ADVANCED CONTROL

Ali Karimpour
Associate Professor
Ferdowsi University of Mashhad

Reference:
Chi-Tsong Chen, "Linear System Theory and Design", 1999.
I thank my students , Saina Ramyar and Parisa Tavakkoli, for their help in making slides of this lecture.
.

Lecture 5
Stability

Topics to be covered include:

- Introduction.
- Input-Output Stability of LTI systems.
- Internal Stability.
- Lyapunov Theorem.
- Stability of Linear Time-Varying(LTV) Systems

2

آنچه پس از مطالعه این مبحث می آموزید

- مفهوم پایداری ورودی-خروجی (BIBO)
- Input-output stability (BIBO)
- شرط وجود پایداری ورودی-خروجی (BIBO)
- Input-output stable systems
- مفهوم پایداری داخلی (لیاپانوفی و مجانبی)
- Internal stability(in the sense of Lyapunov and asymptotic)
- شرط وجود پایداری لیانوفی و مجانبی
- Marginal and asymptotic stability conditions
- بررسی پایداری مجانبی توسط معاله لیاپانوف
- Internal stability by Lyapunov equation
- بررسی پایداری در سیستمهای LTV
- Stability analysis for LTV state equation

3

Introduction
مقدمه

Linear System property

خاصیت سیستم خطی

$$y_{total}(t) = y_{zs}(t) + y_{zi}(t)$$

پاسخ ورودی صفر + پاسخ حالت صفر = پاسخ کامل

پاسخ سیستمهای خطی را می توان بصورت جمع پاسخ حالت صفر و پاسخ ورودی صفر بیان نمود.

۱- پایداری ورودی خروجی سیستمهای خطی پایداری BIBO (ورودی کراندار خروجی کراندار) نامیده می شود. (پاسخ حالت صفر)

۲- پایداری داخلی سیستمهای خطی پایداری مجانبی نامیده می شود. (پاسخ ورودی صفر)

4

Input output stability of LTI system

پایداری ورودی خروجی سیستمهای LTI

در سیستم تک ورودی تک خروجی خطی غیر متغیر با زمان (LTI) خروجی را میتوان بصورت

$$y(t) = \int_0^t g(t-\tau)u(\tau)d\tau = \int_0^t g(\tau)u(t-\tau)d\tau \qquad (I)$$

نمایش داد که g(t) پاسخ ضربه بوده و سیستم در t=0 آرام است.

تعریف ۵-۱ : یک سیستم را پایدار BIBO گویند اگر هر ورودی محدود خروجی محدود را تولید کند. این پایداری برای پاسخ حالت صفر تعریف شده و سیستم در ابتدا آرام است.

قضیه ۵-۱ : یک سیستم SISO توصیف شده با معادلات (I) را پایدار BIBO گویند اگر و فقط اگر قدر مطلق g(t) در بازه $[0,\infty)$ انتگرال پذیر باشد یا

$$\int_0^\infty |g(t)|dt \le M < \infty$$

M عدد ثابت می باشد.

Input output stability of LTI system

اثبات قضیه ۵-۱: باید دو عبارت زیر را اثبات کنیم:

سیستم پایدار BIBO	$\Rightarrow$	g(t) مطلقا انتگرال پذیر
g(t) مطلقا انتگرال پذیر	$\Rightarrow$	سیستم پایدار BIBO

ابتدا قسمت اول را ثابت می کنیم.

فرض کنید g(t) بطور مطلق انتگرال پذیر است باید نشان دهیم هر ورودی کراندار منجر به خروجی کراندار می شود.

ورودی کراندار دلخواه با شرط $|u(t)| \le u_m < \infty$ را در نظر بگیرید:

$$|y(t)| = \left|\int_0^t g(\tau)u(t-\tau)d\tau\right| \le \int_0^\infty |g(\tau)||u(t-\tau)|d\tau \le u_m \int_0^\infty |g(\tau)|d\tau \le u_m M$$

لذا خروجی محدود است. پس سیستم پایدار BIBO است.

