

به نام خدا

اختلال مداری ستارگان در کهکشان



پرشان جوان رود



سخنی با دانش آموز

مبحث دینامیک کهکشان یکی از گسترده ترین مباحث المپیاد نجوم است که همواره چالش های متفاوتی برای دانش آموزان المپیادی به وجود آورده. یکی از مشکلاتی که بسیاری از دانش پژوهان با آن درگیر بوده اند نبودن یک منبع منسجم و کامل برای این مبحث بوده است. عموماً کتاب هایی که در این زمینه نوشته شده اند کتب دانشگاهی بوده و از ریاضیات پیشرفته ای استفاده می کنند که در دسر های فراوانی را برای دانش آموزان به وجود می آورند. یکی از مباحثی که در دینامیک کهکشان به آن پرداخته می شود اختلال مداری ستارگان است. به شخصه در دوران دانش آموزی با مشکلات عدیدی در دینامیک کهکشان مواجه

می شدم، از این رو تصمیم گرفتم این جزوه را تالیف کنم. مطالبی که در ادامه مشاهده خواهید کرد چکیده ای از مطالب کتاب های مختلف دینامیک کهکشان و مکانیک کلاسیک می باشد.

هنگام مطالعه درسنامه حتماً ابتدا روی مثال ها به خوبی فکر کنید و پس از یادگیری کامل آن ها به ادامه درسنامه بپردازید. پاسخنامه مثال ها در پیوست اول در اختیار شما عزیزان قرار گرفته است. همچنین یک پیوست ریاضی برایتان قرار داده شده که امید است با مطالعه آن اندکی بیشتر با معادلات دیفرانسیل و حل آنها آشنا شوید. پس از انتهای درسنامه تعدادی سوال مشاهده می کنید که بسیار بسیار پیشنهاد می شود که آن ها را حل کنید.

تلاش کردم تا جای ممکن اثبات ها و ساده سازی های ریاضی را قابل فهم کنم. امیدوارم جزوه بدون ایراد باشد، اما بی شک مشکلاتی خواهد بود، اگر با ایراد یا ابهامی در هر جایی از درسنامه روبرو شدید می توانید از طریق ایمیل های زیر با ما در میان بگذارید.

Parshan.pjavanrood@Gmail.com

۱۴thioaa@Gmail.com

با آرزوی سلامتی و موفقیت برای شما عزیزان

پرشان جوانرود - پاییز ۹۹



• بخش اول – اختلال در مدار نیروهای مرکزی :

✓ آشنایی مختصر با نیروی مرکزی و خواص آن

در طبیعت نیروهای متعددی وجود دارند و بسیاری از این نیروها همانند نیروی گرانش (نیروی بین هر دو جرم) و نیروی الکتریکی (کولنی)، نیروی بین ذرات باردار، تنها تابع فاصله دو مولفه هستند و در یک راستا عمل می‌شوند.

اگر میدان هر نیرویی به فرم زیر باشد، آن نیرو یک نیروی مرکزی یا مرکزگرا است :

$$\vec{g} = g(r)\hat{r}$$

هنگامی که یک ذره تحت نیروی مرکزگرا حرکت می‌کند، شتاب آن در راستای مماسی برابر صفر خواهد بود، از این تساوی یک خاصیت بسیار مهم حاصل می‌شود :

$$\ddot{\vec{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta} = g(r)\hat{r}$$

$$\Rightarrow r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0 \Rightarrow r^2\dot{\theta} = cte. \equiv L$$

همانطور که مشاهده کردید پارامتر $r^2\dot{\theta}$ در طول حرکت ذره تحت میدان نیروی مرکزی ثابت است؛ این پارامتر که تکانه زاویه‌ای واحد جرم است را به قرارداد با L نشان می‌دهیم و در ادامه از آن بسیار استفاده خواهیم کرد.

حال که نشان دادیم $r^2\dot{\theta}$ ثابت است و با تعریف یک پارامتر کمکی به صورت زیر معادله دیفرانسیلی به دست می‌آوریم که با حل آن می‌توانیم مسیر حرکت ذره به دور مرکز نیرو را پیدا کنیم :

$$u \equiv \frac{1}{r} \Rightarrow \dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{u}\right) = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\theta} \frac{d\theta}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{r^2} = Lu^2$$

$$\Rightarrow \dot{r} = -L \frac{du}{d\theta} \Rightarrow \ddot{r} = \frac{d}{dt}\left(-L \frac{du}{d\theta}\right) = -L \frac{d^2u}{d\theta^2} \frac{d\theta}{dt} = -L^2 u^2 \frac{d^2u}{d\theta^2}$$

$$r\dot{\theta}^2 = L^2 u^3$$

نتایج به دست آمده را در رابطه شتاب جاگذاری می‌کنیم و پس از اندکی ساده‌سازی به معادله زیر می‌رسیم :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + u = -\frac{g(u)}{L^2 u^3}$$

به این معادله، معادله بینه می‌گویند.

مثال اول: با استفاده از معادله بینه، معادله مسیر حرکت یک ذره تحت گرانش یک جرم نقطه‌ای با جرم M را به دست آورید.



بحث نیرو های مرکزگرا بسیار گسترده تر از آن است که در این جزوه بگنجد ، از این رو برای مطالعه بیشتر در مورد این مبحث پیشنهاد می شود به فصل نیرو مرکزی کتاب های مکانیک کلاسیک (همانند کلپنر ، فولز ، ماریون و ...) مراجعه کنید.

اکنون قصد داریم تا حرکت ستارگان درون کهکشان را بررسی کنیم. ابتدا می خواهیم نشان دهیم انرژی مکانیکی تک جسم پایسته است:

نیرو های وارد بر ستاره به این صورت است

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} = -m\vec{\nabla}\Phi \Rightarrow m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right)$$

$$-m\vec{\nabla}\Phi \cdot \vec{v} = -m \frac{\vec{\nabla}\Phi \cdot d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{\nabla}\Phi \cdot d\vec{r} = d\Phi \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 + m\Phi \right) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} m v^2 + m\Phi = cte.$$

تساوی بالا نشان می دهد که مجموع انرژی جنبشی و پتانسیل یک تک جرم در کهکشان ثابت است.

مثال دوم: ذره ای به جرم m را در نظر بگیرید که درون کهکشانی که پتانسیل آن برابر پتانسیل کره پلامر است ، در مداری دایروی به شعاع در r حال حرکت است.

الف) انرژی مکانیکی و تکانه زاویه ای این ذره را محاسبه کنید.

ب) منحنی چرخش این کهکشان را به صورت کیفی رسم کنید و نشان دهید سرعت مدار دایروی در نزدیکی مرکز با افزایش r افزایش پیدا می کند و سپس افت می کند.

ج) نشان دهید با افزایش r ، تکانه زاویه ای مدار دایروی همواره افزایش و سرعت زاویه ای دوران مدار دایروی همواره کاهش می یابد.

$$\Phi(r) = -\frac{GM}{\sqrt{r^2 + a_p^2}}$$

پتانسیل کره پلامر



✓ بررسی اختلال در مدار نیروهای مرکزی :

یک ذره را در نظر بگیرید که تحت میدان نیروی مرکزی ای در حال حرکت در مداری دایروی به شعاع r که ناگهان اختلالی در راستای شعاعی به آن وارد می شود، این اختلال می تواند به صورت سرعتی در راستای شعاعی اعمال شود، یا در مدت زمان بسیار اندک ذره از فاصله r به فاصله $r + \delta r$ منتقل شود؛ به هر صورت اگر اختلال وارد شده را بسیار کوچک در نظر بگیریم به صورتی که $\left(\frac{\delta r}{r}\right)^2 \approx 0$ ؛ خواهیم داشت :

$$g(r) = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = \ddot{r} - \frac{L^2}{r^3}$$

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \left. \frac{d^i f}{dx^i} \right|_{x_0} (x - x_0)^i \quad \text{بسط تیلور}$$

$$f(x) = (1+x)^n \approx 1 + nx$$

$$g(r) = g(r_0) + \left. \frac{dg}{dr} \right|_{r_0} \delta r \approx \frac{d^2}{dt^2} (r_0 + \delta r) - \frac{L^2}{(r_0 + \delta r)^3}$$

$$\Rightarrow g(r) \approx \delta \ddot{r} - \frac{L^2}{r_0^3} \left(1 - 3 \frac{\delta r}{r_0} \right)$$

در $r = r_0$ که مدار دایروی است داریم :

$$g(r_0) = -\frac{L^2}{r_0^3}$$

در نتیجه خواهیم داشت :

$$g(r_0) + \left. \frac{dg}{dr} \right|_{r_0} \delta r \approx \delta \ddot{r} + g(r_0) \left(1 - 3 \frac{\delta r}{r_0} \right)$$

$$\Rightarrow \delta \ddot{r} + \left(-3 \frac{g(r_0)}{r_0} - \left. \frac{dg}{dr} \right|_{r_0} \right) \delta r = 0$$

$$-3 \frac{g(r_0)}{r_0} - \left. \frac{dg}{dr} \right|_{r_0} \equiv \kappa$$



معادله دیفرانسیل صفحه قبل به ازای κ^2 های کوچک تر از صفر واگرا می شود؛ بدین معنا که پس از وارد شدن اختلال ذره از مدار دایروی کاملاً خارج شده و فاصله آن از مرکز دائماً افزایش پیدا خواهد کرد؛ اما به ازای κ^2 های بزرگ تر از صفر معادله نوسانگر هماهنگ ساده را به ما می دهد، یعنی فاصله ذره از مرکز متناوباً تغییر می کند.

$$\kappa^2 > 0 :$$

$$\delta r(t) = A \cos \kappa t + B \sin \kappa t$$

$$t = 0 : \begin{cases} \delta r = A \\ \dot{\delta r} = B\kappa \Rightarrow B = \frac{\dot{\delta r}}{\kappa} \end{cases}$$

$$\delta r(t) = \delta r \cdot \cos \kappa t + \frac{\dot{\delta r}}{\kappa} \sin \kappa t$$

مثال سوم : ماهواره ای در مداری دایروی به شعاع r در حال گردش به دور زمین است، ناگهان موتور ماهواره روشن شده و سرعت اندکی به اندازه v در راستای شعاعی به آن وارد می کند. معادله مسیر حرکت ماهواره را بیابید.

مثال چهارم : ذره ای را در نظر بگیرید که تحت پتانسیل $\Phi(r) = -kr^{-\alpha}$ (که α و K ثوابتی مثبت هستند) در حال حرکت در مداری دایروی است.

الف) ثابت کنید $v^2 = -\alpha \Phi(r)$ (v سرعت مدار دایروی)

ب) دو جرم m_1 و m_2 را در مدار های دایروی به شعاع r_1 و r_2 در حال حرکت هستند. ($r_1 < r_2$)
 ب) انرژی کل \mathcal{E} و تکانه زاویه ای کل L را بیابید.

ج) اکنون دو جرم به مدار هایی دایروی با شعاع $r_1 + \Delta r_1$ و $r_2 + \Delta r_2$ منتقل می شوند، رابطه ای بین Δr_1 و Δr_2 بیابید تا تکانه زاویه ای کل L ثابت بماند.

د) تغییر انرژی $\Delta \mathcal{E}$ را بیابید.

ه) نشان دهید اگر $\alpha < 2$ باشد، با افزایش r ، تکانه زاویه ای مدار دایروی افزایش پیدا می کند.



• رویکرد پتانسیل در بررسی اختلالات مداری :

در این بخش اختلال مداری را از منظری دیگر بررسی می‌کنیم و با استفاده از تابع پتانسیل و مفهومی به نام پتانسیل موثر، حرکت دوبعدی ذرات در مدار دایره‌ای را به حرکت یک بعدی تشبیه می‌کنیم.

پتانسیل‌ها انواع مختلفی دارند و هر کدام از آنها تقارن‌هایی دارند که به ما در بررسی آنها کمک می‌کنند، در این بخش قصد بررسی اختلال در سه نوع متقارن از پتانسیل‌ها را داریم :

- تقارن کروی (Spherical Potentials) $\Phi = \Phi(r)$
- تقارن محوری (Axisymmetric Potentials) $\Phi = \Phi(R, z)$
- فاقد تقارن محوری (Non-axisymmetric Potentials) $\Phi = \Phi(R, z, \phi)$

✓ تقارن کروی (Spherical Potentials) :

در این نوع از تقارن، پتانسیل فقط تابعی از فاصله شعاعی از مرکز است.

دستگاه مختصاتی قطبی روی صفحه مدار ذره قرار داده و شتاب را در آن می‌نویسیم:

$$\Phi = \Phi(r) \Rightarrow \vec{g} = -\vec{\nabla}\Phi = -\frac{\partial\Phi(r)}{\partial r}\hat{r}$$

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{\partial\Phi(r)}{\partial r}$$

همانطور که مشاهده می‌کنید، حرکت در دو راستای شعاعی و مماسی است، از پایستگی تکانه زاویه‌ای استفاده می‌کنیم و معادله را تنها بر حسب r می‌نویسیم.

$$L = r^2\dot{\theta}$$

$$\Rightarrow \ddot{r} - \frac{L^2}{r^3} = -\frac{\partial\Phi(r)}{\partial r} \Rightarrow \ddot{r} = -\frac{\partial\Phi(r)}{\partial r} + \frac{L^2}{r^3}$$

از روی عبارت سمت راست پارامتر جدیدی را به شکل زیر معرفی می‌کنیم و آن را پتانسیل موثر Φ_{eff} می‌نامیم :

$$-\frac{\partial\Phi(r)}{\partial r} + \frac{L^2}{r^3} = -\frac{\partial\Phi_{eff}}{\partial r} \Rightarrow \Phi_{eff} \equiv \Phi(r) + \frac{L^2}{2r^2}$$

$$\Rightarrow \ddot{r} = -\frac{\partial\Phi_{eff}}{\partial r}$$



همانطور که مشاهده کردید توانستیم با اعمال تغییرات اندک معادله اولیه را که بیانگر حرکت دو بعدی (حرکت دایره‌ای) به یک حرکت تک بعدی (فقط شعاعی) تشبیه کنیم.

هنگامی که ذره در حالت تعادل است و در مدار دایروی حرکت می‌کند، جمله \ddot{r} برابر صفر است.

هنگام تعادل:

$$r = r. \Rightarrow \ddot{r}|_{r.} = 0 \Rightarrow \left. \frac{\partial \Phi_{eff}}{\partial r} \right|_{r.} = 0.$$

اکنون قصد داریم به ذره ای که در مدار دایروی در حال حرکت است اختلالی در راستای شعاعی وارد کنیم و سپس حرکت ذره را بررسی کنیم:

$$r = r. + \delta r \Rightarrow \ddot{r} = \delta \ddot{r}$$

تابع پتانسیل موثر را تا اولین مرتبه غیر صفر بسط می‌دهیم

$$\Phi_{eff}(r) = \Phi_{eff}(r.) + \left. \frac{\partial \Phi_{eff}}{\partial r} \right|_{r.} (r - r.) + \left. \frac{\partial^2 \Phi_{eff}}{\partial r^2} \right|_{r.} \frac{(r - r.)^2}{2} + \dots$$

$$\left. \frac{\partial \Phi_{eff}}{\partial r} \right|_{r.} = 0 \Rightarrow \Phi_{eff}(r) = \Phi_{eff}(r.) + \left. \frac{\partial^2 \Phi_{eff}}{\partial r^2} \right|_{r.} \frac{(r - r.)^2}{2} + \dots$$

$$\ddot{r} = \delta \ddot{r} = - \frac{\partial \Phi_{eff}}{\partial r} = - \left. \frac{\partial^2 \Phi_{eff}}{\partial r^2} \right|_{r.} (r - r.)$$

$$\Rightarrow \delta \ddot{r} + \left(\left. \frac{\partial^2 \Phi_{eff}}{\partial r^2} \right|_{r.} \right) \delta r = 0.$$

همانطور که پیش تر گفتیم، معادله دیفرانسیل بالا به ازای مقادیر مثبت یا منفی $\left. \frac{\partial^2 \Phi_{eff}}{\partial r^2} \right|_{r.}$ ، جواب‌های متفاوتی دارد. در

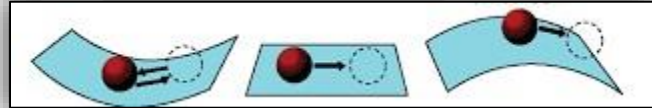
پیوست ریاضی اول بیشتر به بررسی معادلات دیفرانسیل می‌پردازیم، برای آشنایی بیشتر به این قسمت مراجعه کنید.

همانطور که در پیوست ریاضی مشاهده کردید در صورتی که $\left. \frac{\partial^2 \Phi_{eff}}{\partial r^2} \right|_r$ منفی یا صفر باشد ذره دیگر حرکت پایدار نخواهد داشت، اما اگر مثبت باشد ذره حول نقطه تعادل (r_c) نوسان می‌کند.

$$\left. \frac{\partial^2 \Phi_{eff}}{\partial r^2} \right|_r > 0 \quad \text{تعادل پایدار}$$

$$\left. \frac{\partial^2 \Phi_{eff}}{\partial r^2} \right|_r = 0 \quad \text{تعادل بی تفاوت}$$

$$\left. \frac{\partial^2 \Phi_{eff}}{\partial r^2} \right|_r < 0 \quad \text{تعادل ناپایدار}$$



مثال پنجم: حرکت یک ستاره به دور یک سیاهچاله غیر چرخان به جرم M_{BH} با معادله زیر توصیف می‌شود:

$$\left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 = E^2 - \left(c^2 - \frac{2GM_{BH}}{r} \right) \left(1 + \frac{L^2}{c^2 r^2} \right) \equiv E^2 - 2\Phi_{eff}(r)$$

که می‌توان r را فاصله از مرکز و τ را به عنوان زمان در نظر گرفت. (اگر بخواهیم دقیق‌تر بررسی کنیم r مولفه شعاعی متریک شوارتزشیلد و τ زمان ویژه برای ناظر ساکن در فاصله r است.)

الف) نشان دهید هیچ مدار دایروی ای در $r < \frac{2GM_{BH}}{c^2}$ وجود ندارد.

ب) نشان دهید مدارهای دایروی پایدار در شعاع‌های $r > \frac{6GM_{BH}}{c^2}$ قرار داشته و شرط زیر برای تکانه زاویه ای آنها برقرار است:

$$L > \frac{2\sqrt{3}GM_{BH}}{c}$$

حال قصد داریم ثابت کنیم که اگر جسمی در تعادل پایدار باشد، پس از وارد شدن اختلالی شعاعی نسبت به نقطه تعادل روی یک بیضی حرکت می‌کند.

ابتدا دستگاه مختصاتی روی نقطه تعادل قرار می‌دهیم، محور x را در راستای شعاعی و محور y را عمود بر x و در راستای حرکت قرار می‌دهیم.

همانطور که پیش‌تر نشان دادیم:

$$\ddot{\delta r} + \left(\frac{\partial^2 \Phi_{eff}}{\partial r^2} \Big|_r \right) \delta r = 0, \quad \frac{\partial^2 \Phi_{eff}}{\partial r^2} \Big|_r \equiv \kappa^2$$

$$\Rightarrow \delta r(t) = X \sin(\kappa t + \psi)$$

از پایستگی تکانه زاویه‌ای استفاده می‌کنیم تا θ را بر حسب زمان به دست بیاوریم:

$$L = r^2 \dot{\theta} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{L}{r^2} = \frac{L}{(r_0 + \delta r)^2} \approx \frac{L}{r_0^2} \left(1 - 2 \frac{X}{r_0} \sin(\kappa t + \psi) \right)$$

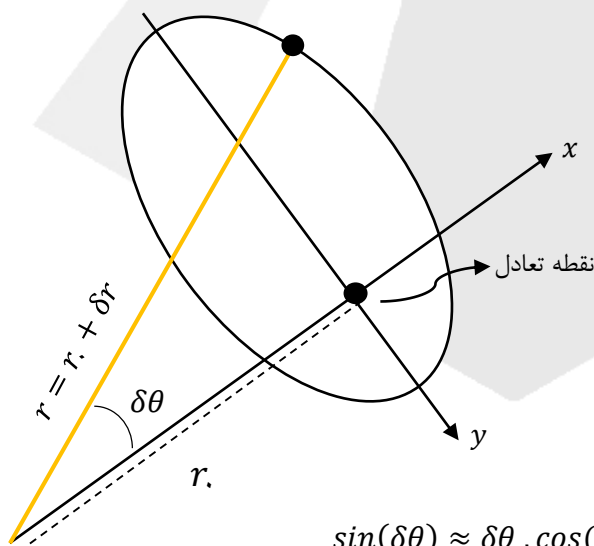
روی زمان انتگرال گرفته و به دست می‌آوریم:

$$\theta(t) = \frac{L}{r_0^2} \left(t + 2 \frac{X}{\kappa r_0} (\cos(\kappa t + \psi) - \cos(\psi)) \right) + \theta_0.$$

$$\frac{L}{r_0^2} = \dot{\theta}_0 \Rightarrow \theta(t) = (\dot{\theta}_0 t + \theta_0) + 2 \frac{X \dot{\theta}_0}{\kappa r_0} (\cos(\kappa t + \psi) - \cos(\psi))$$

همانطور که می‌بینید $\theta(t)$ شامل دو جمله است؛ جمله اول حرکت دایروی نقطه تعادل را توصیف می‌کند (θ_g) و جمله دوم یک جمله اختلالی است ($\delta\theta$).

$$\theta(t) = \theta_g(t) + \delta\theta(t)$$



اکنون با توجه به شکل داریم:

$$\begin{cases} x = r \cos(\delta\theta) - r_0 \\ y = r \sin(\delta\theta) \end{cases}$$

$\delta\theta$ یک جمله مرتبه اول است

$$\sin(\delta\theta) \approx \delta\theta, \quad \cos(\delta\theta) \approx 1$$



$$\Rightarrow x = r - r, y = r\delta\theta$$

$$x = X\sin(\kappa t + \psi)$$

$$y = r \cdot \left(1 + \frac{X}{r} \sin(\kappa t + \psi) \right) \left(\sqrt{\frac{X\dot{\theta}}{\kappa r}} (\cos(\kappa t + \psi) - \cos(\psi)) \right)$$

$$\Rightarrow y \approx \sqrt{\frac{X\dot{\theta}}{\kappa}} (\cos(\kappa t + \psi) - \cos(\psi)) \approx \sqrt{\frac{X\dot{\theta}}{\kappa}} \cos(\kappa t + \psi) + y.$$

$$y. = -\sqrt{\frac{X\dot{\theta}}{\kappa}} \cos(\psi)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = X\sin(\kappa t + \psi) \\ y = \sqrt{\frac{X\dot{\theta}}{\kappa}} \cos(\kappa t + \psi) + y. \end{cases}$$

اکنون که مختصات جسم را در دستگاه بدست آوردیم مشاهده می‌کنیم که X و Y اینگونه به هم مرتبط می‌شوند:

$$\begin{cases} \frac{x}{X} = \sin(\kappa t + \psi) \\ \frac{y - y.}{\sqrt{\frac{X\dot{\theta}}{\kappa}}} = \cos(\kappa t + \psi) \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{x}{X}\right)^2 + \left(\frac{y - y.}{Y}\right)^2 = 1; Y = \sqrt{\frac{X\dot{\theta}}{\kappa}}$$

همانطور که مشاهده کردید اثبات شد که مسیر جدید ذره پس از اعمال اختلال شعاعی به جسم نسبت به نقطه تعادل یک بیضی است که وابسته به شرایط اولیه (ψ) در راستای مماسی جا به جا شده. به این حرکت، حرکت اپیسایکلی یا فلک تدویری می‌گویند.

مثال ششم: ذره ای را در نظر بگیرید که در یک خوشه کروی، تحت تاثیر نیروی $\vec{f}(r) = -kr^n \hat{r}$ (که n و K ثوابتی مثبت هستند) در حال حرکت در مداری دایروی است.
 الف) فرکانس نوسان شعاعی را بیابید.
 ب) خروج از مرکز بیضی اپیسایکل را بدست آورید.

✓ تقارن محوری (*Axisymmetric Potentials*):

همانطور که پیش تر اشاره کردیم در پتانسیل هایی که تقارن محوری دارند، پتانسیل تابع زاویه سمتی (ϕ) در دستگاه استوانه ای نیست.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \phi} = 0 \quad \text{به عبارتی:}$$

این نوع پتانسیل ها عموماً توصیف کننده کلهکشان های دیسکی هستند.

نیروی وارد بر یک جسم در میدان این نوع از پتانسیل ها دو جهت دارد، یکی در راستای عمود بر صفحه اصلی و دیگری در راستای محور تقارن.

شتاب در دستگاه استوانه ای:

$$\vec{a} = (\ddot{R} - R\dot{\phi}^2)\hat{R} + (r\dot{R}\dot{\phi} + R\ddot{\phi})\hat{\phi} + (\ddot{z})\hat{z}$$

$$\vec{g} = -\vec{\nabla}\Phi = -\frac{\partial \Phi}{\partial R}\hat{R} - \frac{\partial \Phi}{\partial z}\hat{z} \Rightarrow a_{\phi} = 0 \Rightarrow r\dot{R}\dot{\phi} + R\ddot{\phi} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial t}(R^2\dot{\phi}) = 0 \Rightarrow R^2\dot{\phi} = cte. \equiv L_z$$

همانطور که مشاهده کردید در پتانسیل هایی که تقارن محوری دارند در راستای z تکانه زاویه ای پایسته است.

اکنون می خواهیم نقاط تعادل را برای این نوع از پتانسیل ها بیابیم، برای یافتن مولفه R این نقاط می توانیم دوباره پتانسیل موثری تعریف کنیم:

$$\ddot{R} - R\dot{\phi}^2 = -\frac{\partial \Phi}{\partial R}$$

$$R^2\dot{\phi} = L_z \Rightarrow R\dot{\phi}^2 = \frac{L_z^2}{R^3} \Rightarrow \ddot{R} = -\frac{\partial \Phi}{\partial R} + \frac{L_z^2}{R^3} = -\frac{\partial \Phi_{eff}}{\partial R}$$

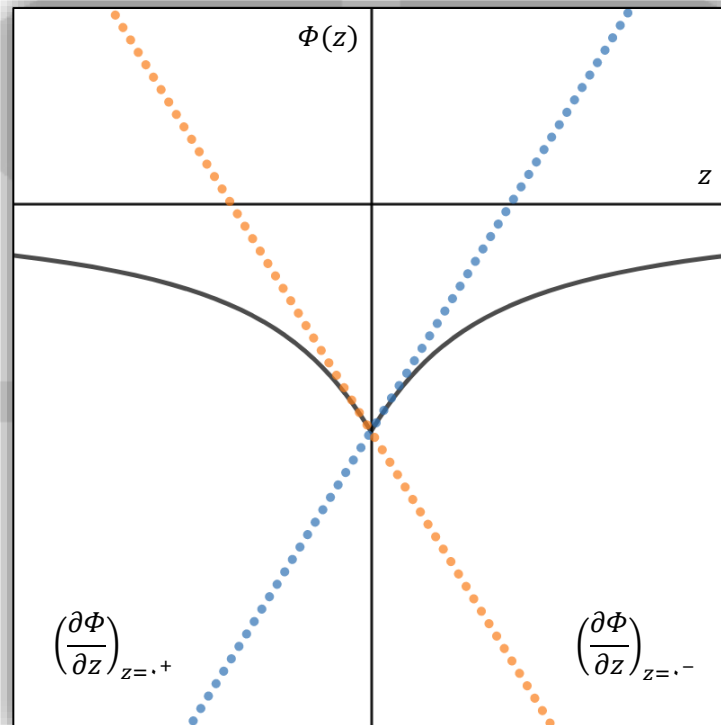
$$\Phi_{eff} \equiv \Phi(R, z) + \frac{L_z^2}{2R^2}$$

در نقاط تعادل \ddot{R} و \ddot{z} برابر صفر هستند و از آنجایی که $\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial \Phi_{eff}}{\partial z}$ است:

$$\text{در نقاط تعادل: } \begin{cases} \frac{\partial \Phi_{eff}}{\partial R} = 0 \\ \frac{\partial \Phi_{eff}}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

در پتانسیل‌هایی که بالا و پایین دیسک انعکاس هم هستند به عبارتی بالا و پایین صفحه اصلی قرینه یکدیگر می‌باشند، (یعنی $\Phi(R, +Z) = \Phi(R, -Z)$) به جسم روی صفحه دیسک ($Z = 0$) نیرویی وارد نمی‌شود و $\left. \frac{\partial \Phi_{eff}}{\partial z} \right|_{z=0} = 0$ خواهد بود. گاهی ممکن است که پتانسیل حول $Z = 0$ متقارن باشد، اما در آن نقطه مشتق پذیر نباشد، چرا که احتمال دارد مشتق از طرف $Z \rightarrow 0^+$ با مشتق از طرف $Z \rightarrow 0^-$ اندازه‌های برابر داشته‌اند اما در جهت‌های مخالف باشند. در این حالت نیرویی که ستاره روی $Z = 0$ احساس می‌کند برابر با صفر خواهد بود، در نتیجه می‌توان نوشت:

$$\Phi(R, z) = \Phi(R, -z) \Rightarrow (g_z)_{z=0} = 0$$



در نمودار بالا در یک شعاع دلخواه پتانسیل را برحسب Z رسم کردیم، همانطور که مشاهده می‌کنید پتانسیل کهکشانی متقارن بوده اما مشتق پذیر نیست. در نقطه $Z = 0$ مشتق از سمت راست و سمت چپ اندازه‌های برابر دارند اما جهت‌های مخالف. اکنون ذره‌ای که در تعادل قرار دارد را مقداری از حالت تعادل منحرف می‌کنیم، یعنی اختلالی در راستای شعاعی و عمود بر صفحه کهکشانی به آن وارد می‌کنیم.

پتانسیل موثر را حول نقطه تعادل $\left\{ \begin{matrix} Z = 0 \\ R = R_g \end{matrix} \right.$ تا اولین مرتبه غیر صفر بسط می‌دهیم:

$$\Phi_{eff}(R, z) = \Phi_{eff}(R_g, 0) + \left. \frac{\partial \Phi_{eff}}{\partial R} \right|_{R_g, 0} (R - R_g) + (-g_z)_{z=0} (z) + \frac{1}{2} \left(\left. \frac{\partial^2 \Phi_{eff}}{\partial R^2} \right|_{R_g, 0} (R - R_g)^2 + 2 \left. \frac{\partial^2 \Phi_{eff}}{\partial R \partial z} \right|_{R_g, 0} (R - R_g)z + \left. \frac{\partial^2 \Phi_{eff}}{\partial z^2} \right|_{R_g, 0} z^2 \right) + \dots$$



برای مشاهده توضیحی مختصر در مورد بسط توابع چند متغیره به پیوست ریاضی دوم مراجعه کنید.

با توجه به آنکه در نقطه $Z = 0$ جسم در حالت تعادل است، پس مستقل از اینکه در چه شعاعی قرار دارد، \ddot{Z} روی صفحه کپکشان باید صفر باشد، در نتیجه:

$$\left. \frac{\partial^2 \Phi_{eff}}{\partial R \partial Z} \right|_{R_g, 0} = 0, \quad (-g_z)_{z=0} = 0.$$

دقت کنید که اگر $\left. \frac{\partial^2 \Phi_{eff}}{\partial R \partial Z} \right|_{R_g, 0}$ برابر 0 نباشد، \ddot{Z} در $Z = 0$ همواره برابر صفر نخواهد بود، از این رو $\left. \frac{\partial^2 \Phi_{eff}}{\partial R \partial Z} \right|_{R_g, 0}$ باید برابر 0 باشد.

همچنین جملات مربوط به نقاط تعادل را برابر صفر قرار می‌دهیم و معادله را ساده تر می‌کنیم.

$$\left. \frac{\partial \Phi_{eff}}{\partial R} \right|_{R_g, 0} = 0.$$

$$\Rightarrow \Phi_{eff}(R, Z) = \Phi_{eff}(R_g, 0) + \left. \frac{\partial^2 \Phi_{eff}}{\partial R^2} \right|_{R_g, 0} \frac{(R - R_g)^2}{2} + \left. \frac{\partial^2 \Phi_{eff}}{\partial Z^2} \right|_{R_g, 0} \frac{Z^2}{2}$$

$$R - R_g \equiv x \Rightarrow \ddot{R} = -\frac{\partial \Phi_{eff}}{\partial R} = \ddot{x} = -\left. \frac{\partial^2 \Phi_{eff}}{\partial R^2} \right|_{R_g, 0} x$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + \left. \frac{\partial^2 \Phi_{eff}}{\partial R^2} \right|_{R_g, 0} x = 0.$$

در صورتی که تعادل پایدار باشد ($\left. \frac{\partial^2 \Phi_{eff}}{\partial R^2} \right|_{R_g, 0} > 0$):

$$x(t) = X \sin(\kappa t + \psi); \quad \kappa^2 \equiv \left. \frac{\partial^2 \Phi_{eff}}{\partial R^2} \right|_{R_g, 0}$$

$$\ddot{z} = -\frac{\partial \Phi_{eff}}{\partial Z} = -\left. \frac{\partial^2 \Phi_{eff}}{\partial Z^2} \right|_{R_g, 0} z$$

در صورتی که تعادل پایدار باشد ($\left. \frac{\partial^2 \Phi_{eff}}{\partial Z^2} \right|_{R_g, 0} > 0$):

$$z(t) = Z \cos(\nu t + \theta); \quad \nu^2 \equiv \left. \frac{\partial^2 \Phi_{eff}}{\partial Z^2} \right|_{R_g, 0}$$

همان گونه که در بخش قبل به دست آوردیم، با استفاده از پایستگی تکانه زاویه ای اثبات می کنیم که تصویر حرکت جسم روی صفحه دیسک حول نقطه تعادل یک بیضی خواهد بود:

$$L_z = R^2 \dot{\phi} \Rightarrow \dot{\phi} = \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{L_z}{R^2} = \frac{L_z}{(R_g + x)^2} \approx \frac{L_z}{R_g^2} \left(1 - 2 \frac{x}{r} \sin(\kappa t + \psi) \right)$$

$$\Rightarrow \phi(t) = \frac{L_z}{R_g^2} \left(t + 2 \frac{X}{\kappa r} (\cos(\kappa t + \psi) - \cos(\psi)) \right) + \phi_0$$

$$\frac{L_z}{R_g^2} = \dot{\phi}_0 \Rightarrow \phi(t) = (\dot{\phi}_0 t + \phi_0) + 2 \frac{X \dot{\phi}_0}{\kappa r} (\cos(\kappa t + \psi) - \cos(\psi))$$

$$\phi(t) = \phi_g(t) + \delta\phi(t)$$

دستگاه مختصاتی دکارتی روی نقطه تعادل قرار می دهیم، محور x در راستای عمود بر محور اصلی، محور y در راستای حرکت و محور z در راستای عمود بر صفحه کهکشانش است.

