فصل

۱

مقدمه

در این فصل، به چند طریق آنچه راکه در معادلات دیفرانسیل مطالعه خواهید کرد مجسم می‌کنیم. ابتدا با استفاده از دو مسئله، چند ایدهٔ اصلی را مطرح می‌کنیم که در ادامهٔ کتاب مکرر به آنها خواهیم پرداخت. سپس، برای ارائهٔ چارچوب تدوین کتاب، به چند روش دسته‌بندی معادلات دیفرانسیل اشاره می‌کنیم. بالاخره، شمه‌ای از بعضی از گرایشهای عمده در تکوین تاریخی موضوع ارائه می‌کنیم و از چندتن از ریاضیدانان برجسته که به این مبحث پرداخته‌اند نام می‌بریم. بررسی معادلات دیفرانسیل طی سه قرن گذشته توجه بسیاری از بزرگ‌ترین ریاضیدانان جهان را به خود جلب کرده است؛ با این حال، این حوزه هنوز هم با چندین مسئلهٔ حل‌نشدهٔ جالب، عرصه‌ای پویا برای تحقیقات است.

۱.۱ چند مدل مقدماتی ریاضی؛ میدانهای جهت

قبل از اینکه به‌طور جدی به مطالعهٔ معادلات دیفرانسیل بپردازید و به‌عنوان مثال تمام و یا بخش عمدهٔ این کتاب را بخوانید، باید تصوری از منافع احتمالی کسب این دانش داشته باشید. ممکن است صِرف جذابیت موضوع برای برخی دانشجویان انگیزه‌ای کافی باشد، اما برای اغلب دانشجویان وجود کاربردهای مهم در سایر رشته‌هاست که کسب این دانش را باارزش می‌کند.

بسیاری از اصول و قوانین حاکم بر رفتار طبیعت، احکام و یا روابطی مربوط به نرخ رخ‌دادن اتفاقات هستند. به زبان ریاضیات، این روابط معادله‌ها هستند و نرخها، مشتقات‌اند. معادله‌های شامل مشتقات، **معادلات دیفرانسیل** هستند. بنابراین، برای درک و بررسی مسئله‌های مربوط به حرکت سیالات، جریان در مدارهای الکتریکی، اتلاف حرارت در اشیاء صلب، پراکنش و ردیابی امواج زلزله‌ای و یا افزایش و کاهش جمعیتها و بسیاری دیگر از مسئله‌ها، آشنایی با معادلات دیفرانسیل ضروری است.

معمولاً به معادلهٔ دیفرانسیلی که روند فیزیکی‌ای را تشریح می‌کند، **مدل ریاضی** از روند می‌گوییم و مدلهای بسیاری از این دست در این کتاب بررسی می‌شوند. در این بخش با دو مدل که به معادله‌هایی با راه‌حل ساده می‌انجامند، شروع می‌کنیم. جالب است که حتی ساده‌ترین معادله‌های دیفرانسیل مدلهای مفیدی از فرایندهای مهم فیزیکی فراهم می‌آورند.

مثال ۱
شیء در حال سقوط

فرض کنید شیئی در جو نزدیک سطح دریا در حال سقوط است. معادلهٔ دیفرانسیلی بنویسید که این حرکت را تشریح کند.

با معرفی حروفی برای نمایش کمیتهای مختلفی که ممکن است در این مسئله مورد توجه باشند شروع می‌کنیم. حرکت در بازهٔ زمانی معیّنی اتفاق می‌افتد، بنابراین زمان را با t نشان می‌دهیم. به همین ترتیب، سرعت شیء در حال سقوط را هم با v نشان می‌دهیم. مسلماً سرعت با زمان تغییر می‌کند، بنابراین v را تابعی از t در نظر می‌گیریم؛ به‌عبارت دیگر t متغیر مستقل و v متغیر وابسته است. انتخاب واحد اندازه‌گیری کم‌وبیش دلخواه است و چیزی در صورت مسئله وجود ندارد که استفاده از واحد خاصی را ایجاب کند، بنابراین هر انتخاب منطقی‌ای مجاز است. در این مورد، زمان t را با ثانیه‌ها و سرعت v را با $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ اندازه‌گیری می‌کنیم. علاوه بر این، فرض می‌کنیم که v در جهت پایین — یعنی در جهت سقوط شیء — مثبت است.

قانون فیزیکی حرکت اشیا، قانون دوم نیوتن است که بیان می‌کند حاصلضرب جرم شیء و شتاب آن برابر با نیروی خالص وارده بر آن شیء است. به زبان ریاضی، این قانون با معادلهٔ

$$F = ma \qquad (۱)$$

بیان می‌شود که در آن m جرم شیء، a شتاب آن و F نیروی خالص وارد به آن است. برای سازگار نگه‌داشتن واحدها، m را با کیلوگرم، a را با $\mathrm{m/s^۲}$ و F را با نیوتن اندازه‌گیری می‌کنیم. البته a و v با رابطهٔ $a = dv/dt$ به هم مرتبط‌اند، بنابراین می‌توانیم معادلهٔ (۱) را به‌صورت

$$F = m\left(\frac{dv}{dt}\right) \qquad (۲)$$

بنویسیم. اکنون نیروهایی را بررسی می‌کنیم که بر شیء در حال سقوط اثر می‌گذارند. گرانش، نیرویی برابر با وزن شیء یا mg وارد می‌کند که در آن g شتاب مربوط به گرانش است. با واحدهایی که انتخاب کردیم، g به‌طور تجربی مشخص شده و در نزدیکی سطح زمین تقریباً برابر $۹٫۸\ \mathrm{m/s^۲}$ است. نیرویی هم بر اثر مقاومت هوا موجود است که مدل‌کردن آن مشکل‌تر است. در اینجا به بررسی تفصیلی نیروی مقاومت نمی‌پردازیم و تنها می‌گوییم که معمولاً فرض می‌شود که مقاومت متناسب با سرعت است و ما هم همین فرض را می‌پذیریم. بنابراین اندازهٔ نیروی مقاومت برابر γv است که در آن γ ثابتی است که به آن ضریب مقاومت می‌گویند. مقدار عددی نیروی مقاومت از شیئی به شیء دیگر بسیار تغییر می‌کند: ضریب مقاومت اشیایی با سطح هموارتر در برابر جریان هوا نسبت به ضریب مقاومت اشیای درشت و ناهموار بسیار کوچک‌تر است. واحد فیزیکی γ، $\frac{\text{جرم}}{\text{زمان}}$ است که در این مسئله $\mathrm{kg/s}$ است. اگر این واحدها غیرعادی به نظر می‌رسند، به خاطر بیاورید که واحد γv باید واحد نیرو یعنی $\mathrm{kg \cdot m/s^۲}$ باشد.

برای نوشتن عبارتی برای نیروی خالص F، باید به خاطر داشته باشیم که گرانش همواره در جهت پایین (مثبت) عمل می‌کند در حالی که مقاومت هوا، همان‌طورکه در شکل ۱.۱.۱ نشان داده شده است، در جهت بالا (منفی) عمل می‌کند. بنابراین

$$F = mg - \gamma v \qquad (۳)$$

و معادلهٔ (۲) به

$$m\frac{dv}{dt} = mg - \gamma v \qquad (۴)$$

تبدیل می‌شود. معادلهٔ (۴) مدل ریاضی‌ای برای شیء در حال سقوط در جو در نزدیکی سطح دریا است. توجه کنید که مدل شامل سه ثابت m، g و γ است. ثابتهای m و γ عمدتاً به شیء در حال سقوط بستگی دارند و معمولاً برای اشیای مختلف، متفاوت هستند. متداول است که آنها را پارامتر در نظر بگیریم چراکه ممکن است در طول یک آزمایش مقادیر متفاوتی را اختیار کنند؛ امّا g ثابتی فیزیکی است که برای همهٔ اشیا یکسان است.

شکل ۱.۱.۱ نمودار جسم آزاد برای نیروهای وارده به شیء در حال سقوط.

برای حل معادلهٔ (۴) باید تابعی مانند $v = v(t)$ بیابیم که در معادله صدق کند. انجام این کار سخت نیست و در بخش بعد نحوهٔ انجام آن را به شما نشان می‌دهیم. اما در حال حاضر می‌خواهیم ببینیم بدون یافتن جوابها چه اطلاعاتی را می‌توان دربارهٔ آنها به‌دست آورد. با دادن مقادیر عددی به m و γ کارمان کمی ساده‌تر می‌شود، اما روند کار از انتخاب این مقادیر مستقل است. بنابراین فرض می‌کنیم که $m = ۱۰\ \mathrm{kg}$ و $\gamma = ۲\ \mathrm{kg/s}$. بنابراین معادلهٔ (۴) را می‌توان به‌صورت

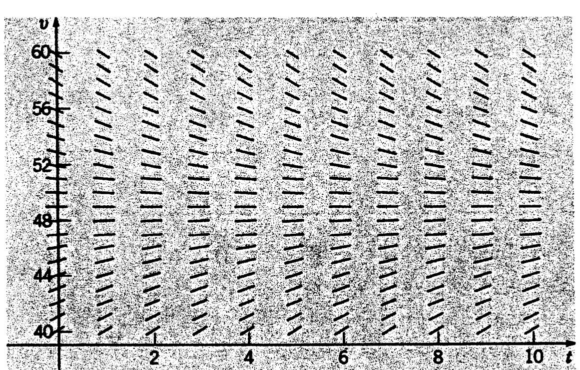
$$\frac{dv}{dt} = ۹٫۸ - \frac{v}{۵} \qquad (۵)$$

نوشت.

مثال ۲
شیء در حال سقوط (ادامه)

رفتار جوابهای معادلهٔ (۵) را بدون حل معادلهٔ دیفرانسیل بررسی کنید.

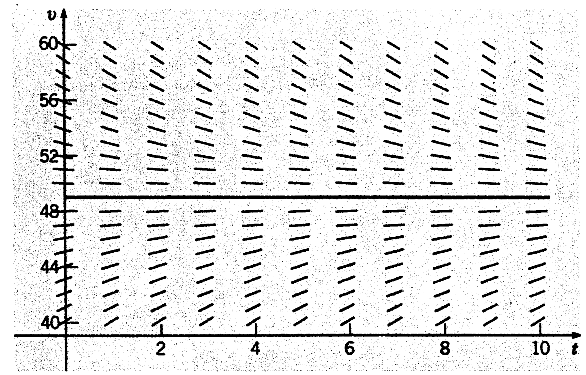
این کار را با بررسی معادلهٔ (۵) از دیدگاه هندسی انجام می‌دهیم. فرض کنید سرعت v مقدار مشخصی داشته باشد. دراین‌صورت، با محاسبهٔ طرف راست معادلهٔ ۵ می‌توان مقدار dv/dt متناظر آن را به‌دست آورد. به‌عنوان مثال، اگر $v = ۴۰$ آنگاه $dv/dt = ۱٫۸$. این یعنی مقدار شیب جواب $v = v(t)$ در هر نقطه که $v = ۴۰$ برابر $۱٫۸$ است. می‌توانیم اطلاعات را با کشیدن پاره‌خطهای کوتاه با شیب $۱٫۸$ در چند نقطه روی خط $v = ۴۰$ در نموداری در صفحهٔ tv رسم کنیم. به‌طور مشابه، اگر $v = ۵۰$ آنگاه $dv/dt = -۰٫۲$، بنابراین پاره‌خطهای کوچکی با شیب $-۰٫۲$ در چند نقطه روی خط $v = ۵۰$ رسم می‌کنیم. شکل ۲.۱.۱ مثالی از چیزی است که به آن **میدان جهت** و یا گاهی **میدان شیب** می‌گوییم.



شکل ۲.۱.۱ میدان جهت برای معادلهٔ (۵).

به یاد بیاورید که جواب معادلهٔ (۵) تابعی مانند $v = v(t)$ است که نمودار آن خمی در صفحهٔ tv است. اهمیت شکل ۲.۱.۱ این است که در آن، هر پاره‌خط به یکی از این منحنی‌های جواب مماس است. پس با اینکه جوابی به‌دست نیاورده‌ایم و هیچ نموداری از جوابها در شکل ظاهر نشده است، می‌توانیم چند نتیجهٔ کیفی دربارهٔ رفتار جوابها به‌دست بیاوریم. به‌عنوان مثال، اگر v کمتر از مقدار بحرانی معیّنی باشد، شیب همهٔ پاره‌خطها مثبت است و سرعت شیء در حال سقوط با سقوطش افزایش می‌یابد. از طرف دیگر، اگر v بزرگ‌تر از مقدار بحرانی باشد، شیب همهٔ پاره‌خطها منفی است و سرعت شیء در حال سقوط با سقوطش کاهش می‌یابد. این مقدار بحرانی v که شیء‌های با سرعت فزاینده را از اشیاء با سرعت کاهنده جدا می‌کند کدام است؟ با رجوع مجدد به معادلهٔ (۵)، می‌پرسیم که کدام مقدار v باعث صفرشدن dv/dt می‌شود؟ جواب $v = (۵)(۹٫۸) = ۴۹\ \mathrm{m/s}$ است.

در واقع، تابع ثابت $v(t) = ۴۹$ یک جواب معادلهٔ (۵) است. برای تحقیق این گزاره، $v(t) = ۴۹$ را در معادلهٔ (۵) جایگزین می‌کنیم و مشاهده می‌کنیم که دو طرف معادله برابر صفرند. چون این سرعت با زمان تغییر نمی‌کند، به جواب $v(t) = ۴۹$ **جواب تعادلی** می‌گوییم. این جوابی است که متناظر با توازنی کامل بین گرانش و مقاومت هوا است. در شکل ۳.۱.۱ جواب $v(t) = ۴۹$ را نشان داده‌ایم که به میدان جهت اضافه شده است. از این شکل می‌توانیم نتایج دیگری به‌دست بیاوریم: جوابهای دیگر، با افزایش زمان به جواب تعادلی همگرا می‌شوند.



شکل ۳.۱.۱ میدان جهت و جواب تعادلی معادلهٔ (۵).

روش طرح‌شده در مثال ۲ را می‌توان به همان صورت در مورد معادلهٔ کلی‌تر (۴) هم، که در آن پارامترهای m و γ اعداد مثبت نامشخص هستند، به‌کار گرفت. نتایج اساساً با نتایج مثال ۲ یکسان است. جواب تعادلی معادلهٔ (۴)، $v(t) = mg/\gamma$ است. جوابهای پایین جواب تعادلی با افزایش زمان افزایش می‌یابند و جوابهای بالای آن با افزایش زمان کاهش می‌یابند و همهٔ جوابها با افزایش t به جواب تعادلی میل می‌کنند.

