعداد روی صفحه قابل نمایش هستند:

۱- شکل دکارتی اعداد مختلط

هر عدد مختلط $z$ را می‌توان به صورت $z = x + iy$ تعریف کرد که $x$ قسمت حقیقی و $y$ قسمت موهومی را نشان می‌دهد.




$x = Re\{z\}$ $\qquad i^2 = -1$

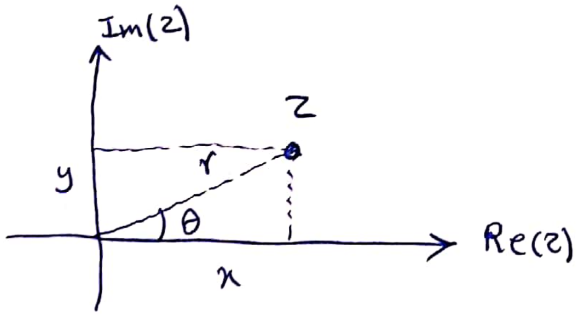
$y = Im\{z\}$ $\qquad \sqrt{i} = -1$

• $i$ نشان دهنده‌ی نماد عدد موهومی است.

۲- شکل قطبی اعداد مختلط

هر عدد مختلط را می‌توان به صورت اندازه و زاویه ای که با محور $x$ ها می‌سازد نشان داد

اندازه $r$ و زاویه $\theta$ است




★ رابطه‌ی بین متغیرها در شکل دکارتی و قطبی

$x = r\cos\theta$ $\qquad r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$y = r\sin\theta$ $\qquad \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$

$$\begin{cases} y>0 & x>0 & \text{ناحیه اول} \\ y>0 & x<0 & \text{〃 دوم} \\ y<0 & x<0 & \text{〃 سوم} \\ y<0 & x>0 & \text{〃 چهارم} \end{cases}$$

● جمع و تفریق اعداد مختلط

۲ عدد $z_1$ و $z_2$ مختلط هستند جمع آنها به صورت زیر است.

$$z_1 = x_1 + iy_1$$

$$z_2 = x_2 + iy_2$$

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$

نکته مهم: برای جمع و تفریق اعداد مختلط به صورت قطبی بهتر است ابتدا آنها را به دکارتی تبدیل کنیم:

$$z_1 = r_1 \angle \theta_1$$

$$z_2 = r_2 \angle \theta_2$$

$$z_1 + z_2 = (r_1 \cos\theta_1 + r_2 \cos\theta_2) + i(r_1 \sin\theta_1 + r_2 \sin\theta_2)$$

$$z_1 - z_2 = (r_1 \cos\theta_1 - r_2 \cos\theta_2) + i(r_1 \sin\theta_1 - r_2 \sin\theta_2)$$

● ضرب و تقسیم اعداد مختلط

در حالت قطبی
$$\begin{cases} z_1 \times z_2 = r_1 \times r_2 \angle \theta_1 + \theta_2 \\ \dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2} \angle \theta_1 - \theta_2 \end{cases}$$

در حالت دکارتی
$$\begin{cases} z_1 \times z_2 = (x_1 + iy_1) \times (x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1) \\ \dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\dfrac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} \end{cases}$$

نکته مهم: برای ضرب و تقسیم اعداد مختلط بهتر است به صورت قطبی باشند. یعنی ابتدا فرم دکارتی را به اندازه و زاویه تبدیل کنیم.

$$z_1 \times z_2 = \sqrt{(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)} \angle \tan^{-1}\frac{y_1}{x_1} + \tan^{-1}\frac{y_2}{x_2}$$

- مزدوج عدد مختلط

مزدوج یک عدد مختلط زاویه منفی در فرم قطبی $z = r\angle\theta \quad \bar{z} = r\angle-\theta$

و جهت موهومی منفی در فرم دکارتی دارد $z = x+iy \quad \bar{z} = x-iy$

مثال ۱- اگر $z_1 = 2+3i$ و $z_2 = 4\angle 30$ باشد. آنگاه $z_1+z_2$

و $z_1 \times z_2$ را بدست آورید

- به توان رساندن یک عدد مختلط

برای اینکه یک عدد مختلط را به توان یک عدد حقیقی برسانیم از فرمول دموآور استفاده می‌کنیم

$$z = r\angle\theta \Rightarrow z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$z^n = r^n\angle n\theta \Rightarrow z = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

مثال ۲: اگر $z = 1-\sqrt{3}i$ باشد $z^3$ را بیابید.

• ریشه های اعداد مختلط

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left[\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right] \qquad k=0,1,\dots,n-1$$

تعداد ریشه های $n$ ام یک عدد مختلط $n$ تا است. که اندازه آنها با هم برابر و فقط زاویه تفاوت دارند.

مثال ۳ : ریشه های چهارم $z=8+i8\sqrt{3}$ را بدست آورید.

• عدد مختلط به توان عدد مختلط

از دو رابطه ی زیر استفاده می شود.

$$z^c = e^{c\ln z}$$

$$\ln z = \ln|z| + i\,\mathrm{Arg}(z) \qquad \mathrm{Arg}(z)=\theta \qquad -\pi < \mathrm{Arg}(z) < \pi$$

مثال ٤ : مقدار $i^i$ را بدست آورید.

• توابع مختلط

اگر $z=x+iy$ یک عدد مختلط باشد، به ازای هر $z$ یک یا چند مقدار $f(z)=w$ تعریف می‌شود که به صورت $w=u+iv$ دارای قسمت حقیقی و موهومی است.

در این حالت $z$ را متغیر مستقل و $f(z)=w$ متغیر وابسته یعنی $w$ تابعی برحسب $z$ است.

$$w=f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y)$$

$u$ و $v$ ۲ تابع برحسب $x$ و $y$ هستند که قسمت حقیقی و موهومی $w$ می‌باشند.

مثال ۵ - اگر $f(z)=z^2+2$ باشد آنگاه $u(x,y)$ و $v(x,y)$ را بیابید.

مثال ۶ - اگر $f(z)=z+\frac{1}{z}+Re(z^2)$ باشد. آنگاه $f(1+i)$ را بدست آورید.

• فرمول های توابع مثلثاتی

با استفاده از فرمول اویلر به صورت $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ ← روابط زیر بدست می آیند.

$$\begin{cases}\cos z=\frac{1}{2}\left(e^{iz}+e^{-iz}\right)\\[2mm] \sin z=\frac{1}{2i}\left(e^{iz}-e^{-iz}\right)\end{cases}$$

همچنین توابع هایپربولیک به صورت زیر تعریف می شوند.

$$\begin{cases}\cosh z=\frac{1}{2}\left(e^{z}+e^{-z}\right)\\[2mm] \sinh z=\frac{1}{2}\left(e^{z}-e^{-z}\right)\end{cases}$$

از روابط بالا می توان نوشت

$$\cos iz=\cosh z \qquad \sin iz=i\sinh z$$

• با استفاده از روابط مثلثاتی در روابط بالا داریم:

$$\cos z=\cos(x+iy)=\cos x\cosh y-i\sin x\sinh y$$

$$\sin z=\sin(x+iy)=\sin x\cosh y+i\cos x\sinh y$$

$$\cosh z=\cosh x\cos y+i\sinh x\sin y$$

$$\sinh z=\sinh x\cos y+i\cosh x\sin y$$

اثبات کنید:

$$|\cos z|=\sqrt{\cos^2 x+\sinh^2 y} \qquad |\sin z|=\sqrt{\sin^2 x+\sinh^2 y}$$

نکته: از روابط $|\cos z|$ و $|\sin z|$ نتیجه می شود چون $z$ عدد مختلط است معادلاتی نظیر $\cos z=5$ جواب دارد!

• حل معادلات شامل توابع مختلط

۱- معادلات چند جمله‌ای درجه n : این معادلات را ابتدا تجزیه کرده و حل می‌کنیم. برای درجه دوم می‌توان از روش Δ استفاده کرد.

۲- برای حل معادلات شامل $e^z$ آن را مساوی w قرار داده و حل می‌کنیم.

۳- برای حل معادلات شامل توابع مثلثاتی مختلط از روابط زیر استفاده می‌شود.