مختصات ذره بر حسب زمان به این شکل خواهد بود:

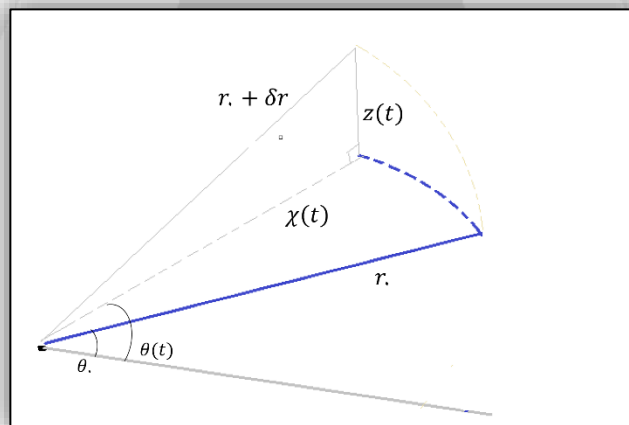
$$\begin{cases} x = X \sin(\kappa t + \psi) \\ y = 2 \frac{X \dot{\phi}_0}{\kappa} \cos(\kappa t + \psi) + y_0 \\ z(t) = Z \cos(\nu t + \theta) \end{cases}$$

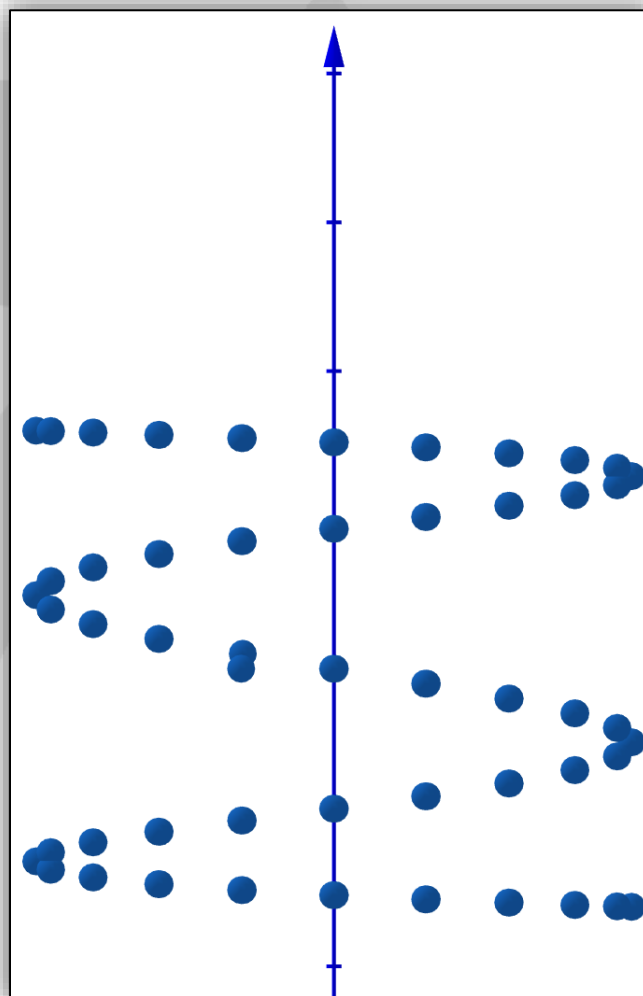
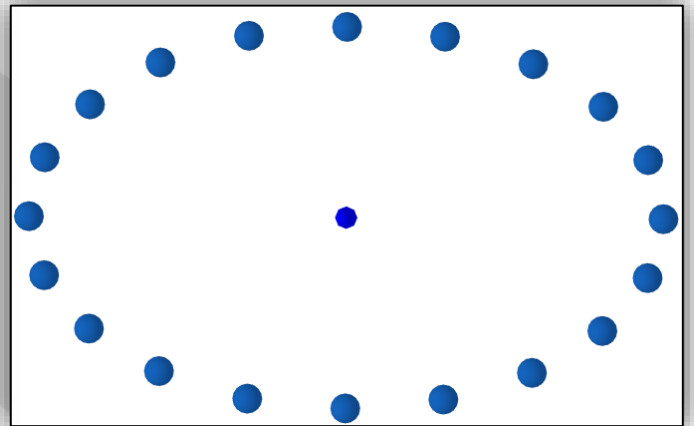
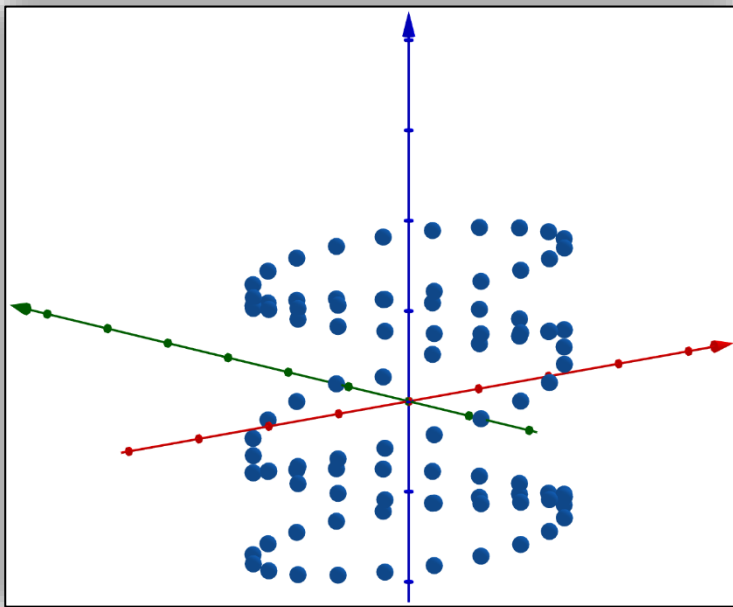
در ادامه مسیر حرکت را در این دستگاه مشاهده خواهید کرد.

مسیر برای این نسبت از پارامترها رسم شده است:

$$\begin{cases} \kappa = 5\nu \\ X = 1, Y = 0.6, Z = 0.8 \end{cases}$$

محور آبی Z ، سبز y و قرمز x می باشد.





مثال هفتم : کهکشانی با فرم پتانسیل زیر در نظر بگیرید :

$$\Phi(R, z) = \frac{v_\cdot^2}{\gamma} \ln\left(R^\gamma + \frac{z^2}{q^\gamma}\right)$$

الف) میدان حاصل از این پتانسیل را بدست آورید.

ب) سرعت دوران ستارگان در مداری دایروی منطبق بر صفحه کهکشان را به دست آورید.

ج) نشان دهید در این کهکشان تمام مدار های دایروی پایدار اند و فرکانس نوسان شعاعی را بیابید.

د) فرکانس نوسان در راستای عمود بر صفحه کهکشان را به دست آورید.

✓ اندازه گیری پارامتر های مداری ستارگان

در این بخش تلاش می کنیم تا با استفاده از پارامتر های قابل اندازه گیری با رصد اطلاعاتی در مورد توزیع جرم کهکشان کسب کنیم.

ابتدا با کمی محاسبه میخواهیم فرکانس نوسان شعاعی را به ثابت دوم اورت مرتبط کنیم :

$$\kappa^2(R_g) = \left. \frac{\partial^2 \Phi_{eff}}{\partial R^2} \right|_{R_g} = \kappa^2 = \left. \frac{\partial^2}{\partial R^2} \left(\Phi + \frac{L_z^2}{2R^2} \right) \right|_{R_g} = \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2} + \frac{3L_z^2}{R^4} \right)_{R_g}$$

پارامتر κ فرکانس نوسان جسم پس از اعمال یک اختلال به مدار دایروی می باشد پس برای محاسبه آن باید پارامتر های مدار دایروی را در نظر بگیریم :

$$\text{در مدار دایروی} : -R\Omega^2 = -\frac{\partial \Phi}{\partial R} \Rightarrow \frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2} = \Omega^2 + 2R\Omega \frac{\partial \Omega}{\partial R}$$

$$L_z = R_g^2 \Omega_g \Rightarrow \kappa^2(R_g) = \Omega_g^2 + 2R_g \Omega_g \left(\frac{\partial \Omega}{\partial R} \right)_{R_g} + 3\Omega_g^2$$

$$= 2\Omega_g \left(\Omega_g + R_g \left(\frac{\partial \Omega}{\partial R} \right)_{R_g} \right) \xrightarrow{\Omega = \frac{v}{R}} = 2\Omega_g \left(\frac{v_g}{R_g} + \left(\frac{\partial v}{\partial R} \right)_{R_g} \right)$$

عبارت داخل پرانتز در ثابت دوم اورت نیز دیده می شود :

$$B = -\frac{1}{\gamma} \left(\frac{v}{R} + \frac{\partial v}{\partial R} \right)_{R_g}$$

$$\Rightarrow \kappa^2 = -4B\Omega$$

بدین صورت برای هر مدار دایروی روی دیسک می توان با استفاده از ثابت اورت آن محل و سرعت زاویه ای آن مدار فرکانس نوسان شعاعی را به دست آورد.

(محاسباتی که پیش تر انجام دادیم برای مدار های دایروی در پتانسیل هایی با تقارن کروی نیز به همین صورت قابل انجام است.)

اکنون وقت آن است که حرکت ستارگان اطراف خورشید را بررسی کنیم، خورشید در فاصله $R. \approx 8.5 \text{ kpc}$ از مرکز کهکشان قرار دارد، مشاهدات انجام شده نشان می دهند که دوره تناوب اپیسایکلی ستارگان در نزدیکی خورشید در حدود ۱۷۰ میلیون سال است، این مقدار بسیار طولانی تر از آن است که بخواهیم صبر کنیم که ستاره یک دور کامل بزند اما می توانیم سرعت ستارگان نزدیک خورشید ($R \approx R.$) را اندازه بگیریم. ستارگان نزدیک به خورشید در حال حرکت اپیسایکلی هستند اما لزوماً نقطه ای که حول آن نوسان می کنند یکسان نیست؛ نقطه تعادل بعضی به مرکز کهکشان نزدیک تر ($R_g < R.$) و نقطه تعادل بعضی از مرکز کهکشان دورتر است ($R_g > R.$)؛ به عبارتی مرکز بیضی اپیسایکلی هر ستاره با ستاره دیگر ممکن است متفاوت باشد.

$$(R_g \neq R.)$$

سرعت نسبی این ستارگان در راستای \mathcal{Y} را می نویسیم :

$$v_y = R\dot{\phi} - R.\Omega. \xrightarrow{R \approx R.} v_y = R.(\dot{\phi} - \Omega.)$$

$$L_z = R^\gamma \dot{\phi} = R_g^\gamma \Omega_g \xrightarrow{R \approx R.} \dot{\phi} = \frac{R_g^\gamma}{R.^\gamma} \Omega(R_g)$$

$$R = R_g + x \approx R. \Rightarrow R_g \approx R. - x$$

اکنون $\Omega(R)$ را حول خورشید ($R.$) تا اولین مرتبه غیرصفر بسط می دهیم :

$$\Omega(R) \approx \Omega. + \left. \frac{d\Omega}{dR} \right|_{R.} (R - R.)$$

با استفاده از بسط سرعت زاویه ای نقطه تعادل را پیدا می کنیم و در v_y جاگذاری می کنیم :

$$\Omega(R_g) = \Omega. - \left. \frac{d\Omega}{dR} \right|_{R.} x$$

$$\Rightarrow v_y = R.(\dot{\phi} - \Omega.) = R. \left(\frac{R_g^\gamma}{R.^\gamma} \Omega(R_g) - \Omega. \right) = R. \left(\left(1 - \frac{\gamma x}{R.} \right) \Omega(R_g) - \Omega. \right)$$

$$\Rightarrow v_y = R. \left(\left(1 - \frac{\gamma x}{R.} \right) \left(\Omega. - \left. \frac{d\Omega}{dR} \right|_{R.} x \right) - \Omega. \right)$$

$$\Rightarrow v_y = R. \left[\Omega. - \left. \frac{d\Omega}{dR} \right|_{R.} x - \frac{\gamma x}{R.} \left(\Omega. - \left. \frac{d\Omega}{dR} \right|_{R.} x \right) - \Omega. \right]$$

$$= R. \left[- \left. \frac{d\Omega}{dR} \right|_{R.} x - \frac{\gamma x}{R.} \Omega. + \frac{\gamma}{R.} \left. \frac{d\Omega}{dR} \right|_{R.} x^2 \right]$$

از مرتبه دوم x صرف نظر می کنیم و خواهیم داشت :

$$\Rightarrow v_y = -R. x \left(\left. \frac{d\Omega}{dR} \right|_{R.} + \frac{\gamma \Omega.}{R.} \right)$$



$$\Omega = \frac{v}{R} \Rightarrow v_y = -R \cdot x \left(-\frac{v}{R} + \frac{1}{R} \frac{dv}{dR} \Big|_R + \frac{v}{R} \right)$$

$$= -x \left(\frac{v}{R} + \frac{dv}{dR} \Big|_R \right)$$

عبارتی که درون پرانتز به وجود آمد در ثابت دوم اورت نیز وجود دارد :

$$B = -\frac{1}{\gamma} \left(\frac{v}{R} + \frac{dv}{dR} \Big|_R \right)$$

$$\Rightarrow v_y = \gamma B x = -\frac{\kappa^2}{\gamma \Omega} x$$

نتیجه به دست آمده همچنان "دردی از ما دوا نمی کند"، چرا که ما مکان نقطه تعادل هیچ ستاره ای را نمی دانیم لذا نمی توانیم x را برای هر ستاره ای که رصد می کنیم به دست آوریم؛

اما می توانیم با چند تقریب معقول و میانگین گیری روی ستارگان نزدیک اطلاعات مفیدی استخراج کنیم.

$$v_y = \gamma B x = -\frac{\kappa^2}{\gamma \Omega} x \Rightarrow \langle v_y \rangle = \left(\frac{\kappa^2}{\gamma \Omega} \right) \langle x \rangle$$

در اینجا چون ستارگان مورد بررسی همه در نزدیکی ما هستند، می توانیم تقریب بزینم که ستارگانی که رصد می کنیم تقریباً فرکانس نوسان شعاعی یکسانی دارند، پس تفاوت این ستارگان با یکدیگر باید در ψ باشد. $(x = X \sin(\kappa t + \psi))$ پس روی ψ میانگین می گیریم :

$$x = X \sin(\kappa t + \psi) \Rightarrow \langle x \rangle = X \frac{\int_{-\pi}^{\pi} \sin(\kappa t + \psi) d\psi}{2\pi}$$

$$\Rightarrow \langle x \rangle = \frac{X}{\gamma}$$

$$v_x = \dot{x} = X \kappa \cos(\kappa t + \psi) \Rightarrow \langle v_x \rangle = X \kappa \frac{\int_{-\pi}^{\pi} \cos(\kappa t + \psi) d\psi}{2\pi}$$

$$\Rightarrow \langle v_x \rangle = \frac{X \kappa}{\gamma} \Rightarrow \langle v_x \rangle = \kappa \langle x \rangle$$

$$\Rightarrow \langle v_y \rangle = \frac{\kappa}{\xi \Omega} \langle v_x \rangle$$

نتیجه به دست آمده را می توان کمی ساده تر بیان کرد :

$$\kappa = -\xi B \Omega$$

$$A = \frac{1}{r} \left(\frac{v}{R} - \frac{dv}{dR} \right)_R$$

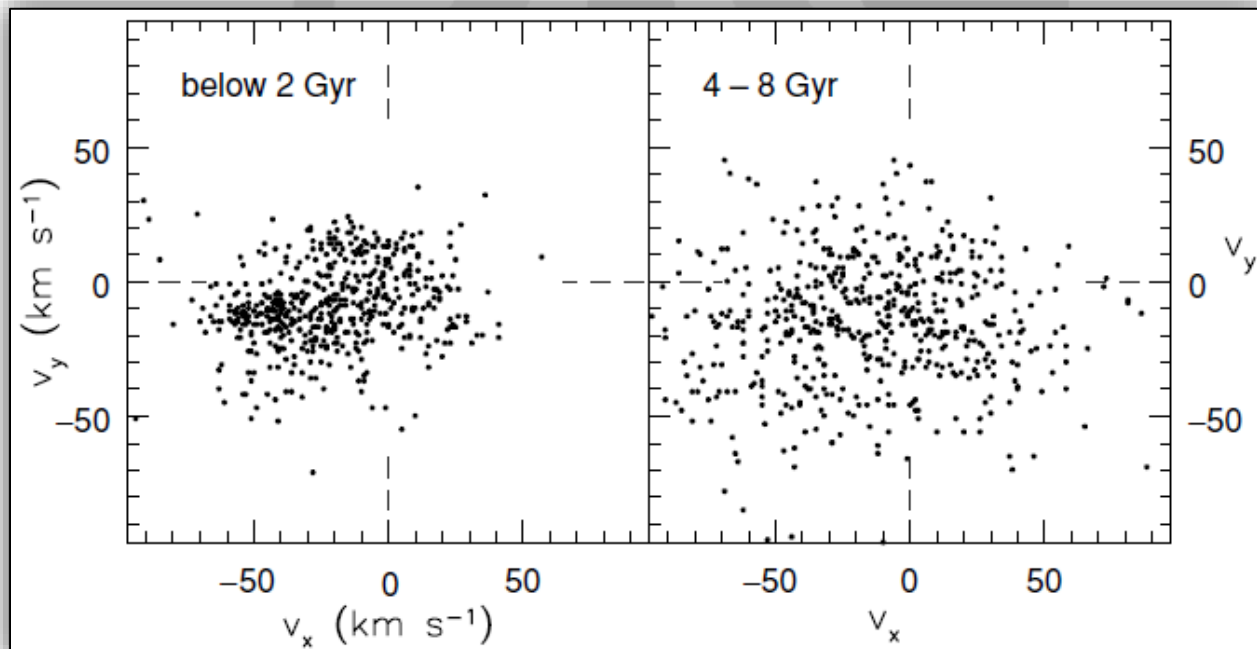
$$B = -\frac{1}{r} \left(\frac{v}{R} + \frac{dv}{dR} \right)_R$$

$$\Rightarrow \Omega = A - B \Rightarrow \langle v_y \rangle = \frac{-B}{A - B} \langle v_x \rangle$$

برای نمونه نسبت $\frac{\langle v_x \rangle}{\langle v_y \rangle}$ را برای منحنی چرخش تخت برابر ۲ است.

$$v = cte. \Rightarrow \frac{dv}{dR} = 0 \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{\Omega}{r} \\ B = -\frac{\Omega}{r} \end{cases} \Rightarrow \frac{\langle v_x \rangle}{\langle v_y \rangle} = 2$$

مشاهدات و بررسی‌های انجام شده روی ستارگان نزدیک خورشید نشان می‌دهد که این نسبت تقریباً ۲,۲ می‌باشد، یعنی منحنی چرخش در ۸,۵ کیلوپارسکی تقریباً تخت است.

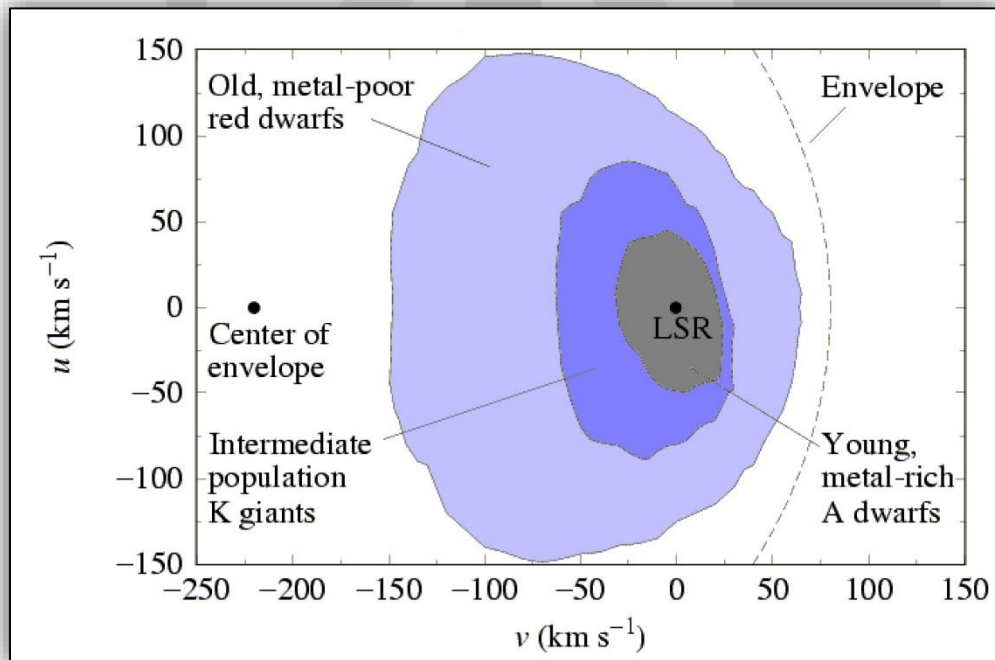


دو نموداری که در صفحه قبل مشاهده می کنید نمودار سرعت ستارگان نزدیک خورشید است، نمودار سمت چپ v_x و v_y ستارگان با سن کمتر از ۲ میلیارد سال و نمودار سمت راست v_x و v_y ستارگانی با سنی بین ۴ تا ۸ میلیارد سال است. همانطور که مشاهده می کنید ستارگان سمت چپ متمرکز تر از ستارگان سمت راست هستند، یعنی سرعت پخشی (رندوم) آنها بیشتر است.

دلیل این پدیده این است که ستارگانی که سن بیشتری دارند زمان بیشتری داشته اند تا از محل تولدشان دور شوند. "ولی چرا"؟ می دانیم زمان واهلش در نزدیکی خورشید از مرتبه 10^{13} سال است، پس چرا چند میلیارد سال اختلاف سن چنین تفاوتی در سرعت ستارگان ایجاد می کند؟ به این خاطر است که خوشه ها یا جمعیت های ستاره ای درون بازو با هر بار گردش بازو، این ستارگان را بیشتر و بیشتر از مدار دایروی منحرف می کنند.

اگر دقت کنید می توان از روی نمودارها تشخیص داد که میانگین v_y ستاره ها منفی است؛ "ولی چرا"؟

در اکثر کهکشان ها چگالی ستارگان تابعیت فاصله از مرکز کهکشان دارد، بدین صورت که هرچه از مرکز دور می شویم چگالی تعداد ستارگان افت می کند، از این رو تعداد ستارگانی که نقطه تعادلشان به مرکز نزدیک تر است ($R_g < R_0$) بیشتر است؛ از این رو تعداد ستارگانی که $x > 0$ دارند بیشتر است. معادله ای که پیش تر به دست آوردیم ($v_y = -\frac{\kappa^2}{v_B} x$) ارتباط v_y و x را به ما می دهد، از این رو در می یابیم که v_y بیشتر ستارگان منفی و میانگین v_y منفی است. به این اثر که توزیع سرعت ستارگان از مدار دایروی منحرف می شود (*asymmetric drift*) می گویند. (ترجمه خودمانی: رانش نامتقارن)





نمودار صفحه قبل توزیع سرعت ستارگان در راستای شعاعی نسبت به خورشید u و مماسی نسبت به خورشید v نشان می دهد، این نمودار بیانی دیگر از رانش نامتقارن است. ستارگان به ترتیب از LSR به بیرون به سه ناحیه تقسیم شده اند که به ترتیب مربوط به ستارگان جوان (درونی ترین ناحیه) ، ستارگان میان سال ، ستارگان قدیمی (خارجی ترین ناحیه) تقسیم شده است. همانطور که مشاهده می کنید، با گذشت زمان توزیع سرعت این ستارگان در هر دو راستا بیشتر شده که پیش تر دلیل آن را توضیح دادیم، همچنین مشاهده می کنید سرعت نسبی در جهت مماسی مرکز این نواحی با افزایش سن، کمتر می شود (به سمت منفی شدن پیش می رود)



✓ فاقد تقارن محوری (*non-Axisymmetric Potentials*)

این پتانسیل‌ها را می‌توان به دو دسته کلی تقسیم کرد، پتانسیل‌های ثابت و پتانسیل‌های چرخان، در ادامه مطالبی در باب نحوه بررسی حرکت ستارگان در این پتانسیل‌ها خواهیم گفت و شما را با چند مدل از آنها آشنا می‌کنیم.

پتانسیل فاقد تقارن محوری و غیرچرخان

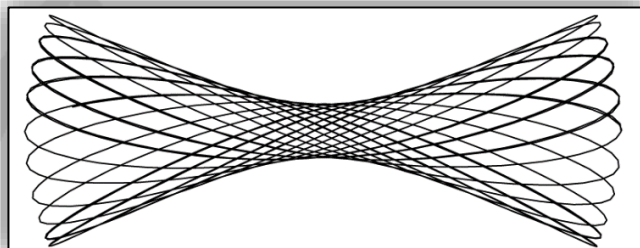
این پتانسیل‌ها در دستگاه مختصات لخت بررسی می‌شوند و در این دستگاه ایستا بوده و تابعیت زمانی ندارند. (یعنی پتانسیل در دستگاه لخت، تابع زمان نیست. همانند تمام پتانسیل‌هایی که تا به حال بررسی کردیم.) یکی از مدل‌هایی که در این دسته قرار می‌گیرد مدل دو بعدی و لگاریتمی زیر است که در دستگاه دکارتی توصیف می‌شود:

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{2} v^2 \ln(R_c^2 + x^2 + \frac{y^2}{q^2})$$

چند نمونه مدار برای این پتانسیل را در شکل‌های زیر مشاهده می‌کنید: (محور عمودی محور y و محور افقی محور x)

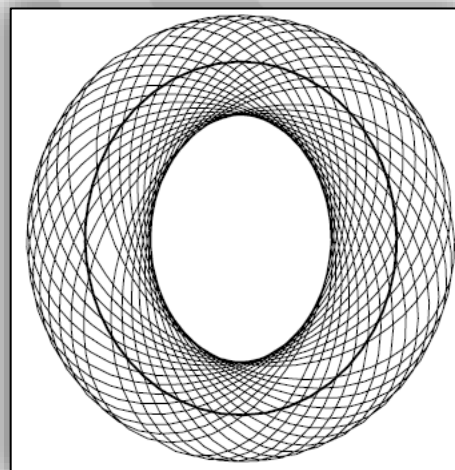
Box Orbit یا مدار جعبه‌ای مربوط به یک ستاره در این پتانسیل، مدارهای جعبه‌ای مدارهایی نوسانی هستند که در پتانسیل‌هایی فاقد تقارن دیده می‌شوند.

$$v = 1, q = 0.9, R_c = 0.14 \\ E = -0.337$$



نمونه‌ای دیگر از مدار در این پتانسیل.

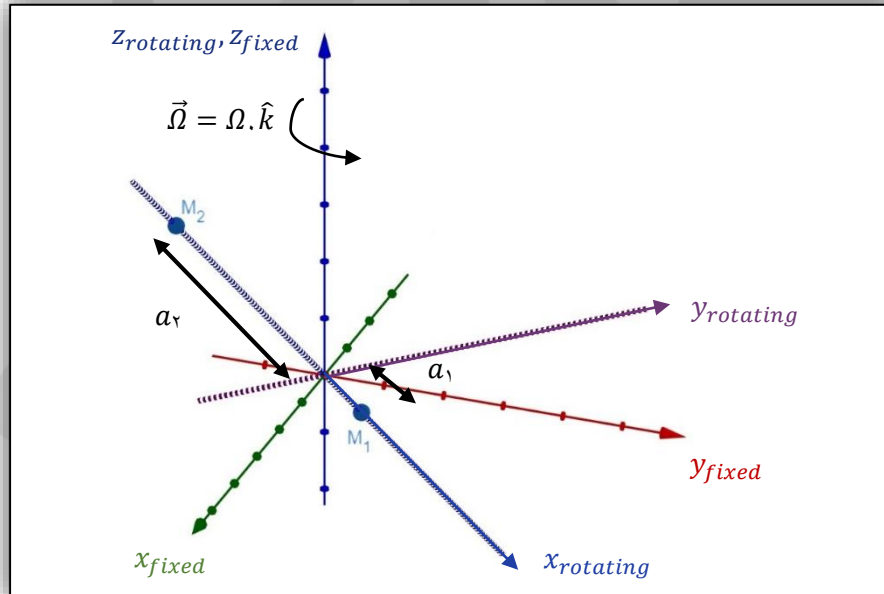
$$v = 1, q = 0.9, R_c = 0.14 \\ E = -0.337$$



مثال هشتم: برای پتانسیل بالا به سوالات زیر پاسخ دهید:
 الف) معادله خطوط هم پتانسیل در این کهکشانی را بدست آورید.
 ب) در حد فواصل نزدیک به مرکز دستگاه، $R = \sqrt{x^2 + y^2} \ll R_c$ تابع پتانسیل را بیابید و سپس مسیر حرکت ستارگان را برحسب زمان در این فواصل پیدا کنید.
 ج) در حد فواصل بسیار دور $R \gg R_c$ و $q = 1$ نشان دهید سرعت مدار دایروی مستقل از فاصله و برابر v است.

پتانسیل‌ها در دستگاه چرخان

در این قسمت قصد داریم مدل‌هایی را بررسی کنیم که برخلاف پتانسیل‌هایی که پیش‌تر بررسی کردیم، در دستگاه مختصات ثابت، ایستا نبوده و به صورت تابعی از زمان تغییر می‌کنند، اما اگر پتانسیل را در دستگاه مختصاتی دوار بررسی کنیم، ایستا خواهد بود و تابعیت زمان نخواهد داشت. ساده‌ترین مثالی که برای این پتانسیل‌ها می‌توان آورد، یک سیستم دوجرمی است که در مدارهای دایروی حرکت می‌کنند.
 اگر پتانسیل حاصل از این دو جسم را در دستگاه مختصات ثابت بررسی کنیم، مشاهده می‌کنیم که تابع پتانسیل به صورت تابعی از زمان تغییر خواهد کرد.



در دستگاه بالا زیروند *rotating* مربوط به دستگاه دوار می‌باشد و زیروند *fixed* مربوط به دستگاه لخت و ثابت است. از معادلات دستگاه نالخت رابطه بین شتاب در دستگاه لخت و نالخت را می‌دانیم: (برای مشاهده اثبات این رابطه و اطلاعات بیشتر از دستگاه نالخت به کتاب‌های مکانیک کلاسیک که در منابع ذکر شده مراجعه کنید).

$$\vec{a}_{rotating} = \vec{a}_{fixed} - \dot{\Omega} \times \vec{v}_{rotating} - \ddot{\Omega} \times \vec{r}_{rotating} - \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}_{rotating})$$

که $\vec{a}_{rotating}$ و $\vec{v}_{rotating}$ و $\vec{r}_{rotating}$ به ترتیب بردار مکان، سرعت و شتاب در دستگاه دوار هستند. همانطور که از معادله بالا متوجه می‌شوید، نیرو در دستگاه دوار شامل سه مولفه اضافه است که بر اثر چرخش احساس می‌شوند. برای یک تابع اسکالر مانند پتانسیل که به دستگاه مختصات وابسته نیست، می‌توان اثبات کرد که گرادیان تابع از دستگاه مختصات مستقل است و درست همانند یک بردار می‌تواند از دستگاهی به دستگاه دیگر تبدیل شود. (برای مشاهده اثبات می‌توانید به فصل اول کتاب دینامیک کلاسیک ذرات و سیستم‌ها - ماریون مراجعه کنید). شتاب در دستگاه لخت:

$$\vec{a}_{fixed} = -\vec{\nabla}\Phi$$

$$\vec{a}_{rotating} = -\vec{\nabla}\Phi - \dot{\Omega} \times \vec{v}_{rotating} - \ddot{\Omega} \times \vec{r}_{rotating} - \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}_{rotating})$$

اکنون که توضیح مختصری درباره دستگاه نالخت دادیم، دست به کار می‌شویم و با یک مدل ساده شروع کنیم. همانند شکل صفحه قبل دو جرم M_1 و M_2 در حال حرکت در مدار دایروی با شعاع‌های a_1 و a_2 هستند. پتانسیل بر حسب مولفه‌های دستگاه مختصات لخت به صورت زیر است:

$$\Phi(t) = \Phi_{M_1} + \Phi_{M_2} = -\frac{GM_1}{|\vec{r}_f - \vec{r}_{M_1f}(t)|} - \frac{GM_2}{|\vec{r}_f - \vec{r}_{M_2f}(t)|}$$

در عبارت بالا \vec{r}_{M_1f} و \vec{r}_{M_2f} بردار مکان جرم اول و دوم در دستگاه مختصات لخت هستند. از آنجا که دو جسم در حال دوران دور یکدیگر هستند، این دو بردار با زمان تغییر می‌کنند.

اما دستگاه مختصات نالخت همراه با آنها دوران می‌کند پس اجرام در این دستگاه ثابت و پتانسیل مستقل از زمان خواهد بود:

$$\Phi = -\frac{GM_1}{|\vec{r}_r - \vec{r}_{M_1r}|} - \frac{GM_2}{|\vec{r}_r - \vec{r}_{M_2r}|}$$

صفحه $x-y$ در دستگاه چرخان و لخت، بر صفحه مداری دو جسم منطبق است. با استفاده از معادله مرکز جرم، به راحتی می‌توانیم سرعت زاویه‌ای دوران آنها حول یکدیگر را بدست آوریم:

$$M_1 \ddot{\vec{r}}_{M_1f} = -\frac{GM_1 M_2}{(a_1 + a_2)^3} (\vec{r}_{M_1f} - \vec{r}_{M_2f}) = -M_1 \vec{r}_{M_1f} \Omega^2$$

$$\begin{cases} M_1 a_1 = M_2 a_2 & \text{معادله جرم مرکز} \\ \vec{r}_{M_2f} = -a_2 \hat{r}_{M_1f} \end{cases} \Rightarrow a_1 = \frac{M_2}{M_1 + M_2} (a_1 + a_2) \Rightarrow \Omega = \sqrt{\frac{G(M_1 + M_2)}{(a_1 + a_2)^3}}$$

جهت بردار سرعت زاویه‌ای نیز عمود بر صفحه حرکت و در راستای Z است.

از این پس در این بخش به منظور ساده نویسی زیروند $rotating(r)$ را حذف می‌کنیم و تمام بردارها و مشتقات را در دستگاه دوار می‌نویسیم.



پیش از آنکه بررسی مثال دو جرم در حال دوران بپردازیم، اجازه دهید تا با استفاده از معادله شتاب در دستگاه دوار، پارامتری جدید به نام پتانسیل موثر تعریف کنیم تا به وسیله آن بتوانیم تعادل را بهتر مورد بررسی قرار دهیم. از معادله شتاب داریم:

$$\vec{a} = -\vec{\nabla}\Phi - \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) - \dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r} - \dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r}$$

از اتحاد برداری (بک-بک) ($BAC - CAB$ rule) داریم:

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C}$$

$$\Rightarrow \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) = (\vec{\Omega} \cdot \vec{r})\vec{\Omega} - \Omega^2 \vec{r}$$

می‌توان بردار \vec{r} را به دو مولفه عمود بر $\vec{\Omega}$ و موازی $\vec{\Omega}$ تقسیم کرد.

$$\vec{r} = \vec{r}_{\perp} + \vec{r}_{\parallel} \Rightarrow \begin{cases} \vec{r} \cdot \vec{\Omega} = r_{\parallel} \Omega, \vec{r}_{\parallel} = r_{\parallel} \hat{\Omega} \\ |\vec{r} \times \vec{\Omega}| = |r_{\perp} \Omega| \end{cases} *$$

$$(\vec{\Omega} \cdot \vec{r})\vec{\Omega} - \Omega^2 \vec{r} = r_{\parallel} \Omega^2 \hat{\Omega} - \vec{r}_{\perp} \Omega^2 - \vec{r}_{\parallel} \Omega^2 = -\vec{r}_{\perp} \Omega^2$$

$$\Rightarrow \vec{a} = -\vec{\nabla}\Phi + \vec{r}_{\perp} \Omega^2 - \dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r}$$

پتانسیل موثر را در دستگاه دوار به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\vec{\nabla}\Phi_{eff} = \vec{\nabla}\Phi - \vec{r}_{\perp} \Omega^2$$

$$\text{یادآوری: } \vec{\nabla}f \cdot \vec{dr} = df \Rightarrow f = \int \vec{\nabla}f \cdot \vec{dr} + cte.$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}\Phi_{eff} \cdot \vec{dr} = \vec{\nabla}\Phi \cdot \vec{dr} - \vec{r}_{\perp} \Omega^2 \cdot \vec{dr}$$

بردار \vec{dr} را نیز می‌توان به دو مولفه عمود بر $\vec{\Omega}$ و موازی $\vec{\Omega}$ تقسیم کرد:

$$\vec{dr} = \vec{dr}_{\perp} + \vec{dr}_{\parallel} \Rightarrow \vec{r}_{\perp} \cdot \vec{dr} = r_{\perp} dr_{\perp}$$

$$\Rightarrow d\Phi_{eff} = d\Phi - r_{\perp} \Omega^2 dr_{\perp} \Rightarrow \Phi_{eff} = \Phi - \frac{1}{2} r_{\perp}^2 \Omega^2 + Cte.$$

با توجه به: *

$$\Rightarrow \Phi_{eff} = \Phi - \frac{1}{2} |\vec{r} \times \vec{\Omega}|^2 + Cte$$

بدین صورت پتانسیل موثر برای دستگاه دوار را می‌توان محاسبه کرد. اکنون به مثال دو جسم در حال دوران باز می‌گردیم:

$$\begin{cases} \vec{r} = x \hat{x} + y \hat{y} + z \hat{z} \\ \vec{r}_{M_1} = a_1 \hat{x} \\ \vec{r}_{M_2} = -a_2 \hat{x} \end{cases} \Rightarrow \Phi(x, y, z) = -\frac{GM_1}{\sqrt{(x-a_1)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{GM_2}{\sqrt{(x+a_2)^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\vec{\Omega} = \Omega \hat{z} = cte. \Rightarrow \dot{\vec{\Omega}} = \cdot \Rightarrow \vec{a} = -\vec{\nabla}\Phi_{eff} - \vec{r}\Omega \times \vec{v}$$

$$\vec{\Omega} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & 0 & \Omega_0 \\ x & y & z \end{vmatrix} = (-\Omega \cdot y)\hat{x} + (\Omega \cdot x)\hat{y} \Rightarrow |\vec{r} \times \vec{\Omega}|^2 = (x^2 + y^2)\Omega^2$$

$$\Rightarrow \Phi_{eff} = \Phi - \frac{1}{2}(x^2 + y^2)\Omega^2 \Rightarrow -\vec{\nabla}\Phi_{eff} = -\vec{\nabla}\Phi + (x\hat{x} + y\hat{y})\Omega^2$$

اکنون که معادله شتاب را ساده تر کردیم قصد داریم نقاط تعادل را در این سیستم چرخان بدست آوریم، نقاطی که همراه با دستگاه حرکت میکنند و در دستگاه چرخان ثابت هستند "نقاط لاگرانژ" نام دارند. بیایید باهم مختصات این نقاط را پیدا کنیم. همانطور که گفتیم این نقاط در دستگاه دوار ثابت هستند پس $\vec{v} = \cdot$ و $\vec{a} = \cdot$. نقاط لاگرانژی را می توان با برابر صفر قرار دادن $\vec{\nabla}\Phi_{eff}$ بدست آورد.