6

Input output stability of LTI system

اثبات قضیه ۵-۱(ادامه): باید دو عبارت زیر را اثبات کنیم:

سیستم پایدار BIBO $\Rightarrow$ g(t) مطلقا انتگرال پذیر

g(t) مطلقا انتگرال پذیر $\Rightarrow$ سیستم پایدار BIBO

حال به اثبات قسمت دوم قضیه می پردازیم.

فرض کنید سیستم پایدار BIBO است باید نشان دهیم g(t) بطور مطلق انتگرال پذیر است.

نشان می دهیم اگر g(t) مطلقا انتگرال پذیر نباشد، به تناقض می رسیم.

اگر g(t) مطلقا انتگرال پذیر نباشد، آنگاه یک t_1 وجود دارد به طوری که: $\int_0^{t_1} |g(\tau)| d\tau = \infty$

فرض کنید ورودی کراندار زیر را انتخاب کنیم: $u(t-\tau) = \begin{cases} 1 & \text{if } g(\tau) \ge 0 \\ -1 & \text{if } g(\tau) < 0 \end{cases}$

$$y(t) = \int_0^\infty g(\tau) u(t-\tau) d\tau = \int_0^\infty |g(\tau)| d\tau = \infty$$ تناقض

7

Input output stability of LTI system

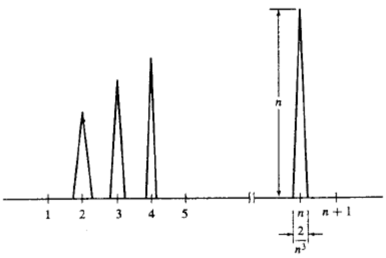
پایداری ورودی خروجی سیستمهای LTI

آیا محدود بودن انتگرال قدرمطلق پاسخ ضربه به معنی محدود بودن پاسخ ضربه است؟

مثال ۵-۱: تابع مقابل داده شده است. $f(t-n) = \begin{cases} n + (t-n)n^4 & \text{for } \; n - 1/n^3 \le t \le n \\ n - (t-n)n^4 & \text{for } \; n < t \le n + 1/n^3 \end{cases}$

مساحت زیر هر مثلث: $1/n^2$

انتگرال قدر مطلق تابع : $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2}\right) < \infty$



تابع مطلقا انتگرال پذیر است اما تابع محدود نیست و برای $t \to \infty$ به صفر میل نمی کند.

8

Input output stability of LTI system

پایداری ورودی خروجی سیستمهای LTI

قضیه ۵-۲ : اگر سیستمی با پاسخ ضربه g(t) پایدار BIBO باشد برای $t \to \infty$ داریم:

۱) خروجی تحریک شده به وسیله $u(t)=a$ ،$t \ge 0$ به سمت $\hat{g}(0)\times a$ میل می کند.

۲) خروجی تحریک شده به وسیله $u(t)=\sin \omega_0 t$ ، $t \ge 0$ به سمت $|\hat{g}(j\omega_0)| \sin(\omega_0 t + \measuredangle \hat{g}(j\omega_0))$ میل می کند که $\hat{g}(s)$ تبدیل لاپلاس g(t) است یعنی:

$$\hat{g}(s) = \int_0^\infty g(\tau) e^{-s\tau} d\tau \qquad (II)$$

اثبات (۱)

اگر برای تمام $t \ge 0$ ،$u(t)=a$ باشد، داریم:

$$y(t) = \int_0^t g(\tau) u(t-\tau) d\tau = a \int_0^t g(\tau) d\tau$$

طبق تعریف تبدیل لاپلاس به ازای $s = 0$ نتیجه می دهد که وقتی $t \to \infty$

$$y(t) \to a \int_0^\infty g(\tau) d\tau = a\hat{g}(0)$$

بخش اول قضیه ۵-۲ اثبات شد.