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{iz}}{2} \qquad \tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$$

مثال ۷- معادله زیر را حل کنید.

$$e^{2z} - (5+i)e^{z} + 8 + i = 0$$

مثال ۸- ریشه‌های معادله زیر را بدست آورید.

$$\sinh z = i$$

• رسم منحنی ها در صفحه مختلط

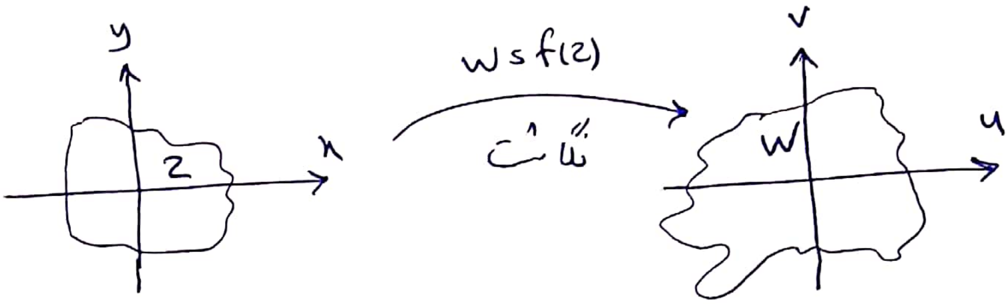
یک رابطه ی تساوی یا نامساوی برحسب عدد مختلط $z$ را می توان در صفحه ی مختصات رسم کرد. هر رابطه یک منحنی یا ناحیه را نشان می دهد، که برای بدست آوردن آن به جای $z$ مقدار آن یعنی $z=x+iy$ را در معادله جایگذاری کرده و معادله برحسب $x$ و $y$ تبدیل می شود که در صفحه $xy$ قابل رسم است.

مثال ۸- منحنی $|z-1+2i|=2$ را رسم کنید.

مثال ۹- ناحیه ای که توسط نامعادله $\left|\frac{z-1}{z+1}\right|\geq 1$ مشخص می شود را بدست آورید.

## • نگاشت (mapping) توابع مختلط

همانطور که در قسمت قبل مشاهده شد برای رسم متغیر مستقل $z$ به یک صفحه $xy$ نیاز است. حال اگر تابع مختلطی داشته باشیم که به صورت $w=f(z)$ تعریف می‌شود، چون $w$ خود یک تابع مختلط است که به صورت $w=u+iv$ تعریف شده است، به یک صفحه‌ی دیگر $(u,v)$ برای رسم $w=f(z)$ نیاز است. به این انتقال از صفحه‌ی $xy$ به صفحه‌ی $uv$ برای رسم $f(z)$ نگاشت گفته می‌شود.




مثال ۱.- تصویر مجموعه نقاط $D=\{z \mid z=i\,,\,1\,,\,1-i\}$ را تحت نگاشت $w=z+i$ به دست آورید.

• روش کلی به دست آوردن نگاشت به این صورت است که رابطه‌ی $u$ و $v$ را برحسب $x$ و $y$ به دست آورده و نقاط، خطوط برحسب $x$ و $y$ را به رابطه‌ای برحسب $u$ و $v$ تبدیل کرده و آن‌ها را در صفحه‌ی $uv$ رسم کنیم.

مثال ۱۱ـ تصویر هریک از خطوط $x=\frac{1}{2}$ و $x=1$ و $y=\frac{1}{2}$ و $y=1$ را تحت نگاشت $w=f(z)=z^2$ را بدست آورید.

نکته ۱- اگر مشتق تابع $f(z)$ غیر صفر باشد نگاشت آن همدیس است. یعنی زاویه بین ۲ خم راس از انتقال به صفحه‌ی $w$ حفظ می‌کند. این نوع نگاشت‌ها کاربرد فراوانی در حل مسائل دارند.

نکته ۲- اگر تصویر هر نقطه $z_0$ در صفحه‌ی $w$ یکتا باشد، نگاشت یک به یک خواهد بود برای مثال $\sin(z)$ یک به یک نیست چون متناوباً تکرار می‌شود.

نکته مهم - روش کلی بدست آوردن نگاشت بدست آوردن رابطه‌ی بین $u$ و $v$ است و سپس آنها را در یک صفحه‌ی $uv$ رسم کنیم که مثال آن حل شد. اما چندین قاعده برای ساده‌تر کردن حل نگاشت وجود دارد که در ادامه بررسی خواهند شد.

۱- نگاشت خطی $w=az+b$

این نگاشت ترکیبی از دو نگاشت ساده‌تر $w_1=az$ و $w=w_1+b$ است

الف) $a$ یک عدد مختلط است بنابراین $w_1=az=|a||z|\angle \hat{a}+\hat{z}$ ، یعنی ضرب $a$ در $z$ باعث می‌شود که اندازه $a$ در اندازه $z$ ضرب شده و زاویه $z$ را نیز به اندازه‌ی زاویه $a$ تغییر می‌دهد. پس این نگاشت ترکیبی از تابش و دوران است.

ب) در نگاشت $w=w_1+b$ ، بخش های حقیقی و موهومی $w$ به اندازه بخش های حقیقی و موهومی $b$ جابجا می‌شوند. پس این نگاشت یک نگاشت انتقال است.

ج) در نهایت نگاشت خطی $w=az+b$ ترکیبی از دوران، تابش و انتقال است.

نکته: اگر $a\neq 0$ باشد این نگاشت همدیس است.

نکته: می‌توان اول انتقال به اندازه $b$ را انجام داد سپس تابش و دوران $az$ را انجام داد.

مثال ۱۲- نگاشت $w=2iz-i$ دایره $|z|=1$ را به کدام منحنی نقش می‌کند؟

مثال ۱۳- تصویر ناحیه $D=\{z: 1\le x\le 2 \,,\, -1\le y\le 0\}$ را تحت نگاشت زیر بدست آورید.

$$w=(1-i)z+2i$$

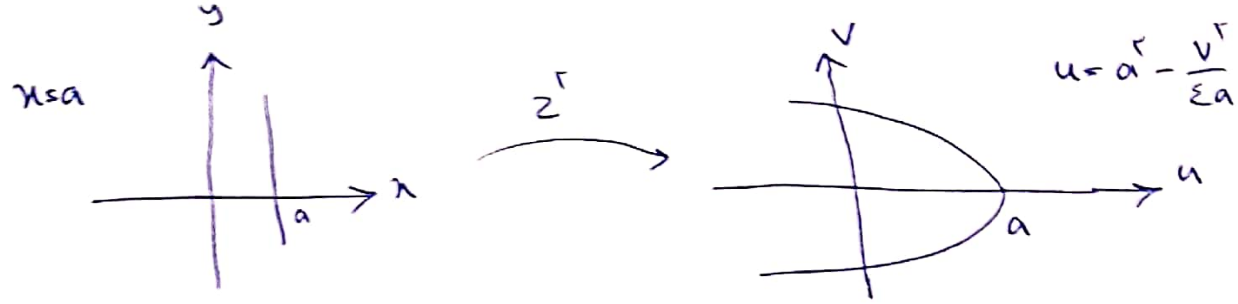
۲- نگاشت $w=z^n$

این نگاشت هر نقطه $z=x+iy=re^{i\theta}$ را به نقطه $w=f(z)=(re^{i\theta})^n$ می‌نگارد. یعنی این نگاشت اندازه را به توان $n$ می‌رساند و زاویه را $n$ برابر می‌کند

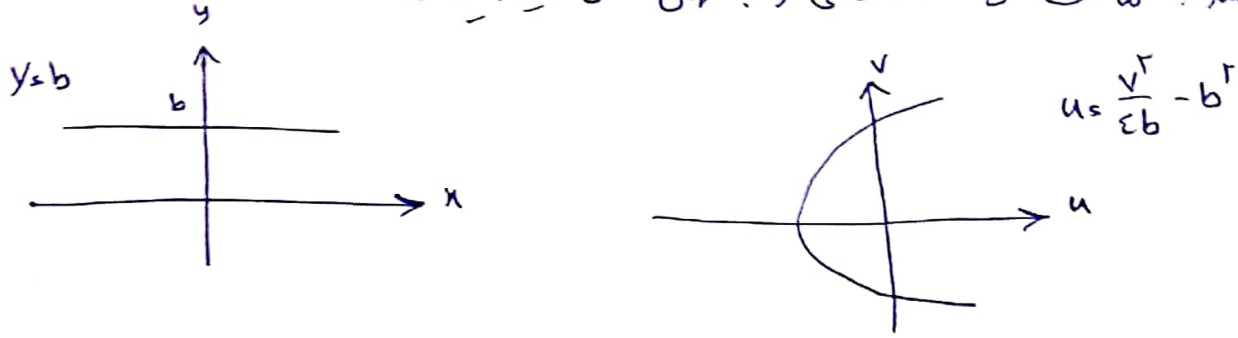
$$w=f(z)=r^n e^{in\theta}$$

مثال ۱۴- تصویر ناحیه $0\leq Arg(z)\leq \frac{\pi}{4}$ توسط تابع $w=iz^2$ کدام است

نکته: نگاشت $z^2$ خط قائم را به سهمی افقی تبدیل می‌کند.