اکنون باید مشتقات جزئی را محاسبه و گرادیان پتانسیل را بدست آوریم:

$$\vec{\nabla}\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\hat{z}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial\Phi}{\partial x} = \frac{GM_1(x - a_1)}{((x - a_1)^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{GM_2(x + a_2)}{((x + a_2)^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{\partial\Phi}{\partial y} = \left[\frac{GM_1}{((x - a_1)^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{GM_2}{((x + a_2)^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right] y \\ \frac{\partial\Phi}{\partial z} = \left[\frac{GM_1}{((x - a_1)^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{GM_2}{((x + a_2)^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right] z \end{cases}$$

اکنون نتایج را در معادله شتاب جاگذاری میکنیم و شتاب در هر راستا را جداگانه بدست می آوریم و برابر صفر قرار می دهیم: (زیروند L مربوط به نقاط لاگرانژ هستند).

$$\begin{cases} a_x(L) = -\frac{GM_1(x_L - a_1)}{((x_L - a_1)^2 + y_L^2 + z_L^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{GM_2(x_L + a_2)}{((x_L + a_2)^2 + y_L^2 + z_L^2)^{\frac{3}{2}}} + x_L\Omega^2 = \cdot \\ a_y(L) = -\frac{GM_1 y_L}{((x_L - a_1)^2 + y_L^2 + z_L^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{GM_2 y_L}{((x_L + a_2)^2 + y_L^2 + z_L^2)^{\frac{3}{2}}} + y_L\Omega^2 = \cdot \\ a_z(L) = -\frac{GM_1 z_L}{((x_L - a_1)^2 + y_L^2 + z_L^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{GM_2 z_L}{((x_L + a_2)^2 + y_L^2 + z_L^2)^{\frac{3}{2}}} = \cdot \end{cases}$$

اکنون به یک سیستم معادله به ظاهر پیچیده رسیده ایم، اما می توانیم مرحله به مرحله آن را ساده کنیم. ابتدا از معادله بدست آمده در مولفه Z استفاده می کنیم:

$$a_z(L) = - \left(\frac{GM_1}{((x_L - a_1)^2 + y_L^2 + z_L^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{GM_2}{((x_L + a_2)^2 + y_L^2 + z_L^2)^{\frac{3}{2}}} \right) z_L = 0$$

معادله صفحه بالا تنها در یک صورتی برقرار است که $z_L = 0$ ، زیرا عبارت داخل پرانتز نمی‌تواند برابر صفر باشد، چون جمع دو مقدار همواره مثبت باهم صفر نمی‌شود. پس نتیجه می‌گیریم نقاط لاگرانژ روی صفحه حرکت دو جسم قرار دارند.

$$z_L = 0$$

اکنون به سراغ معادله بدست آمده از راستای y می‌رویم:

$$a_y(L) = \left(- \frac{GM_1}{((x_L - a_1)^2 + y_L^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{GM_2}{((x_L + a_2)^2 + y_L^2)^{\frac{3}{2}}} + \Omega^2 \right) y_L = 0$$

این معادله در دو صورت برقرار خواهد بود، یکبار در صورت $y_L = 0$ و یکبار در صورتی که عبارت درون پرانتز برابر صفر باشد:

$$\begin{cases} \text{Solution I : } y_L = 0 \\ \text{Solution II : } - \frac{GM_1}{((x_L - a_1)^2 + y_L^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{GM_2}{((x_L + a_2)^2 + y_L^2)^{\frac{3}{2}}} + \Omega^2 = 0 \end{cases}$$

ابتدا حالت اول را بررسی می‌کنیم، y_L را برابر صفر می‌گذاریم و معادله شتاب در راستای x را ساده‌تر می‌کنیم:

$$y_L = 0 \Rightarrow - \frac{GM_1(x_L - a_1)}{(x_L - a_1)^3} - \frac{GM_2(x_L + a_2)}{(x_L + a_2)^3} + x_L \Omega^2 = 0$$

$$\Rightarrow \text{sgn}(x_L - a_1)(x_L + a_2)^3 + \text{sgn}(x_L + a_2) \frac{M_2}{M_1} (x_L - a_1)^3 = \frac{1 + \frac{M_2}{M_1}}{(a_1 + a_2)^3} x_L (x_L - a_1)^2 (x_L + a_2)^2$$

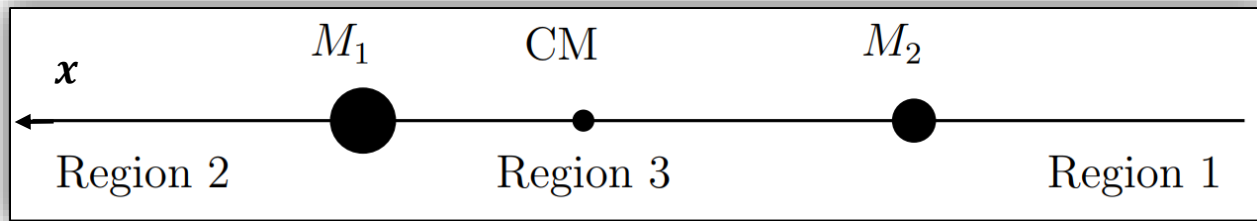
در ساده‌سازی معادله بالا باید دقت داشته باشیم که $\frac{(x_L - a_1)}{(x_L - a_1)^3} \neq (x_L - a_1)^2$ ، چرا که علامت $x_L - a_1$ نیز اهمیت دارد.

با استفاده از معادله مرکز جرم ($M_1 a_1 = M_2 a_2$) و اندازه سرعت زاویه‌ای که پیش‌تر بدست آوردیم معادله را ساده‌تر می‌کنیم:

$$\text{sgn} \left(\frac{x_L}{a_1} - 1 \right) \left(1 + \frac{x_L}{a_2} \right)^3 + \text{sgn} \left(\frac{x_L}{a_2} + 1 \right) \frac{M_2}{M_1} \left(\frac{x_L}{a_2} - \frac{M_2}{M_1} \right)^3 = \frac{1}{\left(1 + \frac{M_2}{M_1} \right)^3} \frac{x_L}{a_2} \left(\frac{x_L}{a_2} - \frac{M_2}{M_1} \right)^2 \left(\frac{x_L}{a_2} + 1 \right)^2$$

برای ساده‌نویسی $u \equiv \frac{x_L}{a_2}$ ، $\frac{M_2}{M_1} \equiv \alpha$ ، $\text{sgn} \left(\frac{x_L}{a_1} - 1 \right) \equiv s_1$ ، $\text{sgn} \left(\frac{x_L}{a_2} + 1 \right) \equiv s_2$ ، را بدین صورت تعریف کرده و معادله را بازنویسی می‌کنیم:

$$\frac{1}{(1 + \alpha)^3} u(u - \alpha)^2 (1 + u)^2 = s_1 (1 + u)^2 + s_2 \alpha (u - \alpha)^2$$



معادله بالا به ازای هر کدام از نواحی تنها یک جواب دارد که بدست آوردن این جواب‌ها در حالت کلی بسیار پیچیده‌اند، اما در حد $\alpha \ll 1$ ، قابل محاسبه هستند و به صورت زیر خواهند بود: (بدست آوردن این معادلات به صورت یک تمرین در پایان فصل به شما واگذار شده است).

$$x_{L1} = -a_r \left(1 - \sqrt[3]{\frac{\alpha}{3}} \right), x_{L2} = -a_r \left(1 + \sqrt[3]{\frac{\alpha}{3}} \right), x_{L3} = a_1 + a_r \left(1 + \frac{5}{12} \alpha \right)$$

اکنون به بررسی حالت دوم می‌پردازیم، حالتی که $y \neq 0$:

$$-\frac{GM_1}{((x_L - a_1)^2 + y_L^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{GM_r}{((x_L + a_r)^2 + y_L^2)^{\frac{3}{2}}} + \Omega^2 = 0 \quad **$$

همچنین از معادله شتاب در راستای x داریم:

$$-\frac{GM_1(x_L - a_1)}{((x_L - a_1)^2 + y_L^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{GM_r(x_L + a_r)}{((x_L + a_r)^2 + y_L^2)^{\frac{3}{2}}} + x_L \Omega^2 = 0$$

$$\Rightarrow \left(-\frac{GM_1}{((x_L - a_1)^2 + y_L^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{GM_r}{((x_L + a_r)^2 + y_L^2)^{\frac{3}{2}}} + \Omega^2 \right) x_L$$

$$= -\frac{GM_1 a_1}{((x_L - a_1)^2 + y_L^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{GM_r a_r}{((x_L + a_r)^2 + y_L^2)^{\frac{3}{2}}}$$

از معادله ** در بالا می‌دانیم که ضریب x_L در معادله بالا برابر صفر است و در نتیجه:

$$\frac{GM_1 a_1}{((x_L - a_1)^2 + y_L^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{GM_r a_r}{((x_L + a_r)^2 + y_L^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\xrightarrow{M_1 a_1 = M_r a_r} ((x_L - a_1)^2 + y_L^2)^{\frac{3}{2}} = ((x_L + a_r)^2 + y_L^2)^{\frac{3}{2}} \Rightarrow (x_L - a_1)^2 = (x_L + a_r)^2$$

$$\Rightarrow x_L - a_1 = |x_L + a_r|$$

$$\begin{cases} x_L - a_1 = x_L + a_r \Rightarrow a_r = -a_1 \text{ (تناقض)} \\ x_L - a_1 = -(x_L + a_r) \Rightarrow x_L = \frac{a_1 + a_r}{2} \Rightarrow x_L = \frac{a_1 - a_r}{2} \end{cases}$$

اکنون نتیجه بدست آمده را در معادله * جاگذاری می کنیم:

$$\begin{cases} x_L - a_1 = -\frac{a_1 + a_2}{2} \\ x_L + a_2 = \frac{a_1 + a_2}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{G(M_1 + M_2)}{\left(\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2 + y_L^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \Omega^2 = \frac{G(M_1 + M_2)}{(a_1 + a_2)^2}$$

$$\Rightarrow \left(\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2 + y_L^2\right)^{\frac{3}{2}} = (a_1 + a_2)^2 \Rightarrow \frac{(a_1 + a_2)^2}{4} + y_L^2 = (a_1 + a_2)^2 \Rightarrow y_L^2 = \frac{3}{4}(a_1 + a_2)^2$$

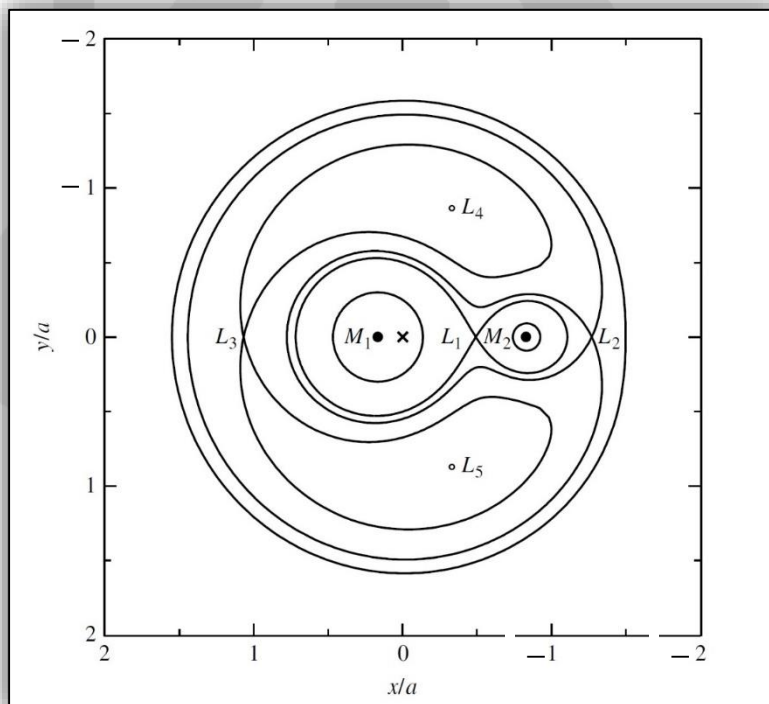
$$\Rightarrow y_L = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}(a_1 + a_2)$$

و بدین صورت مختصات دو نقطه لاگرانژی دیگر را بدست آوردیم که آن ها را L_4 و L_5 می نامیم.

یکی از خواص جالب این دونقطه آن است که مثلث های $\Delta L_4 M_1 M_2$ و $\Delta L_5 M_1 M_2$ متساوی الاضلاع هستند.

$$\angle M_1 M_2 L_4 \equiv \theta \Rightarrow \tan \theta = \left| \frac{y_{L_4}}{a_2 - x_{L_4}} \right| = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}(a_1 + a_2)}{\frac{a_1 + a_2}{2}} = \sqrt{3} \Rightarrow \theta = 60^\circ$$

همین کار را می توان برای زاویه $\angle M_2 M_1 L_4$ تکرار کرد و نتیجه مشابه گرفت، بدین ترتیب زاویه از سه زاویه مثلث برابر 60° بنابراین مثلث متساوی الاضلاع خواهد بود.



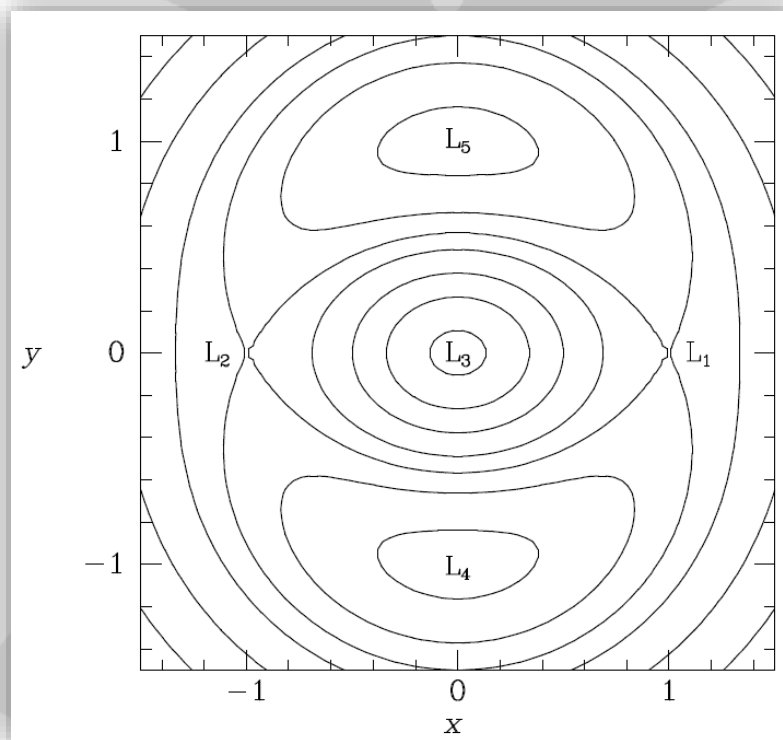
خطوطی با پتانسیل موثر یکسان برای یک سیستم دو جرمی

اکنون که کمی بیشتر با پتانسیل‌ها در دستگاه چرخان آشنا شده‌اید زمان آن فرا رسیده تا پتانسیل‌کشان‌های چرخان را بررسی کنیم.

در این مدل‌سازی، پتانسیل‌کشان در دستگاه لخت تابعی از زمان است، اما در یک دستگاه دوار که با سرعت زاویه‌ای Ω_b می‌چرخد، پتانسیل ایستا بوده و تابعیت زمانی نخواهد داشت، به این سرعت زاویه‌ای عموماً *Pattern speed* می‌گویند.

مثال نهم: فرض کنید دستگاه مختصاتی که پتانسیل‌کشان در آن ایستا بوده و تابعیت زمانی ندارد با سرعت زاویه‌ای ثابت $\vec{\Omega}_b = \Omega_b \hat{z}$ نسبت به دستگاه ثابت دوران کند، اگر پتانسیل دوبعدی و در این دستگاه به فرم زیر باشد، مختصات نقاط تعادل (نقاط لاگرانژی) را در دستگاه دوار بدست آورید. حرکت این نقاط در دستگاه ثابت به چه صورت خواهد بود؟

$$\Phi(x, y) = \frac{v^2}{2} \ln(x^2 + \frac{y^2}{q^2} + R_c^2)$$



خطوطی با پتانسیل موثر یکسان به ازای

$$v = 1, q = 0.8, R_c = 0.1, \Omega_b = 1$$

اکنون قصد داریم تا تعادل نقاط لاگرانژ را برای پتانسیلی در دستگاه دکارتی بررسی کنیم، بدین منظور باید تاثیر اختلالات کوچک بر حرکت ذره را بررسی کنیم. پیش‌تر پتانسیل موثر را بدست آوردیم، ابتدا تابع پتانسیل موثر را در نزدیکی نقاط تعادل (نقاط

لاگرانژ) پیدا می‌کنیم: (به اختصار مشتق f نسبت به پارامتر x_i را به صورت $f_{x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}$ می‌نویسیم).

$$\begin{aligned} \Phi_{eff}(x, y) = & \Phi_{eff}(x_L, y_L) + \Phi_{effx}(x_L, y_L)(x - x_L) + \Phi_{effy}(x_L, y_L)(y - y_L) + \\ & \frac{1}{2} \left[\Phi_{effxx}(x_L, y_L)(x - x_L)^2 + 2\Phi_{effxy}(x_L, y_L)(x - x_L)(y - y_L) + \Phi_{effyy}(x_L, y_L)(y - y_L)^2 \right] \\ & + \dots \end{aligned}$$

با توجه به تعریف نقاط لاگرانژ داریم:

$$\vec{\nabla} \Phi_{eff}(x_L, y_L) = \cdot$$

در صورتی که محورهای تقارن پتانسیل بر محورهای مختصات منطبق باشند، با توجه به تعریف نقاط لاگرانژ (نقطاتی که نیروی وارد بر آنها درد دستگاه لخت برابر ۰ است). در مختصات آنها یا x_L برابر با ۰ است یا y_L یا هر دو، پس به طور مثال نقطه لاگرانژی ای را در نظر بگیرید که روی محور x واقع شده ($y_L = 0$)، ستاره ای در نزدیکی این نقطه روی محور x قرار دارد، مستقل از آنکه در کجای محور است، بنا بر تقارن باید نیرویی که در راستای y احساس می‌کند برابر ۰ باشد:

$$\frac{\partial \Phi_{eff}}{\partial y} = \Phi_{effxy}(x_L, y_L)(x - x_L) + \Phi_{effy}(x_L, y_L) = \cdot$$

پس $\Phi_{effxy}(x_L, y_L)$ باید برابر ۰ باشد. در نتیجه خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \Phi_{eff}(x, y) = & \Phi_{eff}(x_L, y_L) + \frac{1}{2} \left[\Phi_{effxx}(x_L, y_L)(x - x_L)^2 + \Phi_{effyy}(x_L, y_L)(y - y_L)^2 \right] \\ \Rightarrow \vec{\nabla} \Phi_{eff} = & \Phi_{effxx}(x_L, y_L)(x - x_L)\hat{x} + \Phi_{effyy}(x_L, y_L)(y - y_L)\hat{y} \end{aligned}$$

از رابطه شتاب داریم:

$$\ddot{x}\hat{x} + \ddot{y}\hat{y} = -\vec{\nabla} \Phi_{eff} - 2\vec{\Omega}_b \times \vec{v}$$

$$\vec{v} = \dot{x}\hat{x} + \dot{y}\hat{y} \Rightarrow \vec{\Omega}_b \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & 0 & \vec{\Omega}_b \\ \dot{x} & \dot{y} & 0 \end{vmatrix} = \Omega_b(-\dot{y}\hat{x} + \dot{x}\hat{y})$$

اکنون شتاب را در دو راستا تجزیه می‌کنیم:

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\Phi_{effxx-L}(x - x_L) + 2\Omega_b \dot{y} \\ \ddot{y} = -\Phi_{effyy-L}(y - y_L) - 2\Omega_b \dot{x} \end{cases}$$

برای کوتاه نویسی $\xi \equiv x - x_L$ و $\eta \equiv y - y_L$ را تعریف می‌کنیم و در معادلات جاگذاری می‌کنیم:

با توجه به تابع پتانسیل مشتقات مرتبه دوم را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \dot{x} = \dot{\xi}, \dot{y} = \dot{\eta} & \Rightarrow \ddot{x} = \ddot{\xi}, \ddot{y} = \ddot{\eta} \\ \Rightarrow \begin{cases} \ddot{\xi} + \Phi_{effxx-L}\xi - 2\Omega_b \dot{\eta} = \cdot \\ \ddot{\eta} + \Phi_{effyy-L}\eta + 2\Omega_b \dot{\xi} = \cdot \end{cases} \end{aligned}$$

اکنون به یک دستگاه معادله دیفرانسیل رسیده ایم که قصد داریم آن را حل کنیم، هر یک از این معادلات یک معادله دیفرانسیل همگن خطی درجه دوم با ضرایب ثابت است. برای حل این معادلات دیفرانسیل یک جواب به فرم نمایی پیشنهاد می‌دهیم و با جاگذاری در معادلات ثوابت آن را بدست می‌آوریم.

$$\xi = X e^{\lambda t}, \eta = Y e^{\mu t} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\xi} = X \lambda e^{\lambda t} \\ \dot{\eta} = Y \mu e^{\mu t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\xi} = X \lambda e^{\lambda t} \\ \dot{\eta} = Y \mu e^{\mu t} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X \lambda e^{\lambda t} + \Phi_{eff_{xx-L}} X e^{\lambda t} - 2\Omega_b Y \mu e^{\mu t} = 0 \\ 2\Omega_b \lambda X e^{\lambda t} + Y \mu e^{\mu t} + \Phi_{eff_{yy-L}} Y e^{\mu t} = 0 \end{cases}$$

اگر λ را برابر μ بگذاریم، می‌توانیم از $e^{\lambda t}$ و $e^{\mu t}$ فاکتور بگیریم و به یک دستگاه معادله برای ضرایب برسیم:

$$\Rightarrow \begin{cases} (\lambda^2 + \Phi_{eff_{xx-L}})X + (-2\Omega_b \lambda)Y = 0 \\ (2\Omega_b \lambda)X + (\lambda^2 + \Phi_{eff_{yy-L}})Y = 0 \end{cases}$$

دو معادله دو مجهول بالا را به فرم ماتریس می‌نویسیم:

$$\begin{bmatrix} \lambda^2 + \Phi_{eff_{xx-L}} & -2\Omega_b \lambda \\ 2\Omega_b \lambda & \lambda^2 + \Phi_{eff_{yy-L}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

از آنجا که X و Y نباید جواب ثابتی داشته باشند و باید کاملاً به شرایط اولیه مسئله وابسته باشند پس دستگاه معادله بالا نباید جواب داشته باشد، این دستگاه معادله تنها در صورتی جواب ندارد که دترمینان ماتریس ضرایب برابر صفر باشد.

$$C \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow C^{-1} C \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = C^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{C^{-1}C=I} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = C^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C^{-1} = \frac{1}{\det(C)} \begin{bmatrix} \lambda^2 + \Phi_{eff_{yy-L}} & 2\Omega_b \lambda \\ -2\Omega_b \lambda & \lambda^2 + \Phi_{eff_{xx-L}} \end{bmatrix}$$

$$\det(C) = (\lambda^2 + \Phi_{eff_{yy-L}})(\lambda^2 + \Phi_{eff_{xx-L}}) - (2\Omega_b \lambda)(-2\Omega_b \lambda) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^4 + (\Phi_{eff_{yy-L}} + \Phi_{eff_{xx-L}} + 4\Omega_b^2) \lambda^2 + \Phi_{eff_{xx-L}} \Phi_{eff_{yy-L}} = 0$$

از معادله بالا می‌توان جواب‌هایی برای λ بدست آورد، هر یک از این λ ها یک جواب خصوصی را توصیف می‌کند، بنا بر اصل

بر هم نهد معادلات دیفرانسیل، جواب عمومی معادله ترکیب خطی جواب‌های خصوصی آن است. در صورت آنکه معادله بالا را به یک معادله درجه دوم تبدیل کنیم، اگر دلتای آن معادله بزرگتر از صفر باشد، آنگاه λ^2 حقیقی خواهد بود، اگر منفی باشد، پایداری نقاط لاگرانژی را نتیجه می‌دهد چرا که می‌توانیم با استفاده از فرمول اولر (برای اطلاعات بیشتر [اینجا](#) کلیک کنید) آن را به فرم سینوس یا کسینوس تبدیل کنیم؛ اما اگر دلتای معادله درجه دوم ذکر شده منفی باشد، آنگاه λ^2 یک جز حقیقی و یک جز موهومی خواهد داشت، مجدداً با استفاده از فرمول اولر می‌توان آن را به فرم سینوسی یا کسینوسی تبدیل کرد که دامنه آن به صورت نمایی افزایش خواهد یافت، در این صورت نیز اختلال ناپایدار خواهد بود، پس تنها حالتی که پایداری را نتیجه می‌دهد، منفی و حقیقی بودن λ^2 است.

اگر معادله بالا را بدین صورت بنویسیم:

$$\begin{cases} \lambda^r \equiv x \\ \Phi_{effyy-L} + \Phi_{effxx-L} + \epsilon\Omega_b^r \equiv b \Rightarrow x^r + bx + c = \cdot \Rightarrow \\ \Phi_{effxx-L}\Phi_{effyy-L} \equiv c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^r - \epsilon c}}{2} \\ x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^r - \epsilon c}}{2} \end{cases}$$

برای آنکه جواب معادله بالا حقیقی باشد:

$$b^r - \epsilon c > \cdot \Rightarrow (\Phi_{effyy-L} + \Phi_{effxx-L} + \epsilon\Omega_b^r)^r > \epsilon\Phi_{effxx-L}\Phi_{effyy-L}$$

برای آنکه هر دو ریشه‌های معادله منفی باشند:

$$x_1 x_2 = c > \cdot \Rightarrow \Phi_{effxx-L}\Phi_{effyy-L} > \cdot$$

$$x_1 + x_2 < \cdot \Rightarrow \Phi_{effyy-L} + \Phi_{effxx-L} + \epsilon\Omega_b^r > \cdot$$

بدین صورت سه شرط برای مشتقات پتانسیل بدست آوردیم که برای پایداری تعادل نقاط لازم و کافی هستند:

$$\begin{cases} (\Phi_{effyy-L} + \Phi_{effxx-L} + \epsilon\Omega_b^r)^r > \epsilon\Phi_{effxx-L}\Phi_{effyy-L} \\ \Phi_{effxx-L}\Phi_{effyy-L} > \cdot \\ \Phi_{effyy-L} + \Phi_{effxx-L} + \epsilon\Omega_b^r > \cdot \end{cases}$$

مثال دهم: برای پتانسیل مثال نهم و به ازای $q = 1$ ، پایداری ۵ نقطه لاگرانژی را بررسی کنید. در صورت پایداری این نقاط، رابطه $\xi(t)$ و $\eta(t)$ را بدست آورید.



اکنون قصد داریم تا پتانسیل‌های چرخانی را بررسی کنیم که دچار ناهمسانگردی ضعیفی می‌شوند به صورتی که تاثیری اختلالی بر روی حرکت ستارگان تحت پتانسیل متقارن می‌گذارند. بدین منظور می‌توان پتانسیل کلهکشان را به صورت دو جمله مجزا مدل کرد، یکی جمله متقارن که تابع زاویه سمتی ϕ نیست (یادآوری: همچنان پتانسیل در دستگاه چرخان نوشته می‌شود و ϕ زاویه سمتی در دستگاه چرخان می‌باشد)، و یک جمله که اختلال ضعیف ناهمسانگرد را توصیف می‌کند.

$$\Phi(R, \phi) = \Phi_0(R) + \Phi_1(R, \phi)$$

که جمله ناهمسانگرد نسبت به جمله همسانگرد بسیار کوچک تر است به صورتی که تاثیر اختلالی روی حرکت ستاره تحت پتانسیل همسانگرد داشته باشد.

به منظور بررسی حرکت ستارگان تحت تاثیر این پتانسیل، بیا باید معادله شتاب را در دستگاه استوانه ای بنویسیم: (از آنجا که ستارگان دیسک مد نظر ماست، مولفه Z را وارد معادلات نمی‌کنیم.)

$$\vec{a} = (\ddot{R} - R\dot{\phi}^2)\hat{R} + (R\ddot{\phi} + 2\dot{R}\dot{\phi})\hat{\phi}$$

پیش تر معادله شتاب در دستگاه ناخست را نوشتیم و پتانسیل موثر را تعریف کردیم:

$$\vec{a} = -\vec{\nabla}\Phi_{eff} - \dot{\Omega}_b \times \vec{v} = -\vec{\nabla}\Phi + R\dot{\Omega}_b\hat{R} - \dot{\Omega}_b \begin{vmatrix} \hat{R} & \hat{\phi} & \hat{z} \\ \cdot & \cdot & \Omega_b \\ \dot{R} & R\dot{\phi} & \cdot \end{vmatrix}$$

$$\vec{\nabla}\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial R}\hat{R} + \frac{1}{R}\frac{\partial\Phi}{\partial\phi}\hat{\phi}, \begin{vmatrix} \hat{R} & \hat{\phi} & \hat{z} \\ \cdot & \cdot & \Omega_b \\ \dot{R} & R\dot{\phi} & \cdot \end{vmatrix} = -R\dot{\Omega}_b\dot{\phi}\hat{R} + \dot{R}\dot{\Omega}_b\hat{\phi}$$

$$\Rightarrow \vec{a} = \left(-\frac{\partial\Phi}{\partial R} + R\dot{\Omega}_b + 2R\dot{\Omega}_b\dot{\phi}\right)\hat{R} + \left(-\frac{1}{R}\frac{\partial\Phi}{\partial\phi} - \dot{R}\dot{\Omega}_b\right)\hat{\phi}$$

اکنون معادله شتاب را در دو راستا می‌نویسیم و تجزیه می‌کنیم:

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{R} - R\dot{\phi}^2 = -\frac{\partial\Phi}{\partial R} + R\dot{\Omega}_b + 2R\dot{\Omega}_b\dot{\phi} \Rightarrow \ddot{R} = R(\dot{\phi} + \Omega_b)^2 - \frac{\partial\Phi}{\partial R} \xrightarrow{\Omega_b \equiv \dot{\phi} + \Omega_b} \ddot{R} = R\dot{\Omega}_b^2 - \frac{\partial\Phi}{\partial R} \\ R\ddot{\phi} + 2\dot{R}\dot{\phi} = -\frac{1}{R}\frac{\partial\Phi}{\partial\phi} - \dot{R}\dot{\Omega}_b \Rightarrow \frac{d}{dt}(R^2(\dot{\phi} + \Omega_b)) = -\frac{\partial\Phi}{\partial\phi} \end{cases}$$

ابتدا حرکت یک ستاره که تحت تاثیر جمله همسانگرد روی مدار دایروی گردش می‌کند را بررسی می‌کنیم:

$$\Phi = \Phi_0(R) \Rightarrow \frac{\partial\Phi}{\partial\phi} = \cdot \xrightarrow{\text{برای نقطه تعادل}} R^2(\dot{\phi} + \Omega_b) = L_z = \text{constant}$$

$$R = R_0 \Rightarrow \ddot{R} = \cdot \Rightarrow \left(\frac{\partial\Phi}{\partial R}\right)_{R_0} = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial R}\right)_{R_0} = R_0\dot{\Omega}_b^2 \Rightarrow \dot{\phi} = \sqrt{\frac{1}{R_0}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial R}\right)_{R_0}} - \Omega_b$$

$$\xrightarrow{\phi(t=0)=\cdot} \phi(t) = \dot{\phi} \cdot t = (\Omega_b - \Omega_b)t$$

حالا که معادله حرکت برای نقطه تعادل را بدست آوردیم، جمله اختلالی پتانسیل را اضافه می‌کنیم، از آنجا که $\left| \frac{\phi_1}{\phi} \right| \ll 1$ معادله حرکت را بدین شکل می‌توان تغییر داد:

$$R(t) = R. + R_1(t), \phi(t) = \phi.(t) + \phi_1(t)$$

که $R.$ و $\phi.$ جملات مرتبه صفرم، R_1 و ϕ_1 جملات مرتبه اول هستند. یعنی $R_1 \ll R.$ و $\phi_1 \ll \phi.$ اکنون معادلات بالا را در معادلات شتاب جاگذاری می‌کنیم، ابتدا راستای شعاعی:

$$\ddot{R} = \frac{d^2}{dt^2}(R. + R_1) = \ddot{R}_1 = R\Omega^2 - \frac{\partial \Phi}{\partial R}$$

$$\Omega = \dot{\phi} - \Omega_b = \dot{\phi}. - \Omega_b + \dot{\phi}_1 = \Omega. + \dot{\phi}_1$$

از طرفی مشتق پتانسیل را حول نقطه تعادل تا مرتبه اول بسط می‌دهیم:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial R} \approx \left(\frac{\partial \Phi}{\partial R} \right)_{R.} + \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2} \right)_{R.} (R - R.)$$

$$\begin{aligned} \Phi = \Phi.(R) + \Phi_1(R, \phi) &\Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial R} \right)_{R.} = \left(\frac{\partial \Phi.}{\partial R} \right)_{R.} + \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial R} \right)_{R.} \\ \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2} \right)_{R.} = \left(\frac{\partial^2 \Phi.}{\partial R^2} \right)_{R.} + \left(\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial R^2} \right)_{R.} \end{cases} \\ \Rightarrow \frac{\partial \Phi}{\partial R} &\approx \left(\frac{\partial \Phi.}{\partial R} \right)_{R.} + \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial R} \right)_{R.} + \left(\left(\frac{\partial^2 \Phi.}{\partial R^2} \right)_{R.} + \left(\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial R^2} \right)_{R.} \right) R_1 \end{aligned}$$

از آنجا که Φ_1 و R_1 مرتبه اول هستند، هنگامی که $\left(\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial R^2} \right)_{R.}$ در R_1 ضرب شود جمله مرتبه دو ظاهر می‌شود که برابر صفر است.

$$\Rightarrow \frac{\partial \Phi}{\partial R} \approx \left(\frac{\partial \Phi.}{\partial R} \right)_{R.} + \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial R} \right)_{R.} + \left(\frac{\partial^2 \Phi.}{\partial R^2} \right)_{R.} R_1$$

نتایج بدست آمده را در معادله شتاب مجدداً جاگذاری می‌کنیم:

$$\ddot{R}_1 = R.\Omega^2 \left(1 + \frac{R_1}{R.} \right) \left(1 + \frac{\dot{\phi}_1}{\Omega.} \right)^2 - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial R} \right)_{R.} - \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2} \right)_{R.} (R - R.)$$

$$\left(1 + \frac{\dot{\phi}_1}{\Omega.} \right)^2 \approx 1 + 2 \frac{\dot{\phi}_1}{\Omega.} \Rightarrow \left(1 + \frac{R_1}{R.} \right) \left(1 + \frac{\dot{\phi}_1}{\Omega.} \right)^2 \approx 1 + \frac{R_1}{R.} + 2 \frac{\dot{\phi}_1}{\Omega.} + 2 \frac{R_1 \dot{\phi}_1}{R. \Omega.}$$

جمله رنگی در معادله بالا مرتبه دوم است، بنابراین آن را برابر صفر می‌گذاریم:

$$R \cdot \Omega^r \left(1 + \frac{R_1}{R} \right) \left(1 + \frac{\dot{\phi}_1}{\Omega} \right)^r \approx R \cdot \Omega^r + R_1 \Omega^r + r R \cdot \Omega \cdot \dot{\phi}_1$$

$$\Rightarrow \ddot{R}_1 = R \cdot \Omega^r - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial R} \right)_{R_1} + R_1 \Omega^r + r R \cdot \Omega \cdot \dot{\phi}_1 - \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2} \right)_{R_1} R_1 - \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial R} \right)_{R_1}$$

از معادلاتی که برای نقاط تعادل در صفحه قبل بدست آوردیم می‌دانیم دو جمله اول معادله بالا برابر با صفر خواهد بود:

$$\Rightarrow \ddot{R}_1 = \left(- \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2} \right)_{R_1} + \Omega^r \right) R_1 + r R \cdot \Omega \cdot \dot{\phi}_1 - \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial R} \right)_{R_1}$$

حالا به شتاب در راستای ϕ می‌پردازیم:

$$\frac{d}{dt} (R^r (\dot{\phi} + \Omega_b)) = r \dot{R} R (\dot{\phi} + \Omega_b) + R^r \ddot{\phi} = - \frac{\partial \Phi}{\partial \phi}$$

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 \Rightarrow \dot{\phi} = \dot{\phi}_1 + \dot{\phi}_2 \Rightarrow \ddot{\phi} = \ddot{\phi}_1$$

$$\Rightarrow r R \cdot \dot{R}_1 \cdot \Omega \cdot \left(1 + \frac{R_1}{R} \right) \left(1 + \frac{\dot{\phi}_1}{\Omega} \right) + R^r \ddot{\phi}_1 \left(1 + \frac{R_1}{R} \right) = - \frac{\partial (\Phi_1(R) + \Phi_2(R, \phi))}{\partial \phi} = - \frac{\partial \Phi_1}{\partial \phi}$$

تک تک جملات معادله بالا را بررسی و ساده می‌کنیم؛ ابتدا جمله اول:

$$r R \cdot \dot{R}_1 \cdot \Omega \cdot \left(1 + \frac{R_1}{R} \right) \left(1 + \frac{\dot{\phi}_1}{\Omega} \right) = r \dot{R}_1 \cdot \Omega \cdot \left(\dot{R}_1 + \dot{R}_1 \frac{R_1}{R} + \dot{R}_1 \frac{\dot{\phi}_1}{\Omega} + \dot{R}_1 \frac{R_1 \dot{\phi}_1}{R \cdot \Omega} \right)$$

جملات رنگی در معادله بالا مرتبه دوم و مرتبه سوم هستند پس برابر صفر خواهند بود:

$$r \dot{R}_1 R \Omega \approx r R \cdot \Omega \cdot \dot{R}_1$$

حالا جمله دوم:

$$R^r \ddot{\phi}_1 \left(1 + \frac{R_1}{R} \right) = R^r \ddot{\phi}_1 + R \cdot R_1 \ddot{\phi}_1$$

جمله رنگی در معادله بالا مرتبه دوم است پس برابر صفر خواهد بود:

$$R^r \ddot{\phi} \approx R^r \ddot{\phi}_1$$

اکنون نوبت به جمله سمت راست معادله رسیده، این عبارت را حول R و ϕ بسط می‌دهیم:

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial \phi} \approx \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \phi} \right)_{R, \phi} + \left(\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \phi^2} \right)_{R, \phi} (\phi - \phi_1) + \left(\frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \phi} \right) \right)_{R, \phi} (R - R_1)$$

جملات رنگی در معادله صفحه قبل، مرتبه دوم هستند، پس تقریباً برابر صفر خواهند بود:

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial \phi} \approx \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \phi} \right)_{R.,\phi.}$$

ساده‌سازی‌های انجام شده را در معادله شتاب اعمال می‌کنیم:

$${}^2R.\Omega. \dot{R}_1 + R_1^2 \ddot{\phi}_1 = - \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \phi} \right)_{R.,\phi.} \Rightarrow \ddot{\phi}_1 + {}^2R.\Omega. \frac{\dot{R}_1}{R_1} = - \frac{1}{R_1^2} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \phi} \right)_{R.,\phi.}$$

اکنون که هر دو راستا را بررسی کردیم، معادلات بدست آمده را بازنویسی می‌کنیم:

$$\begin{cases} \ddot{R}_1 = \left(- \left(\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial R^2} \right)_{R.} + \Omega_1^2 \right) R_1 + {}^2R.\Omega. \dot{\phi}_1 - \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial R} \right)_{R.} \\ \ddot{\phi}_1 + {}^2R.\Omega. \frac{\dot{R}_1}{R_1} = - \frac{1}{R_1^2} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \phi} \right)_{R.,\phi.} \end{cases}$$

با داشتن فرم جمله ناهمسانگرد پتانسیل Φ_1 ، می‌توانیم این معادلات را حل کرده و جملات اختلالی را به صورت تابعی از زمان پیدا کنیم.