9

Input output stability of LTI system

پایداری ورودی خروجی سیستمهای LTI

اثبات (۲)

اگر برای $t \ge 0$ ورودی برابر $u(t)=\sin \omega_0 t$ باشد، خروجی عبارتست از:

$$y(t) = \int_0^t g(\tau) \sin \omega_0 (t-\tau) d\tau \quad = \int_0^t g(\tau) [\sin \omega_0 t \cos \omega_0 \tau - \cos \omega_0 t \sin \omega_0 \tau] d\tau$$

$$= \sin \omega_0 t \int_0^t g(\tau) \cos \omega_0 \tau d\tau - \cos \omega_0 t \int_0^t g(\tau) \sin \omega_0 \tau d\tau$$

لذا برای $t \to \infty$ داریم:

$$y(t) \to \sin \omega_0 t \int_0^\infty g(\tau) \cos \omega_0 \tau d\tau - \cos \omega_0 t \int_0^\infty g(\tau) \sin \omega_0 \tau d\tau$$

چون سیستم پایدار BIBO است دو انتگرال فوق کراندار است و از طرفی

$$\hat{g}(j\omega) = \int_0^\infty g(\tau) [\cos \omega \tau - j \sin \omega \tau] d\tau$$

$$\mathrm{Re}[\hat{g}(j\omega)] = \int_0^\infty g(\tau) \cos \omega \tau d\tau$$

$$\mathrm{Im}[\hat{g}(j\omega)] = -\int_0^\infty g(\tau) \sin \omega \tau d\tau$$

با جایگزینی بخشهای حقیقی و موهومی در رابطه

$$y(t) \to \sin \omega_0 t \,\mathrm{Re}(\hat{g}(j\omega_0)) + \cos \omega_0 t \,\mathrm{Im}(\hat{g}(j\omega_0)) \quad = |\hat{g}(j\omega_0)| \sin(\omega_0 t + \angle \hat{g}(j\omega_0))$$

10

بخش دوم قضیه ۵-۲ اثبات شد.

Input output stability of LTI system

پایداری ورودی خروجی سیستمهای LTI

قضیه ۵-۳ : یک سیستم SISO با تابع انتقال گویا و مناسب $\hat{g}(s)$ پایدار BIBO است اگر فقط اگر هر قطب $\hat{g}(s)$ دارای بخش حقیقی منفی باشد یا، به طور متعادل، در نیمه چپ صفحه s واقع شود.

اگر $\hat{g}(s)$ دارای قطب p_i با درجه تکرار m_i باشد، بسط به صورت کسرهای جزئی آن شامل عوامل زیر است:

$$\frac{1}{s-p_i}, \frac{1}{(s-p_i)^2}, \ldots, \frac{1}{(s-p_i)^{m_i}}$$

لذا تبدیل لاپلاس معکوس $\hat{g}(s)$ یا پاسخ ضربه آن دارای عوامل زیر باشد.

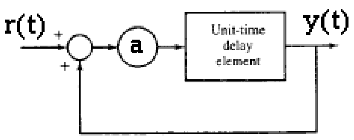
$$e^{p_i t}, te^{p_i t}, \ldots, t^{m_i-1} e^{p_i t}$$

می توان نشان داد که هر یک از این جمله ها مطلقا انتگرال پذیر است اگر و فقط اگر p_i دارای بخش حقیقی منفی است.

11

Input output stability of LTI system

پایداری ورودی خروجی سیستمهای LTI



مثال ۵-۲ : پایداری BIBO سیستم مقابل را بررسی کنید.

پاسخ ضربه سیستم عبارتست از:

$$g(t) = a\delta(t-1) + a^2\delta(t-2) + a^3\delta(t-3) + \ldots\ldots = \sum_{i=1}^{\infty} a^i \delta(t-i)$$

می دانیم:

$$|g(t)| = \sum_{i=1}^{\infty} |a^i| \delta(t-i)$$

حال

$$\int_0^{\infty} |g(t)|\, dt = \sum_{i=1}^{\infty} |a|^i = \begin{cases} \infty & \text{if } |a| \geq 1 \\ |a|/(1-|a|) < \infty & \text{if } |a| < 1 \end{cases}$$

پس سیستم برای $|a|<1$ پایدار BIBO است.