میدانهای جهت. در مطالعهٔ جوابهای معادله‌های دیفرانسیل به‌صورت

$$\frac{dy}{dt} = f(t,y) \tag{۶}$$

که در آن f تابعی مفروض از دو متغیر t و y است و گاهی به آن **تابع نرخ** می‌گوییم، میدانهای جهت ابزارهای

با ارزشی هستند. برای معادله‌هایی به‌صورت (۶)، می‌توان با محاسبهٔ f در هر نقطه از شبکه‌ای مستطیلی یک میدان جهت ساخت. در هر نقطه از شبکه پاره‌خط کوچکی رسم می‌شود که شیب آن، مقدار f در آن نقطه است. پس هر پاره‌خط بر نمودار جواب گذرا از آن نقطه مماس است. میدان جهتی که روی شبکهٔ نسبتاً ظریفی رسم شده، تصویر خوبی از رفتار کلی جوابهای معادلهٔ دیفرانسیل ارائه می‌دهد. معمولاً شبکه‌ای با چند صد نقطه کافی است. معمولاً، ساختن میدان جهت اولین گام مفید در بررسی معادلهٔ دیفرانسیل است.

دو نکته ارزش یادآوری ویژه دارند. اول اینکه در ساختن میدان جهت، مجبور نیستیم معادلهٔ (۶) را حل کنیم؛ بلکه صرفاً مقدار تابع مفروض $f(t,y)$ را چندبار محاسبه می‌کنیم. پس حتی برای معادله‌هایی که ممکن است حلشان بسیار مشکل باشد هم می‌توان به‌سادگی میدان جهت ساخت. دوم آنکه محاسبهٔ مکرر مقدارهای تابعی مفروض کاری است که رایانه برای آن بسیار مناسب است و معمولاً باید از رایانه برای رسم میدان جهت استفاده شود. همهٔ میدانهای جهت نشان داده‌شده در این کتاب، و از جمله میدان نشان داده‌شده در شکل ۲.۱.۱، با رایانه تولید شده‌اند.

موش صحرایی و جغد. اکنون به مثال کاملاً متفاوتی می‌پردازیم. گروهی از موشهای صحرایی را در نظر بگیرید که در یک ناحیهٔ روستایی معین زندگی می‌کنند. اگر شکارچی‌ای در کار نباشد، فرض می‌کنیم که جمعیت موشها با نرخی متناسب با جمعیت فعلی آنها افزایش می‌یابد. این فرض قانون فیزیکی جاافتاده‌ای (مانند قانون حرکت نیوتن در مثال ۱) نیست، اما در مطالعهٔ رشد جمعیت فرض اولیهٔ معمولی است.[1] اگر زمان را با t و جمعیت موشها را با $p(t)$ نشان بدهیم، فرض مربوط به رشد جمعیت را می‌توان با معادلهٔ

$$\frac{dp}{dt} = rp \tag{۷}$$

بیان کرد که در آن به ضریب r، **ثابت نرخ** یا **نرخ رشد** می‌گوییم. فرض کنید زمان با ماه اندازه‌گیری می‌شود و مقدار ثابت نرخ r برابر $\frac{۰٫۵}{\text{ماه}}$ است. بنابراین واحد هر جمله در معادلهٔ (۷)، $\frac{\text{موش}}{\text{ماه}}$ است.

این نکته را هم به مسئله اضافه کنیم که در همان همسایگی، چند جغد زندگی می‌کنند که روزانه ۱۵ موش صحرایی را می‌کشند. برای وارد کردن این اطلاعات به مدل، باید یک جملهٔ دیگر به معادلهٔ دیفرانسیل (۷) اضافه کنیم، بنابراین معادله به‌صورت

$$\frac{dp}{dt} = ۰٫۵p - ۴۵۰ \tag{۸}$$

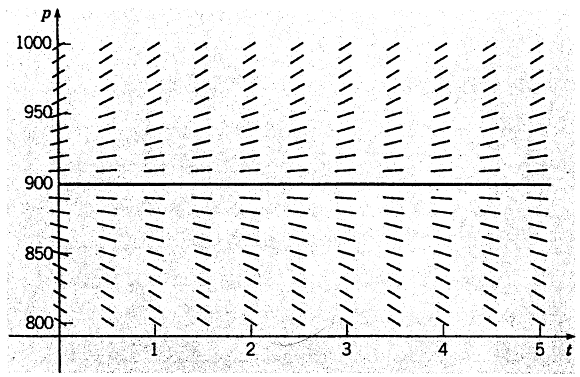
درمی‌آید. توجه کنید که جملهٔ شکار، به‌جای ۱۵−، ۴۵۰− است؛ چون زمان برحسب ماه اندازه‌گیری می‌شود و به نرخ ماهانهٔ شکار نیاز داریم.

مثال ۳

جوابهای معادلهٔ (۸) را از روی نمودار بررسی کنید.

یک میدان جهت برای معادلهٔ (۸) در شکل ۴.۱.۱ نشان داده شده است. به‌ازای مقادیر به‌اندازهٔ کافی بزرگ p، می‌توان از روی شکل و یا به‌طور مستقیم از معادلهٔ (۸) دید که dp/dt مثبت است، بنابراین جوابها افزایش می‌یابند. از طرف دیگر اگر p کوچک باشد، dp/dt منفی است و جوابها کاهش می‌یابند. مجدداً مقدار بحرانی p که جوابهای افزایشی را از جوابهای کاهشی جدا می‌کند، مقداری از p است که در آن dp/dt صفر است. با برابر صفر قرار دادن dp/dt در معادلهٔ (۸) و حل

۱. یک مدل بهتر برای رشد جمعیت را در بخش ۵.۲ بررسی می‌کنیم.



شکل ۴.۱.۱ میدان جهت و جواب تعادلی معادلهٔ (۸).

آن برحسب p، جواب تعادلی $p(t) = 900$ را می‌یابیم که به‌ازای آن نرخ رشد و جملهٔ شکار در معادلهٔ (۸) دقیقاً متوازن هستند. در شکل ۴.۱.۱، جواب تعادلی نیز نشان داده شده است.

با مقایسهٔ مثالهای ۲ و ۳، درمی‌یابیم که جواب تعادلی، در هر دو حالت جوابهای فزاینده و کاهنده را از یکدیگر جدا می‌کند. در مثال ۲، جوابها طوری به جواب تعادلی همگرا و یا به آن جذب می‌شوند که پس از آنکه شیء به‌اندازهٔ کافی سقوط کرد، ناظر مشاهده می‌کند که با سرعتی نزدیک به سرعت جواب تعادلی حرکت می‌کند. از طرف دیگر، در مثال ۳ بقیهٔ جوابها از جواب تعادلی دور و یا از آن دفع می‌شوند. جوابها بسته به آنکه از زیر یا در بالای جواب تعادلی شروع شده باشند، رفتار کاملاً متفاوتی دارند. با گذشت زمان، ناظر ممکن است جمعیتهایی با مقدار بسیار بزرگ‌تر از جواب تعادلی و یا بسیار کمتر از آن را مشاهده کند، اما خود جواب تعادلی در عمل مشاهده نخواهد شد. با این حال، در هر دو مسئله جواب تعادلی در درک چگونگی رفتار جوابهای معادلهٔ دیفرانسیل داده‌شده اهمیت بسیاری دارد.

یک حالت کلی‌تر معادلهٔ (۸) عبارت است از

$$\frac{dp}{dt} = rp - k \qquad (۹)$$

که در آن نرخ رشد r و جملهٔ شکار k معلوم نیستند. جوابهای این معادلهٔ کلی‌تر بسیار شبیه جوابهای معادلهٔ (۸) هستند. جواب تعادلی معادلهٔ (۹)، $p(t) = k/r$ است. جوابهای بالای جواب تعادلی افزایش می‌یابند، در حالی که جوابهای زیر آن کاهش می‌یابند.

باید به خاطر داشته باشید که هر دو مدل بحث‌شده در این بخش محدودیتهای خودشان را دارند. مدل (۵) مربوط به شیء در حال سقوط تنها تا زمانی معتبر است که شیء بدون برخورد با مانع به‌طور آزاد سقوط کند. مدل جمعیت (۸) درنهایت تعدادی منفی (به‌ازای $p < 900$) و یا تعدادی بسیار زیاد (به‌ازای $p > 900$) از موشهای صحرایی را پیش‌بینی می‌کند. هردوی این پیش‌بینی‌ها غیرواقعی هستند، بنابراین این مدل پس از بازهٔ زمانی نسبتاً کوتاهی غیرقابل قبول می‌شود.

ساختن مدلهای ریاضی. برای استفاده از معادله‌های دیفرانسیل در هر یک از رشته‌های فراوانی که این معادله‌ها در آنها مفید هستند، ابتدا لازم است که معادلهٔ دیفرانسیل مناسبی را که مسئلهٔ تحت بررسی را توصیف و یا مدل می‌کند صورت‌بندی کنیم. در این بخش دو مثال از این روند مدل‌سازی را بررسی کردیم که یکی از آنها از فیزیک و دیگری از محیط زیست گرفته شده بودند. در آینده، برای ساختن مدلهای ریاضی باید توجه کنید که هر مسئله مشخصه‌های خودش را دارد و مدل‌سازی موفق، مهارتی نیست که با چند قانون از پیش تعیین‌شده به‌دست بیاید. با وجود این، شاید فهرست کردن چند مرحله که اغلب بخشی از این روند هستند مفید باشد:

۱. متغیرهای مستقل و وابسته را مشخص کنید و به هر کدام حرفی نسبت بدهید. متغیر مستقل، اغلب زمان است.

۲. برای متغیرها واحد اندازه‌گیری انتخاب کنید. انتخاب واحدها دلخواه است، اما ممکن است استفاده از بعضی از واحدها نسبت به واحدهای دیگر بسیار راحت‌تر باشد. به‌عنوان مثال، در مسئلهٔ شیء در حال سقوط، زمان را با ثانیه و در مسئلهٔ جمعیت، زمان را با ماه اندازه‌گیری کردیم.

۳. قانون پایهٔ حاکم بر مسئلهٔ تحت بررسی را پیدا کنید. این قانون ممکن است قانون فیزیکی مشهوری مانند قانون حرکت نیوتن باشد و یا فرض خاصی بر مبنای مشاهدات و یا تجربیات شخصی شما باشد. در هر حال، به احتمال زیاد این مرحله صرفاً ریاضی نیست و شما باید با رشته‌ای که مسئله از آن نشأت گرفته است آشنا باشید.

۴. اصل یا قانون مرحلهٔ ۳ را برحسب متغیرهایی که در مرحلهٔ ۱ انتخاب کردید بیان کنید. گفتن این امر ساده‌تر از انجام آن است. ممکن است که انجام این کار نیاز به معرفی ثابتها یا پارامترهای فیزیکی (مانند ضریب کشش در مثال ۱) و تعیین مقادیر مناسب برای آنها داشته باشد. یا ممکن است لازم باشد از متغیرهای کمکی و میانجی استفاده شود که باید به متغیرهای اصلی مربوط شوند.

۵. مطمئن شوید که واحد فیزیکی همهٔ جمله‌های معادله‌تان یکسان است. اگر چنین نباشد، معادله نادرست است و باید آن را اصلاح کنید. اگر واحدها درست باشد، معادله حداقل از لحاظ بُعد سازگار است، گرچه ممکن است اشکالهای دیگری داشته باشد که این آزمون آنها را آشکار نمی‌کند.

۶. در مسئله‌های بررسی‌شده در اینجا، نتیجهٔ گام ۴ یک معادلهٔ دیفرانسیل تنها است که مدل ریاضی دلخواه را تشکیل می‌دهد. اما به‌خاطر داشته باشید که در مسئله‌های پیچیده‌تر ممکن است مدل ریاضی به‌دست آمده بسیار پیچیده‌تر باشد و به‌عنوان مثال، مستلزم استفاده از دستگاهی از چندین معادلهٔ دیفرانسیل باشد.

مسئله‌ها

در هر یک از مسئله‌های ۱ تا ۶، میدان جهتی برای معادلهٔ دیفرانسیل داده‌شده رسم کنید. بر اساس میدان جهت، وقتی $t \to \infty$ رفتار y را تعیین کنید. اگر این رفتار به مقدار اولیهٔ y در $t = 0$ بستگی دارد، این بستگی را تشریح کنید.

۱. $y' = 3 - 2y$

۲. $y' = 2y - 3$

۳. $y' = 1 + 2y$

۴. $y' = -1 - 2y$

۵. $y' = 3 + 2y$

۶. $y' = y + 3$

در هر یک از مسئله‌های ۷ تا ۱۰، معادلهٔ دیفرانسیلی به‌صورت $dy/dt = ay + b$ بنویسید که وقتی $t \to \infty$، رفتار جوابهای آن مطابق توصیف خواسته شده باشد.

۷. همهٔ جوابها به $y = ۳$ میل کنند.

۸. همهٔ جوابها به $y = \frac{۲}{۳}$ میل کنند.

۹. $y = ۲$ جواب معادله باشد و جوابهای دیگر از آن دور شوند.

۱۰. $y = \frac{۱}{۳}$ جواب معادله باشد و جوابهای دیگر از آن دور شوند.

در هر یک از مسئله‌های ۱۱ تا ۱۴، میدان جهتی برای معادلهٔ دیفرانسیل داده‌شده رسم کنید. بر اساس میدان جهت، رفتار y را وقتی $t \to \infty$ تعیین کنید. اگر این رفتار به مقدار اولیهٔ y در $t = ۰$ بستگی دارد، این بستگی را تشریح کنید. توجه کنید که در این مسئله‌ها، معادله‌ها به‌صورت $y' = ay + b$ نیستند و رفتار جوابها کمی از رفتار جوابهای معادله‌های متن پیچیده‌تر است.

۱۱. $y' = y(۴ - y)$ ۱۲. $y' = -y(۶ - y)$

۱۳. $y' = y^{۲}$ ۱۴. $y' = y(y - ۲)^{۲}$

معادله‌های (الف) تا (ی) زیر را، که میدان جهت بعضی از آنها در شکلهای ۱.۱.۵ تا ۱.۱.۱۰ رسم شده‌اند، در نظر بگیرید. در هر یک از مسئله‌های ۱۵ تا ۲۰، معادلهٔ دیفرانسیل مرتبط با میدان جهت داده‌شده را مشخص کنید.

الف) $y' = ۲y - ۱$ ب) $y' = ۲ + y$

ج) $y' = y - ۲$ د) $y' = y(y + ۳)$

ه) $y' = ۱ - ۲y$ و) $y' = y(۳ - y)$

ز) $y' = -۲ - y$ ح) $y' = ۱ + ۲y$

ط) $y' = y(y - ۳)$ ی) $y' = ۲ - y$

۱۵. میدان جهت شکل ۱.۱.۵.

۱۶. میدان جهت شکل ۱.۱.۶.

۱۷. میدان جهت شکل ۱.۱.۷.

۱۸. میدان جهت شکل ۱.۱.۸.

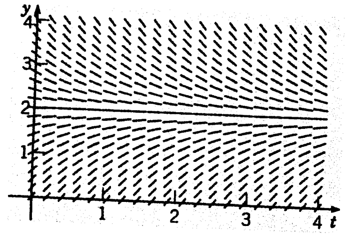
۱۹. میدان جهت شکل ۱.۱.۹.