به عنوان مثال می‌توانیم فرم مثلثاتی زیر را برای جمله ناهمسانگرد پیشنهاد بدهیم که به عنوان یک مدل سازی برای بازو‌های کپکشان نیز می‌تواند در نظر گرفته شود:

$$\Phi_1 = \Phi_b(R) \cos(m\phi)$$

مشتقات این تابع را نسبت به R و ϕ محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial \phi} = -m\Phi_b \sin(m\phi) \xrightarrow{R=R.,\phi=\phi.} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \phi} \right)_{R.,\phi.} = -m\Phi_b(R.) \sin(m(\Omega. - \Omega_b)t)$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial R} = \frac{\partial \Phi_b}{\partial R} \cos(m\phi)$$

از آنجا که Φ_b مرتبه اول است، پس جمله رنگی مرتبه دوم و برابر صفر خواهد بود:

$$\cos m\phi \approx \cos m\phi. - m \sin(m\phi.) \phi_1$$

$$\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial R} \right)_{R.} = \left(\frac{\partial \Phi_b}{\partial R} \right)_{R.} \cos(m\phi) \approx \left(\frac{\partial \Phi_b}{\partial R} \right)_{R.} \cos(m\phi.) - m \left(\frac{\partial \Phi_b}{\partial R} \right)_{R.} \sin(m\phi.) \phi_1$$

حالا که مشتقاتی که نیاز داشتیم را بدست آوردیم، آن‌ها را در معادلات شتاب که پیش‌تر بدست آوردیم جاگذاری می‌کنیم، ابتدا راستای ϕ :

$$\ddot{\phi}_1 + {}^2R.\Omega. \frac{\dot{R}_1}{R_1} = \frac{m\Phi_b(R.)}{R_1^2} \sin(m(\Omega. - \Omega_b)t)$$

$$\ddot{R}_1 = \left(- \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2} \right)_{R_1} + \Omega^2 \right) R_1 + \gamma R_1 \Omega \cdot \dot{\phi}_1 - \left(\frac{\partial \Phi_b}{\partial R} \right)_{R_1} \cos(m(\Omega_1 - \Omega_b)t)$$

در معادله بالا، جمله $\gamma R_1 \Omega \cdot \dot{\phi}_1$ تابعی از زاویه سمتی ϕ است، می‌توان آن را با انتگرال‌گیری از $\dot{\phi}_1$ بدست آورد:

$$\dot{\phi}_1 = \frac{d\phi_1}{dt} = \frac{m\Phi_b(R_1)}{R_1^2} \sin(m(\Omega_1 - \Omega_b)t) - \gamma \Omega_1 \cdot \frac{\dot{R}_1}{R_1}$$

$$\Rightarrow \phi_1 = \int \dot{\phi}_1 dt = \frac{m\Phi_b(R_1)}{R_1^2} \int \sin(m(\Omega_1 - \Omega_b)t) dt - \frac{\gamma \Omega_1}{R_1} \int \dot{R}_1 dt + cte.$$

$$\int \sin(m(\Omega_1 - \Omega_b)t) dt = - \frac{1}{m(\Omega_1 - \Omega_b)} \cos(m(\Omega_1 - \Omega_b)t)$$

$$\int \dot{R}_1 dt = R_1$$

$$\Rightarrow \phi_1(t) = - \frac{\Phi_b(R_1)}{R_1^2(\Omega_1 - \Omega_b)} \cos(m(\Omega_1 - \Omega_b)t) - \frac{\gamma \Omega_1}{R_1} R_1 + C_1$$

بدین ترتیب $\dot{\phi}_1$ را بدست آوردیم، همچنین ثابت انتگرال‌گیری را برابر C_1 قرار دادیم. اکنون نتایج بدست آمده را در جمله

شتاب شعاعی جاگذاری می‌کنیم:

$$\ddot{R}_1 = \left(- \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2} \right)_{R_1} + \Omega^2 \right) R_1 + \gamma R_1 \Omega \cdot \left[- \frac{\Phi_b(R_1)}{R_1^2(\Omega_1 - \Omega_b)} \cos(m(\Omega_1 - \Omega_b)t) - \frac{\gamma \Omega_1}{R_1} R_1 + C_1 \right] - \left(\frac{\partial \Phi_b}{\partial R} \right)_{R_1} \cos(m(\Omega_1 - \Omega_b)t)$$

با ساده‌سازی جملات بالا معادله دیفرانسیل را مرتب‌تر کرده و بازنویسی می‌کنیم:

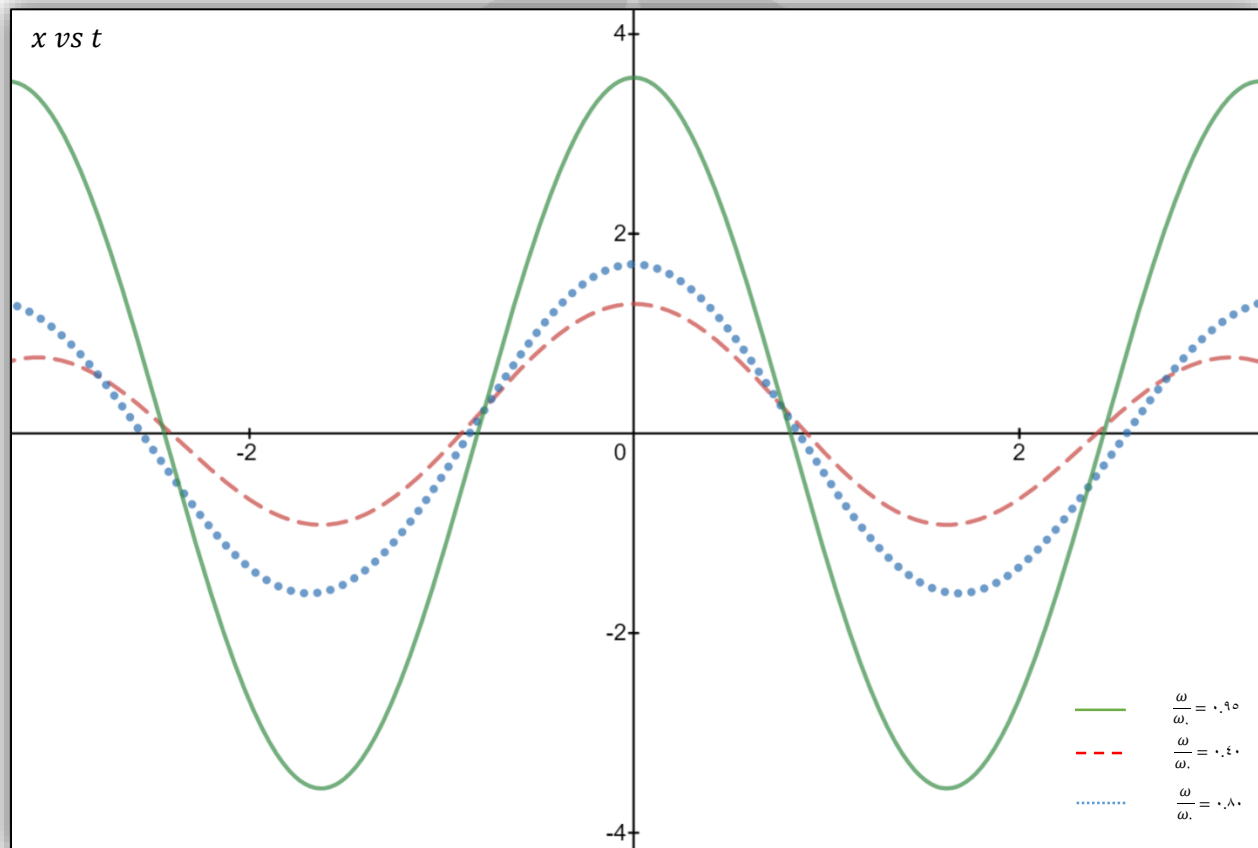
$$\ddot{R}_1 + \left(\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2} \right)_{R_1} + \gamma \Omega^2 \right) R_1 = - \left[\frac{\gamma \Omega_1 \Phi_b(R_1)}{R_1(\Omega_1 - \Omega_b)} + \left(\frac{\partial \Phi_b}{\partial R} \right)_{R_1} \right] \cos(m(\Omega_1 - \Omega_b)t) + \gamma C_1 R_1 \Omega_1$$

پیش از آنکه اقدام به حل این معادله بکنیم، بیایید ابتدا کمی آن را بررسی کنیم؛ اگر فرض کنیم که جمله ناهمسانگرد پتانسیل وجود ندارد، دقیقاً مشابه اختلال‌هایی خواهد بود که پیش‌تر با هم بررسی کرده‌ایم (با این تفاوت که اینجا در دستگاه نالخت معادلات را نوشته‌ایم). اما وقتی جمله ناهمسانگرد را نیز در نظر بگیریم معادله بدست آمده دقیقاً فرم معادله تشدید را خواهد داشت. برای آنکه شهود بهتری نسبت به این معادله داشته باشید، کودکی را فرض کنید که سوار بر تاب، در حال نوسان است. دوست او شروع به هل دادن تاب می‌کند، اگر فرکانس هر بار هل دادن دوستش با فرکانس رفت و آمد تاب یکسان باشد، دامنه نوسان تاب پیوسته افزایش خواهد یافت. در اینجا هم با شرایط نسبتاً مشابهی سر و کار داریم که در ادامه بیش‌تر توضیح خواهیم داد. برای جزئیات حل این معادله دیفرانسیل به پیوست ریاضی اول مراجعه نمایید.

جواب این معادله بدین صورت خواهد بود:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = F \cos \omega t$$

$$\Rightarrow x(t) = X \cos(\omega \cdot t + \psi) + \frac{F}{\omega^2 - \omega^2} \cos \omega t$$



همانطور که پیش تر توضیح دادیم و در نمودار بالا مشاهده می کنید، هرچه فرکانس نوسان ω به فرکانس نیروی خارجی ω نزدیک تر باشد، دامنه نوسان بیشتر خواهد بود. حالا به مسئله اصلی بازگردیم:

$$\ddot{R}_1 + \left(\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2} \right)_{R_1} + \nu \Omega^2 \right) R_1 = - \left[\frac{\nu \Omega \cdot \Phi_b(R_1)}{R_1 (\Omega_1 - \Omega_b)} + \left(\frac{\partial \Phi_b}{\partial R} \right)_{R_1} \right] \cos(m(\Omega_1 - \Omega_b)t) + \nu C_1 R_1 \Omega_1$$

$$\kappa^2 \equiv \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2} \right)_{R_1} + \nu \Omega^2$$

$$\Rightarrow R_1(t) = \chi \cos(\kappa \cdot t + \psi) - \left[\frac{\nu \Omega \cdot \Phi_b(R_1)}{R_1 (\Omega_1 - \Omega_b)} + \left(\frac{\partial \Phi_b}{\partial R} \right)_{R_1} \right] \frac{\cos(m(\Omega_1 - \Omega_b)t)}{\kappa^2 - m^2 (\Omega_1 - \Omega_b)^2} + C$$

اکنون با استفاده از رابطه ای که برای Φ داریم، R_1 را بر حسب آن می نویسیم:

$$R_1(\phi) = \chi \cos\left(\frac{\kappa \cdot \phi}{\Omega_s - \Omega_b} + \psi\right) - \left[\frac{2\Omega_s \Phi_b(R_s)}{R_s(\Omega_s - \Omega_b)} + \left(\frac{\partial \Phi_b}{\partial R}\right)_{R_s} \right] \frac{\cos(m\phi)}{\kappa^2 - m^2(\Omega_s - \Omega_b)^2} + C.$$

معادله بالا به ازای برخی نقاط خاص به بی نهایت میل کرده و دچار ناپیوستگی می شود. در بخش بعد خواهیم دید که این نقاط نقشی اساسی در یکی از نظریه های تشکیل بازو ها و میله های کهکشان بازی می کنند:

- نقاطی که همراه با پتانسیل دوران می کنند (*Co - Rotation*):

$$\Omega_s = \Omega_b$$

هنگامی که Ω_s برای نقطه تعادل به سرعت دوران پتانسیل یعنی Ω_b نزدیک شود، پدیده تشدید رخ خواهد داد و ستارگانی که در این مدارها حرکت می کنند با دامنه زیادی حول نقطه تعادل نوسان خواهند کرد.

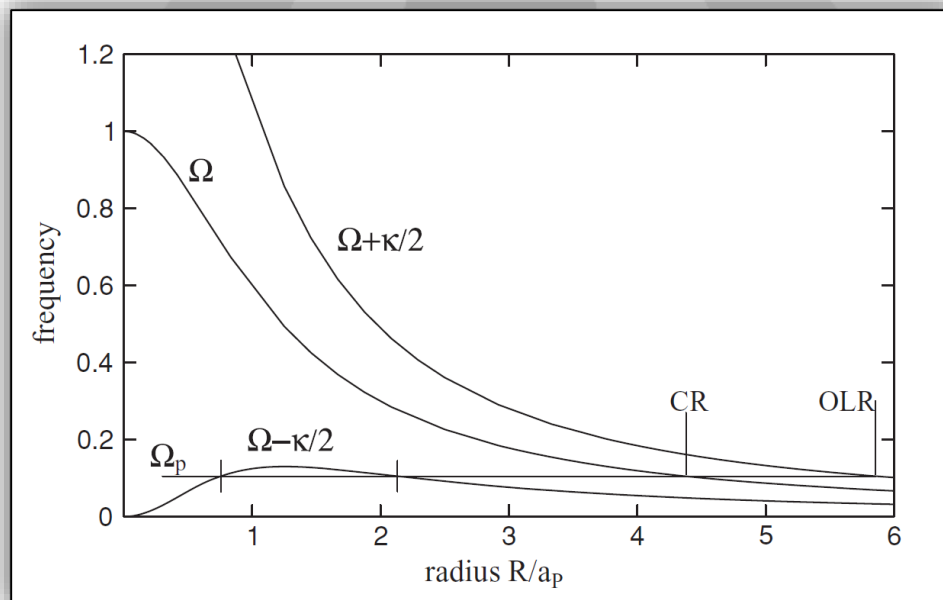
- شعاع های لیند بلد (*Lindblad Radii*):

$$\kappa_s = \pm m(\Omega_s - \Omega_b) \Rightarrow \begin{cases} \Omega_s = \Omega_b + \frac{\kappa_s}{m} \\ \Omega_s = \Omega_b - \frac{\kappa_s}{m} \end{cases}$$

در صورتی که شرط بالا برقرار باشد نیز ستارگان با دامنه زیاد نوسان خواهند کرد، شعاع اول که سرعت زاویه ای دوران بیشتری دارد، شعاع لیند بلد داخلی (*Inner Lindblad Radii*) و شعاع دوم که سرعت زاویه ای دوران کمتر است

شعاع لیند بلد خارجی (*Outer Lindblad Radii*) نام دارند.

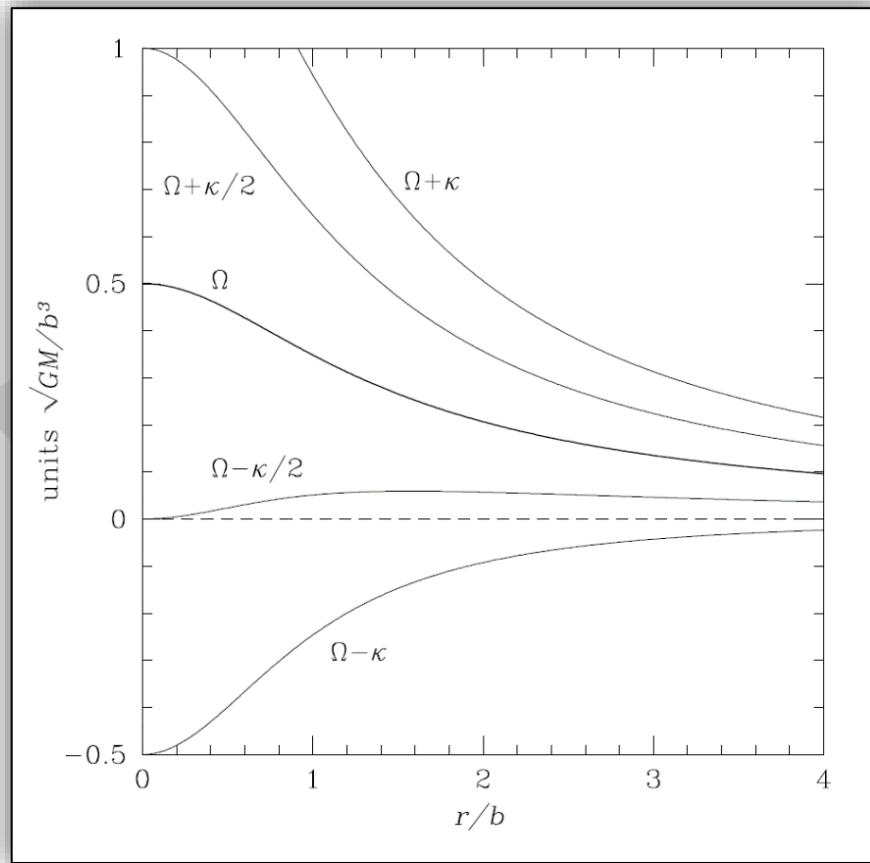
بسته به آنکه تابع پتانسیل چه فرمی داشته باشد و Ω_b چقدر باشد، ممکن است در چند شعاع تشدید رخ دهد یا اصلا تشدید رخ ندهد. در ادامه نمودارهایی مربوط به دو پتانسیل *Plummer* و *Isochrone* به ازای $m = 2$ را مشاهده می کنید.



Plummer model

$$\Phi(R) = -\frac{GM}{\sqrt{R^2 + a_p^2}}$$

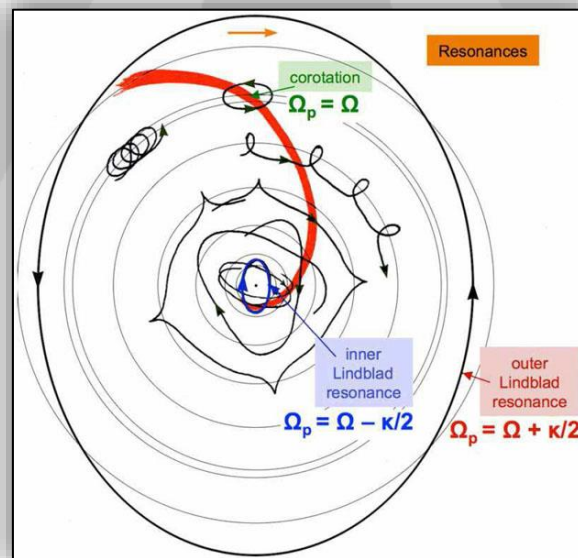
در این نمودار Ω_p همان Ω_b است که پیش تر تعریف کرده ایم.



Isochrone Potential

$$\Phi(r) = \frac{-GM}{b + \sqrt{b^2 + r^2}}$$

برای پتانسیل پلامر همانطور که مشاهده می‌کنید یک Ω_b دلخواه رسم شده که هم شعاع لیندبلد داخلی و خارجی را به وجود می‌آورد، هم شعاع *Co - Rotation*.



شکل گیری بازو های کهکشان

ساختار بازو ها بسیار پیچیده تر از آن است که بتوان تنها یک پدیده را مسئول شکل گیری این ساختار ها دانست. در ادامه تلاش می کنیم تا با چند مدل ساده، وجود این الگو ها را مدل سازی کنیم.

بعضی کهکشان ها علی الخصوص آنهایی که بازو های برجسته دارند ممکن است ساختار مارپیچی خود را هر چند دوره تناوب چرخشی بازسازی کنند. هنگامی که یک ابر گازی اولین ستاره خود را تولید می کند، موج انفجار های ابرنواختری ستارگان کم عمر باعث می شود گاز اطراف فشرده شده و ستاره سازی در این گاز و ابر های گازی آغاز شود. پیش تر دیدیم که چرخش دیفرانسیلی باعث می شود یک ناحیه از کهکشان پس از مدتی پهناور شود (کش بیاید)؛ به همین صورت هنگامی که ستارگان در یک ناحیه متولد می شوند، پس از مدتی تمام گاز مصرف شده و ستارگان داغ نیز محو می شوند و در نهایت کل ناحیه همانند پس زمینه می شود. در این مدل از ستاره زایی باید نرخ تولد ستارگان نه آنقدر زیاد باشد که کل دیسک را مشغول ستاره زایی کند و نه آنقدر کم که پس از مدتی کاملاً از بین برود، این مدل ستاره زایی در کهکشان می تواند شکل گیری بازو های خفیف و محو سیستم هایی مانند $M33$ را توجیه کند، اما نمی تواند شکل گیری کهکشانی مانند $M100$ را توجیه کند.

کهکشان مثلث - $M33$

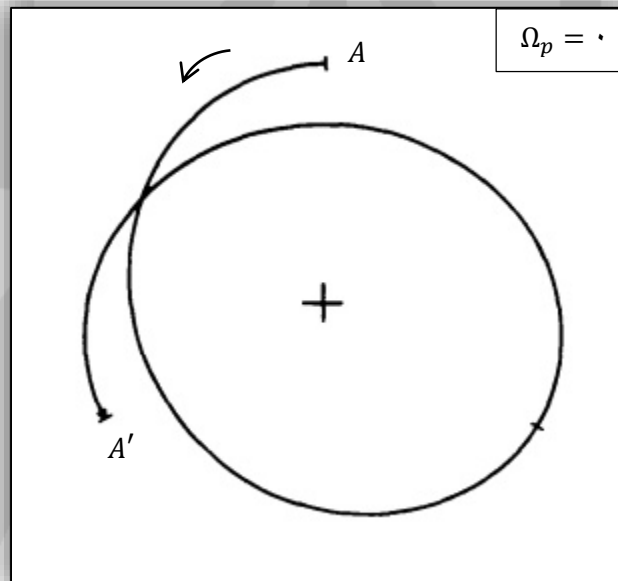

 $M100$

یک نظریه دیگر برای شکل گیری طرح مارپیچی کهکشان ها آن است که ستارگان روی یک ترتیب و الگوی خاص قرار بگیرند؛ به این دسته از مارپیچ ها، مارپیچ های سینماتیکی (*Kinematic Spiral*) می گویند. در صورتی که ستارگان تشکیل دهنده آنها در مدار دایروی نباشند این طرح های مارپیچی پایدارتر خواهند بود. پیش تر دریافتیم که حرکت ستارگان در کهکشان را می توان به وسیله حرکت دایروی نقطه تعادل و حرکت اپیسایکلی ستاره حول نقطه تعادل توصیف کرد. اگر این ستارگان را با ترتیب خاصی کنار هم بچینیم قادر خواهیم بود طرح های مارپیچی را بدست آوریم. در ادامه به بررسی این نوع مارپیچ ها خواهیم پرداخت.

مارپیچ های سینماتیکی

به وجود آمدن مارپیچ های سینماتیکی فرایند های بسیار پیچیده ای هستند، اما ما قصد داریم تا با چند فرض ساده کننده اندکی آن ها را بررسی کنیم. برای داشتن شهود بهتر نسبت به چگونگی تشکیل بازو های مارپیچی سینماتیکی ابتدا باید مسیر حرکت یک ستاره را تحت تاثیر اختلال را بهتر بشناسیم، معادلات حرکت این ستارگان را پیش تر به طور مفصل بررسی کردیم، اکنون قصد داریم کمی از قدرت بی اندازه تخیل بهره ببریم و بیشتر با مسیر این ستارگان آشنا شویم.

مسیر یک ستاره تحت اختلال شعاعی دارای دو فرکانس مختلف است، یکی فرکانس حرکت شعاعی κ و دیگری فرکانس حرکت مماسی (سمتی) Ω . پیش تر توضیح دادیم که تنها به ازای نسبت های خاصی از Ω و κ مسیر حرکت بسته خواهد بود. اکنون خود را تصور کنید که در مرکز یک کهکشان نشسته اید و در حال مشاهده حرکت یک ستاره را طی یک دوره تناوب شعاعی هستید، آنچه مشاهده می کنید به احتمال زیاد همانند شکل زیر خواهد بود:



ستاره از نقطه A شروع به حرکت کرده و پس از یک دوره تناوب شعاعی به نقطه A' رسیده است. اکنون حالت دیگری را در نظر بگیرید، روی مرکز کهکشان بنشینید و با سرعت زاویه ای Ω_p هم جهت با ستاره به دور خود دوران کنید، اکنون آنچه از ستاره مشاهده می کنید به فرکانس شما نیز وابسته است، معادله حرکت ستاره در دستگاه شما به صورت زیر خواهد بود.

معادله حرکت ستاره برحسب زمان به صورت:

$$R(t) = R_g + X \cos(\kappa t + \psi)$$

از آنجا که X بسیار کوچک تر از R_g بوده و مرتبه یک است، باید $\kappa t + \psi$ را تا مرتبه صفرم قرار دهیم؛ همچنین زاویه سمتی ستاره در دستگاه ثابت برابر است با:

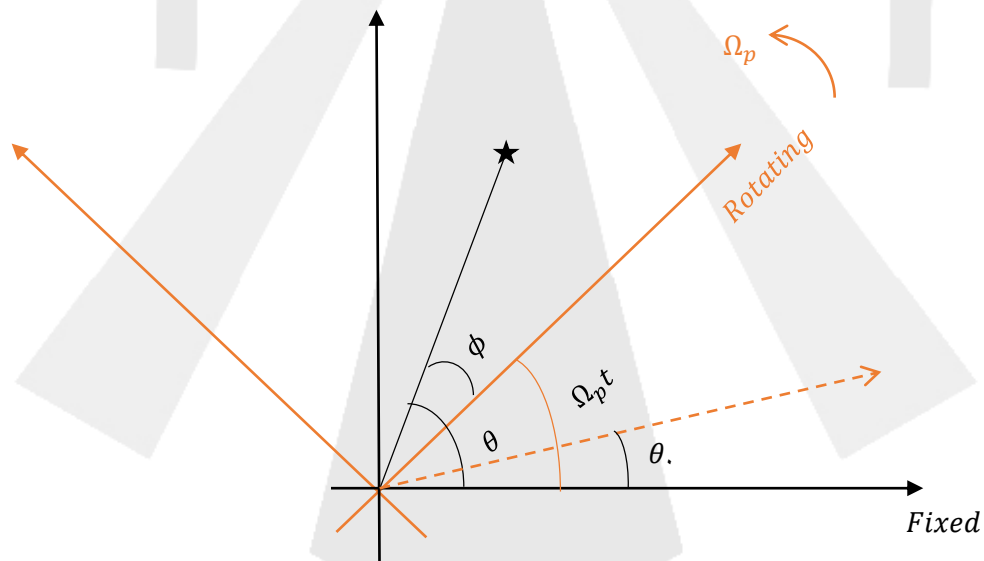
$$\theta(t) = \Omega_g t + \delta\theta(t) + \theta.$$

که $\delta\theta$ مرتبه یک است. اکنون زاویه سمتی را در دستگاه دوار (زاویه ای که شما اندازه می گیرید) بدست می آوریم:

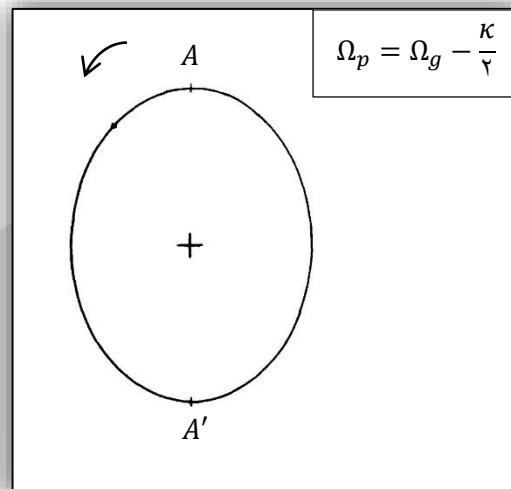
$$\phi(t) = \theta(t) - \Omega_p t \Rightarrow (\Omega_g - \Omega_p)t + \delta\theta(t) + \theta. \Rightarrow t = \frac{\phi(t) - \theta. - \delta\theta(t)}{\Omega_g - \Omega_p}$$

$$R(\phi) = R_g + X \cos\left(\frac{\kappa}{\Omega_g - \Omega_p} \phi + \psi - \frac{\kappa}{\Omega_g - \Omega_p} \theta. - \frac{\kappa}{\Omega_g - \Omega_p} \delta\theta\right)$$

$$R(\phi) \approx R_g + X \cos\left(\frac{\kappa}{\Omega_g - \Omega_p} (\phi - \theta.) + \psi\right)$$

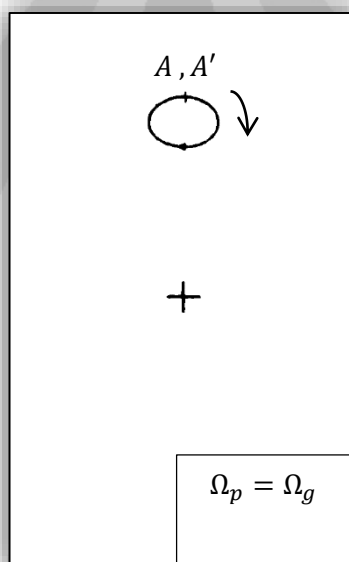


با انتخاب مناسب Ω_p ، مسیر ستاره از دید شما یک مسیر بسته خواهد بود، به طور مثال اگر $\Omega_p = \Omega_g - \frac{\kappa}{\gamma}$ باشد:



$$\Rightarrow R(\phi) \approx R_g + X \cos(\gamma\phi + \psi - \gamma\theta.)$$

در صورتی که شما با فرکانس Ω_g به دور خود بگردید، نقطه تعادل از دید شما ثابت خواهد بود و مسیری که از حرکت ستاره خواهید دید همان حرکت اپیسایکلی است که پیش تر بررسی کردیم:



مسیر هایی که پیش تر مشخص کردیم مربوط به حرکت یک ستاری طی یک دوره تناوب شعاعی بودند، اکنون بی شمار نقطه تعادل را فرض کنید که در فاصله R_g از مرکز روی یک دایره پخش شده اند، هر یک از این نقاط تعادل، ستاره مربوط به خود را دارند که این ستاره حول آن حرکت اپیسایکلی می کند. برای نمونه فاصله ستاره شماره i از مرکز کهکشان به صورت تابعی از زمان برابر است با:

$$R_i(t) = R_g + X \cos(\kappa t + \psi_i)$$

همچنین زاویه سمتی برای این ستاره در دستگاه ناظر(شما که با سرعت Ω_p دوران می کنید) برابر است با:

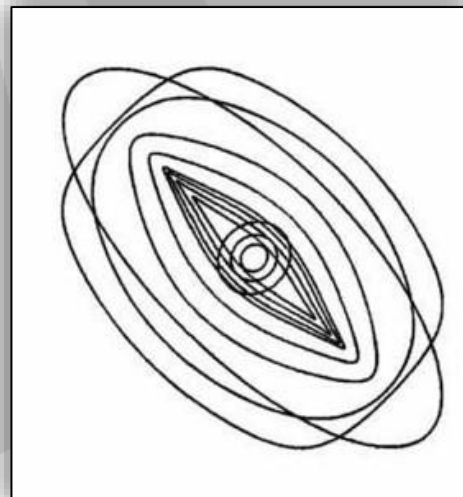
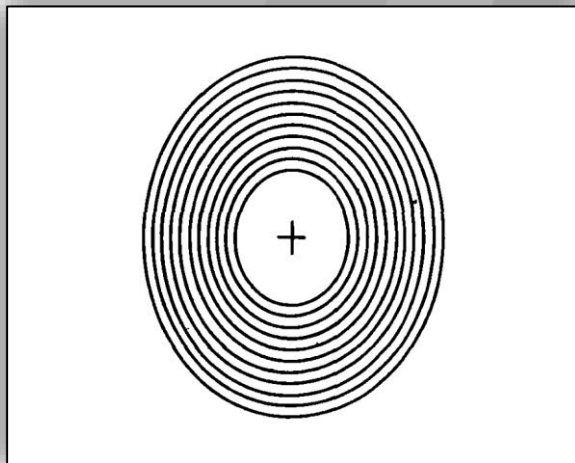
$$\phi_i = (\Omega_g - \Omega_p)t + \delta\theta_i(t) + \theta_{.i}$$

$$\Rightarrow R_i(\phi_i) \approx R_g + X \cos\left(\frac{\kappa}{\Omega_g - \Omega_p}(\phi_i - \theta_{.i}) + \psi_i\right)$$

اگر فرض کنیم $\Omega_p = \Omega_g - \frac{\kappa}{\gamma}$:

$$R_i(\phi_i) = R_g + X \cos(\gamma\phi_i + \psi_i - \gamma\theta_{.i})$$

در صورتی که برای تمام این ستارگان $\psi_i = \gamma\theta_{.i}$ باشد، در این صورت مسیر حرکت تمام آنها از دید شما یکسان بوده و روی یک بیضی واحد قرار خواهند داشت و روی آن دوران خواهند کرد. اگر این شرط را برای ستارگان R_g های مختلف اعمال کنیم و فرض کنیم $\Omega_g - \frac{\kappa}{\gamma}$ در R_g های مختلف ثابت باشد، شکل حاصل از تجمع این ستارگان به صورت زیر خواهد بود(شکل سمت چپ). همچنین شکل سمت راست قرار گیری کنار هم ستارگان روی مدارشان برای تشکیل میله را نشان می دهد.



پس دیدیم که با ثابت بودن $\Omega_g - \frac{\kappa}{\rho}$ و چیدمان ستاره ها به صورتی که برای هر ستاره $\psi_i = \nu \theta_i$ باشد، می توان الگوهایی به وجود آورد که در کهکشان های میله دار مشاهده می شوند. پرتیل لیندبلد (*Bertil Lindblad*) منجم سوئدی اولین نفری بود که به این مسئله اشاره کرد.