نکته: نگاشت $z^2$ خط افقی را به سهمی افقی تبدیل می‌کند



۲- نگاشت $w = \frac{1}{z^n}$

این نگاشت هر نقطه‌ی $z = re^{i\theta}$ را به $w = \frac{1}{r^n} e^{-in\theta}$ می‌نگارد.

درحالت خاص نگاشت $w = \frac{1}{z}$ که نگاشت انعکاس نام دارد خواص منحصربفرد دارد که خطارا به دایره و دایره را به خط می‌نگارد. که با رابطه‌ی زیر بیان می‌شود.

• نگاشت $w = \frac{1}{z}$

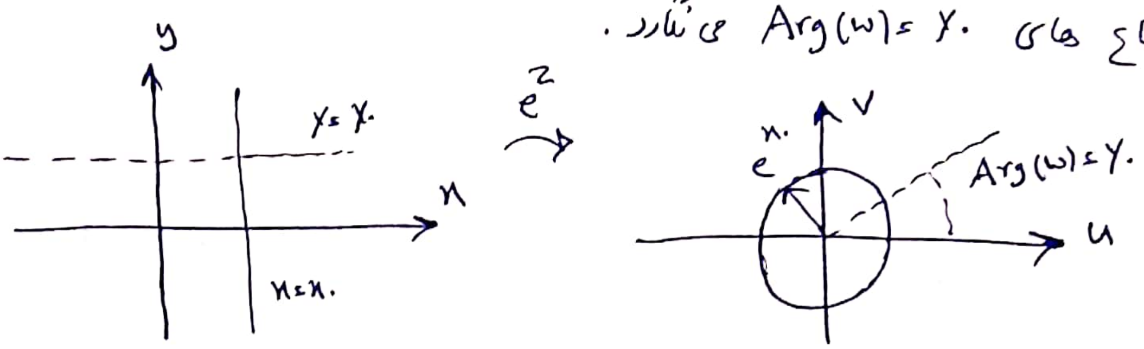
این نگاشت معادله‌ی $A(x^2+y^2)+Bx+Cy+D=0$ را نسبت به اینکه خط یا دایره باشد (که بستگی به ضرایب دارد) را به معادله $A+Bu-Cv+D(u^2+v^2)=0$ می‌نگارد.

مثال ۱۵- تصویر خط $x=1$ را تحت نگاشت $w = \frac{1}{z}$ را بدست آورید.

نکته: برای نگاشت $w = \frac{1}{z}$، اگر منحنی مفروض دارای ترم $z$ باشد به جای آن $\frac{1}{w}$ قرار داده و برحسب $w$ ساده می‌کنیم سپس قرار می‌دهیم $w = u+iv$ و رابطه‌ی $u$ و $v$ ومنحنی آن را بدست می‌آوریم.

۳- نگاشت نمایی $w=e^z$

این نگاشت خطوط $x=x_0$ را به دایره $|w|=e^{x_0}$ و خطوط $y=y_0$ را به شعاع های $Arg(w)=y_0$ می‌نگارد.




مثال ۱۶- نگاشت $0<y<\pi$ را تحت تابع $e^z$ بدست آورید.

نکته: نگاشت $w=e^z$ نوار $-\pi<y<\pi$ را به کل صفحه می‌نگارد

۴- نگاشت لگاریتمی $w=\ln z$

این نگاشت عکس $e^z$ است. یعنی دوایر به مرکز مبدأ و شعاع K را به خط $u=\ln K$ و زاویه گذرنده از مبدأ را به خط افقی $v=c$ تبدیل می‌کند.

مثال ۱۷- نگاشت $w=\ln z$ شکل زیر را بر روی کدام ناحیه می‌نگارد.

## ۵- نگاشت سینوس $w=\sin z$

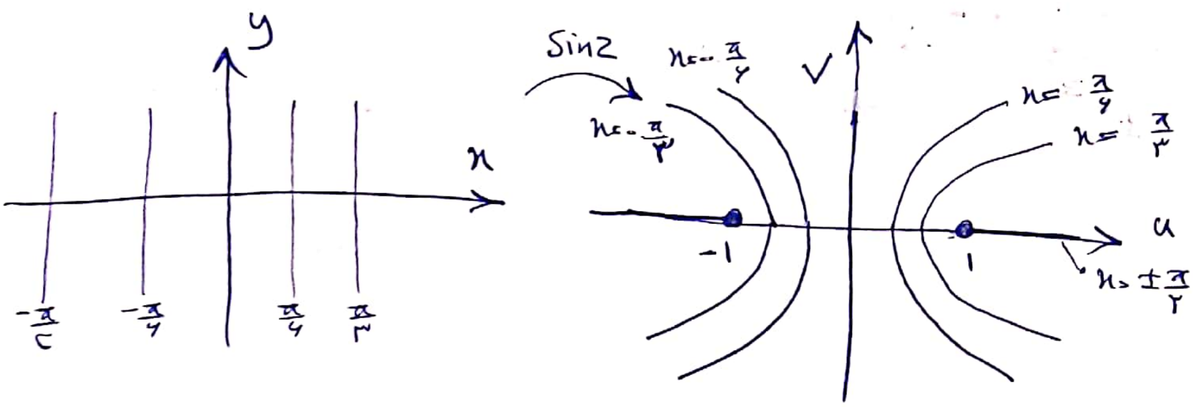
$$w=\sin z=\sin(x+iy)=\sin x\cosh y+i\cos x\sinh y=u+iv$$

$$\begin{cases} u=\sin x\cosh y \\ v=\cos x\sinh y \end{cases} \qquad \cosh y=\frac{u}{\sin x} \qquad \sinh y=\frac{v}{\cos x}$$

با توجه به اتحاد $\cosh^2 y-\sinh^2 y=1$

$$\frac{u^2}{\sin^2 x}-\frac{v^2}{\cos^2 x}=1$$

بنابراین، این نگاشت خطوط قائم $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ را به هذلولی می‌نگارد. علت انتخاب این بازه این است که دوره‌ی تناوب $\sin^2 x$ و $\cos^2 x$ برابر با $\pi$ است

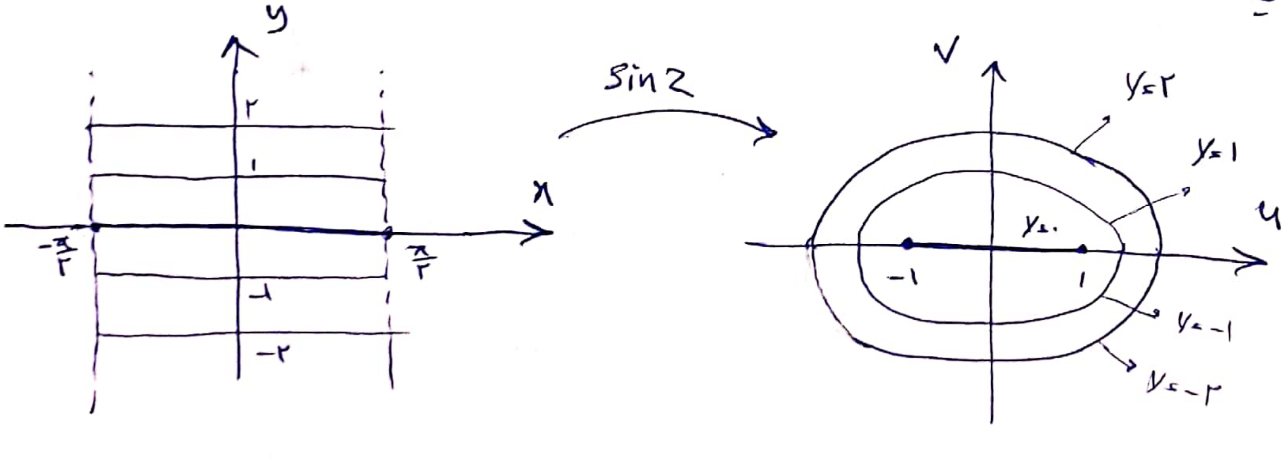



$$\begin{cases} u=\sin x\cosh y \\ v=\cos x\sinh y \end{cases} \qquad \sin x=\frac{u}{\cosh y} \qquad \cos x=\frac{v}{\sinh y}$$