۲۰. میدان جهت شکل ۱.۱.۱۰.

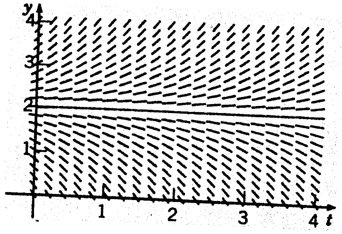
۲۱. دریاچه‌ای در ابتدا حاوی ۱,۰۰۰,۰۰۰ گالن آب و مقداری نامشخص از یک مادهٔ شیمیایی نامطلوب است. آبی که شامل ۰٫۰۱ گرم از این مادهٔ شیمیایی در هرگالن آن است، با نرخ ۳۰۰ gal/h به داخل دریاچه جریان دارد. مایع مخلوط با همان نرخ خارج می‌شود، بنابراین مقدار آب در دریاچه ثابت می‌ماند. فرض کنید که مادهٔ شیمیایی به‌طور یکنواخت درون دریاچه توزیع شده است.

الف) یک معادلهٔ دیفرانسیل برای مقدار مادهٔ شیمیایی موجود در دریاچه در هر زمان بنویسید.

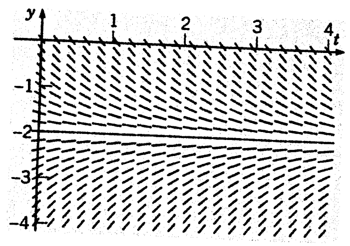
ب) پس از مدتی طولانی، چه مقدار از مادهٔ شیمیایی در دریاچه وجود خواهد داشت؟ آیا این مقدار حدی به مقداری که در ابتدا موجود بود بستگی دارد؟



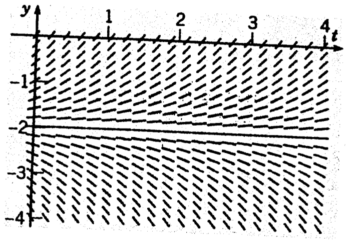
شکل ۱.۱.۵ میدان جهت برای مسئلهٔ ۱۵.



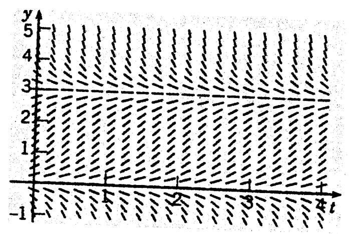
شکل ۱.۱.۶ میدان جهت برای مسئلهٔ ۱۶.



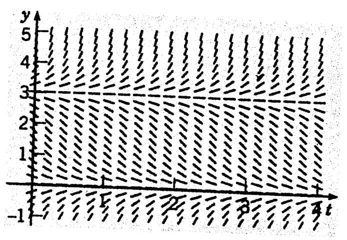
شکل ۱.۱.۷ میدان جهت برای مسئلهٔ ۱۷.



شکل ۱.۱.۸ میدان جهت برای مسئلهٔ ۱۸.



شکل ۱.۱.۹ میدان جهت برای مسئلهٔ ۱۹.



شکل ۱.۱.۱۰ میدان جهت برای مسئلهٔ ۲۰.

۲۲. یک قطرهٔ کروی باران با نرخی متناسب با مساحت سطح آن تبخیر می‌شود. یک معادلهٔ دیفرانسیل برای حجم قطره باران به‌عنوان تابعی از زمان بنویسید.

۲۳. طبق قانون سرد شدن (تبرید) نیوتن، دمای شیء با نرخی متناسب با تفاضل دمای شیء و دمای محیط اطرافش (معمولاً، دمای هوای محیط) تغییر می‌کند. فرض کنید درجهٔ حرارت محیط $۷۵^\circ F$ است و نرخ ثابت برابر است با $۰٫۰۵(\text{دقیقه})^{-۱}$. یک معادلهٔ دیفرانسیل برای حرارت شیء در هر زمان بنویسید. توجه کنید که معادلهٔ دیفرانسیل، چه دمای شیء بالاتر از دمای محیط باشد و چه پایین‌تر، تغییری نمی‌کند.

۲۴. یک داروی مشخص از راه ورید به یک بیمار بیمارستانی تزریق می‌شود. مایع شامل $۵\ \text{mg/cm}^{۳}$ از دارو با نرخ $۱۰۰\ \text{cm}^{۳}/\text{h}$ وارد جریان خون بیمار می‌شود. بخشی از دارو جذب بافتهای بدن می‌شود و مابقی آن جریان خون را متناسب با مقدار موجود با ثابت نرخی برابر $۰٫۴(\text{h})^{-۱}$ ترک می‌کند.

$^\circ C = \frac{5}{9}(^\circ F - 32)$ $^\circ C = {}^\circ K - 273.15$

الف) با فرض آنکه دارو همواره به‌طور یکنواخت در جریان خون توزیع می‌شود، یک معادلهٔ دیفرانسیل برای مقدار داروی حاضر در جریان خون در هر زمان بنویسید.

ب) پس از مدتی طولانی، مقدار داروی حاضر در جریان خون چقدر است؟

۲۵. برای اشیای کوچکی که به آهستگی سقوط می‌کنند، فرض انجام‌شده در متن که نیروی مقاومت هوا متناسب با سرعت است فرض خوبی است. برای اشیایی که بزرگ‌ترند و با سرعت بیشتری سقوط می‌کنند، این فرض که نیروی کشش با مربع سرعت متناسب است دقیق‌تر است.[1]

الف) برای سرعت شیء در حال سقوط با جرم m، معادلهٔ دیفرانسیلی بنویسید که در آن نیروی کشش متناسب با مربع سرعت باشد.

ب) سرعت حدی را، پس از مدتی طولانی تعیین کنید.

ج) اگر $m = 10$ kg، ضریب کشش را طوری بیابید که سرعت حدی ۴۹m/s باشد.

د) با استفاده از داده‌های قسمت (ج)، یک میدان جهت رسم کنید و آن را با شکل ۳.۱.۱ مقایسه کنید.

در هر یک از مسئله‌های ۲۶ تا ۳۳، برای معادلهٔ دیفرانسیل داده‌شده یک میدان جهت رسم کنید. بر اساس میدان جهت، رفتار y را وقتی $t \to \infty$ تعیین کنید. اگر این رفتار به مقدار اولیهٔ y در $t = 0$ بستگی دارد، این بستگی را توصیف کنید. توجه کنید که طرف راست این معادلات، علاوه بر t، به y هم وابسته است؛ بنابراین ممکن است رفتار جوابهایشان نسبت به آنهایی که در متن دیدید پیچیده‌تر باشد.

۲۶. $y' = -2 + t - y$

۲۷. $y' = te^{-2t} - 2y$

۲۸. $y' = e^{-t} + y$

۲۹. $y' = 2t - 1 - y^2$

۳۰. $y' = 3\sin t + 1 + y$

۳۱. $y' = t + 2y$

۳۲. $y' = -(2t + y)/2y$

۳۳. $y' = \frac{1}{6}y^3 - y - \frac{1}{3}t^2$

۲.۱ جواب چند معادلهٔ دیفرانسیل

در بخش قبل به معادله‌های دیفرانسیل

$$m\frac{dv}{dt} = mg - \gamma v \tag{1}$$

و

$$\frac{dp}{dt} = rp - k \tag{2}$$

رسیدیم. معادلهٔ (۱) شیء در حال سقوط را و معادلهٔ (۲) جمعیت موش صحرایی را که توسط جغدها شکار می‌شوند مدل می‌کند. هر دوی این معادلات به شکل کلی

$$\frac{dy}{dt} = ay - b \tag{3}$$

۱. مقالهٔ زیر را ببینید:
Lyle N. Long and Howard Weiss, "The Velocity Dependence of Aerodynamic Drag: A Primer for Mathematicians," *American Mathematical Monthly 106* (1999), 2, pp. 127-135.

هستند که در آن a و b ثابتهایی مفروض هستند. با در نظر گرفتن میدانهای جهت متناظر، توانستیم چند نتیجهٔ کیفی مهم دربارهٔ رفتار جواب معادله‌های (۱) و (۲) بگیریم. اما برای پاسخ دادن به سؤالهای کمّی، به یافتن خود جواب نیاز داریم و اکنون چگونگی یافتن جواب را بررسی می‌کنیم.

مثال ۱
موش صحرایی و جغد (ادامه)

معادلهٔ

$$\frac{dp}{dt} = 0.5p - 450 \tag{4}$$

را در نظر بگیرید که اثرات متقابل جمعیتهای موش صحرایی و جغدها را تشریح می‌کند (معادلهٔ (۸) از بخش ۱.۱ را ببینید). جوابهای این معادله را بیابید.

برای حل معادلهٔ (۴)، نیاز به یافتن توابع $p(t)$ داریم که پس از جایگزینی در معادله، آن را به اتحاد تبدیل کنند. در ادامه، یک روش برای این کار آورده‌ایم. ابتدا معادلهٔ (۴) را به‌صورت

$$\frac{dp}{dt} = \frac{p - 900}{2} \tag{5}$$

بازنویسی کنید؛ اگر $p \neq 900$،

$$\frac{dp/dt}{p - 900} = \frac{1}{2}. \tag{6}$$

طبق قاعدهٔ زنجیره‌ای، طرف چپ معادلهٔ (۶)، مشتق $\ln|p - 900|$ نسبت به t است، بنابراین

$$\frac{d}{dt}\ln|p - 900| = \frac{1}{2}; \tag{7}$$

بنابراین، با انتگرال‌گیری از دو طرف معادلهٔ (۷) به‌دست می‌آوریم

$$\ln|p - 900| = \frac{t}{2} + C \tag{8}$$

که در آن C ثابت دلخواه انتگرال است. بنابراین، با به‌نما رساندن دو طرف معادلهٔ (۸)، نتیجه می‌شود

$$|p - 900| = e^{(t/2)+C} = e^C e^{t/2} \tag{9}$$

یا

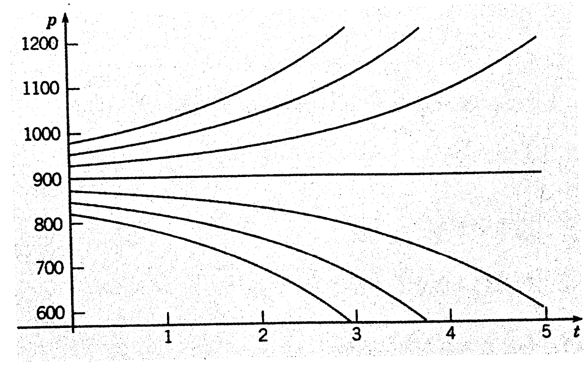
$$p - 900 = \pm e^C e^{t/2} \tag{10}$$

و درنهایت

$$p = 900 + ce^{t/2} \tag{11}$$

که در آن $c = \pm e^C$ هم ثابتی دلخواه (ناصفر) است. توجه کنید که تابع ثابت $p = 900$ هم یک جواب معادلهٔ (۵) است و اگر اجازه بدهیم c مقدار صفر را اختیار کند، عبارت (۱۱) شامل این جواب هم می‌شود. نمودارهای معادلهٔ (۱۱) به‌ازای چند مقدار c در شکل ۱.۲.۱ نشان داده شده‌اند.

توجه کنید که این جوابها همان مشخصه‌ای را دارند که از میدان جهت در شکل ۴.۱.۱ استنباط می‌شود. به‌عنوان مثال، جوابهایی که در دو طرف جواب تعادلی $p = 900$ قرار دارند، از آن دور می‌شوند.



شکل ۱.۲.۱ نمودارهای معادلهٔ (۱۱) به‌ازای چند مقدار c.

در مثال ۱، متناظر با نامتناهی مقدار دلخواه ممکن برای ثابت c در معادلهٔ (۱۱)، بی‌شمار جواب برای معادلهٔ (۴) به‌دست آوردیم. معمولاً هنگام حل معادلات دیفرانسیل چنین وضعی پیش می‌آید. روند حل شامل انتگرال‌گیری است که ثابتی دلخواه را همراه می‌آورد، و مقادیر ممکن آن خانواده‌ای نامتناهی از جوابها را تولید می‌کند.

معمولاً مایلیم که با مشخص کردن مقدار ثابت دلخواه، توجهمان را به عضو خاصی از خانوادهٔ نامتناهی جوابها معطوف کنیم. اغلب، به‌جای مشخص کردن مقدار ثابت، این کار را با مشخص کردن نقطه‌ای که باید روی نمودار جواب قرار بگیرد انجام می‌دهیم. به‌عنوان مثال، برای تعیین ثابت c در معادلهٔ (۱۱) می‌توانیم فرض کنیم که جمعیت در یک زمان معین مقدار مفروضی است، مثلاً ۸۵۰ در زمان $t = ۰$. به عبارت دیگر، نمودار جواب باید از نقطهٔ $(۰, ۸۵۰)$ بگذرد. با استفاده از نمادها، این شرط را می‌توانیم به‌صورت

$$p(۰) = ۸۵۰ \tag{۱۲}$$

بیان کنیم. دراین‌صورت با جایگزین کردن $t = ۰$ و $p = ۸۵۰$ در معادلهٔ (۱۱) به‌دست می‌آوریم

$$۸۵۰ = ۹۰۰ + c$$

و در نتیجه $c = -۵۰$. با جایگزینی این مقدار در معادلهٔ (۱۱)، جواب دلخواه را به‌دست می‌آوریم، یعنی

$$p = ۹۰۰ - ۵۰ e^{t/۲}. \tag{۱۳}$$

شرط اضافی (۱۲) که برای تعیین c استفاده شد مثالی از **شرط اولیه** است. به معادلهٔ دیفرانسیل (۴) به همراه شرط اولیهٔ (۱۲) **مسئلهٔ مقدار اولیه** می‌گوییم.

اکنون مسئلهٔ کلی‌تر متشکل از معادلهٔ دیفرانسیل (۳)، یعنی

$$\frac{dy}{dt} = ay - b$$

و شرط اولیهٔ

$$y(۰) = y_۰ \tag{۱۴}$$

را، که در آن $y_۰$ یک مقدار اولیهٔ دلخواه است، در نظر بگیرید. این مسئله را با روشی مشابه مثال ۱ حل می‌کنیم. اگر $a \neq ۰$ و $y \neq b/a$، می‌توانیم معادلهٔ (۳) را به‌صورت

$$\frac{dy/dt}{y - (b/a)} = a \tag{۱۵}$$

بازنویسی کنیم. با انتگرال‌گیری از دو طرف، به‌دست می‌آوریم

$$\ln\left|y - \left(\frac{b}{a}\right)\right| = at + C \tag{۱۶}$$

که در آن C دلخواه است. پس با به نما رساندن دو طرف معادلهٔ (۱۶) و حل کردن آن نسبت به y به‌دست می‌آوریم

$$y = \left(\frac{b}{a}\right) + ce^{at} \tag{۱۷}$$

که در آن $c = \pm e^{C}$ نیز دلخواه است. توجه کنید که $c = ۰$ متناظر جواب تعادلی $y = b/a$ است. درنهایت، شرط اولیهٔ (۱۴) مستلزم آن است که $c = y_۰ - (b/a)$، بنابراین جواب مسئلهٔ مقدار اولیهٔ (۳)، (۱۴) عبارت است از

$$y = \left(\frac{b}{a}\right) + \left[y_۰ - \left(\frac{b}{a}\right)\right] e^{at}. \tag{۱۸}$$

به‌ازای $a \neq ۰$، عبارت (۱۷) شامل همهٔ جوابهای ممکن معادلهٔ (۳) است و به آن **جواب عمومی** می‌گوییم.[۱] نمایش هندسی جواب عمومی (۱۷) یک خانوادهٔ نامتناهی از منحنی‌ها است که به آنها **منحنی‌های انتگرال** می‌گوییم. هر منحنی انتگرال متناظر مقدار خاصی برای c است و نمودار جوابِ متناظر آن مقدار c است. برآورده شدن یک شرط اولیه معادل است با تعیین منحنی انتگرال گذرا از نقطهٔ اولیهٔ مشخص‌شده در شرط.