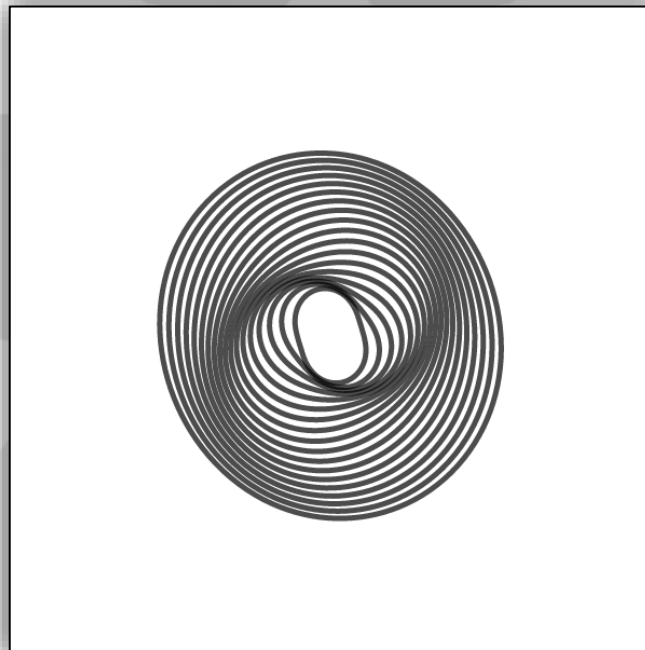
با ایجاد تغییرات اندک در این ایده می توانیم الگو های مارپیچ نیز تولید کنیم؛ در حالت بالا با فرض $\psi_i = \frac{\kappa}{\Omega_g - \Omega_p} \theta_i$ ، محور اصلی بیضی ها را با یکدیگر هم راستا کردیم، هم اکنون قصد داریم تا بجای هم راستا کردن، آنها را بچرخانیم، بدین صورت که:

$$\psi_i = \nu \theta_i - \alpha \log R_g$$

که α یک مقدار ثابت است. در این صورت معادله هر یک از این بیضی ها در دستگاه دوار به صورت زیر خواهد بود:

$$\Rightarrow R(\phi) = R_g + X \cos(\nu \phi - \alpha \log R_g)$$

از تجمع R_g های مختلف الگو هایی مانند شکل زیر حاصل خواهند شد:



$$10 \leq R_g \leq 44, X = 2, \alpha = 10$$

می توانیم با تعمیم آنچه بالاتر انجام دادیم طرح هایی مارپیچ با چندین بازو و الگو های متفاوت بدست آوریم. اگر معادله هر یک از این بیضی ها را در حالتی اندک کلی تر بنویسیم:

$$R(\phi) = R_g + X \cos(m[\phi + f(R_g, t)])$$

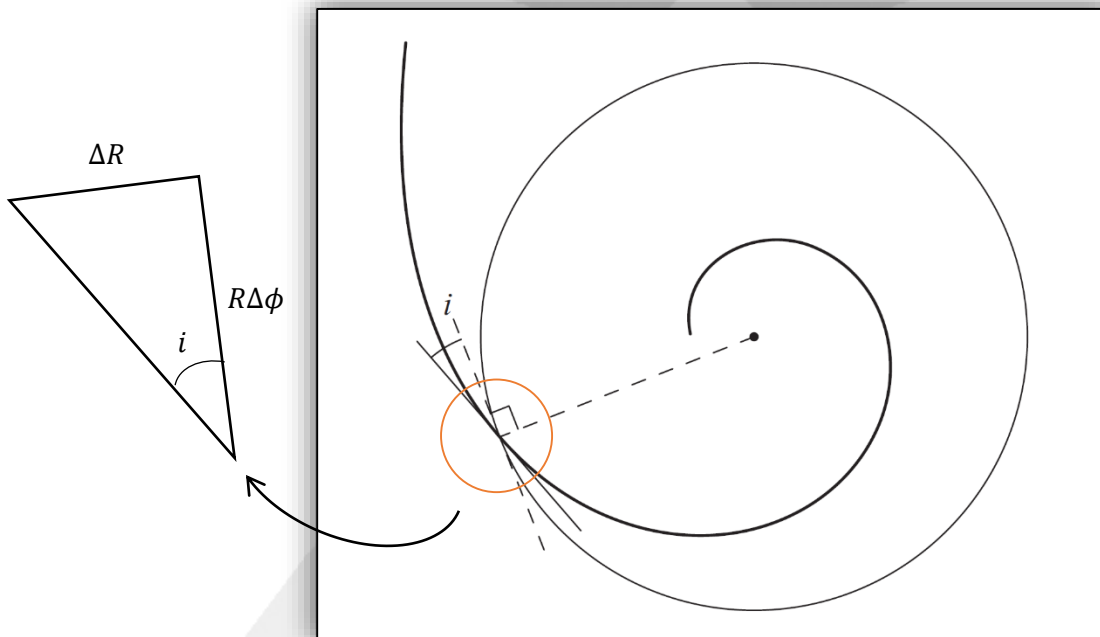
جهت نیم قطر اطول این بیضی :

$$R = R_{max} : \cos m[\phi_{axis} + f(R_g, t)] = 1 \Rightarrow m[\phi_{axis} + f(R_g, t)] = 2\pi n, n \in \{1, 2, \dots, m\}$$

$$\phi_{axis} = 2\pi \frac{n}{m} - f(R_g, t) *$$

همانطور که در رابطه بالا مشاهده می کنید، m جواب متفاوت برای ϕ_{axis} وجود دارد که هر یک به یکی از بازو ها اشاره دارند. رابطه * را نه فقط برای مارپیچ های سینماتیکی، بلکه برای همه الگو های مارپیچی تعریف می کنیم و بدین وسیله الگو های آنها را توصیف می کنیم. پیش از آنکه به بحث مارپیچ های سینماتیکی باز گردیم اجازه دهید تا یک پارامتر مهم برای الگو های مارپیچی تعریف کنیم.

با توجه به رابطه ای که پیش تر بدست آوردیم، ϕ_{axis} تابعی از R_g و زمان است؛ اگر در یک زمان دلخواه یکی از بازو ها را همانند شکل زیر رسم کنیم، می توان زاویه ای به نام "Pitch angle" یا زاویه گام تعریف کرد:

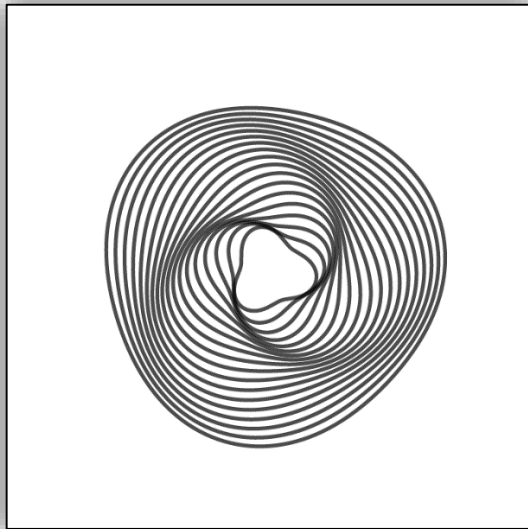


$$\cot i = \left| R \frac{\Delta\phi}{\Delta R} \right|$$

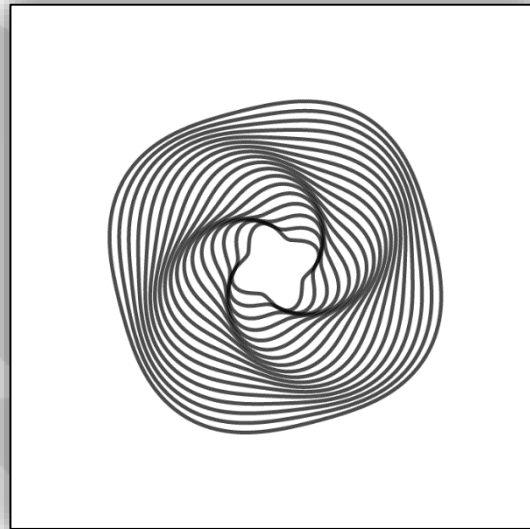
$$\phi = 2\pi \frac{n}{m} - f(R, t) \Rightarrow \cot i = \left| R \frac{\partial f}{\partial R} \right|$$

مثال یازدهم : برای مارپیچ لگاریتمی، $f(R) = -\frac{\alpha}{m} \log R + cte$ ، نشان دهید زاویه گام ثابت است و آن را بدست آورید.

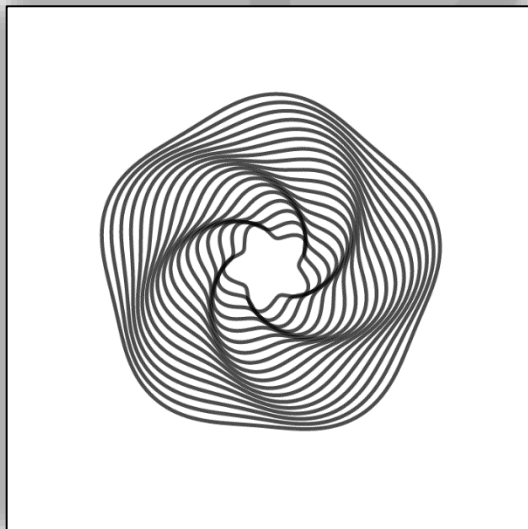
اکنون به بحث مارپیچ های سینماتیکی بر میگردیم. دریافتیم که m تعداد بازو های کهکشان را توصیف می کند. الگو تشکیل شده توسط مارپیچ لگاریتمی به ازای چند m مختلف را در ادامه مشاهده می کنید:



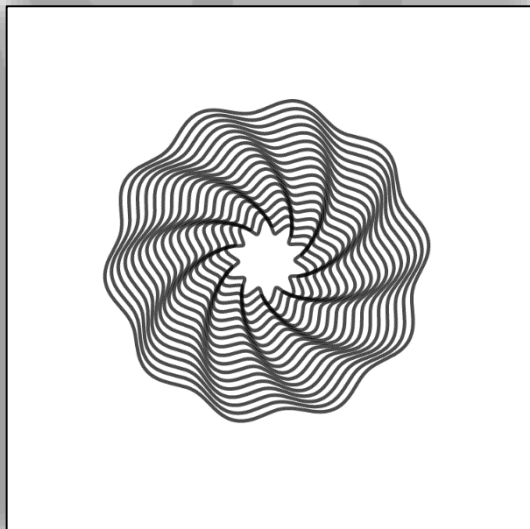
$$m = 3$$



$$m = 4$$



$$m = 5$$



$$m = 10$$

پیش تر فرض کردیم که $\Omega_g - \frac{\kappa}{\gamma}$ برای شعاع های مختلف ثابت است، این فرض باعث شد که الگوی مارپیچی ما با گذشت زمان بدون تغییر بماند، اما در واقعیت این چنین نیست و چرخش دیفرانسیلی باعث می شود که الگو مارپیچ تغییر کند، به طور مثال ستارگانی که به مرکز نزدیک تر هستند عموماً سرعت زاویه ای بیشتری نسبت به ستارگان دور تر دارند پس از آن ها جلو تر می آفتند و الگوی مارپیچی را تغییر می دهند. علاوه بر چرخش دیفرانسیلی، تجمع این ستارگان روی الگوهای مارپیچی باعث به وجود آمدن میدان گرانشی ناهمسانگرد می شود که این خود بر حرکت ستارگتان موثر است.

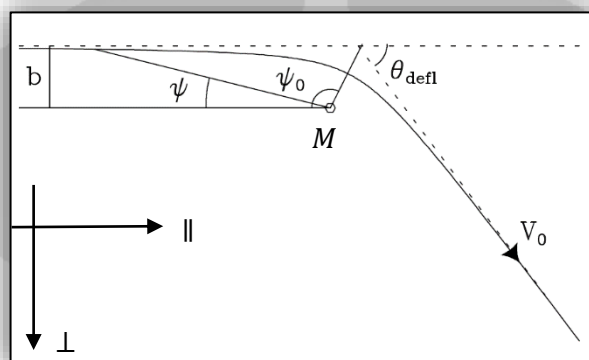
پیش تر تاثیر پتانسیل های چرخان و نامتقارن را بر حرکت ستارگان بررسی کردیم، پتانسیل ایجاد شده از الگوهای مارپیچی را می توان به صورت جمعی از جملات به فرم $\Phi_b(R) \cos[m\phi + f_m(R)]$ نوشت. یک مدل ساده از این نامتقارنی را نیز پیش تر بررسی کردیم و دریافتیم که در ۳ شعاع خاص (چرخش هم زمان، لیندبلد درونی و بیرونی) ستارگان دچار تشدید شده. پس می توانیم انتظار داشته باشیم که در نزدیکی این شعاع ها، اختلال کوچک در مدار ستاره ها موجب تغییرات گسترده ای در ساختار کهکشان بشود.



• مسائل مروری :

سوال اول

در این سوال قصد داریم تا برهم کنش های گرانشی را بررسی کنیم. جرم آزمونی را در نظر بگیرید که همانند شکل زیر، با پارامتر b و سرعت V از فاصله ∞ به سوی جرم M پرتاب می شود.



الف) کمینه فاصله جرم آزمون را از M برحسب ثوابت ذکر شده پیدا کنید.

ب) نشان دهید زاویه انحراف جرم آزمون از مسیر اولیه (θ_{defl}) برابر است با:

$$\theta_{defl} = 2 \tan^{-1} \left(\frac{GM}{bV^2} \right)$$

ج) دستگاه مختصاتی همانند شکل در نظر بگیرید که محور \parallel موازی با سرعت اولیه و محور \perp عمود بر مسیر اولیه می باشد. نشان دهید تغییر سرعت جرم آزمون هنگامی که از $r = \infty$ پرتاب شده و سپس مجدداً به $r = \infty$ می رود از رابطه زیر بدست

می آید:

$$\begin{cases} |\Delta V_{\parallel}| = 2V \left[1 + \frac{b^2 V^4}{G^2 M^2} \right]^{-1} \\ |\Delta V_{\perp}| = \frac{2bV^3}{GM} \left[1 + \frac{b^2 V^4}{G^2 M^2} \right]^{-1} \end{cases}$$

سوال دوم

تابع پتانسیل زیر را در نظر بگیرید:

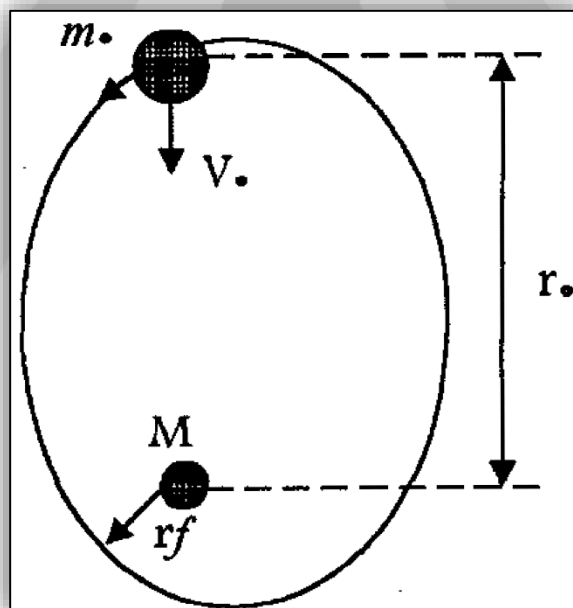
$$\Phi(r) = -\frac{GM}{r^2} \left(1 + \frac{a}{r}\right)$$

الف) معادله مسیر حرکت جرمی که تحت تاثیر این پتانسیل، از فاصله $r = \infty$ با سرعت $v_{\infty} = \sqrt{\frac{GM}{a}}$ و پارامتر برخورد $b = \frac{a}{\gamma}$ نسبت به مرکز ($r = 0$) پرتاب شده را پیدا کنید و آن را به صورت شماتیک رسم نمایید.

ب) نشان دهید ستارگانی که تحت تاثیر این پتانسیل در مدار دایروی حرکت می کنند در تعادل پایدار قرار دارند. فرکانس نوسانات کوچک در راستای شعاعی را بیابید.

سوال سوم

می دانیم که بیشتر ستاره ها یک سیستم دوتایی را تشکیل می دهند. یک نوع از این سیستم های دوتایی شامل یک ستاره عادی به جرم m و یک ستاره نوترونی متراکم و بسیار سنگین به جرم M است که به دور یکدیگر می چرخند. فرض کنید $M \gg m$. در نتیجه ستاره عادی روی یک مدار دایره ای به شعاع r حول ستاره نوترونی می چرخد. فرض کنید ستاره عادی شروع به گسیل گاز به طرف ستاره نوترونی می کند و سرعت گسیل گاز نسبت به ستاره عادی برابر v و نرخ برافزایش جرم A است. همچنین فرض کنید در این مساله نیروی گرانشی ستاره نوترونی غالب است. در صورت کوچک بودن A ، کمترین فاصله بین دو ستاره را در شکل زیر که با r_f نشان داده شده است بیابید.





سوال چهارم

انرژی پتانسیل برای اندرکنش دو اتم از یک مولکول به صورت زیر است :

$$V(r) = -\frac{A}{r^6} + \frac{B}{r^n} \quad (n > 6, A > 0, B > 0)$$

الف) فاصله تعادل r را حساب کنید.

ب) انرژی لازم برای شکستن این مولکول برحسب A ، n و r بیابید.

ج) فرض کنید که جرم دو اتم برابر است و جرم هر یک M می باشد. فرکانس نوسانات کوچک حول r را برحسب M ، n ، r و D و انرژی شکست محاسبه کنید.

سوال پنجم

به یک نوترون با جرم m ، بر روی سطح یک ستاره‌ی نوترونی به جرم M و شعاع R علاوه بر نیروی گرانش، در اثر اصل طرد پائولی نیروی دافعه‌ی در خلاف جهت گرانش به شکل زیر وارد میشود، که در آن \hbar ثابت پلانک کاهشدهنده است.

$$\vec{F} = \left(\frac{9\pi M}{4\pi m^2} \right)^{\frac{1}{3}} \frac{m\hbar^2}{R^3} \hat{r}$$

فرض کنید این ستاره‌ی نوترونی دوران وضعی با سرعت زاویه‌ی Ω نیز دارد. همچنین به علت وجود تقارن در مسئله، تکانه زاویه‌ی ستاره‌ی نوترونی مشابه یک کره‌ی صلب ($I = \frac{2}{5}MR^2$) پایسته میماند.

یک ستاره‌ی نوترونی با جرم $1.81M_{\odot}$ و شعاع ۱۲ کیلومتر را در نظر بگیرید که در وضعیت تعادل قرار دارد.

الف) با نوشتن معادله‌ی شتاب برای یک نوترون روی استوای ستاره و با استفاده از شرط تعادل، مقدار عددی دوره تناوب چرخش این ستاره‌ی نوترونی به دور خود را برحسب ثانیه بدست آورید.

فرض کنید عاملی سبب میشود تا این ستاره از وضعیت تعادل خود خارج شده و اختلال کوچکی به اندازه δR در شعاع آن ایجاد شود به طوری که $\delta R \ll R$ می باشد.

ب) حال با ایجاد اختلال در معادله شتاب قسمت الف)، معادله دیفرانسیل مربوط به نوسانات شعاعی را برای یک نوترون روی استوا بدست آورید.

پ) با حل معادله‌ی دیفرانسیل فوق، تمامی جوابهای ممکن را بدست آورید و با استدلال بیان کنید آیا مسئله جواب پایدار دارد؟

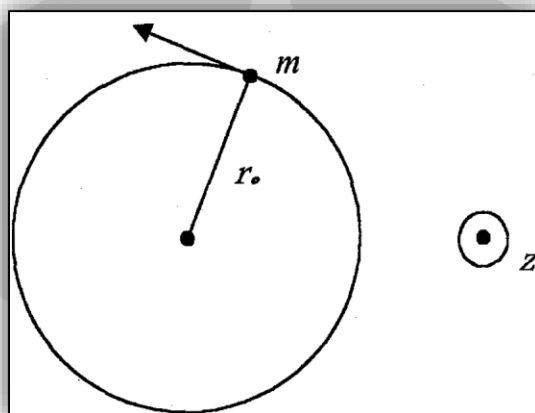
پ) در صورت وجود حالت پایدار مقدار عددی دوره‌ی تناوب نوسانات کوچک شعاعی ستاره را بدست آورید.

(دوره تیم سال ۹۸)



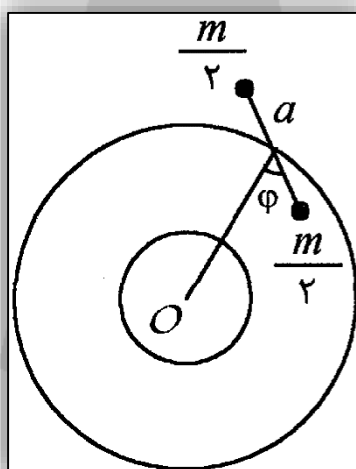
سوال ششم

میدان نیرویی به صورت $\vec{f} = -\frac{k}{r^n}(\hat{z} \times \hat{v})$ در نظر بگیرید، که در آن r فاصله از مبدا نیرو است. جسمی به جرم m روی دایره ای به شعاع r_0 در حال چرخش است. شرطی روی n پیدا کنید که حرکت جسم حول شعاع r_0 پایدار باشد. (\hat{z} عمود بر صفحه مدار و \hat{v} راستای بردار سرعت است.)



سوال هفتم

ماهواره ای به شکل دمبل متشکل از دو کره کوچک که جرم هر کره $\frac{m}{2}$ است با میله سبکی به طول $2a$ به هم متصل است. این ماهواره در مداری دایره ای شکل حرکت می کند. فاصله مرکز جرم ماهواره تا زمین (O) برابر r_0 است و زاویه φ بین دمبل و بردار شعاعی (OC) است که O مرکز زمین است. دو کره انتهایی میله را به عنوان دو ذره در نظر بگیرید و فرض کنید حرکت در یک صفحه صورت می گیرد. جرم زمین را M_e بگیرید.



الف) تابع انرژی پتانسیل ماهواره را بر حسب r_0 ، a و φ و ثابت های دیگر بنویسید.

ب) در حالت $a \ll r_0$ تابع انرژی پتانسیل را تا مرتبه دوم بنویسید.



- پ) نقاط تعادل سیستم را به دست آورید و پایداری یا ناپایداری آن را تعیین کنید. (حالت $a \ll r$ را در نظر بگیرید.)
- ت) در حالت تعادل پایدار فرکانس زاویه ای نوسانات کوچک (ω) آن را تعیین کنید.
- ث) اگر فرکانس زاویه ای ماهواره به دور زمین ω باشد نسبت $\frac{\omega}{\omega_0}$ را به دست آورید.

سوال هشتم

از نسبیت عام می دانیم علاوه بر جمله مکانیک نیوتونی، گرانش یک جمله دیگر به صورت زیر دارد:

$$g(r) = -\frac{GM}{r^2} - \frac{3GML^2}{c^2 r^4}$$

در صورتی که تاثیر جمله مربوط به نسبیت عام بسیار کوچک باشد، با تقریب مرتبه اول نشان دهید در هر یک دور دوران جسم در مدار بیضوی با نیم قطر اطول a و خروج از مرکز e ، حضيض به مقدار زیر جابجا می شود:

$$\Delta\phi = \frac{6\pi GM}{c^2 a(1-e^2)}$$

با توجه به مقادیر داده شده برای عطارد، جابجایی حضيض این سیاره در یک قرن را بدست آورید.

$$\begin{cases} a = 5.8 \times 10^{10} \text{ m} \\ e = 0.2 \end{cases}$$

راهنمایی:

$$\ddot{x} + x = A + B \cos t + C \cos 2t$$

$$x(t) = A + \frac{1}{2} B t \sin t - \frac{1}{3} C \cos 2t$$



سوال نهم

Isochrone Potential

یکی از توابع پتانسیل با تقارن کروی، این مدل پتانسیل است که بر خلاف اکثر مدل های پتانسیل، برای حرکت ستارگان در این مدل می توان حل تحلیلی بدست آورد. تابعیت پتانسیل *Isochrone* به فرم زیر است:

$$\Phi(r) = -\frac{GM}{b + \sqrt{b^2 + r^2}}$$

الف) با استفاده از پایستگی انرژی اثبات کنید که دوره تناوب حرکت شعاعی یک جرم آزمون (دو برابر مدت زمانی که طول می کشد جرم از حوضیض به اوج یا بالعکس حرکت کند) با انرژی E و تکانه زاویه ای L در پتانسیل $\Phi(r)$ از رابطه زیر بدست می آید:

$$T_r = \gamma \int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{dr}{\sqrt{\gamma(E - \Phi) - \frac{L^2}{r^2}}}$$

برای آنکه بتوانیم برای این مدل پتانسیل دوره تناوب شعاعی را ساده تر محاسبه کنیم، نیاز داریم تا یک تغییر متغیر همانند زیر اعمال کنیم:

$$s \equiv -\frac{GM}{b\Phi} = 1 + \sqrt{1 + \left(\frac{r}{b}\right)^2}$$

ب) با توجه به تغییر متغیر بالا نشان دهید:

$$\dot{r} = \frac{s-1}{\sqrt{s(s-2)}} \dot{s}$$

پ) S را برای حوضیض و اوج بدست بیاورید و به ترتیب آنها را S_1 و S_2 بنامید.

ت) اکنون تغییر متغیر را بر روی رابطه ای که پیش تر برای دوره تناوب حرکت شعاعی بدست آوردید اعمال کنید و نشان دهید:

$$T_r = \frac{\gamma\pi}{\sqrt{-\gamma E}} \int_{S_1}^{S_2} \frac{(s-1)}{\sqrt{(S_2-s)(s-S_1)}} ds$$

سپس انتگرال بالا را محاسبه کرده و دوره تناوب شعاعی را بدست آورید:

$$T_r = \frac{\gamma\pi GM}{(-\gamma E)^{3/2}}$$

راهنمایی: تلاش کنید تا مخرج انتگرال را به فرم $u^2 - 1$ تبدیل کنید که u تابعی از S می باشد.



ث) از این پس قصد داریم تا به بررسی مدار های دایروی بپردازیم، نشان دهید انرژی و تکانه زاویه ای مداری دایروی به شعاع r برابر است با:

$$E = -\frac{GM}{\sqrt{b^2 + r^2}}, L = \sqrt{GMb} \left(x^{-\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}} \right)$$

که x بدین صورت تعریف می شود:

$$x = -\frac{\sqrt{Eb}}{GM}$$

ج) سرعت مدار دایروی را به صورت تابعی از r بدست آورده و سپس منحنی چرخش را برای این فرم از پتانسیل به صورت شماتیک رسم کنید. بیشترین سرعت مدار دایروی در چه فاصله ای از مرکز (بر حسب b) قرار دارد؟
 چ) نشان دهید تمام مدار های دایروی در کهکشانی که پتانسیل آن از مدل *Isochrone* تبعیت می کند، پایدار هستند. فرکانس نوسان های کوچک شعاعی (κ) را به صورت تابعی از r (شعاع مدار دایروی) بدست آورید.

سوال دهم

Dark Halo Potential

هاله تاریک کهکشان راه شیری را می توان توسط کره ای با چگالی

$$\rho(r) = \rho_0 \frac{a^2}{r^2 + a^2}$$

مدل سازی کرد که r فاصله از مرکز کهکشان، ρ_0 چگالی مرکزی هاله و $a = 5 \text{ kpc}$ است. شواهد رصدی نشان می دهد که سرعت چرخشی در محل خورشید ($R_0 = 8 \text{ kpc}$)، برابر با 220 km/s است. همچنین هاله ای ماده تاریک، نصف جرم کل درون شعاع R_0 را تشکیل می دهد و مایقی جرم مربوط به ابر سیاهچاله مرکزی کهکشان می باشد.

الف) جرم ابر سیاهچاله مرکزی کهکشان را بدست آورید.

ب) چگالی ماده تاریک را در R_0 برحسب M_{sun}/pc^3 به دست آورید.

پ) تابعیت سرعت مدار دایروی ستارگان کهکشان ($v(r)$) را به بدست آورده و نمودار آن را به صورت شماتیک رسم کنید.

ت) نشان دهید تمامی ستارگان کهکشان که در مدار دایروی حرکت می کنند در تعادل پایدار قرار دارند.

ث) خروج از مرکز بیضی اپسایکلی را برای ستارگانی که در نزدیکی خورشید حرکت اپسایکلی می کنند بدست آورید و تعیین کنید نیم قطر اطول این بیضی در راستای شعاعی کشیده شده یا راستای مماسی.



سوال یازدهم

توزیع جرمی با تقارن کروی را در نظر بگیرید، ستاره ای در مدار دایروی اختلال یافته با فرکانس نوسان شعاعی κ در حال حرکت است. نشان دهید در صورتی که چگالی $(\rho(r))$ با دورتر شدن از مرکز کهکشان کاهش پیدا کند، شرط زیر برای زاویه ای که ستاره از یک حضیض تا حضیض بعدی طی می کند برقرار است:

$$\pi \leq \Delta\theta \leq 2\pi$$

سوال دوازدهم

یکی از مدل های توانی پیشنهاد شده برای پتانسیل کهکشان راه شیری به صورت زیر می باشد:

$$\Phi(R, z) = -C \left(R^2 + \frac{z^2}{q^2} \right)^{-n}$$

الف) نشان دهید برای یک ستاره که روی مداری دایروی منطبق بر دیسک کهکشان حرکت می کند برابر است با:

$$v(R) = \sqrt{2nCR^{-n}}$$

مطالعات انجام شده بر روی ستارگان نزدیک خورشید ($R \approx R_\odot = 8 \text{ kpc}$) حاکی از آن است که ثابت اول اورت

$$A = 14.8 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1} \text{ و ثابت دوم } B = -12.4 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1} \text{ می باشند.}$$

ب) سرعت خورشید روی مدار دایره ای را بیابید.

پ) مقدار مناسب برای n را پیدا کنید.

ت) با استفاده از مدل توانی، تابعیت سرعت مدار دایروی را بدست آورید.

ث) سرعت مدار دایروی در شعاع $R = 50 \text{ kpc}$ را محاسبه کنید. اگر درخشندگی کل کهکشان برابر

$$L_{total} = 2 \times 10^{11} L_{sun} \text{ باشد، جرم ماده تاریک درون شعاع } 50 \text{ kpc} \text{ را تخمین بزنید.}$$

ج) دوره تناوب نوسان خورشید در راستای Z را بدست آورید.



سوال سیزدهم

اختلال + نیروی لورنتز

مشاهدات و بررسی های انجام شده در کهکشان های مارپیچ نشان می دهند که میدان مغناطیسی ای با منشأ نامعلوم در این کهکشان ها وجود دارد؛ در این سوال قصد داریم به تاثیر این نیرو در حرکت ابر های هیدروژنی غیر خنثی بپردازیم. یک ابر هیدروژنی غیر خنثی با جرم m و بار Q در نظر بگیرید؛ در ابتدا این ابر در یک مدار دایروی به شعاع R منطبق بر صفحه کهکشان در حال حرکت با سرعت زاویه ای Ω بوده است، فرم پتانسیل کهکشان به صورت زیر می باشد:

$$\Phi(R) = v_c^2 \ln\left(R^2 + R_c^2 + \frac{z^2}{q^2}\right)$$

که R_c و q و v_c ثابت هستند و R و z مولفه های دستگاه استوانه ای هستند. اگر کهکشان یک میدان مغناطیسی یکنواخت به صورت $\vec{B} = B \hat{z}$ داشته باشد، علاوه بر نیروی گرانش نیروی لورنتز به فرم $\vec{F}_L = Q \vec{v} \times \vec{B}$ نیز روی ابر تاثیر می گذارد. الف) سرعت زاویه ای حرکت دایره ای Ω را بدست آورید.

ب) نشان دهید در صورت اعمال یک اختلال شعاعی به ابر، حرکت نوسانی انجام خواهد داد؛ فرکانس این نوسان را بیابید.

ج) فرض کنید همانطور که ابر در حال حرکت دایره ای بود ناگهان متوقف شود، سرعت سقوط آن را برحسب فاصله از مرکز $v_{ff}(R)$ بدست آورید.

سوال چهاردهم

فرض کنید $l(R)$ و $\epsilon(R)$ به ترتیب تکانه زاویه ای و انرژی واحد جرم برای یک مدار دایروی منطبق بر دیسک کهکشانی با تقارن سمتی هستند، همچنین κ و Ω به ترتیب فرکانس اختلالات شعاعی و سرعت زاویه ای مدار دایروی می باشند.

الف) اثبات کنید:

$$\frac{dl}{dR} = \frac{R\kappa^2}{2\Omega} \quad ; \quad \frac{d\epsilon}{dR} = \frac{1}{2} R\kappa^2$$

ب) انرژی مدار دایروی را به صورت تابعی از تکانه زاویه ای بنویسید و نشان دهید:

$$\frac{d\epsilon}{dl} = \Omega$$



سوال پانزدهم

اختلال در مدار همدم :

اطلاعات استخراج شده از متون و رصد های باستانی حاکی از آن است که در گذشته های دور، خورشید همدمی داشته که همراه خورشید در مداری دایروی به شعاع $R. = ۸.۵۰ \text{ kpc}$ روی دیسک کهکشان در حال گردش بوده است. پس از یک اتفاق ناگهانی به این ستاره همدم اختلالی در دو راستای شعاعی و عمود بر صفحه دیسک کهکشان وارد می شود. اگر پتانسیل دیسک کهکشان را بتوان به دقت بسیار خوبی با فرم پتانسیل دیسک کازمین (*Kuzmin Disk*) برابر در نظر گرفت، به سوالات زیر پاسخ دهید:

$$\Phi(R, z) = \frac{-GM}{\sqrt{R^2 + (a_K + |z|)^2}}$$

R و Z مختصه های دستگاه استوانه‌ای هستند.

الف) با استفاده از قضیه گاوس ثابت کنید چگالی سطحی دیسک کازمین از رابطه زیر محاسبه می‌شود و جرم دیسک برابر M است:

$$\Sigma_k(R) = \frac{a_k}{\sqrt{\pi}} \frac{M}{(R^2 + a_k^2)^{\frac{3}{2}}}$$

ب) ستاره‌ای را در نظر بگیرید که در حال حرکت روی صفحه دیسک کهکشان است، شرطی برای

شعاع مداری آن R به دست آورید تا در صورتی که اختلالی عمود بر صفحه کهکشان به ستاره وارد شود،

ستاره مقید باقی بماند. سپس نشان دهید ستاره حرکتی نوسانی خواهد داشت و دوره تناوب این نوسان را به صورت پارامتری مشخص کنید.

ج) اگر به ستاره همدم در راستای شعاعی اختلال وارد شود، نشان دهید تصویر حرکت همدم نسبت به خورشید روی صفحه کهکشان تقریباً یک بیضی است که خورشید در مرکز آن قرار دارد.

(راهنمایی: یک دستگاه مختصاتی دکارتی روی خورشید قرار دهید، محور x را در راستای شعاعی و محور y را در راستای حرکت در نظر بگیرید. نشان دهید بیضی حالت های مختلفی می‌تواند داشته باشد (این حالت ها را تعیین کنید و حالتی را در نظر بگیرید که خورشید منطبق بر مرکز بیضی باشد).)

اندازه‌گیری های انجام شده طی این سال ها نشان می‌دهند که دامنه نوسان همدم در راستای شعاعی

$$X = ۳.۹۶ \text{ pc} \text{ و در راستای عمود بر صفحه کهکشان } Z = ۰.۲۴ \text{ pc} \text{ است.}$$



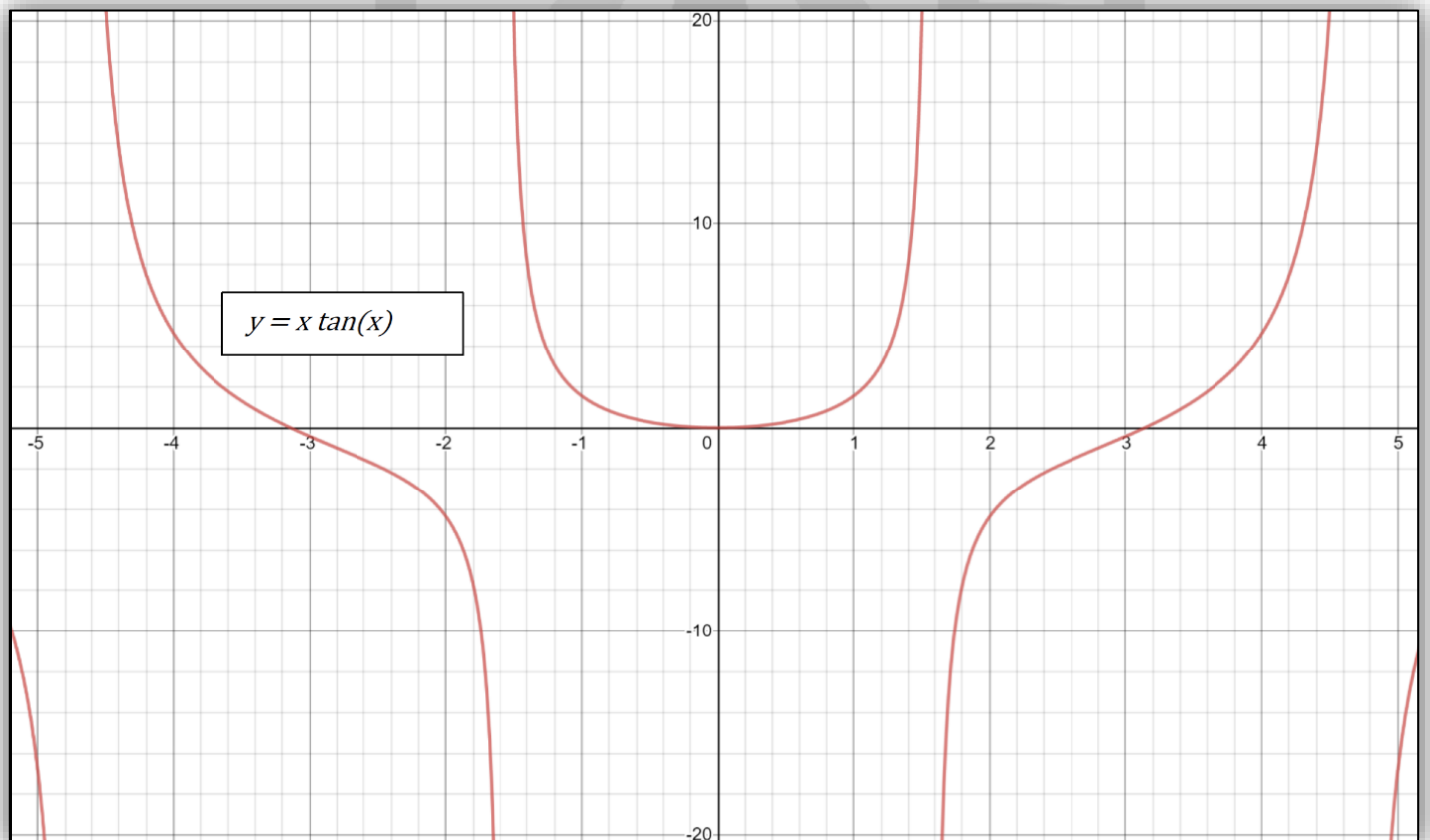
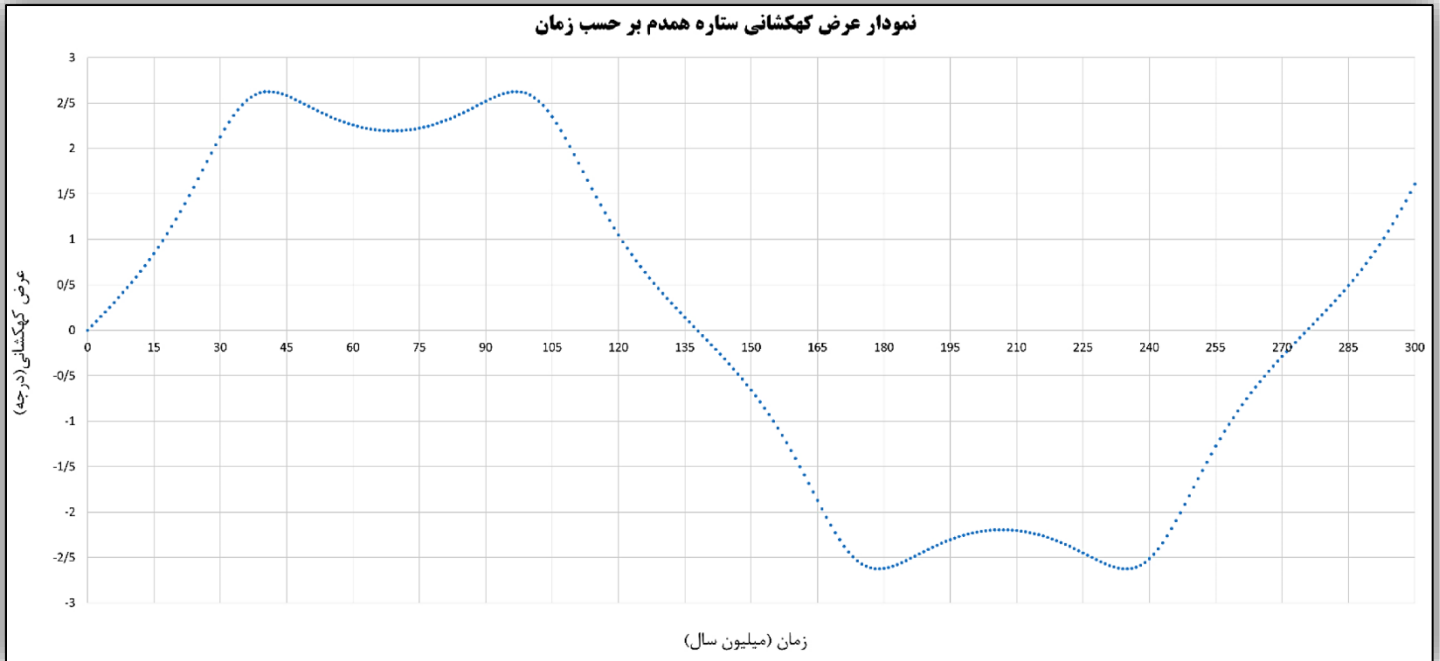
رصدگران از گذشته‌های بسیار دور مشغول رصد این همدم بوده اند، همچنین ماهواره *FATF* مدت زمانی طولانی را صرف اندازه‌گیری عرض کهکشانی همدم خورشید و ستارگانی که مسیری مشابه آن را طی می‌کنند کرده است. نمودار اول (صفحه بعد) عرض کهکشانی همدم را در زمان‌های مختلف نشان می‌دهد.