با توجه به اتحاد $\sin^2 x+\cos^2 x=1$

$$\frac{u^2}{\cosh^2 y}+\frac{v^2}{\sinh^2 y}=1$$

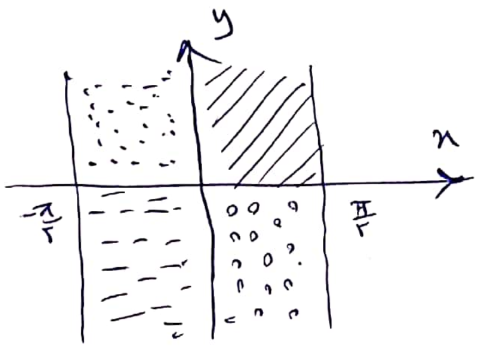
این نگاشت خطوط افقی $-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$ را به بیضی می‌نگارد

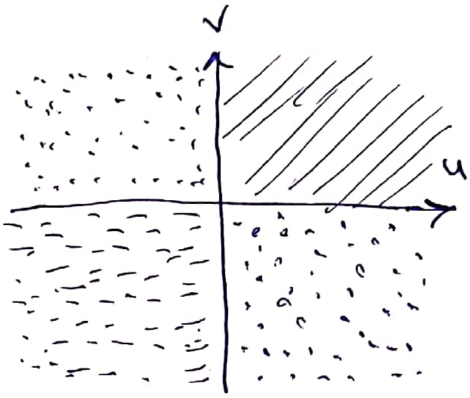


• نکته مهم: دقت شود در معادله هذلولی و بیضی جون به توان ۲ رسیده اند مثبت منفی به ازای مقادیر منفی در شکل ظاهر می شود. در صورتی که جهت نیست و به ازای $x$ های مثبت و منفی و $y$ های مثبت و منفی تنها یک شاخه از هذلولی یا نیمی از بیضی بدست می آید. روش بدست آوردن آن استفاده از ۲ رابطه ی زیر است قبل از به توان ۲ رساندن آنها:

$$u = \sin x \cosh y \Rightarrow \begin{cases} x>0 & u>0 \\ x<0 & u<0 \end{cases}$$

$$v = \cos x \sinh y \Rightarrow \begin{cases} y>0 & v>0 \\ y<0 & v<0 \end{cases}$$




مثال ۱۸ - تصویر ناحیه $-\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{3}$ و $1 < y < 2$ را با نگاشت $\sin z$ بدست آورید.

۶- نگاشت $w=\cos z$

از آنجا که $\cos z=-\sin(z-\frac{\pi}{2})$ است، نگاشت cos همان sin است با این تفاوت که به اندازه $\frac{\pi}{2}$ به سمت چپ انتقال می دهیم و بعد از آن $\sin z$ را اعمال کرده و در نهایت در منفی ضرب می کنیم.

۷- نگاشت کسری - خطی (موبیوس) $w=\frac{az+b}{cz+d}$

با فرض $c\neq 0$ و $ad-bc\neq 0$ این نگاشت ترکیبی از نگاشت های زیر است

$$w_1=z+\frac{d}{c} \qquad w_2=\frac{1}{w_1} \qquad w=\frac{a}{c}+\left(\frac{bc-ad}{c}\right)w_2$$

چون نگاشت های خطی و معکوس خط و دایره را به خط و دایره تبدیل می کنند، این نگاشت نیز همین کار را انجام می دهد. با قوانین زیر می توان به این موضوع پی برد.

الف) تصویر خطوطی که از نقطه $-\frac{d}{c}$ نمی گذرند، یک دایره است.

ب) " " " " " " می گذرند، " خط " .

ج) تصویر دوایری که از نقطه $-\frac{d}{c}$ نمی گذرند، یک دایره است.

د) " " " " " " می گذرند، " خط " .

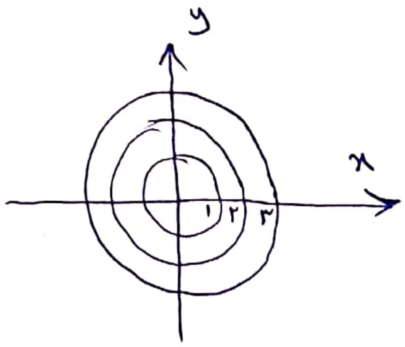
- حالات خاص این نگاشت

۱- $w=\frac{z-z_0}{z-\bar{z}_0}$ نیم صفحه ی بالای محور حقیقی را به دایره $|w|<1$ می نگارد

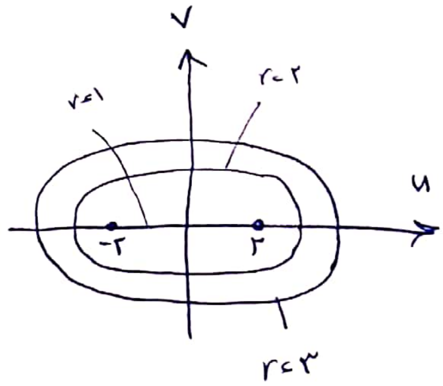
۲- $w=\frac{z-z_0}{\bar{z}_0 z-1}$ دایره واحد $|z|=1$ را به دایره واحد $|w|=1$ می نگارد

۸- نگاشت ژوکوفسکی $w=z+\frac{1}{z}$

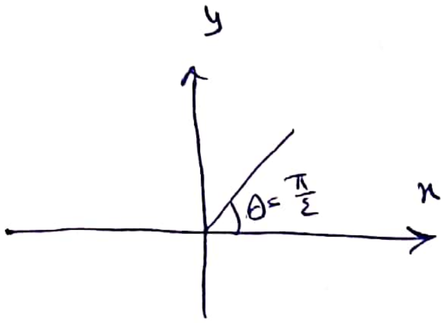
این نگاشت دایره های به مرکز مبدأ مختصات را طبق رابطه ی زیر به بیضی تبدیل می کند



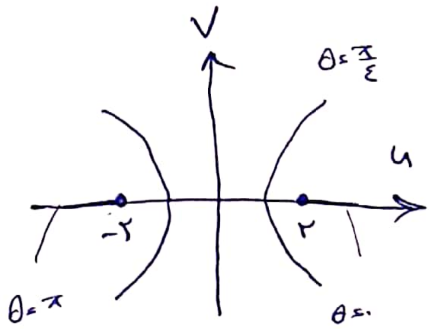

$$\frac{u^2}{(r+\frac{1}{r})^2}+\frac{v^2}{(r-\frac{1}{r})^2}=1$$



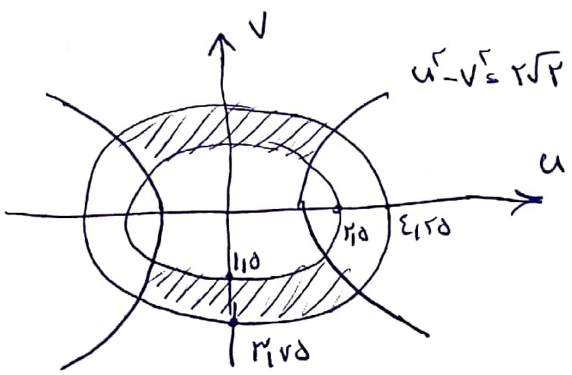

این نگاشت شعاع گذرنده از مبدأ را به هذلولی تبدیل می کند.




$$\frac{u^2}{\cos^2\theta}+\frac{v^2}{\sin^2\theta}=4$$




مثال ۱۹- کدام ناحیه در صفحه $z$ توسط نگاشت $z+\frac{1}{z}$ به منحنی زیر نگاشته می شود.