برای مربوط کردن جواب (۱۸) به معادلهٔ (۲) که جمعیت موشهای صحرایی را مدل می‌کند، کافی است a را با نرخ رشد r و b را با نرخ شکار k جایگزین کنیم. آنگاه جواب (۱۸) به

$$p = \left(\frac{k}{r}\right) + \left[p_۰ - \left(\frac{k}{r}\right)\right] e^{rt} \tag{۱۹}$$

تبدیل می‌شود که در آن $p_۰$ جمعیت اولیهٔ موشهای صحرایی است. جواب (۱۹) نتایج به‌دست آمده بر پایهٔ میدان جهت و مثال ۱ را تأیید می‌کند. اگر $p_۰ = k/r$، از معادلهٔ (۱۹) نتیجه می‌شود که به‌ازای هر t، $p = k/r$؛ این جواب ثابت و یا تعادلی است. اگر $p_۰ \neq k/r$، رفتار جواب به علامت ضریب $p_۰ - (k/r)$ در جملهٔ نمایی معادلهٔ (۱۹) بستگی دارد. اگر $p_۰ > k/r$، p به‌طور نمایی با زمان رشد می‌کند؛ اگر $p_۰ < k/r$، p کاهش می‌یابد و درنهایت صفر می‌شود که متناظر به نابودی جمعیت موش صحرایی است. مقادیر منفی p، گرچه در عبارت (۱۹) ممکن است، در چارچوب این مسئلهٔ مشخص بی‌معنا است.

۱. اگر $a = ۰$، جواب معادلهٔ (۳) با معادلهٔ (۱۷) داده نمی‌شود. یافتن جواب عمومی در این حالت را به شما واگذار می‌کنیم.

برای تبدیل معادلهٔ شیء در حال سقوط (۱) به‌صورت (۳) باید a را $-\gamma/m$ و b را $-g$ بگیریم. با این جایگزینی در جواب (۱۸) به‌دست می‌آوریم

$$v = \left(\frac{mg}{\gamma}\right) + \left[v_۰ - \left(\frac{mg}{\gamma}\right)\right] e^{-\gamma t/m} \qquad (۲۰)$$

که در آن $v_۰$ سرعت اولیه است. مجدداً این جواب نتایج به‌دست آمده بر اساس میدان جهت در بخش ۱.۱ را تأیید می‌کند. یک جواب تعادلی و یا ثابت $v = mg/\gamma$ وجود دارد و جوابهای دیگر به این جواب تعادلی میل می‌کنند. سرعت همگرایی به جواب تعادلی با نمای $-\gamma/m$ معین می‌شود. پس به‌ازای جرم داده‌شدهٔ m، سرعت با افزایش نرخ مقاومت r سریع‌تر به مقدار تعادلی نزدیک می‌شود.

مثال ۲
شیء در حال سقوط (ادامه)

همانند مثال ۲ در بخش ۱.۱، یک شیء در حال سقوط با جرم $m = ۱۰\ \text{kg}$ و ضریب کشش $\gamma = ۲\ \text{kg/s}$ را در نظر بگیرید. به این ترتیب، معادلهٔ حرکت (۱) به

$$\frac{dv}{dt} = ۹٫۸ - \frac{v}{۵} \qquad (۲۱)$$

تبدیل می‌شود. فرض کنید که شیء از ارتفاع ۳۰۰ متری رها شود. سرعت آن را در زمان t به‌دست بیاورید. چه مدت طول می‌کشد تا شیء به زمین بیفتد و در زمان برخورد چه سرعتی دارد؟

اولین گام، بیان شرط اولیهٔ مناسب برای معادلهٔ (۲۱) است. فرض «رها شدن» در صورت مسئله ایجاب می‌کند که سرعت اولیه صفر است؛ بنابراین از شرط اولیهٔ

$$v(۰) = ۰ \qquad (۲۲)$$

استفاده می‌کنیم. جواب معادلهٔ (۲۱) را می‌توان با جایگزین کردن مقادیر ضرایب در معادلهٔ (۲۰) به‌دست آورد، اما به‌جای این‌کار معادلهٔ (۲۱) را به‌طور مستقیم حل می‌کنیم. ابتدا معادله را به‌صورت

$$\frac{dv/dt}{v - ۴۹} = -\frac{۱}{۵} \qquad (۲۳)$$

بازنویسی می‌کنیم. با انتگرال‌گیری از دو طرف، به‌دست می‌آوریم

$$\ln|v - ۴۹| = -\frac{t}{۵} + C \qquad (۲۴)$$

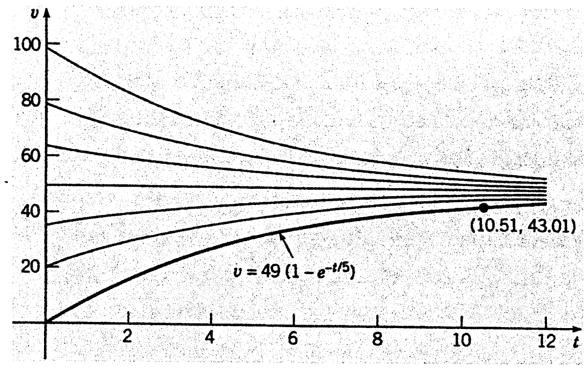
و بنابراین جواب عمومی معادلهٔ (۲۱) عبارت است از

$$v = ۴۹ + ce^{-t/۵} \qquad (۲۵)$$

که در آن c دلخواه است. برای تعیین c، $t = ۰$ و $v = ۰$ را از شرط اولیهٔ (۲۲) در معادلهٔ (۲۵) جایگزین می‌کنیم که نتیجه می‌دهد $c = -۴۹$. بنابراین جواب مسئلهٔ مقدار اولیهٔ (۲۱)، (۲۲) عبارت است از

$$v = ۴۹(۱ - e^{-t/۵}). \qquad (۲۶)$$

معادلهٔ (۲۶) سرعت شیء در حال سقوط را در هر زمان مثبت (البته قبل از آنکه به زمین برخورد کند) مشخص می‌کند. نمودارهای جواب (۲۵) به‌ازای چند مقدار c همراه با جواب (۲۶) با منحنی پررنگ در شکل ۲.۲.۱ نمایش داده شده‌اند.



شکل ۲.۲.۱ نمودارهای جواب (۲۵) به‌ازای چند مقدار c.

واضح است که همهٔ جوابها به جواب تعادلی $v = ۴۹$ میل می‌کنند. این امر، نتایج به‌دست آمده بر اساس میدانهای جهت در شکلهای ۲.۱.۱ و ۳.۱.۱ در بخش ۱.۱ را تأیید می‌کند.

برای یافتن سرعت شیء هنگام برخورد با زمین نیاز به زمان برخورد داریم، به عبارت دیگر باید مدت زمانی را تعیین کنیم که شیء ۳۰۰ متر سقوط می‌کند. برای انجام این‌کار، توجه می‌کنیم که فاصلهٔ x که شیء سقوط کرده با معادلهٔ $v = dx/dt$ به سرعت v مرتبط است؛ پس

$$\frac{dx}{dt} = ۴۹(۱ - e^{-t/۵}). \qquad (۲۷)$$

در نتیجه با انتگرال‌گیری از دو طرف معادلهٔ (۲۷) نتیجه می‌شود

$$x = ۴۹t + ۲۴۵e^{-t/۵} + c \qquad (۲۸)$$

که در آن c ثابت دلخواه انتگرال‌گیری است. شیء هنگامی که $t = ۰$ شروع به سقوط می‌کند؛ بنابراین می‌دانیم که هنگام $t = ۰$، $x = ۰$. از معادلهٔ (۲۸) نتیجه می‌شود که $c = -۲۴۵$، بنابراین مسافتی که شیء در زمان t سقوط کرده است با رابطهٔ

$$x = ۴۹t + ۲۴۵e^{-t/۵} - ۲۴۵ \qquad (۲۹)$$

داده می‌شود. فرض کنید T زمان برخورد شیء با زمین باشد. دراین‌صورت، $x = ۳۰۰$ اگر $t = T$. با جایگزین کردن این مقادیر در معادلهٔ (۲۹) معادلهٔ

$$۴۹T + ۲۴۵e^{-T/۵} - ۵۴۵ = ۰ \qquad (۳۰)$$

را به‌دست می‌آوریم. مقدار T را که در معادلهٔ (۳۰) صدق می‌کند می‌توان با روندی عددی[۱] با ماشین‌حساب علمی و یا رایانه محاسبه کرد که نتیجه می‌دهد $T \cong ۱۰٫۵۱\ \text{s}$. در این زمان، سرعت v_T از معادلهٔ (۲۶) با مقدار تقریبی $v_T \cong ۴۳٫۰۱\ \text{m/s}$ به‌دست می‌آید. نقطهٔ (۱۰٫۵۱, ۴۳٫۰۱) نیز در شکل ۲.۲.۱ نشان داده شده است.

۱. سیستم‌های رایانه‌ای نمادین این قابلیت را دارند. در ساختار داخلی بسیاری از ماشین‌حسابها هم الگوریتمهای حل چنین معادلاتی تعبیه شده است.

چند نکتهٔ دیگر دربارهٔ مدل‌سازی ریاضی. تا اینجا بحث معادله‌های دیفرانسیل را به مدلهای ریاضی شیءِ در حال سقوط و ارتباط فرضی موش صحرایی و جغد مرتبط کردیم. شاید شیوهٔ رسیدن به این مدلها پذیرفتنی و یا حتی شاید متقن بوده است، اما نباید فراموش کرد که آزمون نهایی برای هر مدل ریاضی، توافق پیش‌بینی‌های آن با مشاهدات و نتایج تجربی است. ما در اینجا نتایجی از مشاهدات واقعی و یا نتایج تجربی برای مقایسه در اختیار نداریم؛ اما چند عامل برای بروز مغایرتهای احتمالی می‌شناسیم.

در مورد شیء در حال سقوط، قانون فیزیکی حاکم (قانون حرکت نیوتن) تثبیت شده و به‌طور وسیعی به کار گرفته می‌شود؛ اما فرض اینکه نیروی مقاومت با سرعت متناسب است کمتر مورد اطمینان است. حتی اگر این فرض صحیح باشد، تعیین ضریب مقاومت γ با اندازه‌گیری مستقیم با مشکل روبه‌رو است. در حقیقت، گاهی ضریب مقاومت را به‌طور غیرمستقیم و مثلاً با اندازه‌گیری زمان سقوط از ارتفاع مفروض و محاسبهٔ مقدار γ که همین مقدار مشاهده‌شده را پیش‌بینی کند به‌دست می‌آورند.

مدل جمعیت موش صحرایی تحت تأثیر چندین عامل غیرقطعی است. تعیین نرخ رشد r و شکار k بستگی به مشاهدهٔ عملی جمعیت واقعی دارد که ممکن است با تغییرات قابل توجهی روبه‌رو باشد. فرض اینکه r و k ثابت هستند ممکن است مشکوک باشد. به‌عنوان مثال، حفظ یک نرخ ثابت شکار با کوچک‌تر شدن جمعیت موش صحرایی ممکن است بسیار دشوار باشد. علاوه بر این، مدل پیش‌بینی می‌کند که جمعیت در بالای مقدار تعادلی به‌طور نمایی بزرگ و بزرگ‌تر می‌شود. به‌نظر می‌آید که این امر با رفتار واقعی جمعیتها تفاوت دارد؛ بحث بیشتر دربارهٔ دینامیک جمعیت را در بخش ۵.۲ ببینید.

اگر تفاوت بین مشاهدات واقعی و پیش‌بینی‌های مدل ریاضی عمده باشد، به اصلاح مدل، انجام مشاهدات دقیق‌تر و یا هر دو کار نیاز دارید. تقریباً همواره دادوستدی بین دقت و سادگی برقرار است. هردو موردنظر هستند، اما معمولاً دست‌یابی به یکی منجر به از دست رفتن دیگری می‌شود. اما، حتی اگر مدل ریاضی ناقص و به‌نحوی غیردقیق باشد، بالاخره ممکن است در توضیح برخی ویژگیهای مسئلهٔ تحت بررسی مفید باشد. همچنین ممکن است تحت شرایطی نتایجی رضایت‌بخش بدهد در حالی که در شرایط دیگر چنین نباشد. بنابراین در ساختن مدلهای ریاضی همواره باید قضاوت خوب و عقل سلیم را به‌کار بگیرید و از پیش‌بینی‌های آن استفاده کنید.

مسئله‌ها

۱. هر یک از مسئله‌های مقدار اولیهٔ زیر را حل کنید و جوابها را به‌ازای چند مقدار y_0 رسم کنید. سپس در چند کلمه شباهتها و تفاوتهای جوابها را با یکدیگر تشریح کنید.

الف) $dy/dt = -y + 5$، $y(0) = y_0$

ب) $dy/dt = -2y + 5$، $y(0) = y_0$

ج) $dy/dt = -2y + 10$، $y(0) = y_0$

۲. خواسته‌های مسئلهٔ ۱ را برای مسئله‌های مقدار اولیهٔ زیر انجام بدهید.

الف) $dy/dt = y - 4$، $y(0) = y_0$

ب) $dy/dt = 2y - 5$، $y(0) = y_0$

ج) $dy/dt = 2y - 10$، $y(0) = y_0$

۳. معادلهٔ دیفرانسیل

$$\frac{dy}{dt} = -ay + b$$

را در نظر بگیرید که در آن a و b هر دو اعدادی مثبت هستند.

الف) معادلهٔ دیفرانسیل را حل کنید.

ب) جواب را به‌ازای چند شرط اولیهٔ مختلف رسم کنید.

ج) تشریح کنید که جوابها چگونه تحت شرایط زیر تغییر می‌کنند:

i. a افزایش یابد.

ii. b افزایش یابد.

iii. هردوی a و b افزایش یابند، اما نسبت b/a ثابت بماند.