(د) با استفاده از نمودار اول، دوره تناوب حرکت اختلالی همدم در دو راستای شعاعی و عمود بر صفحه کهکشان

بدست آورید. در لحظه شروع شدن نمودار اول، ستاره همدم روی نیم قطر اطول بیضی قرار دارد.

(راهنمایی: در این بخش نیاز به حل معادله دارید، برای حل این معادله اولین یا دومین جواب منطقی بدست آمده را به عنوان پاسخ در نظر بگیرید، همچنین می‌توانید از نمودار دوم برای حل معادله استفاده کنید. پیشنهاد می‌شود جواب‌هایی که برای معادله بدست می‌آورید را چک کنید.)

(ه) مقدار ثابت a_K را تعیین کرده و سپس جرم دیسک کهکشان را بدست آورید.





سوال شانزدهم

کهکشان ترامپولین (Trampoline)

کهکشان دیسکی بسیار گسترده ای را در نظر بگیرید که چگالی سطحی یکنواخت و برابر Σ دارد، حرکت ستارگان در این کهکشان فرضی، فقط در راستای عمود بر صفحه کهکشان (Z) می باشد. در این مساله قصد داریم این حرکت را بررسی کنیم.

الف) ابتدا با استفاده از قضیه گاوس، میدان گرانشی را برای این کهکشان پیدا کنید.

ب) قانون دوم نیوتون را برای یک ستاره که در ارتفاع Z از صفحه دیسک قرار دارد بنویسید. اگر بیشترین فاصله ستاره از دیسک کهکشان برابر Z باشد، مختصات ستاره را به صورت تابعی از زمان بدست آورید.

پ) نمودار $Z(t)$ را به صورت شماتیک رسم کنید و دوره تناوب نوسان را پیدا کنید.

سوال هفدهم

یک قرص بزرگ کهکشانی با تقارن محوری (سمتی) را در نظر بگیرید. ستاره هایی که در نزدیکی قرص در بالا و پایین قرص هستند. نسبت به صفحه ی قرص در حال تعادل پایدارند. نشان دهید که در این حالت، بستگی تابع پتانسیل گرانشی به Z در

تقریب اول به شکل $\phi(z) = \phi_0 + Az^2$ است. در این رابطه A مقداری ثابت نسبت به Z و مثبت است. نشان دهید که

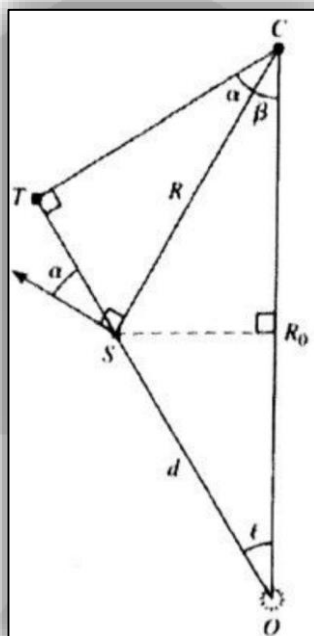
ضخامت تقریبی قرص برابر است با $h = \frac{\pi \bar{v}_z^2}{\sqrt{2A}}$ که در آن \bar{v}_z میانگین مولفه ی Z سرعت ستاره ها در اطراف قرص است. محور Z بر صفحه ی قرص عمود است و قرص در صفحه ی $Z = 0$ قرار دارد.

(دوره تابستانه سال ۸۸)



سوال هجدهم

پتانسیل $\phi(R, Z)$ متقارن نسبت به صفحه دیسک را در نظر بگیرید. جسمی در صفحه کهکشانی با شعاع مداری R . در حال گردش دایره ای است.



مقادیر ثوابت اورت را به شکل زیر بدست آورید.

$$A = -\frac{1}{\gamma} R. \left(\frac{\partial \Omega}{\partial R} \right)_{R., Z=}$$

$$B = -\frac{1}{\gamma} R. \left(\frac{\partial \Omega}{\partial R} \right)_{R., Z=} - \Omega.$$

در آن نقطه، رابطه زیر را تحقیق کنید.

$$v^{\gamma} \equiv \frac{\partial^{\gamma} \phi}{\partial z^{\gamma}} = \gamma \pi G \rho. + \gamma (A^{\gamma} - B^{\gamma})$$

در نواحی بسیار دور از مرکز کهکشانی که چگالی تقریباً قابل صرف نظر است نشان دهید:

$$\kappa^{\gamma} + v^{\gamma} = \gamma \Omega^{\gamma}$$



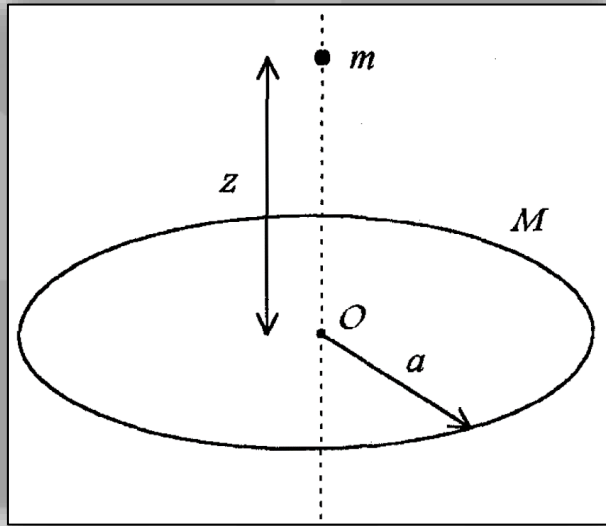
سوال نوزدهم

حلقه ای به جرم M و شعاع a را در نظر بگیرید. ذره ای به جرم m روی محور حلقه و به فاصله z از مرکز آن (O) واقع است.

الف) انرژی پتانسیل گرانشی جرم m ناشی از حلقه را بدست آورید.

ب) با رسم انرژی پتانسیل بر حسب z نوع تعادل حول نقطه O را مشخص کنید.

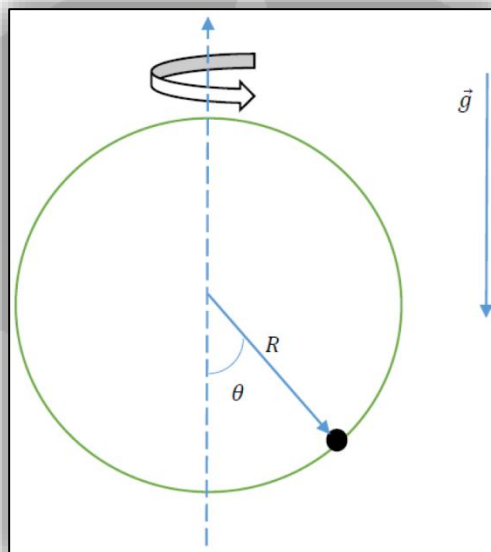
ج) اگر جرم m در مرکز حلقه (O) باشد و به اندازه کوچکی ($z \ll a$) در امتداد محور حلقه جابجا شود، فرکانس نوسانات کوچک آن را بدست آورید.





سوال بیستم

مطابق شکل زیر حلقه ای دایروی و به شعاع R را در نظر بگیرید. داخل این حلقه، دانه ی تسبیچی به جرم m قرار دارد که می تواند آزادانه و بدون اصطکاک بر روی محیط حلقه سر بخورد. با فرض آنکه حلقه در حال چرخش با سرعت زاویه ای ثابت Ω حول محور مرکزی خود باشد، به سوالات زیر پاسخ دهید



الف) معادلات شتاب دانه را در دستگاه مختصات کروی و منطبق بر مرکز حلقه بنویسید.
ب) با مشخص کردن نیروهای وارد بر جسم و با استفاده از روابط قسمت الف، معادلات حرکت مربوط به دانه را بنویسید.

نقاطی را که دانه بر روی آنها نسبت به حلقه ساکن باشد را نقاط تعادل می نامیم.

پ) معادله مربوط به نقاط تعادل دانه را تشکیل دهید و شرطی را بین g ، Ω و R پیدا کنید که تحت آن دانه زاویه ی تعادل دیگری بجز $\theta = 0$ داشته باشد. این زاویه θ را بیابید.

ت) تحت چه شرطی دانه در نقطه ی فوق θ در یک تعادل پایدار قرار دارد؟

راهنمایی: در معادلات بخش الف قرار دهید $\theta(t) = \theta_0 + \delta\theta(t)$ و معادلات خود را تا اولین مرتبه نسبت به $\delta\theta(t)$ ساده کنید.

اکنون فرض کنید که سرعت زاویه ای حلقه به صورت زیر تغییر کند

$$\Omega(t) = \Omega_0 + \epsilon \sin \omega t$$

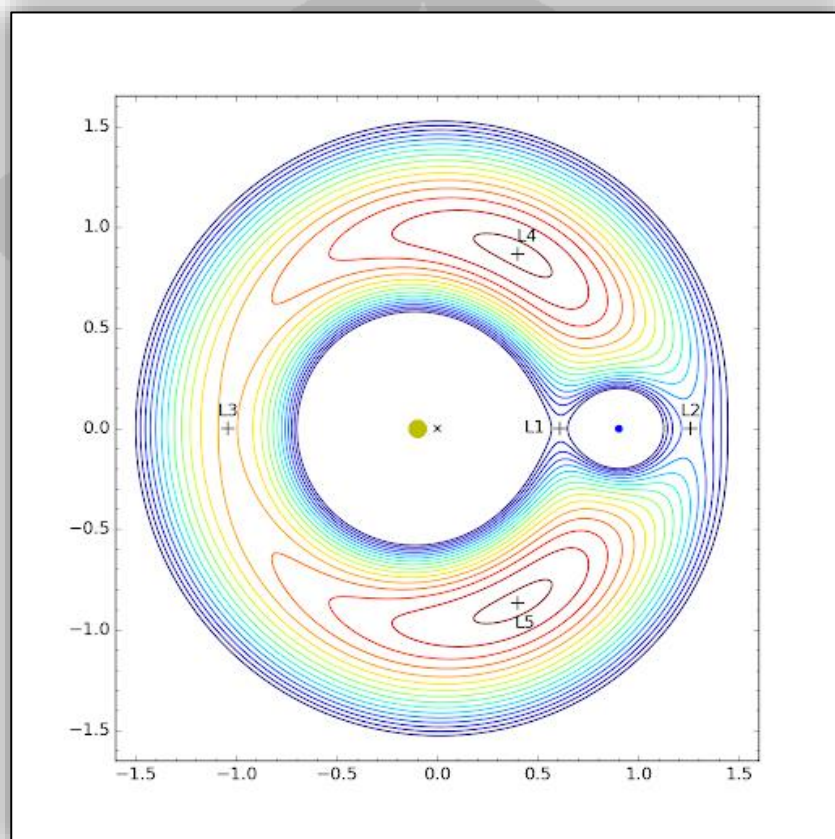
در معادله ی فوق ω و ϵ ($\epsilon \ll \Omega_0$) دو ثابت مثبت می باشند.

ث) با فرض آنکه دانه در ابتدا در زاویه θ_0 و در وضعیت تعادل قرار دارد. $\theta(t)$ را تا اولین مرتبه نسبت به ϵ تعیین کنید.



سوال بیست و یکم

برای یک سیستم متشکل از دو جرم M_1 و M_2 که فاصله هر یک از مرکز جرم به ترتیب a_1 و a_2 می باشد، نقاط لاگرانژ L_1 و L_2 و L_3 را در حد $M_2 \ll M_1$ بدست آورید.





سوال بیست و دوم

در این سوال قصد داریم مدلی برای بررسی دینامیک چرخش بازوهای کهکشان ارائه دهیم. بدین منظور، نحوه ایجاد بازوها در محیط گاز میان ستاره ای توسط یک موج چگالی ستاره ای را بررسی کنیم. باید توجه داشت که بازوهای کهکشان از دو جزء ستاره ای و گاز تشکیل شده است؛ بازوهای ستاره ای و گازی با هم متفاوت هستند و مقداری اختلاف فاز چرخشی در گردش به دور مرکز کهکشان دارند.

در ابتدا یک کهکشان به شکل دیسک ستاره ای با تابع پتانسیل $\phi(r)$ با تقارن محوری را در نظر بگیرید.

الف) فرض کنید ستاره ای در مدار دایروی به شعاع r حول مرکز کهکشان می گردد. معادلات شتاب در دستگاه استوانه ای را بنویسید. سپس بردار سرعت زاویه ای و سرعت مداری (در هر لحظه) را برای این ستاره (برحسب ϕ) بیابید.

راهنمایی: معادلات شتاب در دستگاه استوانه ای به صورت

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta} + (\ddot{z})\hat{z}$$

$$\vec{a} = -\vec{\nabla}\phi = -\frac{\partial\phi}{\partial r}\hat{r} - \frac{\partial\phi}{r\partial\theta}\hat{\theta} - \frac{\partial\phi}{\partial z}\hat{z}$$

هستند که r فاصله شعاعی از محور z ، θ زاویه سمتی و z ارتفاع از دیسک مرکزی در دستگاه استوانه ای است

در یک مدل ساده جمله اختلالی (جمله مرتبه یک) زیر را برای بررسی دینامیک چرخش بازوهای کهکشان، به تابع پتانسیل اولیه (جمله مرتبه صفر) اضافه می کنیم.

$$\phi_1(r, \theta) = F \cos(Kr + m\theta)$$

که در آن F ، K و m ثابت هستند.

بنابراین پتانسیل جدید دیسک به شکل زیر بازنویسی می شود.

$$\phi = \phi(r) + \phi_1(r, \theta) = \phi(r) + F \cos(Kr + m\theta)$$

پس همانطور که انتظار داریم معادلات حرکت، باید به بفرم زیر باشند (در راستای z حرکت نداریم)

$$\begin{cases} r(t) = r_0(t) + r_1(t) \\ \theta(t) = \theta_0(t) + \theta_1(t) \end{cases}$$

ب) با توجه به جمله اختلالی پتانسیل، معادله شتاب در راستای \hat{r} را بنویسید. سپس با ساده کردن جملات مرتبه صفر، معادله دیفرانسیلی به دست آورید که فقط شامل جملات مرتبه یک باشد.

ج) معادله شتاب در راستای $\hat{\theta}$ را بنویسید و سپس از دو طرف تساوی روی زمان انتگرال بگیرید. دقت کنید که ابتدا باید با ساده کردن جملات مرتبه صفر، معادله دیفرانسیلی بیابید که فقط شامل جملات مرتبه یک باشد. برای سادگی، در نظر بگیرید که $\frac{\partial\phi_1}{\partial\theta}$ پس از انتگرال گیری، به مقدار ثابتی میل می کند.



(د) با حل معادله دیفرانسیل قسمت (ب) و همچنین بهره گیری از قسمت (ج)، فاصله شعاعی ستاره بر حسب زمان را که به شکل $r(t) = r_0(t) + r_1(t)$ است را بدست آورید.

راهنمایی: حل معادله دیفرانسیل زیر ممکن است مورد نیاز واقع شود.

$$m\ddot{x} + kx = F \sin(\alpha t + \beta) + \text{constant} \quad (k > 0, \omega \equiv \sqrt{\frac{k}{m}} \neq \alpha)$$

$$\rightarrow x(t) = c_1 \cos(\omega t + \psi) + \frac{F}{m(\omega^2 - \alpha^2)} \sin(\alpha t + \beta) + c_2$$

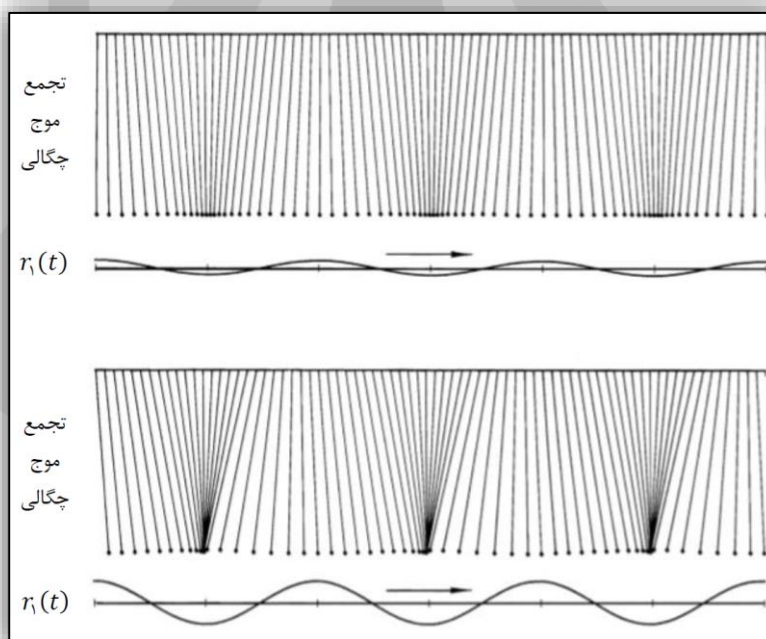
نیازی به محاسبه مقادیر c_1, c_2, ψ و ω نیست.

(ه) با حل معادله دیفرانسیل قسمت (ج)، زاویه سمتی ستاره که به شکل $\theta(t) = \theta_0(t) + \theta_1(t)$ است را به دست آورید.

(و) با بررسی تابع $r(t)$ استدلال کنید که با زیاد و کم شدن دامنه جمله نوسانی اضافه شده بر اثر اختلال، $r_1(t)$ مقدار تجمع حرکتی ستارگان در کمینه این امواج، چگونه تغییر می کند؟

سپس به صورت شهودی استدلال کنید که آیا مدل بالا می تواند شکل تجمعی بازوهای کهکشان (تشکیل توده های پرستاره و نواحی خالی تر) را توجیه کند یا خیر؟

راهنمایی: می توانید از تصاویر زیر کمک بگیرید.



(دوره تابستانه سال ۹۷)



سوال بیست و سوم

کهکشانی را به شکل دیسک در نظر بگیرید. ابتدا تابع پتانسیل را در این کهکشان، تابعی متقارن و مستقل از زمان در نظر می گیریم.

$$\phi(r, \alpha, z, t) = \phi_1(r)$$

که در رابطه ی فوق Z ، α ، r به ترتیب مولفه های عمودی، زاویه ای و شعاعی در دستگاه مختصات استوانه‌ای هستند.

یک ستاره را به جرم واحد در فاصله ی اولیه ی $\vec{R}_0 = (r_0, 0, 0)$ از مرکز کهکشان در نظر بگیرید.

الف) بردار سرعت زاویه ای ستاره $\vec{\Omega}$ را بگونه ای تعیین کنید تا ستاره در مداری دایروی و به شعاع r_0 به دور مرکز کهکشان دوران کند. (جواب خود را برحسب r_0 و مشتق تابع پتانسیل بیان کنید).

اکنون فرض کنید که به تابع پتانسیل یک جمله ی نامتقارن و وابسته به زمان به صورت زیر اضافه کنیم

$$\phi(r, \alpha, t) = \phi_1(r) + \epsilon \phi_2(r, \alpha, t)$$

که در این رابطه ϵ یک ثابت بی بعد است. اکنون می خواهیم معادلات مربوط به تغییر شکل مدار ستاره را تحت پتانسیل فوق بدست آوریم.

ب) برای این ستاره معادلات شتاب را در دستگاه مختصات استوانه ای بنویسید و با فرض برقراری قانون دوم نیوتن یک دستگاه

معادله برای r ، α و مشتقات آن‌ها برحسب توابع ϕ_1 و ϕ_2 (و مشتقات آنها) به دست آورید.

می دانیم که در دستگاه مختصات استوانه ای بردار نیرو برحسب تابع پتانسیل به فرم زیر قابل استخراج است.

$$\vec{F} = -\frac{\partial \phi}{\partial r} \hat{r} - \frac{\partial \phi}{r \partial \theta} \hat{\theta} - \frac{\partial \phi}{\partial z} \hat{z}$$

که در رابطه ی فوق منظور از $\frac{\partial \phi}{\partial x_i}$ مشتق تابع ϕ نسبت به متغیر x_i ، در صورت ثابت بودن سایر متغیرها است.

اکنون فرض کنید که آن بخش از تابع چگالی، که منجر به وابستگی پتانسیل به پارامترهای α و t می شود، در حال دوران به دور کهکشان با سرعت زاویه ای ثابت $\Omega_b \hat{z}$ بنشیند، تابع چگالی و در نتیجه تابع پتانسیل در کهکشان را مستقل از زمان می بیند. با این فرض می توان گفت که:

$$\phi_2(r, \alpha, t) = \phi_2(r, \alpha - \Omega_b t); \theta = \alpha - \Omega_b t$$

که در رابطه ی فوق منظور از θ مولفه ی زاویه ای در دستگاه استوانه ای برای ناظر دوار است.

پ) اکنون با جای گذاری α برحسب θ و Ω_b ، معادلات بخش (ب) را بازنویسی کنید و یک دستگاه معادله برای r و θ بدست آورید.

حال می خواهیم معادلات فوق را برای جواب هایی در نزدیکی r_0 حل کنیم. با فرض کوچک بودن ϵ و صرف نظر کردن از توان های دو به بالای آن می توان گفت که:



$$r(t) = r_0 + \epsilon r_1(t)$$

$$\theta(t) = \theta_0(t) + \epsilon \theta_1(t)$$

که در روابط فوق $r_1(t)$ ، $\theta_1(t)$ ، $\theta_0(t)$ توابعی هستند که باید تعیین شوند.

(ت) معادلات بخش (پ) را بر حسب $r_1(t)$ و $\theta_1(t)$ و $\theta_0(t)$ بازنویسی کنید.

(ث) با مساوی قرار دادن جملات مرتبه صفرم نسبت به ϵ در معادلات قسمت (ت)، $\theta_0(t)$ را تعیین کنید.

(ج) با مساوی قرار دادن جملات مرتبه یکم نسبت به ϵ در معادلات قسمت (ت)، ۲ معادله دیفرانسیل برای $r_1(t)$ و $\theta_1(t)$ بدست آورید.

اکنون قرار دهید.

$$\phi_1(r, \theta) = f(r) \cos(m\theta)$$

که در این رابطه $f(r)$ یک تابع معلوم، مشتق پذیر و صرفاً وابسته به r است و m یک ثابت صحیح مثبت می باشد.

(چ) با جای گذاری $\phi_1(r, \theta)$ ، جواب قسمت (ج) را تا اولین مرتبه نسبت به ϵ ساده کنید و نشان دهید که تابع $r_1(t)$ در معادله ی زیر صدق می کند.

$$\ddot{r}_1(t) + k r_1(t) = g(t)$$

که در رابطه ی فوق k و $g(t)$ به ترتیب یک عدد ثابت و یک تابع صرفاً وابسته به زمان هستند که باید تعیین کنید.

(ح) اکنون قرار دهید $\Omega_b = \Omega$ و با این جایگذاری معادله ی بدست آمده برای $r_1(t)$ را ساده تر کنید. تحت چه شرایطی این معادله جواب پایدار دارد؟
اکنون پتانسیل مقابل را در نظر بگیرید.

$$\phi = \frac{v_m^2}{2} \ln(r_0^2 + r^2)$$

که v_m یک ثابت مثبت است.

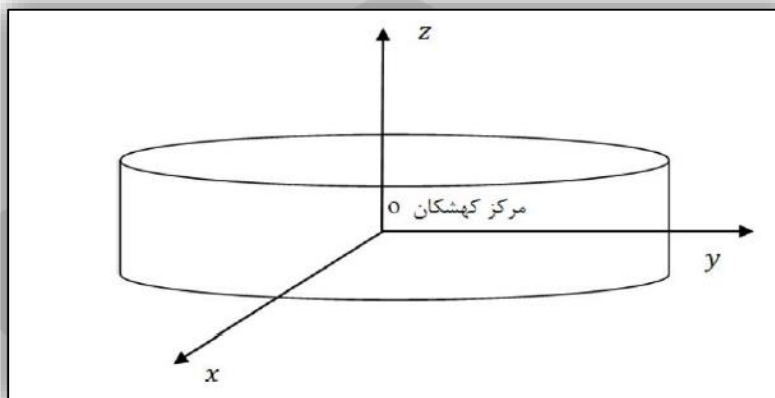
(خ) برای پتانسیل فوق و با برقرار شرط (ح)، جواب های $r_1(t)$ و $\theta_1(t)$ (برای شرایط اولیه ی دلخواه در نزدیکی r_0) را تعیین کنید.

(دوره تابستانه سال ۹۳)



سوال بیست و چهارم

مطابق شکل زیر کهکشانی به شکل یک دیسک، با شعاع بسیار طویل و ضخامت ناچیز (در برابر شعاع) در نظر بگیرید.

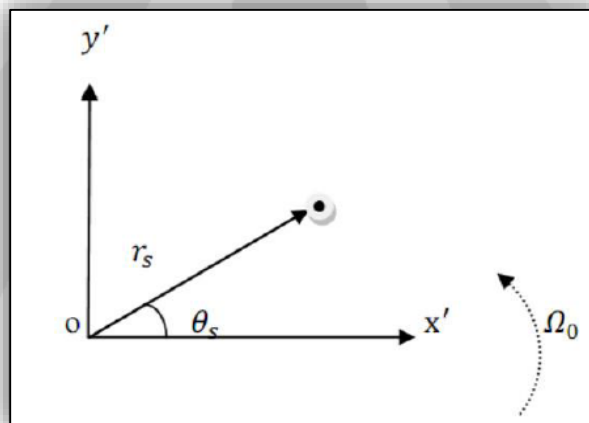


ناظری منطبق بر مرکز کهکشان و دوار با سرعت زاویه ای Ω حول محور Z را در نظر بگیرید. این ناظر تابع پتانسیل این کهکشان را، عبارتی متقارن و مستقل از زمان و به صورت زیر مشاهده می کند.

$$\phi = \phi_0 \ln(r^2 + r_c^2) ; \text{ eqt. 1}$$

که در عبارت فوق r طول بردار شعاعی در دستگاه مختصات استوانه ای (دوار) و منطبق بر مرکز کهکشان و ϕ_0 و r_c ثابت مثبت می باشند.

مطابق شکل زیر ستاره ای با جرم واحد را در مختصات (r_s, θ_s) نسبت به ناظر ناخست در نظر بگیرید.



الف) با فرض برقراری قانون دوم نیوتن برای ناظر ناخست، معادلات شتاب ستاره در دستگاه مختصات ناظر دوار را بنویسید.
ب) با توجه به معادلات بدست آمده در قسمت فوق مختصات نقطه (r_0, θ_0) را تعیین کنید که ستاره در آنها در حال تعادل قرار بگیرد.

حرکت ستاره (هنگامی که از دید ناظر دوار در حالت تعادل قرار دارد) از دید ناظر ناخست چگونه خواهد بود؟ توضیح دهید.



اکنون فرض کنید که ستاره در زمان $t = 0$ و در نقطه ی تعادلی که در قسمت فوق تعیین کرده اید قرار دارد. به دلیل اختلال های موجود در کهکشان تابع پتانسیل تغییر می کند و از این پس ناظری تابع پتانسیل را به فرم معادله یک می بیند که با سرعت زاویه ای زیر و حول محور Z دوران کند.

$$\vec{\Omega} = (\Omega_0 + \epsilon \cos \omega \cdot t)$$

که ω و ϵ در عبارت فوق دو ثابت می باشند.

(ج) معادلات حرکت ستاره را در دستگاه مختصات دوار منطبق بر مرکز کهکشان بنویسد.

تغییرات مختصات ستاره نسبت به مکان اولیه اش (r, θ) را به ترتیب $\delta r(t)$ و $\delta \theta(t)$ می نامیم.

(د) با فرض کوچک بودن ϵ معادلات مربوط به $\delta r(t)$ و $\delta \theta(t)$ و مشتق هایشان را تا اولین مرتبه نسبت به ϵ ساده کنید.

(ر) تحت چه شرطی بین ثوابت مساله، معادلات فوق جواب پایدار دارند؟

(ز) با فرض برقراری شرط فوق $\delta r(t)$ و $\delta \theta(t)$ را بیابید.

راهنمایی: برای تغییرات هر کمیت برداری \vec{Q} رابطه زیر برقرار است.

$$\left(\frac{d\vec{Q}}{dt}\right)_f = \left(\frac{d\vec{Q}}{dt}\right)_r + \vec{\Omega} \times \vec{Q}$$

که در رابطه فوق اندیس f و r به ترتیب نشان دهنده ی مشتق نسبت به دستگاه مختصات لخت و دوار می باشند. همچنین Ω

بردار سرعت زاویه ای دستگاه دوار می باشد.

(دوره تابستانه سال ۹۴)



سوال بیست و پنجم

در این مساله قصد داریم تاثیر تجمع اجرام نقطه ای را بر حرکت ستارگان کهکشان پیدا کنیم. قصد داریم کهکشان را بررسی کنیم که پتانسیل آن از فرم دیسک کازمین تبعیت می کند؛ همچنین تعداد N جرم نقطه ای و سنگین، هر یک به جرم M ، بر روی دایره ای مشترک به شعاع R_C و منطبق بر دیسک با سرعت زاویه ای Ω_N دور مرکز کهکشان دوران می کنند. اکنون می خواهیم تاثیر اختلالی این اجرام را روی حرکت ستارگان بررسی کنیم. فرض کنید این جرم ها در فاصله برابر از یکدیگر قرار گرفته اند.

الف) پتانسیل یک نقطه روی دیسک کهکشان به مختصات (R, θ, z) را به صورت تابعی از زمان بیابید. R و θ و z مولفه های دستگاه مختصات استوانه ای هستند.

ب) دستگاه مختصات مناسبی پیدا کنید که پتانسیل در آن ایستا باشد و سپس پتانسیل را در این دستگاه باز نویسی کنید.

پ) نشان دهید این پتانسیل همسانگرد می باشد. (بدین معنا که در دستگاه مختصات جدید، پتانسیل تابعی از زاویه سمتی نیست).

ت) فرض کنید این اجرام در نزدیکی مرکز واقع شده باشند و R_C نسبت به فاصله ستارگان از مرکز بسیار کوچک باشد، با اعمال تقریب مرتبه اول نسبت به $\frac{R_C}{R}$ ، پتانسیل را مجدداً باز نویسی کنید. (R' مولفه شعاعی دستگاه مختصات جدید می باشد).

ث) اگر پتانسیل این اجرام تاثیر اختلالی بر مدار ستارگان داشته باشند، فرکانس اپسایکلی (κ) را به صورت تابعی از R پیدا کنید. راهنمایی برای قسمت "پ":

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\text{سری تیلور: } f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(x_0) \frac{(x - x_0)^n}{n!}$$

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} a^{n-k} b^k$$

سوال بیست و ششم

یک کهکشان دیسکی را در نظر بگیرید که سرعت مدار دایروی در سرتاسر دیسک ثابت و برابر v_C می باشد. اگر شعاع هم چرخش ($Co\ rotation\ Radius$) برابر R_{CO} باشد، شعاع لیندبلد داخلی و خارجی را پیدا کنید.

پیوست اول : پاسخنامه مثال ها





مثال اول :

$$g(r) = -\frac{GM}{r^2} \Rightarrow g(u) = -GMu^2$$

$$\text{جاگذاری در معادله بینه} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + u = \frac{GM}{L^2}$$

معادله دیفرانسیل بالا معادله نوسانگر هماهنگ ساده است و که جواب آن به صورت زیر است:

$$u(\theta) = C \cos(\theta - \theta_0) + \frac{GM}{L^2}$$

که C ثابتی مثبت و θ_0 ثابتی اختیاری است که به مبدا وابسته است.