• نکات نگاشت جاکوفسکی

۱- دوایر $r=r_0$ و $r=\frac{1}{r_0}$ بر روی یک بیضی نگاشته می‌شوند

۲- از آنجا که $a^2-b^2=4$ هذلولی‌ها هم کانون هستند ۲، -۲

• سایر نگاشت‌ها

۱- $w=\tan z$

$$w=\tan z=\frac{\sin z}{\cos z}=\frac{(e^{iz}-e^{-iz})/2i}{(e^{iz}-e^{-iz})/2}=\frac{e^{2iz}-1}{i(e^{2iz}+1)}$$

تغییر متغیر $z'=e^{2iz}$ $\quad \tan z=-i\,\frac{z'-1}{z'+1}$

بنابراین $\tan z$ یک نگاشت نمایی، خطی کسری و در نهایت چرخش ۹۰ درجه است

۲- $\sinh z=-i\sin z$

۳- $\cosh z=\cos iz$

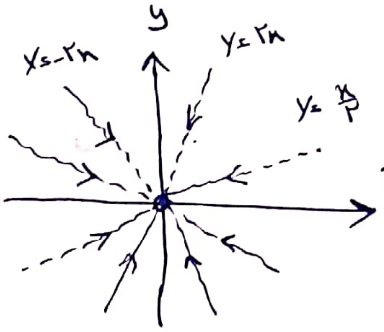
۴- $\tanh z=-i\tan iz$

مثال ۲۰- تبدیل یافته خط $x=2$ توسط نگاشت $\sqrt{z}$ کدام است؟

# فصل چهارم

## حد، پیوستگی و مشتق توابع مختلط

در توابع حقیقی زمانی حد وجود داشت که حد چپ و راست موجود و برابر باشند. اما در توابع مختلط بی نهایت مسیر در صفحه برای رسیدن به نقطه مورد نظر وجود دارد، پس زمانی یک تابع مختلط حد دارد که مقدار حد برای همه مسیرها برابر باشد.




مثال ۱- مقدار حد $\lim_{z\to 0}\frac{z}{\bar{z}}$ را بدست آورید.

اگر z به ازای مسیرهای $y=mx$ به $z=0$ میل کند داریم:

$$\lim_{z\to 0}\frac{z}{\bar{z}}=\lim_{z\to 0}\frac{x+iy}{x-iy}=\lim_{z\to 0}\frac{x+imx}{x-imx}=\frac{1+im}{1-im}$$

ملاحظه می شود مقدار حد به m وابسته است و به ازای مسیرهای مختلف یکسان نیست پس حد ندارد.

قضیه ۱- تابع مختلط $f(z)=u+iv$ زمانی دارای حد است که دو تابع u و v حد داشته باشند.

قضیه ۲- مانند توابع حقیقی، توابع مختلط در نقاطی که مبهم نیستند دارای حد برابر با مقدار تابع در آن نقطه هستند.

$$1)\ \lim_{z\to i}(z^3-2z^2+2)=i^3-2(i^2)+2=4-i$$

$$2)\ \lim_{z\to i+1}\frac{\ln z}{z}=\frac{\ln(1+i)}{1+i}=\frac{\ln(\sqrt{1+1})+i\tan^{-1}\frac{1}{1}}{1+i}=\frac{\ln\sqrt{2}+i\frac{\pi}{4}}{1+i}$$

$$3)\ \lim_{z\to\infty}\frac{5z(z^2+1)}{3z^3-1}=\lim_{z\to\infty}\frac{5z^3+5z}{3z^3-1}=\frac{5}{3}$$

قضیه ۳- صورت مبهم $\frac{0}{0}$ و $\frac{\infty}{\infty}$ را می‌توان با قاعده هوپیتال حل کرد یعنی از صورت و مخرج مشتق گرفت

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\lim_{z\to z_0}\frac{f'(z)}{g'(z)}$$

قضیه: صورت مبهم $1^{\infty}$ و $\infty^{0}$

$$A=\lim_{z\to z_1} f(z) \Rightarrow A=e^{\lim_{z\to z_0}\ln f(z)}$$

● پیوستگی

تابع مختلط $f(z)$ در نقطه $z=z_0$ پیوسته است، اگر حد $f(z)$ برابر مقدار تابع در آن نقطه باشد

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$$

● مشتق

اگر حد زیر وجود داشته باشد تابع مختلط $f(z)$ دارای مشتق است.

$$f'(z_0)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

قضیه: به شرط مشتق پذیر بودن تابع مختلط سایر قواعد مشتق گیری مانند توابع حقیقی است.

1) $f(z)=6z^4+4z^3+z-1 \qquad f'(z)=24z^3+12z^2+1$

## تعاریف

۱- تحلیلی بودن: تابع مختلط $f(z)$ در $z=z_0$ تحلیلی است اگر در این نقطه مشتق‌پذیر بوده و یک همسایگی به مرکز $z_0$ موجود باشد به طوری که تابع $f(z)$ در هر نقطه از آن همسایگی نیز مشتق‌پذیر باشد.

۲- تابع تام: تابعی که در تمام صفحه‌ی مختلط تحلیلی باشد.

۳- نقطه‌ی تکین: اگر $f(z)$ در $z=z_0$ تحلیلی باشد $z_0$ نقطه‌ی عادی نام دارد. و اگر $z=z_0$ تحلیلی نباشد ولی در همسایگی آن تحلیلی باشد آنگاه نقطه‌ی $z_0$ یک نقطه‌ی تکین است.

نکته: تحلیلی بودن با مشتق‌پذیر بودن در یک نقطه تفاوت دارد. مثلاً تابع $f(z)=|z|^2$ فقط در $z=0$ مشتق‌پذیر است ولی هیچ همسایگی برای $z=0$ نمی‌توان یافت که $f(z)$ در هر نقطه آن مشتق‌پذیر باشد. لذا $f(z)$ در $z=0$ تحلیلی نیست.

- تشخیص تحلیلی بودن با معادلات کوشی-ریمان

اگر $f(z)=u+iv$ تابعی مختلط باشد و توابع $u$ و $v$ پیوسته بوده و دارای مشتق مرتبه اول پیوسته باشند و معادلات زیر موسوم به کوشی-ریمان صادق باشند آنگاه $f(z)$ در $z=x+iy$ تحلیلی است:

معادلات کوشی-ریمان دکارتی
$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y} & \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

" " " قطبی

$f(z)=u(r,\theta)+iv(r,\theta)$
$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial r}=\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial \theta} & \dfrac{\partial v}{\partial r}=-\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial \theta} \end{cases}$$

$\frac{٤}{۳}$

مثال ۲- تحلیلی بودن توابع زیر را بررسی کنید

۱) $f(z)=|z|$

$\Rightarrow f(z)=\sqrt{x^2+y^2}$

۲) $f(z)=\ln z$

$\Rightarrow f(z)=\ln r+i\theta$

۳) $f(z)=x^2+iy^2$

٤) $f(z)=z\cdot\bar{z}$

$\Rightarrow f(z)=|z|^2=x^2+y^2$

• محاسبه‌ی مشتق توابع مختلط با استفاده از روابط کوشی-ریمان

برای مشتق پذیر بودن یک تابع مختلط، علاوه بر برقراری روابط کوشی-ریمان، u و v باید پیوسته بوده و دارای مشتق جزئی مرتبه‌ی اول پیوسته باشند، در این صورت مشتق تابع مختلط $f(z)$ یعنی $f'(z)$ برابر است با:

دکارتی
$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

قطبی
$$f'(z) = (\cos\theta - i\sin\theta)\frac{\partial f}{\partial r} = \left(-\sin\theta - i\frac{\cos\theta}{r}\right)\frac{\partial f}{\partial \theta}$$

مثال ۳- تابع زیر در چه نقاطی مشتق پذیر است و مشتق در این نقاط را به دست آورید.

$$f(z) = \mathrm{Re}\{z^2\} + iz\bar{z}$$

• توابع همساز (هارمونیک)

اگر تابع دو متغیره $f(x,y)$ در رابطه‌ی زیر صدق کند آن را همساز می‌نامند

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

نکته: برای سه متغیره، x و y و z هم برقرار است.

• توابع مختلط مزدوج همساز

اگر تابع مختلط $f(z) = u + iv$ تحلیلی باشد، آنگاه توابع $u$ و $v$ همساز هستند.
که $v$ را همساز مزدوج می‌نامند. با داشتن یکی، دیگری با روابط کوشی - ریمان بدست می‌آید.
که البته یک ثابت به وجود می‌آید و با جای گذاری یک نقطه آن ثابت نیز مشخص می‌شود.