۴. معادلهٔ دیفرانسیل $dy/dt = ay - b$ را در نظر بگیرید.

الف) جواب تعادلی y_e را به‌دست بیاورید.

ب) قرار دهید $Y(t) = y - y_e$؛ بنابراین $Y(t)$ انحراف از جواب تعادلی است. معادلهٔ دیفرانسیلی را که $Y(t)$ در آن صدق می‌کند بیابید.

۵. **ضرایب نامعین.** در این مسئله، روش دیگری برای حل معادلهٔ

$$\frac{dy}{dt} = ay - b \qquad \text{(i)}$$

ارائه می‌کنیم.

الف) معادلهٔ ساده‌تر

$$\frac{dy}{dt} = ay \qquad \text{(ii)}$$

را حل کنید. جواب را $y_1(t)$ بنامید.

ب) توجه کنید که تنها تفاوت بین معادله‌های (i) و (ii)، ثابت $-b$ در معادلهٔ (i) است؛ بنابراین منطقی به نظر می‌رسد که فرض کنیم جوابهای این دو معادله نیز تنها در یک مقدار ثابت تفاوت دارند. این فرض را با سعی در یافتن ثابت k به‌طوری که $y = y_1(t) + k$ هم جواب معادلهٔ (i) باشد امتحان کنید.

ج) جواب قسمت (ب) را با جواب داده‌شده در معادلهٔ (۱۷) در متن مقایسه کنید. توجه: این روش را می‌توان در حالتی که در آن ثابت b با تابعی مثل $g(t)$ جایگزین شده هم به‌کار برد. این امر بستگی به این دارد که بتوانید فرم کلی احتمالی جواب را حدس بزنید. این روش در بخش ۵.۳ در ارتباط با معادلات مرتبهٔ دوم با جزئیات تشریح شده است.

۶. با استفاده از روش مسئلهٔ ۵، معادلهٔ

$$\frac{dy}{dt} = -ay + b$$

را حل کنید.

۷. جمعیت موشهای صحرایی در مثال ۱ در معادلهٔ دیفرانسیل

$$\frac{dp}{dt} = ۰٫۵p - ۴۵۰$$

صدق می‌کند.

الف) اگر $p(۰) = ۸۵۰$، زمانی را که جمعیت از بین می‌رود پیدا کنید.

ب) اگر $p(۰) = p_۰$، $۰ < p_۰ < ۹۰۰$، زمان نابودی را پیدا کنید.

ج) اگر جمعیت در عرض یک‌سال نابود شود، جمعیت اولیهٔ $p_۰$ را پیدا کنید.

۸. جمعیت موش صحرایی p را در نظر بگیرید که در نرخی متناسب با جمعیت فصلیش تغییر می‌کند؛ یعنی $dp/dt = rp$.

الف) اگر جمعیت در ۳۰ روز دوبرابر شود، نرخ ثابت r را بیابید.

ب) r را طوری بیابید که جمعیت در N روز دوبرابر شود.

۹. شیء در حال سقوط در مثال ۲ در مسئلهٔ مقدار اولیهٔ

$$\frac{dv}{dt} = ۹٫۸ - \left(\frac{v}{۵}\right), \qquad v(۰) = ۰$$

صدق می‌کند.

الف) زمانی را مشخص کنید که باید بگذرد تا شیء به ۹۸٪ سرعت حدی برسد.

ب) در زمان پیداشده در قسمت (الف) شیء چه اندازه‌ای سقوط می‌کند؟

۱۰. مثال ۲ را طوری اصلاح کنید که شیء در حال سقوط مواجه با مقاومت هوا نباشد.

الف) مسئلهٔ مقدار اولیهٔ اصلاح شده را بنویسید.

ب) مدت زمانی را تعیین کنید که طی آن شیء به زمین می‌رسد.

ج) سرعت شیء را در زمان برخورد تعیین کنید.

۱۱. یک شیء در حال سقوط با جرم ۱۰ kg در مثال ۲ را در نظر بگیرید، اما این بار فرض کنید که نیروی مقاومت هوا متناسب با مربع سرعت است.

الف) اگر سرعت حدی ۴۹ m/s (همانند مثال ۲) باشد، ثابت کنید معادلهٔ حرکت را می‌توان به‌صورت

$$\frac{dv}{dt} = \frac{[(۴۹)^۲ - v^۲]}{۲۴۵}$$

نوشت. مسئلهٔ ۲۵ بخش ۱.۱ را هم ببینید.

ب) اگر $v(۰) = ۰$، $v(t)$ را به‌ازای هر t بیابید.

ج) جواب قسمت (ب) و جواب (۲۶) برای مثال ۲ را روی یک محور رسم کنید.

د) بر اساس نمودارهای قسمت (ج)، اثر نیروی مقاومت مربعی را با نیروی مقاومت خطی مقایسه کنید.

ه) مسافت طی‌شده $x(t)$ از شیء در حال سقوط را در زمان t بیابید.

و) زمان T را طوری بیابید که در طی آن شیء به‌اندازهٔ ۳۰۰ m سقوط کند.

۱۲. ماده‌ای رادیواکتیو، مانند ایزوتوپ توریوم ـ۲۳۴، در نرخی متناسب با مقدار موجود آن از هم می‌پاشد. اگر $Q(t)$ مقدار موجود در زمان t باشد آنگاه $dQ/dt = -rQ$ که در آن $r > ۰$ نرخ واپاشی است.

الف) اگر ۱۰۰ mg از توریوم‌ـ۲۳۴ در طول یک هفته به ۸۲٫۰۴ mg کاهش یابد، نرخ واپاشی r را تعیین کنید.

ب) مقدار توریوم‌ـ۲۳۴ موجود در زمان t را به‌دست بیاورید.

ج) زمان موردنیاز برای واپاشی توریوم‌ـ۲۳۴ به نصف مقدار اولیه را بیابید.

۱۳. نصف عمر یک مادهٔ رادیواکتیو، زمان موردنیاز برای واپاشی این ماده و کاهش آن به نصف مقدار اولیه‌اش است. ثابت کنید که به‌ازای هر مادهٔ رادیواکتیو که طبق معادلهٔ $Q' = -rQ$ فرو می‌پاشد، نصف عمر τ و نرخ واپاشی r در معادلهٔ $r\tau = \ln ۲$ صدق می‌کند.

۱۴. رادیوم‌ـ۲۲۶ دارای نصف عمری برابر با ۱۶۲۰ سال است. دورهٔ زمانی‌ای را مشخص کنید که در طول آن، ماده به یک‌چهارم مقدار اولیه‌اش کاهش می‌یابد.

۱۵. طبق قانون سردشدن نیوتن (مسئلهٔ ۲۳ بخش ۱.۱ را ببینید)، درجهٔ حرارت $u(t)$ شیء در معادلهٔ دیفرانسیل

$$\frac{du}{dt} = -k(u - T)$$

صدق می‌کند که در آن T درجهٔ حرارت ثابت محیط است و k ثابتی مثبت است. فرض کنید که درجهٔ حرارت اولیهٔ شیء برابر است با $u(۰) = u_۰$.

الف) درجهٔ حرارت شیء را در هر زمان بیابید.

ب) فرض کنید τ زمانی باشد که تفاضل اولیه درجهٔ حرارت $u_۰ - T$ به مقدار نصف کاهش بیابد. رابطهٔ بین k و τ را بیابید.

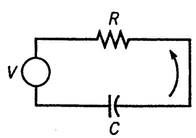
۱۶. فرض کنید یک ساختمان حرارت خود را مطابق قانون سردشدن نیوتن (مسئلهٔ ۱۵ را ببینید) از دست بدهد و مقدار نرخ ثابت k برابر $۰٫۱۵\,\mathrm{h}^{-۱}$ باشد. فرض کنید درجهٔ حرارت داخل ساختمان هنگام خرابی سیستم حرارتی $۷۰^\circ\mathrm{F}$ باشد. اگر درجهٔ حرارت خارج ساختمان $۱۰^\circ\mathrm{F}$ باشد، چقدر طول می‌کشد تا درجهٔ حرارت داخلی به $۳۲^\circ\mathrm{F}$ برسد؟

۱۷. مداری الکتریکی شامل یک خازن، مقاومت و باتری را در نظر بگیرید؛ شکل ۳.۲.۱ را ببینید. شارژ $Q(t)$ خازن در معادلهٔ دیفرانسیل

$$R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = V$$

صدق می‌کند[۱] که در آن R مقاومت، C ظرفیت خازن و V ولتاژ ثابتی است که باتری آن را تأمین می‌کند.

الف) اگر $Q(۰) = ۰$، $Q(t)$ را در هر زمان t بیابید و نمودار Q بر حسب t را رسم کنید.



شکل ۳.۲.۱ مدار الکتریکی مسئلهٔ ۱۷.

۱. این معادله از قوانین کیرشهوف، که در بخش ۷.۳ بررسی شده‌اند، نتیجه می‌شود.

ب) مقدار حدی Q_L را بیابید که $Q(t)$ پس از زمانی طولانی به آن میل می‌کند.

ج) فرض کنید $Q(t_۱) = Q_L$ و در زمان $t = t_۱$ باتری جدا شود و مدار مجدداً بسته شود. $Q(t)$ را به‌ازای $t > t_۱$ بیابید و نمودار آن را رسم کنید.

۱۸. دریاچه‌ای حاوی gal ۱,۰۰۰,۰۰۰ از آب در ابتدا تهی از مواد شیمیایی نامطلوب است (مسئلهٔ ۲۱ بخش ۱.۱ را ببینید). آبی شامل g/gal ۰/۰۱ از مواد شیمیایی با نرخ gal/h ۳۰۰ وارد دریاچه می‌شود، و آب با همان نرخ از دریاچه خارج می‌شود. فرض کنید که مادهٔ شیمیایی به‌طور یکنواخت در سراسر دریاچه توزیع شده است.

الف) فرض کنید $Q(t)$ مقدار مادهٔ شیمیایی موجود در دریاچه در زمان t باشد. مسئلهٔ مقدار اولیه‌ای برای $Q(t)$ بنویسید.

ب) مسئلهٔ قسمت (الف) را برحسب $Q(t)$ حل کنید. پس از یک‌سال چه مقدار مادهٔ شیمیایی باقی می‌ماند؟

ج) پس از یک‌سال، منبع مادهٔ شیمیایی از دریاچه حذف شد و پس از آن آب خالص به داخل دریاچه جریان پیدا کرد و مخلوط به‌دست آمده با همان نرخ سابق به بیرون جریان پیدا کرد. مسئلهٔ مقدار اولیه‌ای بنویسید که وضعیت جدید را تشریح کند.

د) مسئلهٔ مقدار اولیهٔ قسمت (ج) را حل کنید. پس از یک‌سال دیگر (دو سال پس از شروع مسئله)، چه مقدار مادهٔ شیمیایی باقی می‌ماند؟

ه) چه مدت طول می‌کشد تا $Q(t)$ به g ۱۰ کاهش بیابد؟

و) نمودار $Q(t)$ برحسب t را برای ۳ سال رسم کنید.

۱۹. استخر شنای شما که حاوی gal ۶۰,۰۰۰ آب است، با kg ۵ از رنگ غیر سمی آلوده می‌شود و لایه‌ای از رنگ سبز ناخواسته روی پوست شناگر باقی می‌گذارد. سیستم تصفیه می‌تواند آب را از استخر بگیرد، رنگ را از آن جدا کند و آب را با نرخ gal/min ۲۰۰ به استخر بازگرداند.

الف) مسئلهٔ مقدار اولیه‌ای برای روند تصفیه بنویسید؛ فرض کنید $q(t)$ مقدار رنگ در استخر در زمان t باشد.

ب) مسئلهٔ قسمت (الف) را حل کنید.

ج) شما چند نفر از دوستانتان را برای مهمانی‌ای که برای ۴ ساعت بعد در استخر برنامه‌ریزی شده دعوت کرده‌اید. همچنین به این نتیجه رسیده‌اید که اگر غلظت رنگ کمتر از g/gal ۰/۰۲ باشد اثر رنگ محسوس نیست. آیا سیستم تصفیه در طول ۴ ساعت می‌تواند غلظت را به این سطح برساند؟

د) زمان T را طوری بیابید که غلظت رنگ در آن به مقدار g/gal ۰/۰۲ می‌رسد.

ه) نرخ جریان را برای رسیدن به غلظت g/gal ۰/۰۲ در طول ۴ ساعت بیابید.

۳.۱ رده‌بندی معادلات دیفرانسیل

هدف اصلی این کتاب بررسی بعضی از خواص معادلات دیفرانسیل و ارائهٔ بعضی از روشهایی است که مؤثربودن آنها در یافتن جوابها، و یا گاهی در تقریب آنها، اثبات شده است. برای فراهم کردن چارچوب ارائه، چند روش مفید رده‌بندی معادلات دیفرانسیل را توصیف می‌کنیم.

معادلات دیفرانسیل عادی و جزئی. یک رده‌بندی مهم بر یک یا چندمتغیره‌بودن تابع مجهول استوار است. در حالت اول تنها مشتقات عادی در معادلهٔ دیفرانسیل ظاهر می‌شوند و به آن **معادلهٔ دیفرانسیل عادی** می‌گوییم. در حالت دوم، مشتقها مشتقات جزئی هستند و به آن **معادلهٔ دیفرانسیل جزئی** می‌گوییم. همهٔ معادله‌های دیفرانسیلی که در دو بخش قبل بررسی کردیم معادلات دیفرانسیل عادی هستند. رابطهٔ

$$L\frac{d^۲Q(t)}{dt^۲} + R\frac{dQ(t)}{dt} + \frac{۱}{C}Q(t) = E(t), \qquad (۱)$$

که در آن $Q(t)$ بار الکتریکی روی خازن در مداری الکتریکی شامل خازنی با ظرفیت C، مقاومت R و خودالقایی با ضریب خودالقایی L است هم معادلهٔ دیفرانسیل عادی است. این معادله در بخش ۷.۳ به‌دست می‌آید. مثالهای نوعیِ معادلات دیفرانسیل جزئی، معادلهٔ حرارت، یعنی

$$\alpha^۲\frac{\partial^۲u(x,t)}{\partial x^۲} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \qquad (۲)$$

و معادلهٔ موج، یعنی

$$a^۲\frac{\partial^۲u(x,t)}{\partial x^۲} = \frac{\partial^۲u(x,t)}{\partial t^۲} \qquad (۳)$$

هستند که در آن $\alpha^۲$ و $a^۲$ ضرایب ثابت فیزیکی معیّنی هستند. توجه کنید در هر دو معادلهٔ (۲) و (۳)، متغیر وابستهٔ u به دو متغیر x و t وابسته است. معادلهٔ انتقال حرارت، انتقال حرارت در یک جسم جامد را توصیف می‌کند و معادلهٔ موج در مسئله‌های متنوعی شامل معادلات موج در جامدات و سیالات به‌کارگرفته می‌شود.