این معادله یک مقطع مخروطی را توصیف می‌کند که پارامترهای آن به صورت زیر هستند:

$$r = \frac{\frac{L^2}{GM}}{\frac{CL^2}{GM} \cos(\theta - \theta_0) + 1}$$

$$e = \frac{CL^2}{GM}$$

$$a = \frac{L^2}{GM(1 - e^2)}$$



مثال دوم:

$$\Phi(r) = -\frac{GM}{\sqrt{r^2 + a_p^2}} \Rightarrow |\vec{\nabla}\Phi| = \left|\frac{d\Phi}{dr}\right| = \frac{GMr}{(r^2 + a_p^2)^{3/2}}$$

$$\text{نیروی وارد بر ذره: } m\vec{g} = -m\vec{\nabla}\Phi = -m\frac{v^2}{r} \Rightarrow v^2 = \frac{GMr^2}{(r^2 + a_p^2)^{3/2}}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2}mv^2 + m\Phi = \frac{1}{2}m\frac{GMr^2}{(r^2 + a_p^2)^{3/2}} - \frac{GMm}{\sqrt{r^2 + a_p^2}}$$

$$= \frac{GMm}{(r^2 + a_p^2)^{3/2}} \left(-\frac{r^2}{2} - a_p^2\right)$$

$$\Rightarrow \varepsilon(r) = -\frac{GMm}{(r^2 + a_p^2)^{3/2}} \left(\frac{r^2}{2} + a_p^2\right) \text{ (الف)}$$

$L = mrV$: تکانه زاویه ای مدار دایروی

$$\Rightarrow L = \frac{m\sqrt{GM}r^2}{(r^2 + a_p^2)^{3/2}} \text{ (الف)}$$

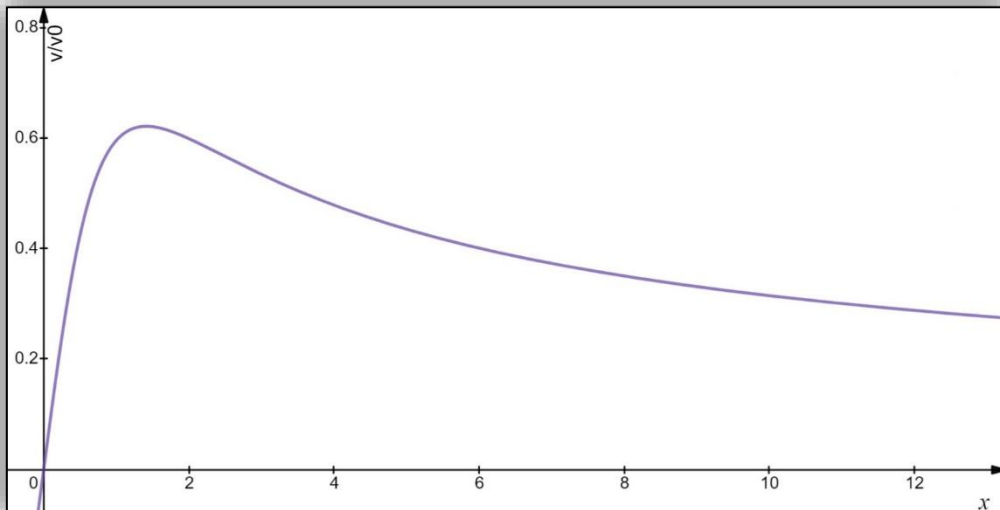
پارامتر x را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$x \equiv \frac{r}{a_p} \Rightarrow v^2 = \frac{\overbrace{GM}^{v^2}}{a_p} \frac{x^2}{(1+x^2)^{3/2}} \Rightarrow v^2 = v^2 \frac{x^2}{(1+x^2)^{3/2}}$$

$$\frac{d(v^2)}{dx} = v^2 \left[\frac{2x}{(1+x^2)^{3/2}} - \frac{3}{2} \frac{x^2}{(1+x^2)^{5/2}} \right]$$

$$= v^2 \frac{x}{(1+x^2)^{5/2}} (2-x^2)$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{d(v)}{dr} > 0, \quad r < \sqrt{2}a_p \\ \frac{d(v)}{dr} < 0, \quad r > \sqrt{2}a_p \end{array} \right\} \text{ (ب)}$$



$$L = \sqrt{GMa_p} \frac{x^\gamma}{(1+x^\gamma)^{\gamma/\gamma}}$$

$$\frac{dL}{dx} = L \cdot \left[\frac{\gamma x}{(1+x^\gamma)^{\gamma/\gamma}} - \frac{\gamma}{\gamma} \frac{x^\gamma}{(1+x^\gamma)^{\gamma/\gamma}} \right] = L \cdot \frac{x}{(1+x^\gamma)^{\gamma/\gamma}} \left(\gamma + \frac{x^\gamma}{\gamma} \right)$$

$x^\gamma > \cdot$

$$\frac{dL}{dx} > \cdot$$

$$\Omega = \frac{v}{r} \Rightarrow \Omega^\gamma = \frac{\overbrace{GM}^{\Omega}}{a_p^\gamma} \frac{1}{(1+x^\gamma)^{\gamma/\gamma}} \Rightarrow \frac{d(\Omega)}{dx} = -\Omega \cdot \frac{\gamma x}{(1+x^\gamma)^{\gamma/\gamma}}$$

$$\frac{d\Omega}{dr} \leq \cdot$$



مثال سوم :

ابتدا κ^2 را به دست می آوریم:

$$-\frac{3}{r} \frac{g(r)}{r} - \frac{\partial g}{\partial r} \Big|_r \equiv \kappa^2$$

$$g(r) = -\frac{GM}{r^2} \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial r} = +\frac{2}{r^3} GM \Rightarrow \begin{cases} g(r) = -\frac{GM}{r^2} \\ \frac{\partial g}{\partial r} \Big|_r = +\frac{2}{r^3} GM \end{cases}$$

$$\Rightarrow \kappa^2 = \frac{GM}{r^3} = \dot{\theta}^2$$

 κ^2 بزرگ تر از صفر است پس خواهیم داشت :

$$\delta r(t) = A \cos \kappa t + B \sin \kappa t$$

$$t = 0 : \begin{cases} \delta r = A = 0 \\ \delta \dot{r} = B\kappa = v \Rightarrow B = \frac{v}{\kappa} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \delta r(t) = \frac{v}{\kappa} \sin \kappa t$$

$$\dot{\theta} = \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{L}{r^3} = \frac{L}{(r + \delta r)^3} \approx \frac{L}{r^3} \left(1 - \frac{3}{r} \delta r \right)$$

$$\theta(t) = \int_0^t \frac{L}{r^3} \left(1 - \frac{3}{r} \delta r \right) dt$$

$$\Rightarrow \theta(t) = \frac{L}{r^3} \left(t + \frac{3}{\kappa r} \cos \kappa t \right)$$

$$L = r^3 \dot{\theta} = r^3 \dot{\theta} \Rightarrow \frac{L}{r^3} = \dot{\theta}$$

$$\Rightarrow \theta(t) = \dot{\theta} t + \frac{3}{\kappa r} \dot{\theta} \cos \kappa t = \dot{\theta} t + \delta \theta(t)$$

همانطور که مشاهده کردید، پس از بدست آوردن $\delta r(t)$ از پایستگی تکانه زاویه ای استفاده کردیم تا $\dot{\theta}$ را به دست آوریم و سپس روی زمان انتگرال گرفتیم و θ را تابعی از زمان بدست آوردیم؛ نتیجه بدین صورت شد که θ شامل دو جمله است، یکی همانند مدار دایروی و دیگری یک جمله اختلالی است، این نتیجه بدین معناست که نه تنها ماهواره در راستای شعاعی حول نقطه $r = r_0$ نوسان می کند، بلکه در راستای مماسی نیز نوسان خواهد کرد، در ادامه نشان می دهیم که ذره پس از وارد شدن اختلال، روی یک بیضی به دور نقطه تعادل حرکت خواهد کرد.



از آنجا که $\kappa = \dot{\theta}$ است می توانیم $\delta r(t)$ را به شکل زیر بنویسیم:

$$\delta r(t) = \frac{v.}{\kappa} \sin \dot{\theta}.t$$

$$\dot{\theta}.t = \theta - \delta\theta \Rightarrow \sin \dot{\theta}.t = \sin \theta \cos \delta\theta + \cos \theta \sin \delta\theta$$

چون جمله $\delta\theta$ ، $\frac{v.}{\kappa r}$ دارد و $\frac{v.}{\kappa r}$ مرتبه اول است داریم:

$$\begin{cases} \sin \delta\theta \approx \delta\theta \\ \cos \delta\theta \approx 1 \end{cases}$$

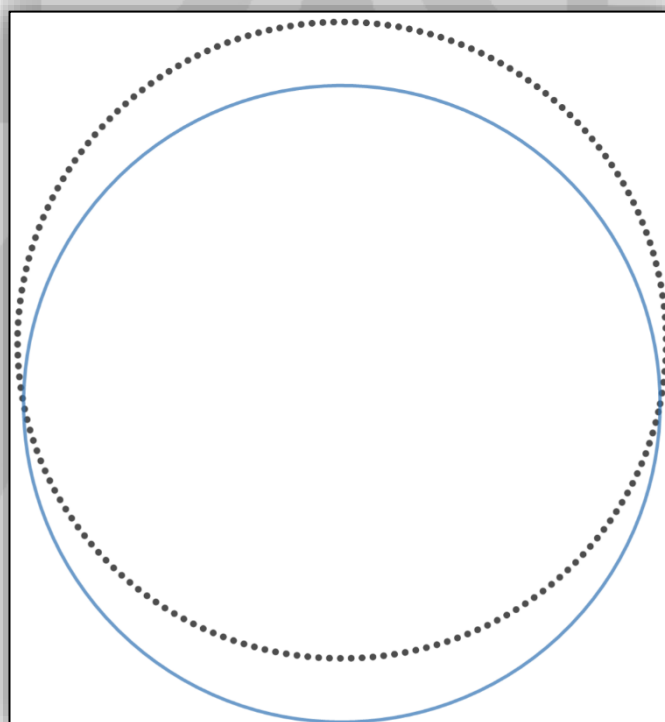
$$\Rightarrow \sin \dot{\theta}.t \approx \sin \theta + \delta\theta \cos \theta$$

$$\Rightarrow \frac{v.}{\kappa} \sin \dot{\theta}.t = \frac{v.}{\kappa} \sin \theta + \frac{v.}{\kappa} \delta\theta \cos \theta$$

$\frac{v.}{\kappa} \delta\theta$ مرتبه دو است پس تقریباً برابر صفر است:

$$\Rightarrow r(\theta) = r. + \frac{v.}{\kappa} \sin \theta$$

همانطور که معادله نشان می دهد، مسیر جدید یک دایره است که مرکز آن به اندازه $\frac{v.}{\kappa}$ تغییر کرده است.





مثال چهارم :

$$m\vec{g} = -m\vec{\nabla}\Phi = -m\frac{v^2}{r}$$

$$\vec{\nabla}\Phi = \frac{d\Phi}{dr} = \alpha kr^{-\alpha-1} \Rightarrow v^2 = r \frac{d\Phi}{dr} \Rightarrow v^2 = \alpha kr^{-\alpha}$$

$$\Rightarrow v^2 = -\alpha \Phi(r) \text{ (الف)}$$

$$k\varepsilon = k\varepsilon_1 + k\varepsilon_2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

$$\text{انرژی جنبشی هر ذره: } k\varepsilon_i = -\frac{1}{2} m_i \alpha \Phi(r_i)$$

$$\Rightarrow \varepsilon_i = m_i \Phi(r_i) \left(1 - \frac{1}{2} \alpha\right)$$

$$\Rightarrow \varepsilon = \left(1 - \frac{1}{2} \alpha\right) (m_1 \Phi(r_1) + m_2 \Phi(r_2)) \text{ (ب)}$$

$$L = m_1 r_1 v_1 + m_2 r_2 v_2, \quad v_i = \sqrt{k\alpha r_i^{-\frac{\alpha}{2}}}$$

$$\Rightarrow L_i = \sqrt{k\alpha} m r_i^{1-\frac{\alpha}{2}}$$

$$\Rightarrow L = \sqrt{k\alpha} (m_1 r_1^{1-\frac{\alpha}{2}} + m_2 r_2^{1-\frac{\alpha}{2}}) \text{ (ب)}$$

دیفرانسیل کامل یک تابع چند متغیره به صورت زیر است:

$$\Delta f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \Delta x_n$$

$$L(r_1, r_2) = \sqrt{k\alpha} (m_1 r_1^{1-\frac{\alpha}{2}} + m_2 r_2^{1-\frac{\alpha}{2}})$$

به منظور آن که با تغییر r_1 و r_2 تکانه زاویه ای کل تغییر نکند دیفرانسیل آن را برابر صفر قرار می دهیم.

$$\Rightarrow \Delta L = \sqrt{k\alpha} \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) (m_1 r_1^{-\frac{\alpha}{2}} \Delta r_1 + m_2 r_2^{-\frac{\alpha}{2}} \Delta r_2) = 0$$

$$\Rightarrow \Delta r_1 = -\frac{m_2}{m_1} \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{-\frac{\alpha}{2}} \Delta r_2 \text{ (ج)}$$

$$\Delta \varepsilon = \left(1 - \frac{1}{2} \alpha\right) (m_1 \frac{\partial \Phi(r_1)}{\partial r_1} \Delta r_1 + m_2 \frac{\partial \Phi(r_2)}{\partial r_2} \Delta r_2)$$



$$\frac{\partial \Phi(r_i)}{\partial r_i} = \alpha k r_i^{-(\alpha+1)}$$

$$\Rightarrow \Delta \varepsilon = k\alpha \left(1 - \frac{\alpha}{\gamma}\right) (m_\gamma r_\gamma^{-(1+\alpha)} \Delta r_\gamma + m_\gamma r_\gamma^{-(1+\alpha)} \Delta r_\gamma) \text{ (د)}$$

همانطور که پیش تر به دست آوردیم تکانه زاویه ای مدار دایروی به شکل زیر است:

$$L = \sqrt{k\alpha} m r^{1-\frac{\alpha}{\gamma}}$$

$$\frac{\partial L(r)}{\partial r} = m\sqrt{k\alpha} \left(1 - \frac{\alpha}{\gamma}\right) r^{-\frac{\alpha}{\gamma}} \Rightarrow \Delta L = m\sqrt{k\alpha} \left(1 - \frac{\alpha}{\gamma}\right) r^{-\frac{\alpha}{\gamma}} \Delta r$$

$$\frac{\Delta L}{\Delta r} > 0 \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{\gamma} > 0 \Rightarrow \alpha < \gamma \text{ (د)}$$



مثال پنجم :

با توجه به معادله داده شده داریم

$$\Phi_{eff} = \frac{1}{\gamma} \left(c^\gamma - \frac{\gamma GM_{BH}}{r} \right) \left(1 + \frac{L^\gamma}{c^\gamma r^\gamma} \right)$$

$$\Phi_{eff} = \frac{1}{\gamma} \left[-\frac{\gamma GM_{BH} L^\gamma}{c^\gamma r^\gamma} + \frac{L^\gamma}{r^\gamma} - \frac{\gamma GM_{BH}}{r} + c^\gamma \right]$$

برای آنکه ذره در تعادل باشد :

$$\frac{d\Phi_{eff}}{dr} = \frac{1}{\gamma} \left[\frac{\gamma GM_{BH} L^\gamma}{c^\gamma r^\xi} - \frac{\gamma L^\gamma}{r^\zeta} + \frac{\gamma GM_{BH}}{r^\gamma} \right]_{r=r_0} = 0$$

از $\frac{1}{r_0^\xi}$ در معادله بالا فاکتور می گیریم و آن را برابر صفر قرار می دهیم؛ با مقداری ساده سازی رابطه ای برای تکانه زاویه ای مدار دایروی در شعاع r_0 بدست می آوریم

$$\frac{\gamma GM_{BH}}{c^\gamma} L^\gamma - L^\gamma r_0 + GM_{BH} r_0^\gamma = 0 \Rightarrow L^\gamma = \frac{GM_{BH} r_0^\gamma}{r_0 - \frac{\gamma GM_{BH}}{c^\gamma}}$$

از آنجا که L^γ بزرگتر از صفر است پس مخرج کسر باید بزرگتر از صفر باشد

$$L^\gamma > 0 \Rightarrow r_0 - \frac{\gamma GM_{BH}}{c^\gamma} > 0 \Rightarrow r_0 > \frac{\gamma GM_{BH}}{c^\gamma} \text{ (الف)}$$

با توجه به رابطه بالا تمام مدار های دایروی باید شعاعی بیشتر از $\frac{3GM_{BH}}{c^2}$ داشته باشند.

$$\frac{d^2\Phi_{eff}}{dr^2} = -\frac{\gamma^2 GM_{BH} L^\gamma}{c^\gamma r^\circ} + \frac{\gamma L^\gamma}{r^\xi} - \frac{\gamma GM_{BH}}{r^\gamma}$$

می دانیم مدار های برای مدار های دایروی پایدار شرط $\left. \frac{d^2\Phi_{eff}}{dr^2} \right|_{r_0} > 0$ برقرار است

$$-\frac{\gamma^2 GM_{BH} L^\gamma}{c^\gamma r_0^\circ} + \frac{\gamma L^\gamma}{r_0^\xi} - \frac{\gamma GM_{BH}}{r_0^\gamma} > 0$$

$$L^\gamma \left(\gamma r_0 - \frac{\gamma^2 GM_{BH}}{c^\gamma} \right) > \gamma GM_{BH} r_0^\gamma$$

تکانه زاویه ای را از بخش الف جاگذاری می کنیم:

$$\gamma \frac{GM_{BH} r_0^\gamma}{r_0 - \frac{\gamma GM_{BH}}{c^\gamma}} \left(r_0 - \frac{\gamma GM_{BH}}{c^\gamma} \right) > \gamma GM_{BH} r_0^\gamma$$

$GM_{BH} r_0^\gamma$ را از دو طرف ساده کرده و $r_0 - \frac{\gamma GM_{BH}}{c^\gamma}$ را در دو طرف ضرب می کنیم

$$\gamma r_0 - \frac{\gamma^2 GM_{BH}}{c^\gamma} > \gamma r_0 - \frac{\gamma GM_{BH}}{c^\gamma} \Rightarrow r_0 > \frac{\gamma GM_{BH}}{c^\gamma} \text{ (ب)}$$



در بخش الف به دست آورديم:

$$\frac{\sqrt{GM_{BH}}}{c^3} L^3 - L^3 r + GM_{BH} r^3 = 0$$

عبارت بالا یک معادله درجه دو است که می‌توانیم با حل این معادله شعاع مدار دایروی ای با تکانه زاویه ای L را به ما می‌دهد.

$$r = \frac{L^3 \pm \sqrt{\Delta}}{\sqrt{GM_{BH}}}, \Delta = L^6 - 12 \left(\frac{GM_{BH}}{c} \right)^2 L^3$$

برای آنکه معادله بالا جواب داشته باشد:

$$\Delta > 0 \Rightarrow L > \sqrt[3]{12} \frac{GM_{BH}}{c} \quad (\text{ب})$$



مثال ششم :

$$\begin{aligned}\Phi(r) &= -\int \vec{g} \cdot d\vec{r} = \frac{k}{n+1} r^{n+1} \\ \Phi_{eff}(r) &= \frac{k}{n+1} r^{n+1} + \frac{L^2}{2r^2} \Rightarrow \frac{\partial \Phi_{eff}}{\partial r} = kr^n - \frac{L^2}{r^3} \\ &\Rightarrow \frac{\partial^2 \Phi_{eff}}{\partial r^2} = nkr^{n-1} + 3\frac{L^2}{r^4} \\ r = r_c &\Rightarrow \left. \frac{\partial \Phi_{eff}}{\partial r} \right|_{r_c} = 0 \Rightarrow kr_c^n = \frac{L^2}{r_c^3} \\ &\Rightarrow \left. \frac{\partial^2 \Phi_{eff}}{\partial r^2} \right|_{r_c} = (n+3)kr_c^{n-1} = (n+3)kr_c^{n-1} \\ &\Rightarrow \kappa = (n+3)kr_c^{n-1} \text{ (الف)}\end{aligned}$$

با توجه به نتیجه به دست آمده متوجه می‌شویم برای آنکه مدار دایروی پایدار وجود داشته باشد باید $n > -3$ باشد.

$$\begin{aligned}kr_c^n &= \frac{L^2}{r_c^3} = r_c \dot{\theta}^2 \Rightarrow \dot{\theta}^2 = kr_c^{n-1} \\ \frac{Y}{X} &= \frac{r \dot{\theta}}{\kappa} = \frac{r}{\sqrt{n+3}} \\ \left\{ \begin{array}{l} \frac{Y}{X} < 1 \Rightarrow e = \sqrt{1 - \left(\frac{Y}{X}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{r}{n+3}} \Rightarrow e = \sqrt{\frac{n-1}{n+3}} ; n > 1 \\ \frac{Y}{X} > 1 \Rightarrow e = \sqrt{1 - \left(\frac{X}{Y}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{n+3}{r}} \Rightarrow e = \frac{\sqrt{1-n}}{r} ; n < 1 \end{array} \right. \text{ (ب)}\end{aligned}$$



مثال هفتم:

$$\vec{g} = -\vec{\nabla}\Phi = -\frac{\partial\Phi}{\partial R}\hat{R} - \frac{1}{R}\frac{\partial\Phi}{\partial\phi}\hat{\phi} - \frac{\partial\Phi}{\partial z}\hat{z}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial R} = \frac{v_\gamma}{R^\gamma + \frac{z^\gamma}{q^\gamma}}R; \frac{\partial\Phi}{\partial\phi} = \cdot; \frac{\partial\Phi}{\partial z} = \frac{v_\gamma}{R^\gamma + \frac{z^\gamma}{q^\gamma}}\frac{z}{q^\gamma}$$

$$\vec{g} = -\frac{v_\gamma}{R^\gamma + \frac{z^\gamma}{q^\gamma}}\left(R\hat{R} + \frac{z}{q^\gamma}\hat{z}\right) \text{ (الف)}$$

$$z = \cdot; \dot{R} = \cdot \Rightarrow g_R|_{R_g, \cdot} = -\frac{v_\gamma}{R_g} = -\frac{v_\gamma}{R_g} \Rightarrow v = v. \text{ (ب)}$$

از آنجا که در این تابع پتانسیل $\Phi(R, +z) = \Phi(R, -z)$ است پس به ذره ای که روی صفحه قرار دارد نیرویی وارد نمی شود

$$\Phi_{eff}(R, z) = \frac{v_\gamma}{\gamma} \ln\left(R^\gamma + \frac{z^\gamma}{q^\gamma}\right) + \frac{L_z^\gamma}{\gamma R^\gamma}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial\Phi_{eff}}{\partial R} = \frac{v_\gamma}{R^\gamma + \frac{z^\gamma}{q^\gamma}}R + \frac{L_z^\gamma}{R^\gamma} \Rightarrow \frac{\partial\Phi_{eff}}{\partial R} \Big|_{R_g, \cdot} = \frac{v_\gamma}{R_g} - \frac{L_z^\gamma}{R_g^\gamma} \Rightarrow L_z = R_g v.$$

$$\frac{\partial^\gamma\Phi_{eff}}{\partial R^\gamma} = v_\gamma \left(\frac{1}{R^\gamma + \frac{z^\gamma}{q^\gamma}} - \gamma \frac{R^\gamma}{\left(R^\gamma + \frac{z^\gamma}{q^\gamma}\right)^\gamma} \right) + \gamma \frac{v_\gamma}{R^\gamma} \xrightarrow{R=R_g, z=\cdot} = \gamma \frac{v_\gamma}{R_g^\gamma}$$

$$\frac{\partial^\gamma\Phi_{eff}}{\partial R^\gamma} \Big|_{R_g, \cdot} = \gamma \frac{v_\gamma}{R_g^\gamma} > \cdot \text{ (ج)}$$

با توجه به نتیجه به دست آمده تمام مدارهای دایروی پایدار اند.

$$\frac{\partial\Phi_{eff}}{\partial z} = \frac{v_\gamma}{R^\gamma + \frac{z^\gamma}{q^\gamma}}\frac{z}{q^\gamma} \Rightarrow \frac{\partial^\gamma\Phi_{eff}}{\partial z^\gamma} = \frac{v_\gamma}{q^\gamma} \left(\frac{1}{R^\gamma + \frac{z^\gamma}{q^\gamma}} - \frac{\gamma \frac{z^\gamma}{q^\gamma}}{\left(R^\gamma + \frac{z^\gamma}{q^\gamma}\right)^\gamma} \right)$$

$$\frac{\partial^\gamma\Phi_{eff}}{\partial z^\gamma} \Big|_{R_g, \cdot} = \frac{v_\gamma}{q^\gamma R_g^\gamma} \Rightarrow v = \frac{v_\gamma}{q R_g} \text{ (د)}$$



مثال هشتم :

$$\Phi = \frac{v_r}{r} \ln \left(R_c^r + x^r + \frac{y^r}{q^r} \right) = cte.$$

$$\Rightarrow R_c^r + x^r + \frac{y^r}{q^r} = cte. \Rightarrow x^r + \frac{y^r}{q^r} = cte \Rightarrow \text{الف) معادله توصیف کننده یک بیضی}$$

(ب)

$$\sqrt{x^r + y^r} \ll R_c \Rightarrow \ln \left(R_c^r + x^r + \frac{y^r}{q^r} \right) = \ln \left(R_c^r \left(1 + \frac{x^r + \frac{y^r}{q^r}}{R_c^r} \right) \right), \frac{x^r + \frac{y^r}{q^r}}{R_c^r} \ll 1$$

$$\text{if } u \ll 1 : \ln(1 + u) \approx u$$

$$\Rightarrow \Phi(x, y) \approx \frac{v_r}{r R_c^r} \left(x^r + \frac{y^r}{q^r} \right) \text{ (ب) تابع پتانسیل در نزدیکی مرکز}$$

$$\vec{\nabla} \Phi = \frac{v_r}{R_c^r} \left(x \hat{x} + \frac{y}{q^r} \hat{y} \right) \Rightarrow \vec{g} = - \frac{v_r}{R_c^r} \left(x \hat{x} + \frac{y}{q^r} \hat{y} \right)$$

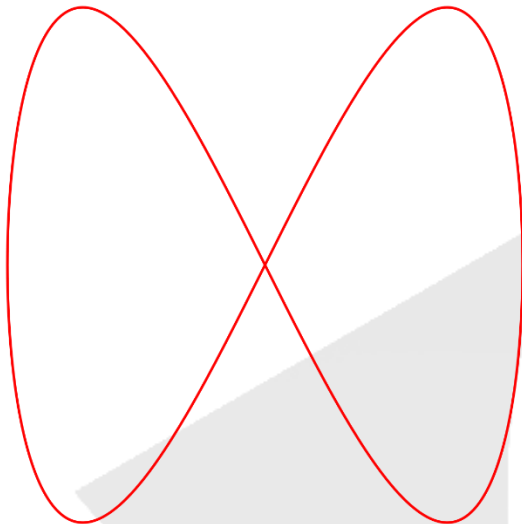
$$\vec{a} = \vec{g} \Rightarrow \ddot{x} \hat{x} + \ddot{y} \hat{y} = - \frac{v_r}{R_c^r} \left(x \hat{x} + \frac{y}{q^r} \hat{y} \right) \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} + \frac{v_r}{R_c^r} x = 0 \\ \ddot{y} + \frac{v_r}{q^r R_c^r} y = 0 \end{cases}$$

معادلات دیفرانسیل بالا همان معادلات نوسانگر هماهنگ هستند که پیش تر حل آنها را بررسی کردیم.

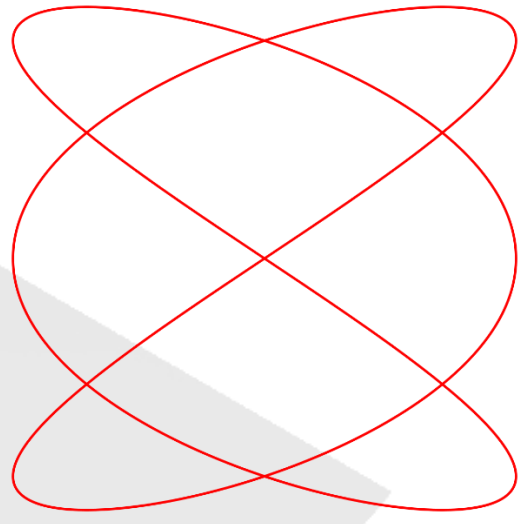
$$\text{ب) از حل معادله دیفرانسیل های بالا} \begin{cases} x(t) = X \cos(\omega_x t - \alpha); \omega_x = \frac{v_r}{R_c^r} \\ y(t) = Y \cos(\omega_y t - \beta); \omega_y = \frac{v_r}{q^r R_c^r} \end{cases}$$

خم توصیف کننده حرکت در مسیری به معادله بالا را، خم "لیساژور" (*Lissagous curve*) می نامند، اگر پس از چند دوره تناوب در یکی از راستاها، نوسان در راستای دیگر نیز به پایان چرخه رسید، مسیر بسته خواهد بود. به عبارتی برای آنکه مسیر حرکت بسته باشد دوره تناوب ها در راستاهای x و y گویا از هم باشند. یعنی $\frac{\omega_x}{\omega_y} = n$ که n عددی گویا باشد.

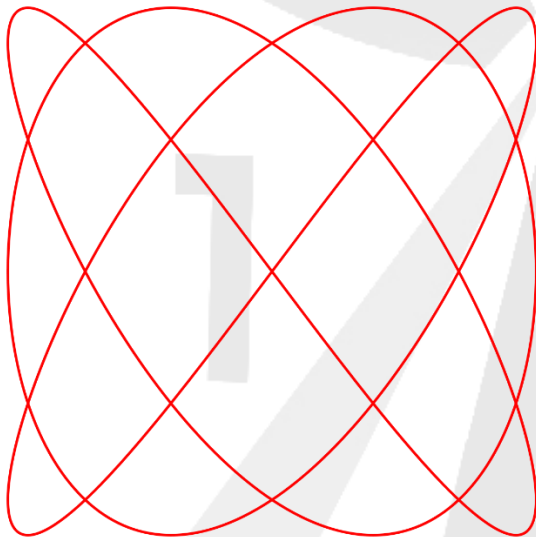
مسیر حرکت به ازای اختلاف فاز $\delta = \alpha - \beta = \frac{\pi}{p}$ برای چند n در صفحه بعد رسم شده است:



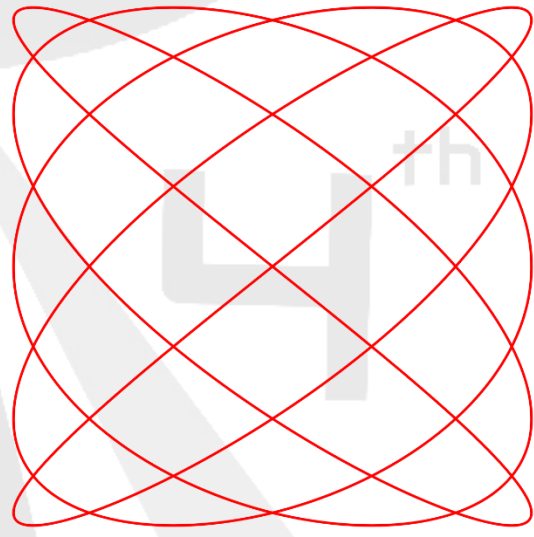
$$n = \frac{1}{2}$$



$$n = \frac{3}{2}$$



$$n = \frac{5}{2}$$



$$n = \frac{7}{2}$$

(ع)

$$R \gg R_c \Rightarrow x^r + y^r \gg R_c^r \Rightarrow \ln(R_c^r + x^r + y^r) \approx \ln(x^r + y^r) \approx r \ln R$$

$$\Rightarrow \Phi(R) \approx v^r \ln R \Rightarrow -\vec{\nabla}\Phi = -\frac{v^r}{R} \hat{R} = -\frac{v^r}{R} \hat{R} \Rightarrow v(R) = v. = cte. (ع)$$



مثال نهم:

ابتدا معادله شتاب در دستگاه دوار را بدست می آوریم:

$$\vec{a} = -\vec{\nabla}\Phi - \vec{\Omega}_b \times (\vec{\Omega}_b \times \vec{r}) - 2\vec{\Omega}_b \times \vec{v}$$

$$\vec{\nabla}\Phi = \frac{v_x^2}{x^2 + \frac{y^2}{q^2} + R_c^2} \left(x \hat{x} + \frac{y}{q^2} \hat{y} \right), \vec{v} = (\dot{x} \hat{x} + \dot{y} \hat{y})$$

$$\Rightarrow \vec{\Omega}_b \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \cdot & \cdot & \Omega_b \\ \dot{x} & \dot{y} & \cdot \end{vmatrix} = -\Omega_b \dot{y} \hat{x} + \Omega_b \dot{x} \hat{y}$$

$$\Rightarrow \vec{a} = -\frac{v_x^2}{x^2 + \frac{y^2}{q^2} + R_c^2} \left(x \hat{x} + \frac{y}{q^2} \hat{y} \right) + (x \hat{x} + y \hat{y}) \Omega_b^2 - 2\Omega_b (-\dot{y} \hat{x} + \dot{x} \hat{y}) = \ddot{x} \hat{x} + \ddot{y} \hat{y}$$

اکنون شتاب را در جهت های مختلف تجزیه می کنیم و شروط نقاط لاگرانژ را بدست می آوریم:

$$\begin{cases} a_x = -\frac{v_x^2}{x^2 + \frac{y^2}{q^2} + R_c^2} x + x \Omega_b^2 - 2\Omega_b \dot{y} \\ a_y = -\frac{v_x^2}{x^2 + \frac{y^2}{q^2} + R_c^2} \frac{y}{q^2} + y \Omega_b^2 - 2\Omega_b \dot{x} \end{cases} \xrightarrow{\text{Lagrangian points}} \vec{a}, \vec{v} = \cdot$$

برای معادلات بالا دو جفت جواب وجود دارد:

$$\frac{v_x^2}{x_L^2 + \frac{y_L^2}{q^2} + R_c^2} x_L = x_L \Omega_b^2$$

$$\begin{cases} \frac{v_x^2}{x_L^2 + \frac{y_L^2}{q^2} + R_c^2} x_L = x_L \Omega_b^2 \Rightarrow \begin{cases} x_L = \cdot \\ x_L \neq \cdot \end{cases} \\ \frac{v_x^2}{x_L^2 + \frac{y_L^2}{q^2} + R_c^2} y_L = y_L \Omega_b^2 \Rightarrow \begin{cases} y_L = \cdot \\ y_L \neq \cdot \end{cases} \end{cases}$$

اگر $x_L = \cdot$:

$$\xrightarrow{x_L = \cdot} \frac{v_x^2}{\frac{y_L^2}{q^2} + R_c^2} y_L = y_L \Omega_b^2 \Rightarrow \begin{cases} y_L = \cdot \\ y_L \neq \cdot \Rightarrow \frac{v_x^2}{q^2} = \Omega_b^2 \frac{y_L^2}{q^2} + R_c^2 \Omega_b^2 \Rightarrow y_L = \pm \sqrt{\frac{v_x^2}{\Omega_b^2} - q^2 R_c^2} \end{cases}$$

بدین صورت سه نقطه از نقاط لاگرانژی را بدست آوردیم.

حال اگر $y_L = 0$:

$$\frac{v^r}{x_L^r + R_c^r} x_L = x_L \Omega_b^r \Rightarrow \begin{cases} x_L = 0 \\ x_L \neq 0 \Rightarrow v^r = \Omega_b^r x_L + R_c^r \Omega_b^r \Rightarrow x_L = \pm \sqrt{\frac{v^r}{\Omega_b^r} - R_c^r} \end{cases}$$

دو نقطه دیگر را نیز پیدا کردیم.

پس مجموعاً ۵ نقطه لاگرانژی برای این فرم پتانسیل وجود دارد:

$$\left\{ \begin{array}{l} L_1: \left(\sqrt{\frac{v^r}{\Omega_b^r} - R_c^r}, 0 \right) \\ L_2: \left(-\sqrt{\frac{v^r}{\Omega_b^r} - R_c^r}, 0 \right) \\ L_3: (0, 0) \\ L_4: \left(0, -\sqrt{\frac{v^r}{\Omega_b^r} - q^r R_c^r} \right) \\ L_5: \left(0, +\sqrt{\frac{v^r}{\Omega_b^r} - q^r R_c^r} \right) \end{array} \right.$$



مثال دهم :

با توجه به تابع پتانسیل داده شده در مثال نهم، مشتقات اول و دوم تابع پتانسیل موثر را نسبت به x و y محاسبه می کنیم:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi_{effx} = \frac{v^r x}{x^r + \frac{y^r}{q^r} + R_c^r} - x\Omega_b^r \Rightarrow \Phi_{effxx} = \frac{v^r}{\left(x^r + \frac{y^r}{q^r} + R_c^r\right)^r} \left(-x^r + \frac{y^r}{q^r} + R_c^r\right) - \Omega_b^r \\ \Phi_{effy} = \frac{\frac{v^r}{q^r} y}{x^r + \frac{y^r}{q^r} + R_c^r} - y\Omega_b^r \Rightarrow \Phi_{effyy} = \frac{\frac{v^r}{q^r}}{\left(x^r + \frac{y^r}{q^r} + R_c^r\right)^r} \left(-\frac{y^r}{q^r} + x^r + R_c^r\right) - \Omega_b^r \\ \Phi_{effxy} = \frac{\frac{r v^r}{q^r} xy}{x^r + \frac{y^r}{q^r} + R_c^r} \end{array} \right.$$

با توجه به مختصات که برای نقاط لاگرانژ بدست آوردیم:

$$L_1: \left(\sqrt{\frac{v^r}{\Omega_b^r} - R_c^r}, \cdot \right) \text{ و } L_r: \left(-\sqrt{\frac{v^r}{\Omega_b^r} - R_c^r}, \cdot \right) \Rightarrow x_L = \pm \sqrt{\frac{v^r}{\Omega_b^r} - R_c^r} \text{ و } y_L = \cdot$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \Phi_{effxx-L} = r \frac{\Omega_b^r}{v^r} \left(-\frac{v^r}{\Omega_b^r} + R_c^r\right) \\ \Phi_{effyy-L} = \cdot \\ \Phi_{effxy-L} = \cdot \end{array} \right.$$

اکنون نتایج بدست آمده را در معادله ای که برای λ بدست آورده بودیم جاگذاری می کنیم:

$$\begin{aligned} \lambda^r + \left(\Phi_{effyy-L} + \Phi_{effxx-L} + r\Omega_b^r\right) \lambda^r + \Phi_{effxx-L} \Phi_{effyy-L} &= \cdot \\ \Rightarrow \lambda^r + \left(r \frac{\Omega_b^r}{v^r} \left(-\frac{v^r}{\Omega_b^r} + R_c^r\right) + r\Omega_b^r\right) \lambda^r &= \cdot \Rightarrow \lambda^r = -r \frac{\Omega_b^r}{v^r} \left(\frac{v^r}{\Omega_b^r} + R_c^r\right) \\ \Rightarrow \lambda = \pm i \sqrt{r \left(\Omega_b^r + \frac{R_c^r \Omega_b^r}{v^r}\right)} &\Rightarrow \alpha \equiv \sqrt{r \left(\Omega_b^r + \frac{R_c^r \Omega_b^r}{v^r}\right)} \end{aligned}$$

با استفاده از فرمول اوایلر می توانیم جواب معادله را از حالت موهومی به حقیقی و فرم سینوسی کسینوسی تبدیل می کنیم:

$$\Rightarrow \begin{cases} \xi(t) = X_1 \cos(\alpha t) + X_r \sin(\alpha t) \\ \eta(t) = Y_1 \cos(\alpha t) + Y_r \sin(\alpha t) \end{cases}, \alpha = \sqrt{r \left(\Omega_b^r + \frac{R_c^r \Omega_b^r}{v^r}\right)}$$

بدین ترتیب نقاط L_1 و L_r در تعادل پایدار هستند و در صورت آنکه دچار اختلال شوند، با فرکانس $\sqrt{r \left(\Omega_b^r + \frac{R_c^r \Omega_b^r}{v^r}\right)}$ حول نقطه تعادل در دو راستا نوسان می کنند.