تابع انتقال بصورت زیر است ولی نمی توان از روی آن پایداری BIBO را تشخیص داد چرا که ...

$$\hat{g}(s) = \frac{ae^{-s}}{1-ae^{-s}}$$

12

Input output stability of LTI system

پایداری ورودی خروجی سیستمهای LTI

قضیه ۵-۴ : یک سیستم MIMO توصیف شده با ماتریس ضربه $G(t)=[g_{ij}(t)]$ را پایدار BIBO گویند اگر و فقط اگر قدر مطلق $g_{ij}(t)$ در بازه $[0,\infty)$ انتگرال پذیر باشد.

قضیه ۵-۵ : یک سیستم MIMO توصیف شده با ماتریس انتقال $G(s)=[g_{ij}(s)]$ را پایدار BIBO گویند اگر و فقط اگر هر قطب هر $g_{ij}(s)$ دارای بخش حقیقی منفی باشد.

تشخیص پایداری ورودی خروجی سیستمهای LTI از معادلات فضای حالت:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

ماتریس تابع انتقال عبارتست از:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

$$G(s) = C\frac{adj(sI - A)}{|sI - A|}B + D$$

پس اگر کلیه مقادیر ویژه A دارای بخش حقیقی منفی باشد. در اینصورت .... ولی اگر ....

Input output stability of LTI system

پایداری ورودی خروجی سیستمهای LTI

مثال ۵-۳ : شبکه نشان داده شده در شکل زیر را در نظر بگیرید. معادله حالت این شبکه به صورت زیر است، پایداری BIBO آن را بررسی کنید.

$$\dot{x}(t) = x(t) + 0 \times u(t)$$

$$y(t) = 0.5x(t) + 0.5u(t)$$

ماتریس A و مقدار ویژه آن برابر ۱ است. مقدار ویژه یک بخش حقیقی مثبت دارد

تابع انتقال عبارتست از:

$$\hat{g}(s) = 0.5(s-1)^{-1} \times 0 + 0.5 = 0.5$$

تابع انتقال فاقد قطب است پس پایدار BIBO است.

Internal stability پایداری داخلی

تعریف ۵-۲: پاسخ ورودی صفر سیستم $\dot{x} = Ax$ را به مفهوم لیاپانوف پایدار(پایدار حاشیه ای) گویند اگر هر حالت اولیه محدود x_0 پاسخ محدودی را بوجود آورد. علاوه بر این اگر پاسخ به صفر میل کند پایداری مجانبی حاصل می شود.

قضیه ۵-۶ :

۱) معادله $\dot{x} = Ax$ پایدار حاشیه ای (پایدار لیاپانوفی) است اگر و فقط اگر تمام مقادیر ویژه A دارای بخشهای حقیقی صفر و منفی باشند و آنهایی که دارای بخش های حقیقی صفر هستند ریشه های ساده چند جمله ای مینیمال A باشند.

۲) معادله $\dot{x} = Ax$ پایدار مجانبی است اگر و فقط اگر تمام مقادیر ویژه A دارای بخشهای حقیقی منفی باشند.

15

Internal stability پایداری داخلی

اثبات قضیه ۵-۶ – بخش اول:

تبدیل همانندی پایداری یک معادله حالت را تغییر نخواهد داد.

$$\bar{x} = Px$$
$$\dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x} = PAP^{-1}\bar{x}$$

P ناویژه است بنابراین: اگر x محدود باشد، $\bar{x}$ هم محدود خواهد بود.

اگر x برای $t \to \infty$ به سمت صفر میل کند، $\bar{x}$ هم به همین به سمت صفر میل می کند.

می توان پایداری A را با استفاده از $\bar{A}$ مورد مطالعه قرار داد. (مقادیر ویژه A و $\bar{A}$ یکسان هستند.)