دستگاه معادلات دیفرانسیل. رده‌بندی دیگر معادلات دیفرانسیل بستگی به تعداد تابعهای مجهول در معادله دارد. اگر تنها یک تابع باید تعیین شود، یک معادله کافی است؛ اما اگر دو و یا تعداد بیشتری تابع مجهول داشته باشیم، به دستگاهی از معادلات دیفرانسیل نیاز داریم. به‌عنوان مثال معادلات لاتکا-ولترا یا شکار و شکارچی در مدل‌سازی زیست‌محیطی اهمیت دارند. این معادله‌ها به‌صورت

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= ax - \alpha xy\\ \frac{dy}{dt} &= -cy + \gamma xy\end{aligned} \qquad (۴)$$

هستند که در آنها $x(t)$ و $y(t)$ به‌ترتیب جمعیتهای موجودات شکار و شکارچی هستند. ثابتهای a، α، c و γ بر اساس مشاهدات تجربی و بر اساس موجودات خاص تحت مطالعه به‌دست می‌آیند. دستگاههای معادلات را در فصلهای ۷ و ۹ بررسی می‌کنیم؛ بویژه در بخش ۵.۹ به معادلات لاتکا-ولترا می‌پردازیم. در برخی کاربردها برخورد با دستگاههای بزرگ شامل صدها و یا حتی چند هزار معادله غیرعادی نیست.

مرتبه. مرتبهٔ معادلهٔ دیفرانسیل، مرتبهٔ بالاترین درجهٔ مشتقی است که در معادله ظاهر می‌شود. معادله‌های بخشهای قبل همگی معادلات مرتبهٔ اول هستند، در حالی که معادلهٔ (۱) معادلهٔ مرتبهٔ دوم است. معادلات (۲) و (۳) معادلات دیفرانسیل جزئی مرتبهٔ دوم هستند. به‌طورکلی‌تر

$$F[t, u(t), u'(t), \ldots, u^{(n)}(t)] = ۰ \qquad (۵)$$

معادلهٔ دیفرانسیل عادی‌ای از مرتبهٔ n است. معادلهٔ (۵) رابطه‌ای بین متغیر مستقل t و مقادیر تابع u و n مشتق اول آن، یعنی u'، u''، ...، $u^{(n)}$ برقرار می‌کند. در معادلات دیفرانسیل، استفاده از y به‌جای $u(t)$ و y'، y''، ...، $y^{(n)}$ به‌جای $u'(t)$، $u''(t)$، ...، $u^{(n)}(t)$ راحت‌تر و متداول است. بنابراین معادلهٔ (۵) به‌صورت

$$F(t,y,y',\dots,y^{(n)})=0 \tag{۶}$$

نوشته می‌شود. به‌عنوان مثال

$$y'''+2e^t y''+yy'=t^4 \tag{۷}$$

یک معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ سوم برای $y=u(t)$ است. گاهی به‌جای t و y از حروف دیگر برای متغیرهای مستقل و وابسته استفاده می‌شود؛ معنا باید از قالب متن واضح باشد.

فرض می‌کنیم که همواره می‌توان معادلهٔ دیفرانسیل عادی داده‌شده را نسبت به بالاترین درجهٔ مشتق حل کرد و می‌توان نوشت

$$y^{(n)}=f(t,y,y',\dots,y^{(n-1)})\,. \tag{۸}$$

ما فقط معادله‌هایی به شکل (۸) را مطالعه می‌کنیم. این انتخاب عمداً برای پرهیز از ابهامی است که ممکن است پیش بیاید، چون معادله‌ای به شکل (۶) ممکن است به چند معادله به‌صورت (۸) مرتبط باشد. به‌عنوان مثال، معادلهٔ

$$(y')^2+ty'+4y=0 \tag{۹}$$

منجر به دو معادلهٔ

$$y'=\frac{-t+\sqrt{t^2-16y}}{2} \quad \text{یا} \quad y'=\frac{-t-\sqrt{t^2-16y}}{2} \tag{۱۰}$$

می‌شود.

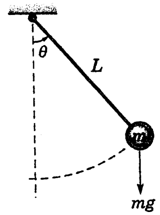
معادلات خطی و غیرخطی. یکی از رده‌بندیهای مهم معادلات دیفرانسیل، برحسب خطی بودن و یا غیرخطی بودن آنها انجام می‌شود. معادلهٔ دیفرانسیل

$$F(t,y,y',\dots,y^{(n)})=0$$

را **خطی** می‌گوییم اگر F تابعی خطی از متغیرهای y، y'، ...، $y^{(n)}$ باشد؛ تعریف مشابهی برای معادلات دیفرانسیل جزئی هم به‌کار گرفته می‌شود. پس صورت کلی معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ n به‌شکل

$$a_0(t)y^{(n)}+a_1(t)y^{(n-1)}+\dots+a_n(t)y=g(t) \tag{۱۱}$$

است. اغلب معادله‌هایی که تا به حال در این کتاب دیده‌اید، معادله‌های بخش ۱.۱ و ۲.۱ که شیء در حال سقوط و جمعیت موش صحرایی را توصیف می‌کردند، خطی هستند. به‌طور مشابه، در این بخش معادلهٔ (۱) معادلهٔ دیفرانسیل عادی خطی و معادله‌های (۲) و (۳) معادلات دیفرانسیل جزئی خطی هستند. به معادله‌ای که



شکل ۱.۳.۱ یک آونگ نوسانی.

به‌صورت (۱۱) نباشد **غیرخطی** می‌گوییم. معادلهٔ (۷) به‌خاطر جملهٔ yy' غیرخطی است. به‌طور مشابه هر یک از معادله‌های دستگاه (۴) غیرخطی است، چون جمله‌ای شامل حاصلضرب xy در آنها وجود دارد.

مسئلهٔ فیزیکی ساده‌ای که منجر به معادلهٔ دیفرانسیل غیرخطی می‌شود، مسئلهٔ آونگ نوسانی است. زاویهٔ θ که آونگ نوسانی‌ای به طول L با جهت عمودی می‌سازد (شکل ۱.۳.۱) در معادلهٔ

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{g}{L}\sin\theta=0 \tag{۱۲}$$

صدق می‌کند که نکات اصلی نحوهٔ رسیدن به آن در مسئله‌های ۲۹ تا ۳۱ مطرح شده است. وجود جملهٔ $\sin\theta$ باعث می‌شود که معادلهٔ (۱۲) غیرخطی شود.

نظریهٔ ریاضی و روشهای حل معادلات خطی به‌خوبی پرورانده شده‌اند. در مقابل، این نظریه برای معادلات غیرخطی بسیار پیچیده است و روشهای حل کمتر رضایت‌بخش هستند. با این حال، جای خوشوقتی است که بسیاری از مسائل مهم منجر به معادلات دیفرانسیل خطی می‌شوند و یا می‌توان آنها را با معادلات خطی تقریب زد. به‌عنوان مثال، در مورد آونگ نوسانی، اگر θ کوچک باشد می‌دانیم که $\sin\theta\cong\theta$ و معادلهٔ (۱۲) را می‌توان با معادلهٔ خطی

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{g}{L}\theta=0 \tag{۱۳}$$

تقریب زد. به این روند تقریب‌زدن معادله‌ای غیرخطی با معادلهٔ خطی، **خطی‌سازی** می‌گوییم؛ این کار در بررسی معادلات غیرخطی روشی بسیار باارزش است. با وجود این، بسیاری از پدیده‌های فیزیکی هستند که نمی‌توان آنها را به‌خوبی با معادلات خطی نمایش داد. برای مطالعهٔ این پدیده‌ها، بررسی معادلات غیرخطی ضروری است.

در هر کتاب مقدماتی طبیعی است که تأکید بر مطالب سرراست و ساده‌تر باشد؛ بنابراین بخش عمدهٔ این کتاب معطوف به معادلات خطی و روشهای حل آنها است. اما در فصلهای ۸ و ۹ و همچنین قسمت‌هایی از فصل ۲ به معادلات غیرخطی پرداخته‌ایم. به وقتش، به دلیل مشکل‌تربودن معادلات غیرخطی و اینکه چرا بسیاری از روشهای مفید در حل معادلات خطی را نمی‌توان برای معادلات غیرخطی به‌کار برد اشاره می‌کنیم.

جوابها. هر جواب معادلهٔ دیفرانسیل (۸) روی بازهٔ $\alpha<t<\beta$، تابعی مانند ϕ است که ϕ'، ϕ''، ...، $\phi^{(n)}$ موجودند و به‌ازای هر t در $\alpha<t<\beta$ در معادلهٔ

$$\phi^{(n)}(t)=f[t,\phi(t),\phi'(t),\dots,\phi^{(n-1)}(t)] \tag{۱۴}$$

صدق می‌کند. فرض می‌کنیم که تابع f در معادلهٔ (۸) حقیقی‌مقدار است و ما علاقمند به یافتن جوابهای حقیقی‌مقدار $y = \phi(t)$ هستیم، مگر آنکه خلاف آن را تصریح کنیم.

یادآوری می‌کنیم که در بخش ۲.۱ جوابهای معادله‌های مشخصی را با روند انتگرال‌گیری مستقیم به‌دست آوردیم. به‌عنوان مثال، جواب معادلهٔ

$$\frac{dp}{dt} = 0/5p - 450 \qquad (15)$$

را به‌صورت

$$p = 900 + ce^{t/2} \qquad (16)$$

یافتیم که در آن c ثابتی دلخواه است. معمولاً یافتن جوابهای معادلهٔ دیفرانسیل ساده نیست؛ اما اگر تابعی را پیدا کردید که فکر می‌کنید جواب معادلهٔ مفروض است، معمولاً با جایگزینی این تابع در معادله به‌سادگی می‌توان تعیین کرد که این تابع واقعاً جواب است یا نه. به‌عنوان مثال، با این روش به‌سادگی می‌توان نشان داد که به‌ازای هر t، $y_1(t) = \cos t$ جواب

$$y'' + y = 0 \qquad (17)$$

است. برای تأیید این ادعا، توجه کنید که $y_1'(t) = -\sin t$ و $y_1''(t) = -\cos t$ و در نتیجه $y_1''(t) + y_1(t) = 0$. به‌طور مشابه، به‌سادگی می‌توان نشان داد که $y_2(t) = \sin t$ هم جواب معادلهٔ (۱۷) است. البته این شیوه، روش رضایت‌بخشی برای حل معادلات دیفرانسیل نیست، چرا که تعداد توابع احتمالی چنان زیاد است که بخت یافتن تصادفی پاسخ درست بسیار کم است. با وجود این، باید متوجه باشید که درستی جواب پیشنهادی را می‌توان با جایگزینی در معادلهٔ دیفرانسیل تحقیق کرد. این بررسی ممکن است بسیار مفید باشد و باید برایتان به عادت تبدیل شود.

چند سؤال مهم. اگرچه توانستیم برای معادلات (۱۵) و (۱۷) تحقیق کنیم که توابع ساده و معیّنی جواب هستند، در حالت کلی چنین جوابهایی به‌سادگی در دسترس نیستند. بنابراین سؤال اساسی این است: آیا معادله‌ای به‌صورت (۸) همواره جواب دارد؟ پاسخ «منفی» است. صرف نوشتن معادله به‌صورت (۸)، لزوماً به این معنی نیست که تابع $y = \phi(t)$ موجود است که در آن صدق می‌کند. بنابراین چگونه می‌توان گفت که معادله‌ای خاص جواب دارد یا نه؟ این، سؤال وجود جواب است و پاسخ آن با قضیه‌ای داده می‌شود که بیان می‌کند تحت شرایط معیّنی روی f در معادلهٔ (۸)، معادله همواره جواب دارد. به دو دلیل این تنها دغدغهٔ ریاضی صِرف نیست. واضح است که ترجیح می‌دهیم جواب نداشتن مسئله را قبل از صرف زمان و کوشش فراوان برای حل آن بدانیم. علاوه بر این، اگر مسئلهٔ معقول فیزیکی‌ای با معادلهٔ دیفرانسیلی به‌طور ریاضی مدل شود، آنگاه معادله باید جواب داشته باشد و اگرنه، باید اشتباهی در صورت‌بندی آن وجود داشته باشد. از این منظر، مهندس و یا دانشمند باید درستی مدل ریاضی را بررسی کند.

اگر فرض کنیم که معادلهٔ دیفرانسیل مفروضی حداقل یک جواب دارد، هم می‌خواهیم تعداد جوابهای آن را بدانیم و هم می‌خواهیم بدانیم تحت چه شرایطی می‌توان یک جواب خاص را از بقیه جدا کرد. این، سؤال یکتایی است. در حالت کلی، مانند جواب (۱۶) معادلهٔ (۱۵)، جوابهای معادلهٔ دیفرانسیل شامل یک یا چند ثابت دلخواه انتگرال‌گیری هستند. معادلهٔ (۱۶) خانواده‌ای نامتناهی از توابع را متناظر با نامتناهی انتخاب ثابت c مشخص

می‌کند. همان‌طور که در بخش ۲.۱ دیدیم، اگر p در یک زمان t مشخص شود، یک مقدار برای c مشخص می‌شود؛ اما حتی دراین‌صورت هم هنوز امکان وجود جواب دیگری برای معادلهٔ (۱۵) را که در آن p همان مقدار مشخص را در همان زمان مشخص اختیار می‌کند رد نکرده‌ایم. موضوع یکتایی ایجابهای عملی هم دارد: اگر به‌اندازهٔ کافی خوش‌شانس باشیم که جوابی برای مسئلهٔ مفروض بیابیم، اگر بدانیم جواب مسئله یکتا است، می‌توانیم مطمئن باشیم که مسئله را کاملاً حل کرده‌ایم. اگر احتمالاً جوابهای دیگری موجود باشند، شاید لازم باشد برای جستجوی آنها کار را ادامه بدهیم.

سومین سؤال مهم این است که با مفروض‌بودن معادلهٔ دیفرانسیلی به‌صورت (۸)، آیا واقعاً می‌توانیم یک جواب را معیّن کنیم و اگر چنین است، چگونه؟ توجه کنید که اگر جواب معادلهٔ مفروض را بیابیم، به سؤال وجود جواب پاسخ داده‌ایم. اما بدون اطلاع از نظریهٔ وجود مثلاً ممکن است با رایانه تقریب عددی‌ای برای «جواب» ناموجود بیابیم. از طرف دیگر، حتی اگر بدانیم که جوابی وجود دارد، ممکن است جواب برحسب توابع مقدماتی یعنی توابع چندجمله‌ای، مثلثاتی، نمایی، لگاریتمی و هذلولوی قابل بیان نباشد. متأسفانه وضع برای اغلب معادلات دیفرانسیل به این منوال است. بنابراین ما علاوه بر بررسی روشهای مقدماتی برای یافتن جوابهای دقیق مسئله‌های نسبتاً ساده، روشهایی کلی‌تر برای یافتن تقریبهایی برای جوابهای مسائل مشکل‌تر را هم بررسی می‌کنیم.