مثال ٤- اگر $v(x,y)$ یک مزدوج همساز $u(x,y) = (x^2-y^2+1)^2 - 4x^2y^2$ باشد و
داشته باشیم $v(0,0)=0$، آنگاه مقدار $v(1,1)$ را بدست آورید.

نکته: اگر تابع $f(z) = u + iv$ تحلیلی باشد، آنگاه با جای گذاری $x=z$
و $y=0$ می‌توان $f(z)$ را برحسب $z$ بدست آورد.

مثال صفحه‌ی بعد

$\frac{7}{3}$ مثال ۵- نشان دهید $u = x^3 - 3xy^2 - 5y$ در کل صفحه مختلط همساز است

سپس تابع همساز مزدوج (v) را بدست آورید $[f(0) = 1 + i]$ و در پایان $f(z)$ را

برحسب $z$ بیان کنید.

نکته مهم: اگر $f(z)$ تحلیلی باشد $\frac{\partial f(z)}{\partial \bar{z}} = 0$ . یعنی یک تابع تحلیلی فاقد جمله $\bar{z}$ است

پس توابعی شامل Re ، Im ، قدر مطلق و Arg که معمولاً شامل $\bar{z}$ هستند تحلیلی

نیستند.

• سری های مختلط

یک سری به صورت $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ که رفتار آن به مقدار متغیر $z$ نیز وابسته است،

یک سری تابعی می نامیم. اگر سری برای هر مقدار $z_0$ به $S(z_0)$ همگرا گردد. در این صورت

می نویسیم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z_0) = S(z_0)$$

$S(z_0)$ مقدار سری در $z_0$ است

شرط لازم برای همگرایی یک سری مختلط، همگرایی قسمت حقیقی و موهومی آن است.

• آزمون های سری ها

۱- آزمون دالامبر ـ نشان دهنده همگرا بودن یا نبودن سری

$a_n$ ضریب جملات شامل $z$ است و اگر

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

$\rho<1$ باشد سری همگرا است

۲- آزمون کوشی ـ برای بدست آوردن ناحیه همگرایی

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|}$$

از $\rho<1$ ناحیه همگرایی بدست می آید.

مثال ۵- ناحیه همگرایی سری $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n$ را بدست آورید.

مثال ۶- ناحیه همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n(z+1)}$ را بدست آورید.

● سری های توانی

یک سری تابعی به شکل $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ که در آن $z_0$ یک عدد مختلط، $n$ یک عدد طبیعی و دنباله $a_n$ یک دنباله ی مختلط است، یک سری توانی می باشد. با آزمون ریشه (کوشی) می توان نتیجه گرفت که یک سری توانی همواره در دایره $|z-z_0|=R$ همگرا است که $R$ می تواند از صفر تا $\infty$ باشد. و شعاع همگرایی به صورت زیر بدست می آید:

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \qquad R = \frac{1}{\rho}$$

قضیه: هر سری توانی در داخل ناحیه همگرایی خود تحلیلی است و از آن جمله به جمله می توان مشتق گرفت.

مثال ۷- شعاع همگرایی سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2} z^n$ را بدست آورید.

• بسط تیلور

فرض کنید $f(z)$ در حوزه‌ی $D$ شامل نقطه‌ی $z_0$ تحلیلی باشد. در این صورت $f(z)$ را می‌توان در داخل ناحیه $|z-z_0|<R$ با بسط سری توانی زیر موسوم به بسط تیلور نوشت.

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + \frac{1}{2!} f''(z_0)(z-z_0)^2 + \cdots$$

نکته ۱- بسط تیلور هر تابع منحصر بفرد است.

نکته ۲- $R$ یا شعاع همگرایی بسط تیلور برابر با فاصله‌ی $z_0$ تا نزدیکترین نقطه‌ی غیرتحلیلی آن است و $z_0$ نقطه‌ای است که بسط حول آن نوشته می‌شود.

مثال ۸- بسط تیلور تابع $f(z)=e^z$ را حول نقطه‌ی $z_0=0$ را بدست آورید.

• سری تیلور چند تابع معروف

1) $e^z = 1+z+\frac{1}{2!}z^2+\cdots$ $\quad R=\infty$

2) $\sin z = z-\frac{1}{3!}z^3+\frac{1}{5!}z^5+\cdots$ $\quad R=\infty$

3) $\cos z = 1-\frac{1}{2!}z^2+\frac{1}{4!}z^4+\cdots$ $\quad R=\infty$

4) $\tan z = z+\frac{1}{3}z^3+\cdots$ $\quad R=\frac{\pi}{2}$

5) $\frac{1}{1-z} = 1+z+z^2+\cdots$ $\quad R=1$ $\quad \leftarrow z=1$ نقطه‌ی غیرتحلیلی

۶) $\sinh z = z + \frac{1}{3!} z^3 + \frac{1}{5!} z^5 + \cdots \qquad R = \infty$

۷) $\cosh z = 1 + \frac{1}{2!} z^2 + \frac{1}{4!} z^4 + \cdots \qquad R = \infty$

۸) $\tanh z = z - \frac{1}{3} z^3 + \cdots \qquad R = \infty$

۹) $(1+z)^p = 1 + pz + \frac{p(p-1)}{2} z^2 + \cdots \qquad R = \infty$

نکته مهم: به جای استفاده از فرمول اصلی بسط تیلور می‌توان بسط سایر توابع را با استفاده از روابط بالا بدست آورد.

مثال ۹- بسط تیلور و شعاع همگرایی تابع $\frac{1}{1+z^2}$ را حول نقطه $z_0 = 0$ را بدست آورید.

مثال ۱۰- بسط تیلور $\tan^{-1} z$ حول نقطه $z_0 = 0$ و شعاع همگرایی را بدست آورید.

مثال ۱۱- بسط تیلور $f(z)=\frac{1}{z-3z}$ را حول $z_0=1+i$ و شعاع همگرایی را بدست آورید.

- بسط لوران

بسط تیلور فقط برای ناحیه‌ای که تابع تحلیلی باشد به کار می‌رود. برای نواحی غیرتحلیلی از بسط لوران استفاده می شود که توانهای منفی $z-z_0$ را شامل می شود.

بسط لوران $f(z)$ در ناحیه $r_1<|z-z_0|<r_2$ به شکل منحصر بفرد به صورت زیر است

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz \qquad r_1<\rho<r_2$$

اما در عمل ضرایب $a_n$ با توجه به منحصر بفرد بودن به جای انتگرال بالا از روش های غیرمستقیم بدست می آید.

برای مثال بسط تیلور و لوران تابع $\frac{1}{1-z}$ حول نقطه‌ی $z_0=0$ بررسی می‌کنیم.

بسط تیلور $\quad \frac{1}{1-z} = 1+z+z^2+\cdots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$

شعاع همگرایی ۱ است یعنی این سری در ناحیه $|z|<1$ معتبر است.

حال اگر بخواهیم بسطی از تابع را در همین نقطه $z_0=0$ تعیین کنیم که در ناحیه $1<|z|<\infty$ معتبر باشد داریم:

$$\frac{1}{1-z} = \frac{-1}{z}\,\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-z} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}$$

که داخل ناحیه $\left|\frac{1}{z}\right|<1$ یا $|z|>1$ معتبر است.

نکته ۱- سری تیلور همیشه در یک دایره به صورت $|z-z_0|<R$ و سری لوران در یک حلقه به صورت $r_1<|z-z_0|<r_2$ همگرا هستند.

نکته ۲- دقت شود هیچ نقطه‌ی غیر تحلیلی نباید در $|z-z_0|<R$ وجود داشته باشد وگرنه سری تیلور آن موجود نیست و در عوض تنها سری لوران دارد.

نکته ۳- برای محاسبه‌ی بسط لوران حول نقطه غیر صفر $z_0$ از جای‌گذاری $z=z_0+t$ استفاده کرده و بسط لوران $f(z_0+t)$ حول $t=0$ محاسبه می‌کنیم و همه z ها را در نهایت به t تبدیل می‌کنیم.

مثال ۱۲- سری لوران $f(z)=\frac{\sin z}{z-\pi}$ را حول $z=\pi$ را بدست آورید.