اکنون به بررسی پایداری نقطه L_3 می پردازیم، مختصات این نقطه:

$$L_3: (0, 0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Phi_{eff_{xx-L}} = \frac{v^r}{R_c^r} - \Omega_b^r \\ \Phi_{eff_{yy-L}} = \frac{v^r}{R_c^r} - \Omega_b^r \\ \Phi_{eff_{xy-L}} = 0 \end{cases}$$

اکنون نتایج بدست آمده را در معادله ای که برای λ بدست آورده بودیم جاگذاری می کنیم:

$$\lambda^r + \left(\frac{v^r}{R_c^r} - \Omega_b^r + \frac{v^r}{R_c^r} - \Omega_b^r + r\Omega_b^r \right) \lambda^r + \left(\frac{v^r}{R_c^r} - \Omega_b^r \right)^r = 0$$

معادله درجه دوم بالا را حل می کنیم:

$$\lambda^r = \frac{-r \left(\frac{v^r}{R_c^r} + \Omega_b^r \right) \pm \sqrt{r \left(\frac{v^r}{R_c^r} + \Omega_b^r + \frac{r v^r \Omega_b^r}{R_c^r} \right) - r \left(\frac{v^r}{R_c^r} + \Omega_b^r - \frac{r v^r \Omega_b^r}{R_c^r} \right)}}{r}$$

$$\Rightarrow \lambda^r = - \left(\frac{v^r}{R_c^r} \pm \Omega_b^r \right)^r \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \pm i \sqrt{\left(\frac{v^r}{R_c^r} + \Omega_b^r \right)^r} \Rightarrow \alpha_1 = \sqrt{\left(\frac{v^r}{R_c^r} + \Omega_b^r \right)^r} = \left(\frac{v^r}{R_c^r} + \Omega_b^r \right) \\ \lambda_2 = \pm i \sqrt{\left(\frac{v^r}{R_c^r} - \Omega_b^r \right)^r} \Rightarrow \alpha_2 = \sqrt{\left(\frac{v^r}{R_c^r} - \Omega_b^r \right)^r} = \left| \frac{v^r}{R_c^r} - \Omega_b^r \right| \end{cases}$$

از آنجا که سری جواب های بدست آمده برای λ موهومی هستند، پس تعادل پایدار بوده و مجدداً با استفاده از فرمول اوپلر، جواب های معادله را به فرم سینوسی کسینوسی می نویسیم:

$$\begin{cases} \xi(t) = X_1 \cos(\alpha_1 t + \phi_1) + X_2 \sin(\alpha_2 t + \phi_2) \\ \eta(t) = Y_1 \cos(\alpha_1 t + \phi_1) + Y_2 \sin(\alpha_2 t + \phi_2) \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_1 = \left(\frac{v^r}{R_c^r} + \Omega_b^r \right) \\ \alpha_2 = \left| \frac{v^r}{R_c^r} - \Omega_b^r \right| \end{cases}$$

اکنون به بررسی پایداری دو نقطه دیگر می پردازیم، با توجه به مختصاتی که برای نقاط L_4 و L_5 بدست آوردیم:

$$L_4: \left(0, -\sqrt{\frac{v^r}{\Omega_b^r} - R_c^r} \right) \text{ و } L_5: \left(0, +\sqrt{\frac{v^r}{\Omega_b^r} - R_c^r} \right) \Rightarrow x_L = 0, y_L = \pm \sqrt{\frac{v^r}{\Omega_b^r} - R_c^r}$$

$$\begin{cases} \Phi_{eff_{xx-L}} = r \frac{\Omega_b^r}{v^r} \left(-\frac{v^r}{\Omega_b^r} + R_c^r \right) \\ \Phi_{eff_{yy-L}} = 0 \\ \Phi_{eff_{xy-L}} = 0 \end{cases}$$



$$\Rightarrow \lambda^r + r \frac{\Omega_b^f}{v^r} \left(\frac{v^r}{\Omega_b^r} + R_c^r \right) \lambda^r = 0 \Rightarrow \lambda^r = -r \frac{\Omega_b^f}{v^r} \left(\frac{v^r}{\Omega_b^r} + R_c^r \right)$$

$$\Rightarrow \lambda = \pm i \sqrt{r \left(\Omega_b^r + \frac{R_c^r \Omega_b^f}{v^r} \right)} \Rightarrow \alpha \equiv \sqrt{r \left(\Omega_b^r + \frac{R_c^r \Omega_b^f}{v^r} \right)}$$

با استفاده از فرمول اویلر می توانیم جواب معادله را از حالت موهومی به حقیقی و فرم سینوسی کسینوسی تبدیل می کنیم:

$$\Rightarrow \begin{cases} \xi(t) = X_1 \cos(\alpha t) + X_2 \sin(\alpha t) \\ \eta(t) = Y_1 \cos(\alpha t) + Y_2 \sin(\alpha t) \end{cases}, \alpha = \sqrt{r \left(\Omega_b^r + \frac{R_c^r \Omega_b^f}{v^r} \right)}$$

بدین ترتیب نقاط L_4 و L_5 نیز در تعادل پایدار هستند و در صورت آنکه دچار اختلال شوند، با فرکانس $\sqrt{r \left(\Omega_b^r + \frac{R_c^r \Omega_b^f}{v^r} \right)}$ حول نقطه تعادل در دو راستا نوسان می کنند.



مثال یازدهم :

از تعریف زاویه گام داریم:

$$\cot i = \left| R \frac{\partial f}{\partial R} \right|$$

$$f = f(R) \Rightarrow \cot i = \left| R \frac{df}{dR} \right|$$

$$f(R) = -\frac{\alpha}{m} \log R + cte. \Rightarrow \frac{df}{dR} = -\frac{\alpha}{m \ln 10} \cdot \frac{1}{R} \Rightarrow \cot i = \frac{\alpha}{m \ln 10} = cte.$$

پیوست دوم : پیوست ریاضی





○ پیوست ریاضی اول : معادلات دیفرانسیل (*Differential Equations : DE*)

حل معادلات دیفرانسیل از گذشته های دور توجه ریاضی دانان برجسته ای را به خود جلب کرده و همچنان ریاضی دانان بسیاری در این زمینه به فعالیت می پردازند. در این پیوست قصد داریم تا در حد نیاز با معادلات دیفرانسیل آشنا شویم و برای چند معادله کاربردی در دینامیک کهکشانی راه حل ارائه دهیم. ابتدا بیایید اندکی با کلیت معادلات دیفرانسیل آشنا شویم.

معادله دیفرانسیل چیست؟ پاسخ این سوال بسیار ساده است. هر معادله ای که شامل مشتق باشد یک معادله دیفرانسیل خواهد بود. پیش از آنکه اقدام به حل یک معادله دیفرانسیل کنیم، لازم است که بدانیم با چه معادله دیفرانسیلی سر و کار داریم. بیایید اندکی با دسته بندی معادلات دیفرانسیل و چند تعریف و اصل پایه ای آشنا شویم.

معادلات دیفرانسیل معمولی (*Ordinary DE*) و معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی (*Partial DE*):

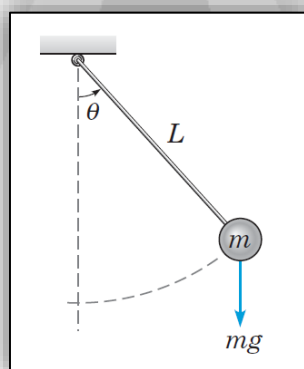
یکی از مهم ترین دسته بندی های معادلات دیفرانسیل بر پایه آن است که مجهول مورد نظر تنها تابع یک متغیر است یا تابع مجموعه ای از متغیر های مستقل است. اگر تابع مجهول تنها وابسته به یک متغیر باشد، معادله دیفرانسیل معمولی خواهد بود اما اگر تابع مجهول وابسته به چند متغیر مستقل باشد، معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی خواهد بود.

معادلات دیفرانسیل خطی (*Linear DE*) و معادلات دیفرانسیل غیر خطی (*Nonlinear DE*):

در صورتی که معادله دیفرانسیل ترکیبی خطی از y و y' و ... و $y^{(n)}$ باشد، معادله دیفرانسیل خطی خواهد بود:

$$a_n(t)y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_1(t)y' + a_0(t)y = g(t)$$

به عنوان مثال برای معادلات دیفرانسیل غیر خطی می توان حرکت یک آونگ ساده را در نظر گرفت:



$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \sin \theta = 0$$

اما در حد نوسانات کوچک ($\sin \theta \approx \theta$) به یک معادله دیفرانسیل خطی تبدیل خواهد شد:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \theta = 0$$

مرتبه معادل دیفرانسیل



به بالاترین درجه مشتق که در معادله دیفرانسیل پیدا می شود، مرتبه معادله دیفرانسیل می گویند؛ به طور مثال معادله

$$a_n(t)y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_1(t)y' + a_0(t)y = g(t)$$

یک معادله مرتبه n ام است.

معادلات دیفرانسیل همگن (*Homogenous*) یا غیر همگن (*Non homogenous*):

همگنی در معادلات دیفرانسیل می تواند معانی متفاوتی داشته باشد، اما برای معادلات دیفرانسیل خطی بدین صورت تعریف می شود:

$$a_n(t)y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_1(t)y' + a_0(t)y = 0$$

معادله بالا یک معادله دیفرانسیل همگن خطی مرتبه n است.

تعداد جواب های یک معادله دیفرانسیل همگن خطی مرتبه n :

یک معادله دیفرانسیل همگن خطی مرتبه n ، دارای n جواب مستقل خطی است. بدین معنا که این جواب ها مستقل از یکدیگر هستند و نمی توان یکی از این جواب ها را به صورت ترکیب خطی جواب های دیگر نوشت. (توضیحات بیشتر در مورد ترکیب خطی و مستقل خطی بودن و ... باعث خواهد شد تا بیش از حد نیاز در ریاضیات غرق شویم، به همین دلیل توضیح بیشتری ارائه نخواهیم داد.)

اگر y_i یکی از جواب های مستقل معادله باشد، جواب عمومی این معادله (Y) را به صورت ترکیب خطی این n جواب می نویسیم:

$$Y = \sum_{i=1}^n y_i$$

در این جزوه عموماً با معادلات دیفرانسیل درجه دوم رو به رو هستیم، از این رو قصد داریم تا اندکی آن ها را بررسی کرده و راه حل چند نمونه پرکاربرد را ارائه دهیم.

* معادله دیفرانسیل همگن خطی مرتبه دوم با ضرایب ثابت:

این معادله را می توان به فرم زیر نوشت:

$$ay'' + by' + cy = 0$$

(بدیهی است که a باید مخالف 0 باشد). برای حل این معادله ابتدا پاسخی به فرم نمایی را در معادله قرار می دهیم تا متوجه شویم که آیا پاسخ معادله می تواند به این فرم باشد یا نه.

$$y = e^{\lambda t} \Rightarrow y' = \lambda e^{\lambda t} \Rightarrow y'' = \lambda^2 e^{\lambda t}$$

$$\Rightarrow (a\lambda^2 + b\lambda + c)e^{\lambda t} = 0$$

در صورتی که $a\lambda^2 + b\lambda + c$ برابر صفر باشد معادله بالا برقرار خواهد بود و در نتیجه فرم نمایی می تواند پاسخ معادله باشد.



$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

در نتیجه هر یک از توابع $y_1 = \exp \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ و $y_2 = \exp \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ می توانند پاسخی از معادله باشند، همچنین این دو تابع از یکدیگر مستقل خطی هستند، از طرفی چون معادله مرتبه دوم است پس باید انتظار داشته باشیم دو جواب مساقط خطی پیدا کنیم که پیدا کرده ایم، پس پاسخ عمومی معادله به صورت زیر خواهد بود:

$$y(t) = c_1 \exp\left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} t\right) + c_2 \exp\left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} t\right)$$

در صورتی که ریشه های معادله $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ موهومی باشند، می بایست از فرمول اویلر استفاده کنیم تا جواب را به صورت حقیقی بنویسیم:

$$b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow \sqrt{b^2 - 4ac} = \sqrt{-(4ac - b^2)} = i\sqrt{4ac - b^2}$$

$$-\frac{b}{2a} \equiv q, \sqrt{4ac - b^2} \equiv \gamma \Rightarrow y(t) = e^{qt}(c_1 e^{i\gamma t} + c_2 e^{-i\gamma t})$$

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

$$\Rightarrow y(t) = e^{qt}[(c_1 + c_2) \cos \gamma t + i(c_1 - c_2) \sin \gamma t]$$

در صورتی که شرایط اولیه مساله ما حقیقی باشند و جزء موهومی نداشته باشند، از آنجا که این معادله یک شرایط حقیقی است، پس نباید جز موهومی داشته باشد. می توان نتیجه گرفت که ضرایب آن نیز باید حقیقی باشند:

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 \in \mathbb{R} \\ c_1 - c_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

ثوابت c_1 و c_2 را می توان به صورت اعداد مختلط نشان داد:

$$\begin{cases} c_1 = k_1 + ik'_1 \\ c_2 = k_2 + ik'_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = (k_1 + k_2) + i(k'_1 + k'_2) \in \mathbb{R} \\ i(c_1 - c_2) = i(k_1 - k_2) - (k'_1 - k'_2) \in \mathbb{R} \end{cases}$$

از آنجا که $c_1 + c_2$ و $c_1 - c_2$ باید عضو اعداد حقیقی باشند:

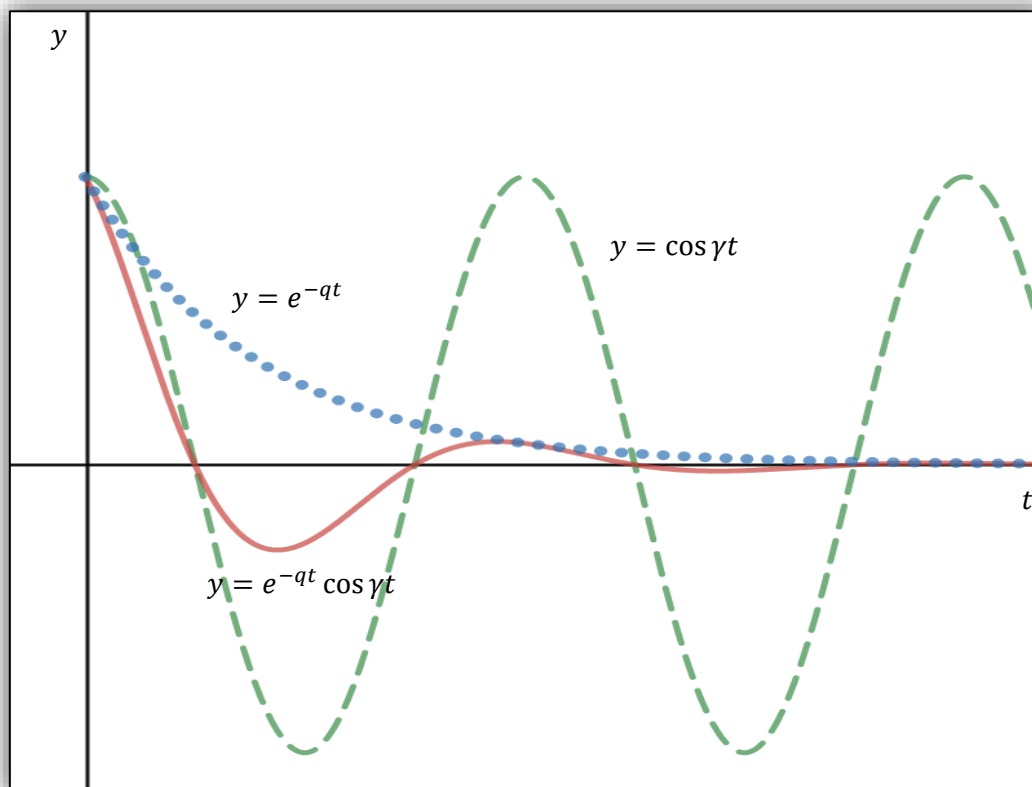
$$\begin{cases} i(k'_1 + k'_2) = 0 \Rightarrow k'_1 = -k'_2 = k' \\ i(k_1 - k_2) = 0 \Rightarrow k_1 = k_2 = k \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1 = k + ik' \\ c_2 = k - ik' \end{cases}$$

در نتیجه:

$$y(t) = e^{qt}(A \cos \gamma t + B \sin \gamma t)$$

در صفحه بعد حل این معادله را به ازای $q = 0$ ، $\gamma = 0$ و $q, \gamma \neq 0$ مشاهده می کنید.



پاسخی که پیش تر ارائه دادیم ممکن است در شرایطی خاص، کافی نباشد. در صورتی که دلتای معادله درجه دو $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ برابر صفر باشد، ما تنها یک جواب داریم، اما می دانیم که معادله ما دو جواب مستقل خطی دارد. در صورتی که γ_1 یک جواب معادله باشد، ضریب ثابتی از γ_1 نیز پاسخ معادله نیز خواهد بود، با ایده گیری از همین مساله، برای پیدا کردن جواب دوم یک جواب دیگر به فرم

$$y = v(t)y_1 = ve^{\lambda t}$$

را امتحان می کنیم که در آن $v(t)$ ثابت نیست و تابعی از t است؛ همچنین $\lambda = -\frac{b}{2a}$

$$\Rightarrow y' = v'e^{\lambda t} + \lambda ve^{\lambda t} \Rightarrow y'' = v''e^{\lambda t} + 2\lambda v'e^{\lambda t} + \lambda^2 ve^{\lambda t}$$

$$b^2 = 4ac \Rightarrow (av'' + 2a\lambda v' + a\lambda^2 v + bv' + b\lambda v + cv)e^{\lambda t} = 0$$

$$\Rightarrow \left(av'' - bv' + \frac{b^2}{4a}v + bv' - \frac{b^2}{2a}v + \frac{b^2}{4a}v \right) e^{\lambda t} = 0 \Rightarrow av''e^{\lambda t} = 0$$

در صورتی که v'' برابر با 0 باشد، معادله بالا صادق خواهد بود:

$$v'' = 0 \Rightarrow v(t) = c_1 t + c_2$$

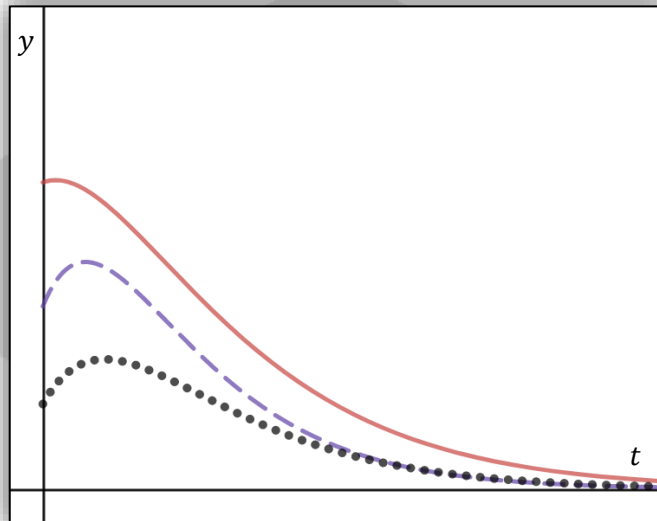
$$\Rightarrow y(t) = c_1 te^{\lambda t} + c_2 e^{\lambda t}$$



در نتیجه جواب معادله بدین صورت خواهد بود:

$$ay'' + by' + \frac{b^2}{4a}y = 0 \Rightarrow y(t) = Ate^{-\frac{b}{2a}t} + Be^{-\frac{b}{2a}t}$$

معادله بالا به ازای چند حالت مختلف را در شکل زیر مشاهده می کنید.



* معادله دیفرانسیل ناهمگن خطی مرتبه دوم با ضرایب ثابت:

فرم کلی این معادله به صورت زیر است:

$$ay'' + by' + cy = g(t)$$

برای آنکه حل این معادلات را بررسی کنیم به چند قضیه قضیه نیاز داریم که در ادامه آنها را مطرح و برای آنها اثباتی ارائه می دهیم.

قضیه اول: اگر Y_1 و Y_2 دو جواب یک معادله دیفرانسیل ناهمگن خطی باشند، اختلاف آن ها پاسخ معادله همگن مربوطه خواهد بود.

اثبات قضیه اول:

فرم کلی معادله دیفرانسیل ناهمگن خطی به صورت

$$a_n(t)y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_1(t)y' + a_0(t)y = g(t)$$

می باشد و معادله همگن مربوطه به صورت

$$a_n(t)y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_1(t)y' + a_0(t)y = 0$$

خواهد بود.

می دانیم Y_1 و Y_2 پاسخ های معادله ناهمگن مربوطه هستند. در نتیجه:



$$\begin{cases} a_n(t)Y_1^{(n)} + a_{n-1}(t)Y_1^{(n-1)} + \dots + a_1(t)Y_1 = g(t) \\ a_n(t)Y_2^{(n)} + a_{n-1}(t)Y_2^{(n-1)} + \dots + a_1(t)Y_2 = g(t) \end{cases}$$

اگر دو معادله بالا را از یکدیگر تفریق کنیم:

$$\Rightarrow a_n(t)(Y_2 - Y_1)^{(n)} + a_{n-1}(t)(Y_2 - Y_1)^{(n-1)} + \dots + a_1(t)(Y_2 - Y_1) = g(t) - g(t) = 0$$

$$Y_2 - Y_1 \equiv y_H(t)$$

$$\Rightarrow a_n(t)y_H^{(n)} + a_{n-1}(t)y_H^{(n-1)} + \dots + a_1(t)y_H = 0$$

در نتیجه y_H که اختلاف دو تابع Y_1 و Y_2 است، پاسخ معادله ناهمگن مربوطه خواهد بود.

پس در حالت کلی، جواب یک معادله دیفرانسیل غیر همگن خطی را می توان به صورت

$$y(t) = \sum_{i=1}^n c_i y_{H_i}(t) + Y$$

نوشت که y_i ها پاسخ های معادله همگن بوده و Y یک پاسخ معادله ناهمگن است.

به عبارت $y_H \equiv \sum_{i=1}^n c_i y_{H_i}(t)$ که پاسخ معادله به ازای $g(t) = 0$ است، جواب عمومی یا جواب همگن (*Homogenous Solution*) و به Y جواب خصوصی (*Particular Solution*) می گویند.

بیاپید با یک مثال ساده شروع کنیم.

* معادله دیفرانسیل مرتبه دوم ناهمگن خطی با ضرایب ثابت $g(t) = Ae^{rt}$:

$$ay'' + by' + cy = Ae^{rt}$$

از آنجا که مشتقات تابع نمایی ضرایبی از خود خود آن هستند، تابع Ce^{rt} را به عنوان جواب خصوصی معادله می کنیم:

$$Y = Ce^{rt} \Rightarrow y' = Cre^{rt} \Rightarrow y'' = Cr^2 e^{rt}$$

$$\Rightarrow C(ar^2 + br + c)e^{rt} = Ae^{rt}$$

در صورتی که $C = \frac{A}{ar^2 + br + c}$ برقرار باشد، جواب خصوصی معادله به صورت زیر خواهد بود:

$$\Rightarrow Y = \frac{A}{ar^2 + br + c} e^{rt}$$

اما در یک حالت خاص، معادله بالا جواب معادله دیفرانسیل نخواهد بود، در صورتی که

$$ar^2 + br + c = 0$$

آنگاه Ce^{rt} پاسخ معادله دیفرانسیل همگن است، پس نمی تواند پاسخ معادله ناهمگن نیز باشد، پس باید یک فرم دیگر را به عنوان پاسخ امتحان کنیم

$$Y = Cte^{rt} \Rightarrow Y' = Ce^{rt}(1 + rt) \Rightarrow Y'' = Ce^{rt}(2r + r^2 t)$$

$$\Rightarrow (2ar + b + (ar^2 + br + c)t)Ce^{rt} = Ae^{rt}$$



$$ar^2 + br + c = 0 \Rightarrow C = \frac{A}{ar + b}$$

در نتیجه جواب خصوصی معادله به صورت زیر خواهد بود:

$$Y = \frac{A}{ar + b} te^{rt}$$

اکنون قضیه دوم را بررسی می کنیم.

قضیه دوم: در صورتی که تابع $g(t)$ در معادله ناهمگن، مجموع n عبارت جداگانه باشد، معادله را می توان به n معادله مجزا تقسیم کرد و هر یک را جداگانه بررسی کرد.

اثبات قضیه دوم:

$$ay'' + by' + cy = g(t) = \sum_{i=1}^n g_i(t)$$

جواب خصوصی معادله زیر را Y_i در نظر بگیرید:

$$ay'' + by' + c = g_i(t)$$

اگر تابعیت زیر را در معادله دیفرانسیل اصلی قرار دهیم در می یابیم که می تواند جواب معادله باشد:

$$y = y_H + \sum_{i=1}^n Y_i(t)$$

$$\Rightarrow y'' + by' + cy = (ay_H'' + by_H' + cy_H) + \sum_{i=1}^n (aY_i'' + bY_i' + cY_i) = 0 + \sum_{i=1}^n g_i(t)$$

پس می توان نتیجه گرفت که معادله دیفرانسیل اصلی را می توان ابتدا به چند زیرمسئله تقسیم کرد، هر یک را جداگانه حل کرد و سپس جواب های خصوصی را باهم جمع کرد.

اکنون با استفاده از قضیه دوم و مثال قبل، یک مثال بسیار مهم را بررسی می کنیم.

* معادله دیفرانسیل مرتبه دوم ناهمگن خطی با ضرایب ثابت $g(t) = A \cos \omega t$

با استفاده از معادله اوایلر می توانیم $\cos \omega t$ به فرم نمایی تبدیل کنیم.

$$\cos \omega t = \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2}$$

$$ay'' + by' + cy = \frac{A}{2} e^{i\omega t} + \frac{A}{2} e^{-i\omega t}$$

با استفاده از قضیه دوم، می توانیم مسئله را به دو زیر مسئله تقسیم کنیم و آنها را حل کنیم.

$$ay'' + by' + cy = \frac{A}{2} e^{krt}, k = +i\omega \text{ or } -i\omega, r = i\omega$$



حل این معادله دیفرانسیل را در مثال قبل بررسی کردیم.

$$ar^2 + br + c = (c - a\omega^2) + ikb\omega$$

از آنجا که عبارت بالا دارای یک جزء موهومی و یک جزء حقیقی است، هیچ گاه برابر \cdot نخواهد بود (مگر در حالت $b = 0$ و $c = a\omega^2$)، پس جواب خصوصی معادله به صورت زیر خواهد بود:

$$Y = \frac{\frac{A}{\gamma}}{(c - a\omega^2) + ikb\omega} e^{ik\omega t} = \frac{\frac{A}{\gamma}}{(c - a\omega^2) + ikb\omega} \frac{(c - a\omega^2) - ikb\omega}{(c - a\omega^2) - ikb\omega} e^{ik\omega t}$$

$$\Rightarrow Y = \frac{\frac{A}{\gamma}}{(c - a\omega^2)^2 + b^2\omega^2} ((c - a\omega^2) - ikb\omega) e^{ik\omega t}$$

در نتیجه جواب خصوصی هر یک از معادلات به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{cases} ay'' + by' + cy = \frac{A}{\gamma} e^{i\omega t} \Rightarrow Y_+ = \frac{\frac{A}{\gamma}}{(c - a\omega^2)^2 + b^2\omega^2} ((c - a\omega^2) - ib\omega) e^{i\omega t} \\ ay'' + by' + cy = \frac{A}{\gamma} e^{-i\omega t} \Rightarrow Y_- = \frac{\frac{A}{\gamma}}{(c - a\omega^2)^2 + b^2\omega^2} ((c - a\omega^2) + ib\omega) e^{-i\omega t} \end{cases}$$

از قضیه دوم دریافتیم که جواب خصوصی معادله دیفرانسیل اصلی، جمع دو معادله بالا خواهد بود:

$$\Rightarrow Y = Y_+ + Y_- = \frac{\frac{A}{\gamma}}{(c - a\omega^2)^2 + b^2\omega^2} [((c - a\omega^2) - ib\omega) e^{i\omega t} + ((c - a\omega^2) + ib\omega) e^{-i\omega t}]$$

اکنون با توجه به فرمول اولر، عبارت درون کروشه را مجدداً بازنویسی می‌کنیم:

$$[((c - a\omega^2) - ib\omega)(\cos \omega t + i \sin \omega t) + ((c - a\omega^2) + ib\omega)(\cos \omega t + i \sin \omega t)]$$

با ساده سازی عبارت بالا مشاهده می‌کنیم که جزء موهومی معادله حذف خواهد شد و تنها جزء حقیقی باقی خواهد ماند:

$$\Rightarrow 2(c - a\omega^2) \cos \omega t + 2b\omega \sin \omega t$$

در نتیجه می‌توان جواب خصوصی را به فرم زیر نوشت:

$$Y = \frac{A}{\sqrt{(c - a\omega^2)^2 + b^2\omega^2}} \left[\frac{(c - a\omega^2)}{\sqrt{(c - a\omega^2)^2 + b^2\omega^2}} \cos \omega t + \frac{b\omega}{\sqrt{(c - a\omega^2)^2 + b^2\omega^2}} \sin \omega t \right]$$

اگر ضرایب جمله سینوسی و کسینوسی را در عبارت بالا به صورت زیر تعریف کنیم، به فرم ساده تری از جواب خواهیم رسید:

$$\frac{(c - a\omega^2)}{\sqrt{(c - a\omega^2)^2 + b^2\omega^2}} \equiv \cos \delta, \quad \frac{b\omega}{\sqrt{(c - a\omega^2)^2 + b^2\omega^2}} \equiv \sin \delta \Rightarrow \tan \delta = \frac{b\omega}{c - a\omega^2}$$

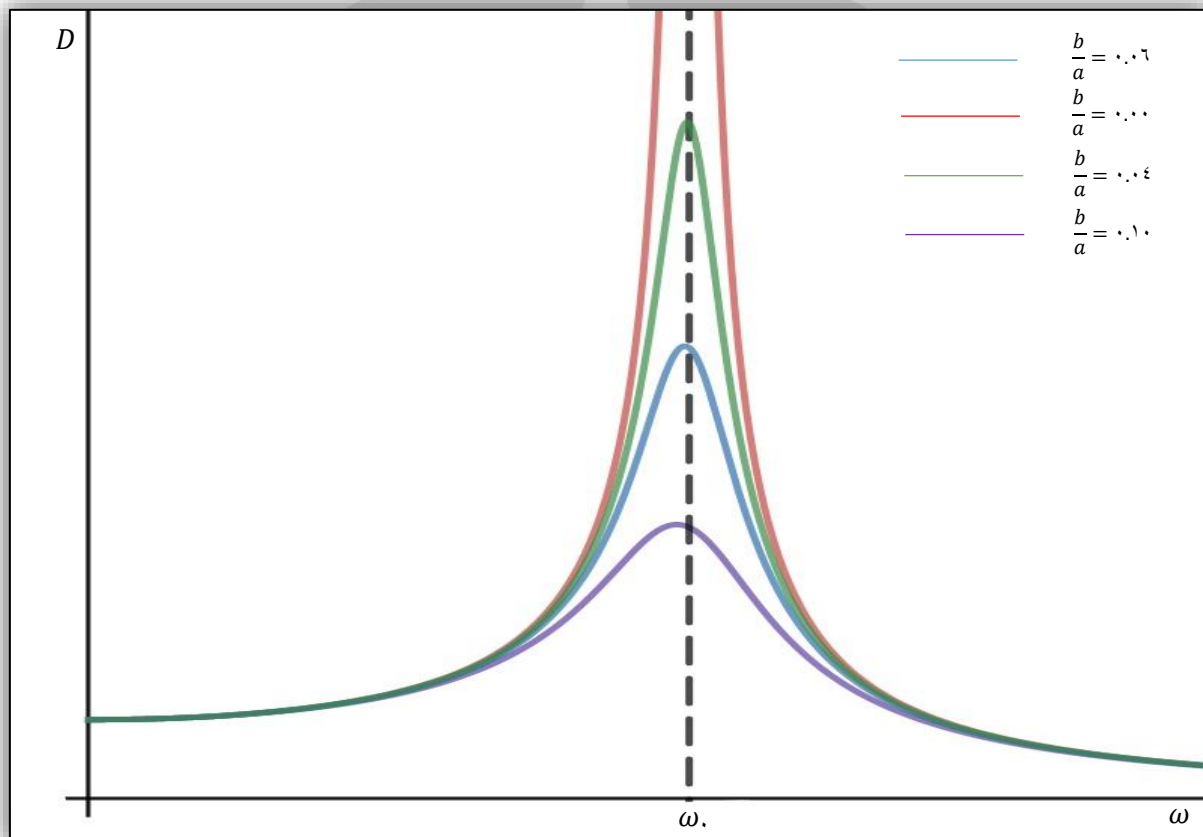
$$\Rightarrow Y = \frac{A}{\sqrt{(c - a\omega^2)^2 + b^2\omega^2}} \cos(\omega t - \delta), \quad \tan \delta = \frac{b\omega}{c - a\omega^2}$$



معادله دیفرانسیلی که بررسی کردیم برای توصیف حرکت یک نوسانگر که علاوه بر نیروی اصطکاک، یک نیروی خارجی متناوب نیز به آن وارد می شود به کار می رود.

اگر دامنه نوسان را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$Y \equiv D \cos(\omega t - \delta) \xrightarrow{\frac{c}{a} \equiv \omega^2} D = \frac{\frac{A}{a}}{\sqrt{(\omega^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{b^2}{a^2}\right) \omega^2}}$$



در نمودار بالا، دامنه نوسان (D) بر حسب ω ، به ازای چند a و b مختلف رسم شده است. همانطور که مشاهده می کنید برای هر یک از $\frac{b}{a}$ ها، یک ω وجود دارد که در آن دامنه نوسان به بیشینه خود می رسد، به عبارتی در صورتی که نیروی خارجی با این فرکانس اعمال شود، دامنه نوسانگر بیشینه خواهد بود. این پدیده را **تشدید (Resonance)** می نامیم و به فرکانسی که در آن تشدید رخ می دهد، فرکانس تشدید (ω_R : *Resonant frequency*) می گویند.

$$\left(\frac{dD}{d\omega}\right)_{\omega=\omega_R} = 0 \Rightarrow \frac{A}{\left[(\omega^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{b^2}{a^2}\right) \omega^2\right]^{\frac{3}{2}}} \left[-2(\omega^2 - \omega^2)\omega_R + 2\left(\frac{b^2}{a^2}\right)\omega_R\right] = 0$$

$$\Rightarrow \omega_R = \sqrt{\omega^2 - \frac{2b^2}{a^2}}$$



اما در حالتی که $b = 0$ و $\omega = \omega_0$ باشد، باید از جواب خصوصی ای را که در معادله دیفرانسیل قبلی و به ازای

$ar'' + br + c = 0$ بدست آوردیم استفاده کنیم. پس معادله دیفرانسیلی که با آن رو به رو هستیم به فرم زیر است:

$$y'' + \omega_0^2 y = \frac{A}{a} \cos \omega_0 t$$

$$\cos \omega_0 t = \frac{e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}}{2} \Rightarrow y'' + \omega_0^2 y = \frac{A}{2a} e^{ik\omega_0 t}, k = +1 \text{ or } -1$$

با توجه به معادله دیفرانسیل پیشین، جواب خصوصی این معادله برابر خواهد بود با:

$$Y = \frac{A}{2aik\omega_0} t e^{ik\omega_0 t} \Rightarrow \begin{cases} Y_+ = \frac{A}{2ia\omega_0} t e^{i\omega_0 t} \\ Y_- = -\frac{A}{2ia\omega_0} t e^{-i\omega_0 t} \end{cases} \Rightarrow Y = Y_+ + Y_-$$

با استفاده از فرمول اویلر به فرم مثلثاتی بر می گردیم:

$$Y = \frac{A}{2ia\omega_0} t [(\cos \omega_0 t + i \sin \omega_0 t) - (\cos \omega_0 t - i \sin \omega_0 t)] = \frac{A}{2ia\omega_0} t \times 2i \sin \omega_0 t$$

$$\Rightarrow Y = \frac{A}{2a\omega_0} t \sin \omega_0 t$$

پس جواب خصوصی این معادله دیفرانسیل به ازای حالت های مختلف به صورت زیر خواهد بود:

$$y'' + \frac{b}{a} y' + \omega_0^2 y = A \cos \omega_0 t$$

$$\left\{ \begin{aligned} Y &= \frac{\frac{A}{a}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{b}{a}\omega\right)^2}} \cos(\omega t - \delta), \tan \delta = \frac{\frac{b}{a}\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \\ b &= 0, \omega = \omega_0; Y = \frac{A}{2a\omega_0} t \sin \omega_0 t \end{aligned} \right.$$

معادلات دیفرانسیل شاخه بسیار بسیار گسترده ای از ریاضیات است که در این پیوست تلاش کردم تا حد نیاز به آن بپردازم.

برای مطالعه بیشتر در مورد معادلات دیفرانسیل می توانید به کتاب "معادلات دیفرانسیل بویس"

"Elementary Differential Equations by Boyce" مراجعه کنید.



○ پیوست ریاضی :

بسط تیلور برای یک تابع چند متغیره به شکل زیر است :

$$\begin{aligned}
 f(x, y) &= f(x_0, y_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x_0, y_0} (x - x_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{x_0, y_0} (y - y_0) \\
 &+ \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{x_0, y_0} (x - x_0)^2 + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{x_0, y_0} (y - y_0)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right)_{x_0, y_0} \right. \\
 &\left. + \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right)_{x_0, y_0} \right] (x - x_0)(y - y_0) \\
 &+ \dots
 \end{aligned}$$

توجه داشته باشید که اگر مشتقات جزئی $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$ و $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ در نقطه (x_0, y_0) پیوسته باشند، آنگاه باهم برابر خواهند بود :

$$\begin{aligned}
 f(x, y) &= f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + \\
 &\frac{1}{2} [f_{xx}(x - x_0)^2 + 2f_{xy}(x - x_0)(y - y_0) + f_{yy}(y - y_0)^2] + \dots
 \end{aligned}$$





در ادامه به معرفی منابع مفید برای دینامیک کهکشانی، علی الخصوص اختلال خواهیم پرداخت:

Galaxies in the universe: an introduction – L S. Sparke and J. S. Gallagher III

Galactic Dynamics – James Binney and Scott Tremaine

Dynamics of Galaxies – Giuseppe Bertin

An introduction to modern Astrophysics – Bradley W. Carroll and Dale A. Ostlie

Classical Dynamics of particles and systems – Stephen T. Thornton and Jerry B. Marion

تقریب و اختلال در مکانیک – حجت الله مظفری

مکانیک سماوی – محمد جواد شریعت زاده

مجموعه تمرینات المپیاد نجوم – وحید احمدی و روزبه قادری

کتابچه دوره تابستانه ۱۳۹۷

سایر منابع

Spiral structure viewed as density wave – A. J. Kalnajs

Lagrangian Points – Dennis Westra