استفاده از رایانه در معادلات دیفرانسیل. رایانه می‌تواند ابزار بسیار باارزشی در مطالعهٔ معادلات دیفرانسیل باشد. سالیان دراز از رایانه برای اجرای روشهای عددی برای ساختن تقریبهایی از جوابهای معادلات دیفرانسیل مانند آنچه که در فصل ۸ توصیف شده استفاده می‌شد. این روشها تا درجهٔ بسیار بالایی از کلیت و کارایی اصلاح شده‌اند. اجرای چند خط از دستورات رایانه‌ای که به زبان پیشرفتهٔ برنامه‌ریزی نوشته شده‌اند، روی رایانه‌های نسبتاً ارزان، اغلب در عرض چند ثانیه، برای تخمین جوابهای دامنهٔ وسیعی از معادلات دیفرانسیل با دقتی بسیار بالا کافی است. برنامه‌های پیشرفته‌تر نیز به‌سادگی در دسترس قرار دارند. این برنامه‌ها قابلیت کارکردن با سیستمهای بسیار بزرگ و پیچیده را با ویژگیهای متعدد تشخیصی بهم می‌آمیزد و به استفاده‌کنندگان دربارهٔ مشکلات احتمالی که با آن روبه‌رو می‌شوند هشدار می‌دهد.

معمولاً نتیجهٔ الگوریتم محاسباتی، جدولی از اعداد است که گزیده‌ای از مقادیر متغیرهای مستقل و مقادیر متناظر متغیرهای وابسته را فهرست می‌کند. با نرم‌افزاری مناسب می‌توان به‌سادگی جوابهای معادلهٔ دیفرانسیل را، صرف‌نظر از اینکه جوابها به‌صورت عددی به‌دست آمده باشند یا با نوعی روند تحلیلی، به‌طور تصویری نمایش داد. این نمایشهای تصویری، اغلب نسبت به جدولی از اعداد و یا فرمول تحلیلی پیچیده در درک و تفسیر جوابها بسیار مفیدتر و روشن‌کننده‌تر هستند. در بازار چندین نرم‌افزار خوش‌ساخت و نسبتاً ارزان با کارایی مشخص برای بررسی نمودارهای معادلات دیفرانسیل موجودند. وجود گستردهٔ رایانه‌های شخصی، قدرت محاسباتی و تصویری را در دسترس عموم دانشجویان قرار داده است. شما باید با توجه به شرایط خاص خود چگونگی استفادهٔ بهینه از منابع رایانه‌ای موجود را بررسی کنید.

ویژگی دیگر استفاده از رایانه که بسیار به مطالعهٔ معادلات دیفرانسیل مرتبط است، وجود نرم‌افزارهای بسیار قوی و جامعی است که می‌توانند مجموعهٔ وسیعی از اعمال ریاضی را انجام بدهند. از این نرم‌افزارها میپل[1]، متمتیکا[2] و مت‌لب[3] را می‌توان نام برد که هر یک از آنها را می‌توان روی رایانه‌های شخصی و یا بزرگ‌تر به‌کار گرفت. هر سهٔ

1. Maple 2. Mathematica 3. MATLAB

این نرم‌افزارها می‌توانند محاسبات عددی فراوانی را انجام بدهند و قابلیتهای گرافیکی فراوانی دارند. نرم‌افزارهای میپل و متمتیکا قابلیتهای تحلیلی بسیار گسترده‌ای دارند؛ به‌عنوان مثال می‌توانند عملیات تحلیلی حل معادلات دیفرانسیل را اغلب فقط با یک دستور اجرا کنند. هر کس که می‌خواهد در سطحی جدی‌تر به معادلات دیفرانسیل بپردازد، باید حداقل با یکی از این نرم‌افزارها آشنا شود و راههای استفاده از آنها را بررسی کند.

برای شمای دانشجو، این منابع محاسباتی بر نحوهٔ مطالعهٔ معادلات دیفرانسیل تأثیر می‌گذارد. برای داشتن اعتماد به‌نفس در استفاده از معادلات دیفرانسیل، درک چگونگی کارکرد روشهای حل اساسی است و بخشی از این درک با حل تعداد کافی مثال با جزئیات به‌دست می‌آید. با این حال، درنهایت باید هرقدر که می‌توانیم تعداد بیشتری از عملیات (اغلب تکراری) را به رایانه بسپریم و توجهمان را بیشتر به صورت‌بندی مناسب و تفسیر جوابها معطوف کنیم. به‌نظر ما، شما در هر مسئله باید همواره از بهترین روشها و ابزار موجود استفاده کنید. به‌ویژه باید سعی کنید که روشهای عددی، گرافیکی و تحلیلی را ترکیب کنید تا بیشترین درک را از رفتار جوابها و روند بنیادی‌ای که مسئله را مدل می‌کند به‌دست بیاورید. همواره باید به‌خاطر داشته باشید که بعضی کارها را با مداد و کاغذ می‌توان به نحو احسن انجام داد، در حالی که برخی دیگر نیازمند ماشین‌حساب یا رایانه هستند. اغلب برای انتخاب ترکیب مناسب، قضاوتی مناسب ضروری است.

مسئله‌ها

در هر یک از مسئله‌های ۱ تا ۶، مرتبهٔ معادلهٔ دیفرانسیل داده‌شده را تعیین کنید؛ همچنین معین کنید که معادله خطی است یا غیرخطی.

۱. $t^2\frac{d^2y}{dt^2}+t\frac{dy}{dt}+3y=\sin t$

۲. $(1+y^2)\frac{d^2y}{dt^2}+t\frac{dy}{dt}+y=e^t$

۳. $\frac{d^4y}{dt^4}+\frac{d^3y}{dt^3}+\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dy}{dt}+y=1$

۴. $\frac{dy}{dt}+ty^2=0$

۵. $\frac{d^2y}{dt^2}+\cos(t+y)=\sin t$

۶. $\frac{d^3y}{dt^3}+t\frac{dy}{dt}+(\cos^2 t)y=t^3$

در هر یک از مسئله‌های ۷ تا ۱۴ تحقیق کنید که هر یک از توابع داده‌شده جواب معادلهٔ دیفرانسیل هستند.

۷. $ty'-y=t^2$؛ $y=3t+t^2$

۸. $y''+2y'-3y=0$؛ $y_1(t)=e^{-3t}$، $y_2(t)=e^t$

۹. $y''-y=0$؛ $y_1(t)=e^t$، $y_2(t)=\cosh t$

۱۰. $y''''+4y'''+3y=t$؛ $y_1(t)=\frac{t}{3}$، $y_2(t)=e^{-t}+\frac{t}{3}$

۱۱. $2t^2y''+3ty'-y=0,\ t>0$؛ $y_1(t)=t^{1/2}$، $y_2(t)=t^{-1}$

۱۲. $t^2y''+5ty'+4y=0,\ t>0$؛ $y_1(t)=t^{-2}$، $y_2(t)=t^{-2}\ln t$

۱۳. $y''+y=\sec t,\ 0<t<\frac{\pi}{2}$؛ $y=(\cos t)\ln\cos t+t\sin t$

۱۴. $y'-2ty=1$؛ $y=e^{t^2}\int_0^t e^{-s^2}ds+e^{t^2}$

در هر یک از مسئله‌های ۱۵ تا ۱۸، مقادیری از r را تعیین کنید که جوابهای معادلهٔ دیفرانسیل داده‌شده به‌صورت $y=e^{rt}$ باشد.

۱۵. $y'+3y=0$

۱۶. $y''-y=0$

۱۷. $y''+y'-6y=0$

۱۸. $y'''-4y''+3y'=0$

در هر یک از مسئله‌های ۱۹ و ۲۰ مقادیری از r را تعیین کنید که معادلهٔ دیفرانسیل داده‌شده جوابی به‌صورت $y=t^r$ به‌ازای $t>0$ داشته باشد.

۱۹. $t^2y''+4ty'+2y=0$

۲۰. $t^2y''-4ty'+4y=0$

در هر یک از مسئله‌های ۲۱ تا ۲۴، مرتبهٔ معادلهٔ دیفرانسیل جزئی داده‌شده را مشخص کنید و تعیین کنید که معادله خطی است یا غیرخطی. مشتقات جزئی با شاخص پایین نشان داده شده‌اند.

۲۱. $u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=0$

۲۲. $u_{xx}+u_{yy}+uu_x+uu_y+u=0$

۲۳. $u_{xxxx}+2u_{xxyy}+u_{yyyy}=0$

۲۴. $u_t+uu_x=1+u_{xx}$

در هر یک از مسئله‌های ۲۵ تا ۲۸، تحقیق کنید که هر یک از توابع داده‌شده جواب معادلهٔ دیفرانسیل جزئی مفروض هستند.

۲۵. $u_{xx}+u_{yy}=0$؛ $u_1(x,y)=\cos x\cosh y$، $u_2(x,y)=\ln(x^2+y^2)$

۲۶. $\alpha^2u_{xx}=u_t$؛ $u_1(x,t)=e^{-\alpha^2t}\sin x$، $u_2(x,t)=e^{-\alpha^2\lambda^2t}\sin\lambda x$، ($\lambda$ ثابت حقیقی است).

۲۷. $\alpha^2u_{xx}=u_t$؛ $u=(\pi/t)^{1/2}e^{-x^2/4\alpha^2t},\ t>0$

۲۸. $a^2u_{xx}=u_{tt}$؛ $u_1(x,t)=\sin\lambda x\sin\lambda at$، $u_2(x,t)=\sin(x-at)$، (λ ثابت حقیقی است).

۲۹. با انجام گام‌های زیر، معادلهٔ حرکت آونگ نوسانی (یعنی معادلهٔ (۱۲) در متن) را به‌دست بیاورید. فرض کنید میله صلب و بی‌وزن است، و جرم فقط جرم نقطه‌ای است و هیچ نیروی اصطکاک و یا کشش در هیچ جای سیستم موجود نیست.

الف) فرض کنید که جرم در وضعیت دلخواهی که با زاویهٔ θ مشخص شده قرار داده شده است. نمودار جسم آزاد را، که نیروهای عمل‌کننده روی جرم را نشان می‌دهد، رسم کنید.

ب) قانون حرکت نیوتن را در جهت مماس بر قوس دواری که جرم روی آن حرکت می‌کند به‌کار بگیرید. دراین‌صورت، نیروی کششی بر میله در معادله وارد نمی‌شود. توجه کنید که باید مؤلفهٔ نیروی جاذبه در جهت مماسی را بیابید. همچنین توجه کنید که شتاب خطی برخلاف شتاب زاویه‌ای $Ld^2\theta/dt^2$ است که در آن L طول میله است.

ج) نتیجهٔ قسمت (ب) را ساده کنید و معادلهٔ (۱۲) در متن را به‌دست بیاورید.

۳۰. راه دیگر به‌دست آوردن معادلهٔ آونگ (۱۲) مبتنی بر اصل پایستگی انرژی است.

الف) ثابت کنید انرژی جنبشی T برای حرکت آونگ عبارت است از

$$T = \frac{1}{2} m L^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 .$$

ب) ثابت کنید انرژی پتانسیل آونگ در موقعیت سکون عبارت است از

$$V = mgL(1 - \cos\theta).$$

ج) طبق اصل پایستگی انرژی، انرژی کل $E = T + V$ ثابت است. dE/dt را محاسبه کنید و برابر صفر قرار بدهید و ثابت کنید معادلهٔ حاصله به معادلهٔ (۱۲) تبدیل می‌شود.

۳۱. راه سوم به‌دست آوردن معادلهٔ آونگ استفاده از اصل تکانهٔ زاویه‌ای است؛ یعنی اینکه نرخ تغییرات تکانهٔ زاویه‌ای حول هر نقطه برابر گشتاور خارجی خالص همان نقطه است.

الف) ثابت کنید تکانهٔ زاویه‌ای M، یا گشتاور تکانه حول هر نقطه از تکیه‌گاه برابر است با $M = mL^2 d\theta/dt$.

ب) dM/dt را برابر با گشتاور نیروی جاذبه قرار بدهید و ثابت کنید معادلهٔ حاصله به معادلهٔ (۱۲) تبدیل می‌شود. توجه کنید که گشتاورهای در جهت خلاف عقربه‌های ساعت، مثبت هستند.

۴.۱ ملاحظات تاریخی

بدون اطلاع از معادلات دیفرانسیل و روشهای حل آن، مشکل بتوان قدردان تاریخ این شاخهٔ بسیار مهم ریاضیات بود. در عین حال، پیشرفت معادلات دیفرانسیل با پیشرفت ریاضیات به‌طور عام درآمیخته است و نمی‌توان آنها را از هم جدا کرد. به هر حال برای ارائهٔ تصویری تاریخی، در اینجا به برخی از مسیرهای اصلی موضوع اشاره می‌کنیم و سرشناس‌ترین چهره‌های اولیهٔ آن را معرفی می‌کنیم. اطلاعات تاریخی دیگری هم در زیرنویس‌هایی که درکتاب پراکنده‌اند و مراجعی که در انتهای هر فصل آمده‌اند ذکر کرده‌ایم.

موضوع معادلات دیفرانسیل از مطالعات آیزاک نیوتن (۱۶۴۲-۱۷۲۷م) و گوتفرید ویلهلم لایب‌نیتز (۱۶۴۶-۱۷۱۶م) در زمینهٔ حساب دیفرانسیل و انتگرال در قرن هفدهم میلادی برخاسته است. نیوتن در یک روستای انگلیسی بزرگ شد، درکالج ترینیتی تحصیل کرد و در سال ۱۶۶۹ استاد کرسی لوکاسی ریاضی دانشگاه کمبریج شد. کشفهای تاریخی حساب دیفرانسیل و انتگرال و قوانین بنیادی مکانیک از ۱۶۶۵ میلادی آغاز شد. این دستاوردها به‌طور خصوصی میان دوستانش دست‌به‌دست می‌شد، اما نیوتن به‌شدت نسبت به انتقاد حساس بود و تا ۱۶۸۷ میلادی آنها را منتشر نکرد، تا اینکه کتاب مشهورش، اصول ریاضی فلسفهٔ طبیعی را چاپ کرد. اگرچه نیوتن در زمینهٔ معادلات دیفرانسیل نسبتاً کم کارکرده است، با بسط حساب دیفرانسیل و انتگرال و توضیح اصول اساسی مکانیک پایه‌ای برای کاربرد معادلات دیفرانسیل در قرن هجدهم و خصوصاً توسط اویلر فراهم کرد. نیوتن معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ اول را برحسب شکل‌های $dy/dx = f(x)$، $dy/dx = f(y)$ و $dy/dx = f(x,y)$ دسته‌بندی کرد و برای معادلهٔ اخیر در حالتی که $f(x,y)$ برحسب x و y چندجمله‌ای

است روش حلی با استفاده از سری‌های نامتناهی ابداع کرد. تحقیقات فعال نیوتن در ریاضیات جزگهگاه حل «مسائل چالش‌انگیز» و بازنگری و انتشار دستاوردهای قدیمی در اوایل دههٔ ۱۶۹۰ میلادی به اتمام رسید. او در ۱۶۹۶ میلادی ریاست ضرابخانهٔ بریتانیا منسوب شد و چند سال بعد از سمت استادی استعفا کرد. او در سال ۱۷۰۵ میلادی به لقب شوالیه مفتخر شد و پس از مرگ در دیر وست‌مینستر دفن شد.