● تعاریف: صفرها، نقاط منفرد و قطب ها

۱- صفرهای یک تابع و مرتبه ی آن

نقطه ی $z_0$ را صفر تابع $f(z)$ نامیم اگر $f(z_0)=0$ باشد.

اگر صفر تابع از مرتبه ی n باشد $f(z_0)=f'(z_0)=\cdots=f^{(n-1)}(z_0)=0$

اما $f^{(n)}(z_0)\neq 0$

نکته مهم: از روی بسط تیلور کوچکترین توان $z-z_0$ مرتبه ی صفر $z_0$ است.

مثال ۱۳- مرتبه ی صفر $f(z)=z^2\sin z$ در $z=0$ را بدست آورید.

۲- نقاط منفرد و انواع آنها

نقطه ی $z_0$ یک نقطه ی منفرد تابع $f(z)$ است اگر $f(z)$ در $z_0$ تحلیلی نباشد اما در همسایگی آن تحلیلی باشد.

● نقطه تکین: $z_0$ را منفرد تکین (تنها) می نامیم اگر در همسایگی آن نقطه ی تکین دیگری نباشد. دیدیم اگر $z_0$ یک نقطه ی منفرد تکین باشد، آنگاه $f(z)$ دارای بسط لوران حول $z_0$ در حلقه همگرایی $0<|z-z_0|<R$ است.

● قطب: اگر بسط لوران فقط شامل تعداد متناهی جمله از توان های منفی $(z-z_0)$ باشد، آنگاه $z_0$ یک قطب $f(z)$ است. اگر جمله ی $\frac{1}{(z-z_0)^m}$ وجود داشته باشد که کوچکترین توان در بسط باشد m مرتبه ی قطب است. اگر $m=1$ باشد قطب ساده است.

قطب اساسی: اگر بسط شامل تعداد بی شماری جمله از توان های منفی $z-z_0$ باشد، $z_0$ یک قطب اساسی یا نقطه‌ی منفرد اساسی است.

قطب برطرف شدنی: اگر بسط فاقد جمله ای از توان های منفی $z-z_0$ باشد یک قطب برطرف شدنی یا قطب مرتبه‌ی صفر است.

مثال ۱۴- مرتبه‌ی صفر و قطب تابع زیر را بدست آورید:

$$f(z)=\frac{z^7}{(z^2-4)^3\, e^{\frac{1}{z-2}}}$$

● مانده در بسط لوران

اگر $z_0$ یک نقطه‌ی منفرد تکین تابع $f(z)$ باشد آنگاه ضریب $\frac{1}{z-z_0}$ در بسط لوران تابع $f(z)$ مانده نامیده می شود. این عدد را با $\underset{z_0}{\operatorname{Res}} f$ نشان می دهند و در محاسبه‌ی انتگرال فصل بعد بسیار مهم است.

● روش های محاسبه‌ی مانده (۴۷)

۱- اگر $z_0$ یک قطب برطرف شدنی باشد مانده در این نقطه صفر است.

۲- اگر $z_0$ قطب مرتبه‌ی اول باشد

الف) رابطه‌ی کلی $\underset{z_0}{\operatorname{Res}} = \lim\limits_{z\to z_0} (z-z_0) f(z)$

ب) برای توابع کسری $f(z)=\frac{g(z)}{h(z)} \longrightarrow \underset{z_0}{\operatorname{Res}} = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$

۳ـ اگر $z_0$ قطب مرتبه‌ی $m$ باشد:

$$\operatorname*{Res}_{z_0} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[ (z-z_0)^m f(z) \right]$$

۴ـ اگر $z_0$ قطب اساسی باشد تنها راه محاسبه مانده، بسط لوران است.

نکته: برای ۳ حالت قبل نیز می‌توان از بسط لوران استفاده کرد و مانده ضریب $\frac{1}{z-z_0}$ است.

مثال ۱۵ـ مانده تابع $f(z) = \frac{z^2}{(z-2)(z^2+1)}$ در نقطه $i$ را بدست آورید.

مثال ۱۶ـ مانده تابع $f(z) = \frac{1}{z(z+2)^3}$ در نقطه‌ی $z=-2$ را بدست آورید.

مثال ۱۷ـ مانده $f(z) = \frac{e^{1/z}}{1-z}$ در نقطه‌ی $z=0$

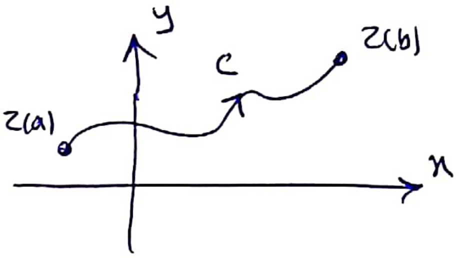
مثال ۱۸ـ مانده تابع $f(z) = (z-3)\sin\frac{1}{z+2}$ در نقطه‌ی $z=-2$

۱۷/۳

• انتگرال گیری از توابع مختلط

در انتگرال گیری از توابع حقیقی حدود انتگرال به صورت ۲ عدد که ابتدا و انتهای بازه هستند مشخص می شود. برای مثال $\int_{-1}^{3} x^2 dx$ و $\int_a^b f(x) dx$

اما در انتگرال گیری از توابع مختلط چون متغیر مستقل z یک عدد مختلط است و در صفحه تعریف می شود، انتگرال گیری بر روی یک مسیر یا منحنی از یک نقطه تا نقطه ی دیگر تعریف می شود. برای مثال.



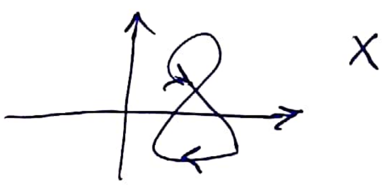

مسیر c $\int_c f(z) dz$

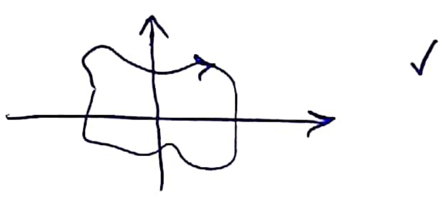
• تعاریف

الف) منحنی هموار: منحنی c هموار است اگر در هر نقطه از آن به طور پیوسته خط مماس موجود باشد یعنی دارای مشتق غیرصفر باشد $z'(t)\neq 0$

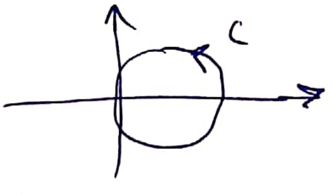
ب) منحنی بسته: منحنی c بسته است اگر ابتدا و انتهای آن برهم منطبق باشد.

ج) منحنی بسته ساده: منحنی c بسته ساده است اگر بسته بوده و خودش را قطع نکند




د) جهت مثبت یک منحنی بسته: جهتی است که اگر در آن جهت روی منحنی حرکت کنیم ناحیه داخل منحنی در سمت چپ ما قرار گیرد



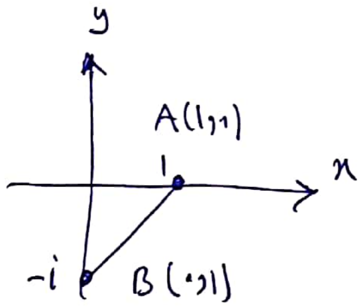

هـ) منحنی هموار تکه ای: از چند منحنی هموار تشکیل شده است.

# • روش‌های انتگرال گیری توابع مختلط

## ۱- استفاده از نمایش منحنی به صورت پارامتری (روش کلی)

اگر $f(z)$ یک تابع مختلط پیوسته (تحلیلی یا غیر تحلیلی) روی منحنی $C$ باشد آنگاه فرم پارامتری منحنی را برحسب پارامتر $t$ را در تابع جای گذاری کرده و برحسب $t$ انتگرال می‌گیریم. این روش کلی ترین روش است و همیشه قابل اعمال است.

مثال ۱۹- انتگرال $\int_{AB} f(z)\,dz$ که در آن $f(z)=y+1-ix$ و $AB$ پاره خط واصل بین نقاط $z_A=1$ و $z_B=-i$ است را بدست آورید.



مثال ۲۰ـ حاصل انتگرال $I=\int_C \frac{z}{\bar{z}}+\frac{|z|}{z}\,dz$ را روی دایره یکه در خلاف جهت عقربه ساعت را بدست آورید.