لایب‌نیتز در لایپزیگ به‌دنیا آمد و دکترای فلسفه‌اش را در بیست سالگی در دانشگاه آلتورف به پایان رساند. او در زندگیش در چند رشته به پژوهش پرداخت. از آنجا که پس از بیست سالگی به ریاضیات علاقه‌مند شد، این علم را اساساً نزد خود آموخت. لایب‌نیتز مستقل از نیوتن، اگرچه کمی پس از او، به نتایج بنیادی حساب دیفرانسیل و انتگرال رسید، اما اولین نفری بود که آنها را، در ۱۶۸۴ میلادی، منتشر کرد. لایب‌نیتز از قدرت نمادهای خوب ریاضی آگاه بود؛ او بود که نماد dy/dx را برای مشتق و علامت انتگرال را وضع کرد. او روش جداسازی متغیرها (بخش ۲.۲) را در ۱۶۹۱ میلادی، روش تقلیل معادلات همگن به معادلات جداشدنی (بخش ۲.۲، مسئلهٔ ۳۰) را در ۱۶۹۱ میلادی، و روندی برای حل معادلات خطی مرتبهٔ اول (بخش ۱.۲) را در ۱۶۹۴ میلادی ابداع کرد. او عمرش را به‌عنوان سفیر و مشاور چند خانوادهٔ سلطنتی آلمان صرف کرد و به این ترتیب، امکان سفرهای متعدد و ارتباط وسیع با ریاضیدانان دیگر، به‌ویژه برادران برنولی را پیدا کرد. بسیاری از مسئله‌های معادلات دیفرانسیل در اواخر قرن هفدهم میلادی در همین ارتباطها حل شدند.

برادران برنولی، ژاکوب (۱۶۴۵-۱۷۰۵م) و یوهان (۱۶۶۷-۱۷۴۸م)، که اهل باسل بودند، کارهای بسیاری برای بسط روشهای حل معادلات دیفرانسیل و دامنهٔ کاربرد آنها انجام دادند. ژاکوب در ۱۶۸۷ میلادی استاد ریاضی در باسل شد و یوهان نیز پس از مرگ برادر در ۱۷۰۵ میلادی به همان سمت منسوب شد. هر دو نفر ستیزه‌جو و حسود و اغلب مشغول نزاع خصوصاً با یکدیگر بودند؛ با وجود این هر دو نفر به بسیاری از شاخه‌های ریاضی خدمات مهمی کردند. آنها با صورت‌بندی بسیاری از مسئله‌های مکانیک به‌صورت معادلات دیفرانسیل توانستند آنها را با کمک حساب دیفرانسیل و انتگرال حل کنند. به‌عنوان مثال ژاکوب برنولی در ۱۶۹۰ میلادی معادلهٔ دیفرانسیل $y' = [a^3/(b^2y - a^3)]^{1/2}$ را حل کرد و در همان مقاله برای اولین‌بار از عبارت «انتگرال» به معنی امروزی آن استفاده کرد. در ۱۶۹۴ میلادی یوهان برنولی توانست معادلهٔ $dy/dx = y/ax$ را حل کند. یک مسئله که هردو برادر آن حل کردند و منجر به تنش فراوان بین آنها شد مسئلهٔ **حداقل زمان** (مسئلهٔ ۳۲ بخش ۳.۲ را ببینید) بود. مسئلهٔ حداقل زمان را لایب‌نیتز، نیوتن و مارکیز هوپیتال هم حل کرده‌اند. گفته می‌شود — و شاید شایعه‌ای بیش نباشد — که نیوتن آخر وقت بعدازظهر یک روز کسل‌کننده در ضرابخانه به این مسئله برخورد و آن را پس از شام حل کرد. او جواب را بدون نام منتشر کرد، اما یوهان برنولی با مشاهدهٔ آن فریاد زد که «آه، من شیر را از اثر پنجه‌هایش می‌شناسم».

دانیل برنولی (۱۷۰۰-۱۷۸۲م)، پسر یوهان، در جوانی برای پیوستن به آکادمی تازه‌تأسیس سن‌پترزبورگ به این شهر مهاجرت کرد، اما در ۱۷۳۳ میلادی به‌عنوان استاد گیاه‌شناسی و سپس فیزیک به باسل بازگشت. او در درجهٔ اول به معادلات دیفرانسیل جزئی و کاربردهای آن علاقه‌مند بود. به‌عنوان مثال، معادلهٔ برنولی در مکانیک سیالات به او منسوب است. به‌علاوه، او اولین کسی بود که به تابعهایی که یک قرن بعد به توابع بسل (بخش ۷.۵) معروف شدند برخورد.

لئونارد اویلر (۱۷۰۷-۱۷۸۳م)، بزرگ‌ترین ریاضیدان قرن هجدهم میلادی، در نزدیکی باسل بزرگ شد و

شاگرد یوهان برنولی بود. او در ۱۷۲۷ میلادی به دنبال دوستش دانیل برنولی به سن‌پترزبورگ رفت. او در بقیهٔ عمرش در آکادمی سن‌پترزبورگ (۱۷۲۷-۱۷۴۱م و ۱۷۶۶-۱۷۸۳م) و آکادمی برلین (۱۷۴۱-۱۷۶۶م) عضو بود. اویلر پربارترین ریاضیدان تمام زمانها بود: گزیدهٔ آثار وی شامل بیش از ۷۰ جلد بزرگ است. علایق او همهٔ شاخه‌های ریاضیات و بسیاری از کاربردهای آن را در بر می‌گیرد. با اینکه در هفده سال آخر عمرش نابینا شد، کارهایش بدون وقفه تا آخرین روز مرگش ادامه یافت. در اینجا به‌طور خاص به صورت‌بندی ریاضی مسئله‌های مکانیک و بسط روشهای حل آنها علاقه‌مندیم. لاگرانژ کارهای اویلر در مکانیک را «اولین کار عظیم، که در آن آنالیز در علم حرکت به‌کارگرفته شده است» خواند. اویلر شرط کامل بودن معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ اول (بخش ۶.۲) را در ۱۷۳۴-۱۷۳۵ میلادی معین کرد و در همان مقاله نظریهٔ عامل انتگرال‌ساز (بخش ۶.۲) را بسط داد و جواب عمومی معادلات خطی و همگن با ضرایب ثابت (بخش‌های ۱.۳، ۳.۳ و ۲.۴) را در ۱۷۴۳ میلادی ارائه کرد. او این نتایج اخیر را در ۱۷۵۰-۱۷۵۱ میلادی به معادلات غیرهمگن بسط داد. او تقریباً از ۱۷۵۰ میلادی بارها از سری‌های توانی (فصل ۵) برای حل معادلات دیفرانسیل استفاده کرد. او روشی عددی (بخش‌های ۷.۲ و ۱.۸) هم در ۱۷۶۸-۱۷۶۹ میلادی ارائه کرد، در زمینهٔ معادلات دیفرانسیل جزئی کارهای زیادی کرد و برای اولین‌بار حساب تغییرات را به شکلی نظام‌مند بررسی کرد.

ژوزف لویی لاگرانژ (۱۷۳۶-۱۸۱۳م) در ۱۹ سالگی در موطنش، تورین، استاد ریاضی شد. او در ۱۷۶۶ میلادی جانشین اویلر در کرسی ریاضی آکادمی برلین شد و در ۱۷۸۷ میلادی به آکادمی پاریس رفت. عمدهٔ شهرت او به‌خاطر کار عظیمش، مکانیک تحلیلی است که رساله‌ای است زیبا و جامع دربارهٔ مکانیک نیوتنی و در ۱۷۸۸ میلادی منتشر شده است. در خصوص معادلات دیفرانسیل مقدماتی، لاگرانژ در سال‌های ۱۷۶۲-۱۷۶۵ میلادی ثابت کرد که جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل خطی و همگن مرتبهٔ n ترکیبی خطی از n جواب مستقل خطی (بخش‌های ۲.۳ و ۱.۴) است. بعداً در سال‌های ۱۷۷۴-۱۷۷۵ میلادی او روش تغییر پارامترها (بخش‌های ۶.۳ و ۴.۴) را بسط داد و کامل کرد. لاگرانژ به‌واسطهٔ کارهای بنیادیش در معادلات دیفرانسیل جزئی و حساب تغییرات هم مشهور است.

پیر سیمون لاپلاس (۱۷۴۹-۱۸۲۷م) نوجوانیش را در نرماندی گذراند؛ اما در ۱۷۶۸ میلادی به پاریس آمد و به‌سرعت جای خود را در محافل علمی بازکرد و در انتخابات آکادمی علوم در ۱۷۷۳ میلادی برگزیده شد. او در زمینهٔ مکانیک سماوی سرآمد بود، عظیم‌ترین کار وی، رسالهٔ مکانیک سماوی، در پنج مجلد بین سالهای ۱۷۹۹ و ۱۸۲۵ میلادی منتشر شد. معادلهٔ لاپلاس معادلهٔ بنیادی بسیاری از شاخه‌های ریاضی فیزیک است و لاپلاس آن را در ارتباط با نیروی جاذبه به‌طور مفصل مطالعه کرد. تبدیل لاپلاس (فصل ۶) نیز به او منسوب است، هر چند که مفید بودن آن در حل معادلات دیفرانسیل تا مدتها بعد تشخیص داده نشد.

تا پایان قرن هجدهم میلادی روشهای مقدماتی متعددی برای حل معادلات دیفرانسیل کشف شده بود. در قرن نوزدهم میلادی، ریاضیدانان بیشتر به تحقیق در مورد سؤالهای نظری وجود و یکتایی و بسط روشهای پیشرفته‌تر مانند استفاده از سریهای توانی (فصل ۵) علاقه‌مند بودند. بستر طبیعی این روشها صفحهٔ مختلط بود و در نتیجه، با توسعهٔ نظریهٔ توابع تحلیلی مختلط پیشرفت کردند و تا حدی انگیزهٔ بسط این نظریه هم شدند. با روشن شدن نقش مهم معادلات دیفرانسیل جزئی در فیزیک ریاضی، این معادله‌ها هم عمیقاً بررسی شدند. در این ارتباط چند خانواده از تابعها که مکرراً به‌صورت جوابهای معادلات دیفرانسیل معینی ظاهر می‌شدند مفصلاً بررسی شدند.

بسیاری از این تابعها که عموماً به توابع متعالی مرتبهٔ بالاتر مشهورند به ریاضیدانانی مانند بسل، لژاندر، هرمیت، چبیشف، هَنکل و دیگران منسوب‌اند.

فراوانی معادله‌های دیفرانسیلی که با روشهای تحلیلی حل نشدند منجر به بررسی روشهای تقریب عددی (فصل ۸ را مشاهده کنید) شد. تا سال ۱۹۰۰ میلادی روش‌های کارامدی برای انتگرال‌گیری عددی ابداع شده بودند؛ اما پیاده‌سازی آنها به‌علت نیاز به محاسبات مفصل با دست و یا ابزارهای محاسباتی ابتدایی به‌شدت با محدودیت مواجه بود. در شصت سال گذشته، توسعهٔ رایانه‌های قدرتمند و همه‌کاره دامنهٔ مسائلی را که به‌طور مؤثر با روشهای عددی بررسی می‌شدند وسعت داد. در این دوران انتگرال‌گیرهای بسیار بهبودیافته و قابل اعتماد ساخته شدند و امروزه به‌سادگی در دسترس‌اند. برنامه‌های مناسب رایانه‌های مشخصی امکان حل بسیاری از مسئله‌های مهم را به عموم دانشجویان دادند.

مشخصهٔ دیگر معادلات دیفرانسیل قرن بیستم، ابداع روشهای هندسی و توپولوژیک مخصوصاً برای معادلات غیرخطی است. هدف این است که دست‌کم بتوانیم رفتار کیفی جوابها را از دیدگاه هندسی و تحلیلی درک کنیم. اگر به اطلاعات بیشتر نیاز داشته باشیم، آن را معمولاً با استفاده از تقریبهای عددی به‌دست می‌آوریم. مقدمه‌ای بر روشهای هندسی را در فصل ۹ آورده‌ایم.

در سالهای اخیر این دو مسیر به یکدیگر نزدیک شده‌اند. رایانه‌ها و به‌ویژه گرافیک رایانه‌ای نیروی جدیدی به مطالعهٔ دستگاههای معادلات دیفرانسیل غیرخطی اضافه کرده است. پدیده‌های دور از انتظار (بخش ۸.۹) مانند رباینده‌های غریب، آشوب و فراکتالها کشف شده‌اند و به‌طور وسیعی بررسی شده‌اند و این امر منجر به بینش‌های مهم و جدید در بسیاری از کاربردها شده است. معادلات دیفرانسیل موضوعی قدیمی است و چیزهای بسیاری دربارهٔ آن می‌دانیم، اما در قرن بیست و یکم هم منبع بسیار مهم و پرباری از مسئله‌های مهم و حل‌نشده است.

مراجع

نرم‌افزارهای رایانه‌ای حل معادلات دیفرانسیل با چنان سرعتی در حال بسط وگسترش هستند که نمی‌توان در چنین کتابی به‌طور خاص از آنها نام برد. اگر بخواهید دربارهٔ سیستم‌های رایانه‌ای اطلاعاتی داشته باشید، یک راه خوب، جستجو به دنبال Maple، Mathematica و یا Matlab در گوگل است.

برای مطالعهٔ بیشتر دربارهٔ تاریخ ریاضیات کتاب‌های فهرست‌شدهٔ زیر را ببینید:

Boyer, C. B., and Merzbach, U. C. A., *A History of Mathematics* (2nd ed.) (New York: Wiley, 1989),

Kline, M., *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times* (New York: Oxford University Press, 1972).

ضمیمهٔ تاریخی مناسبی دربارهٔ پیشرفت اولیهٔ معادلات دیفرانسیل در

Ince, E. L., *Ordinary Differential Equations* (London: Longmans, Green, 1927; New York: Dover, 1956)

آمده است. یک منبع دایرةالمعارفی دربارهٔ زندگی و دستاوردهای ریاضیدانان گذشته، کتاب

Gillespie, C. C., ed, *Dictionary of Scientific Biography* (15 vols.) (New York: Scribner's, 1971)

است. اطلاعات تاریخی بیشتر را می‌توان در اینترنت یافت. یک سایت بسیار عالی

www-history.mcs.st-and.ac.uk/BiogIndex.html

است که جان. جی. اُکانر و ادموند اف. رابرتسون از دپارتمان ریاضی و آمار دانشگاه سنت‌اندروز در اسکاتلند آن را ایجاد کرده‌اند.