۳ـ انتگرال گیری نامعین

اگر $f(z)$ در ناحیه $D$ تحلیلی باشد، آنگاه تابع تحلیلی مانند $F(z)$ وجود دارد به طوری که $F'(z)=f(z)$ و خواهیم داشت

$$\int_{C_1\text{ یا }C_2\text{ یا }\dots} f(z)\,dz=\int_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz = F(z_2)-F(z_1) \qquad (I)$$

$C_1$ یا $C_2$ یا ... منحنی های هستند که $z_1$ را به $z_2$ وصل می کنند.

رابطه $I$ یعنی اگر $f(z)$ تحلیلی باشد انتگرال آن روی مسیر فقط به ابتدا و انتهای مسیر وابسته است (اصل استقلال مسیر) = شبیه توابع حقیقی است در این حالت.

مثال ۲۱ـ حاصل $\int_\gamma z^2 dz$ وقتی که $\gamma$ مسیر دارای معادله زیر باشد را بدست آورید.

$\gamma: z(t)=t+it \qquad 0\leqslant t\leqslant 1$

## ۳ـ قضیه انتگرال کوشی

۲ حالت دارد!

الف) اگر تابع $f(z)$ در ناحیه همبند ساده D تحلیلی باشد و $f(z)$ در D پیوسته باشد

در این صورت انتگرال روی منحنی ساده بسته C در ناحیه D صفر است.

$$\oint_C f(z)\,dz = 0$$

ب) اگر تابع $f(z)$ در ناحیه همبند ساده D تحلیلی باشد؛ آنگاه اگر فقط نقطه $z_0$ غیرتحلیلی باشد و درون منحنی نیز باشد. داریم

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = 2\pi i\, f(z_0)$$

مثال ۲۳ـ انتگرال $\oint_C \frac{z+1}{z^3-2z}\,dz$ را محاسبه کنید. (C دایره‌ای به معادله

$|z-1-2i|=2$ در جهت مثبت است)

مثال ۲۳- انتگرال $\oint_C \frac{1}{z-1}\sin z\,dz$ که $C: |z|=2$ چقدر است.

* تعمیم فرمول انتگرال کوشی

اگر مخرج تابع دارای چند عامل باشد که درون منحنی نیز قرار دارند، ابتدا کسرها را به کسرهای جزئی تجزیه می‌کنیم و برای هرکدام از آنها فرمول کوشی را می‌نویسیم.

مثال ۲۴- $I=\oint_C \frac{\sin\frac{\pi}{2}z^2}{(z-1)(z-2)}\,dz$ که $C: |z|=3$ را بدست آورید.

* فرمول انتگرال کوشی برای مشتق

اگر تابع $f(z)$ در ناحیه همبند ساده $D$ تحلیلی باشد و $z_0$ درون ناحیه باشد

فرمول زیر برای محاسبه ی برخی انتگرال ها مفید است

$$\oint \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0)$$

مثال ۲۵- حاصل $I = \oint \frac{e^z}{(z+1)^4}\,dz$ که $C: |z|=2$ رابدست آورید.

مثال ۲۶- $\oint_C \frac{z+2}{z^4+3z^3}\,dz$ را که $C: |z|=2$ رابدست آورید.

## ۴ـ محاسبه ی انتگرال های منحنی بسته با قضیه حساب مانده ها

اگر $f(z)$ روی و داخل منحنی $C$ بجز تعداد متناهی نقاط منفرد $z_1, z_2, \ldots, z_n$ تحلیلی باشد مقدار انتگرال $f(z)$ برابر با ضرب $2\pi i$ در مانده های $f(z)$ است

$$\oint_C f(z) = 2\pi i \left[ \underset{z_1}{\text{Res}}\, f(z) + \underset{z_2}{\text{Res}}\, f(z) + \cdots \right]$$

روش محاسبه ی مانده قبلاً در ۴ قسمت گفته شده است.

مثال ۲۷ـ مانده توابع زیر را در $z=0$ بدست آورید:

۱) $f_1(z) = \dfrac{\cosh z}{z \cos z}$ $\quad z_0 = 0$

۲) $f_2(z) = \dfrac{\cos z}{z^5}$ $\quad z_0 = 0$

۳) $f_3(z) = \dfrac{1 - e^{2z}}{z^4}$ $\quad z_0 = 0$

مثال ۲۸ـ انتگرال $\oint_C \tan z \, dz$ $C: |z|=2$ را بدست آورید.

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$$

مثال ۲۹ ـ حاصل انتگرال زیر روی دایره یکه چقدر است؟

$$I = \oint e^{-\frac{1}{z}} \sin\frac{1}{z} \, dz$$

* نکته: در محاسبه ی انتگرال $\oint_C f(z)\,dz$ اگر تابع $f(z)$ زوج باشد، آنگاه سری لوران حول هر نقطه ی تکین $z=z_0$ فاقد جمله ی $\frac{1}{z-z_0}$ است. بنابراین مقدار مانده برابر صفر بوده و حاصل انتگرال نیز صفر است.

$$1)\ \oint \frac{1-\cos z}{\sin^2 z} \, dz = 0$$

$$2)\ \oint \frac{dz}{\cosh^2 \pi z + \sin^2 \pi z} = 0$$

• محاسبه‌ی برخی انتگرال‌های حقیقی با استفاده از انتگرال مختلط

۱ـ انتگرال توابع گویای شامل $\sin\theta$ و $\cos\theta$ و $\sin n\theta$ و $\cos n\theta$ با تغییر متغیر زیر

$$\begin{cases} \cos n\theta = \frac{1}{2}\left(e^{in\theta} + e^{-in\theta}\right) = \frac{1}{2}\left(z^n + \frac{1}{z^n}\right) \\ \sin n\theta = \frac{1}{2i}\left(e^{in\theta} - e^{-in\theta}\right) = \frac{1}{2i}\left(z^n - \frac{1}{z^n}\right) \\ z = e^{i\theta} \qquad \frac{dz}{d\theta} = ie^{i\theta} \longrightarrow d\theta = \frac{dz}{iz} \end{cases}$$

به انتگرال طبق زیر بر روی منحنی $c$ که دایره واحد در جهت مثلثاتی $(|z|=1)$ است تبدیل می‌شود و با روش‌های گفته شده قابل حل است.

$$I = \int_0^{2\pi} F(\sin n\theta, \cos n\theta)\, d\theta = \oint_c f(z) \frac{dz}{iz} = 2\pi i \left(\text{Res}\ \frac{f(z)}{iz}\right)$$

$$\Rightarrow I = 2\pi \left(\text{Res}\ \frac{f(z)}{z}\right)$$

نکته ۱ـ اگر تابع زوج باشد و حدود انتگرال $\int_0^{\pi}$ باشد می‌توان نوشت $\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}$

نکته ۲ـ اگر توان $\sin$ و $\cos$ بیشتر از ۱ باشد ابتدا آنها را به توان کوچکتر تبدیل می‌کنیم

$$\cos^2\theta = \frac{1}{2} + \frac{\cos 2\theta}{2} \qquad \sin^3\theta = \frac{3}{4}\sin\theta - \frac{1}{4}\sin 3\theta$$

مثال ۳۰ـ انتگرال زیر را بدست آورید.

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta}{1-\sin\theta}$$

۲- انتگرال های حقیقی ناسره

در اینجا $f(x)$ کسر گویایی است که برای همگرایی باید مخرج ۲ درجه از صورت بزرگتر باشد (حتی ادرجه هم در برخی مواقع کافی است)

انتگرال ناسره حقیقی به انتگرال مختلط تبدیل می شود.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\begin{Bmatrix}\cos ax\\ \sin ax\end{Bmatrix}dx=\begin{Bmatrix}Re\\ Im\end{Bmatrix}\left[2\pi i\sum_{Im z>0} Res\, f(z)\,e^{iaz}\right]$$

برای cos مقدار Re و برای sin مقدار Im حساب می شود و ناحیه انتگرال گیری Im z>0 یعنی ربع اول و دوم است.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=Re\left[2\pi i\sum_{Im z>0} Res\, f(z)\right] \qquad \text{اگر } a=0$$

مثال ۳۱- انتگرال زیر را بدست آورید.

$$I_1=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)}dx$$

$$I_2=\int_{0}^{\infty}\frac{\cos ax}{b^2+x^2}dx$$