این پاسخ محدود است اگر و فقط اگر هر درایه هر درایه $e^{\bar{A}t}$ برای تمام $t \geq 0$ محدود باشد.

$$\dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x} \Rightarrow \bar{x}(t) = e^{\bar{A}t}\bar{x}(0)$$

$$A: Jordan\,Form \xrightarrow{chapter3} e^{\bar{A}t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & te^{\lambda_1 t} & t^2 e^{\lambda_1 t}/2! & t^3 e^{\lambda_1 t}/3! \\ 0 & e^{\lambda_1 t} & te^{\lambda_1 t} & t^2 e^{\lambda_1 t}/2! \\ 0 & 0 & e^{\lambda_1 t} & te^{\lambda_1 t} \\ 0 & 0 & 0 & e^{\lambda_1 t} \end{bmatrix}$$

16

Internal stability پایداری داخلی

• اگر یک مقدار ویژه دارای بخش حقیقی منفی باشد، هر درایه ماتریس $e^{\bar{A}t}$ محدود است و برای $t \to \infty$ به سمت صفر میل می کند.
• اگر یک مقدار ویژه دارای بخش حقیقی صفر بوده و فاقد بلوک جردنی از مرتبه ۲ یا بالاتر باشد، درایه مربوطه در ماتریس $e^{\bar{A}t}$ برای تمام tها یک ثابت یا سینوسی است که محدود است.

← اثبات کفایت بخش اولیه قضیه ۵-۶

• اگر $\bar{A}$ دارای مقدار ویژه ای با بخش حقیقی مثبت باشد، هر درایه $e^{\bar{A}t}$ به طور نامحدود افزایش می یابد.
• اگر $\bar{A}$ دارای یک مقدار ویژه ای با بخش حقیقی صفر و بلوک جردن آن از مرتبه ۲ یا بالاتر باشـد، $e^{\bar{A}t}$ دارای حداقل یک درایه خواهد بود که به طور نامحدود افزایش می یابد.

اثبات قضیه ۵-۶ – بخش دوم:

برای پایدار مجانبی بودن، هر درایه $e^{\bar{A}t}$ باید برای $t \to \infty$ به سمت صفر میل کند.

⟸ هیچ مقدار ویژه ای با بخش حقیقی صفر مجاز نیست.

17

Internal stability پایداری داخلی

مثال ۵-۴ : سیستم مقابل داده شده است، پایداری حاشیه ای این سیستم را بررسی کنید.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} x$$

چندجمله ای مشخصه : $\Delta(\lambda) = \lambda^2(\lambda+1)$ ⟸ مقادیر ویژه : 0, 0, -1

چندجمله ای مینیمال : $\psi(\lambda) = \lambda(\lambda+1)$ ⟸ 0 : ریشه ساده چندجمله ای مینیمال

⟸ پایدار لیاپانوفی (حاشیه ای) است.

مثال را برای سیستم مقابل تکرار کنید :

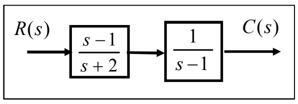
$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} x$$

چندجمله ای مینیمال : $\psi(\lambda) = \lambda^2(\lambda+1)$ ⟸ 0 : ریشه ساده چندجمله ای مینیمال نیست.

⟸ پایدار حاشیه ای نیست.

18

Internal stability and input-output stability پایداری داخلی و ورودی خروجی



مثال ۵-۵: سیستم مقابل داده شده است. مطلوبست بررسی پایداری مجانبی و پایداری BIBO

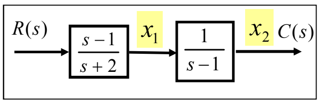
BIBO stability:

$$G(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{1}{s+2}$$

فاقد قطب سمت راست پس پایدار

Internal stability:

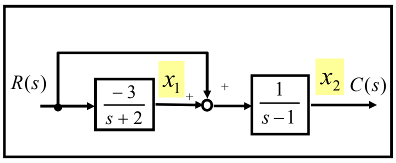
For internal stability we need state-space model so we have:



$$x_2(s)=\frac{1}{s-1}x_1(s) \longrightarrow \dot{x}_2=x_1+x_2$$

$$x_1(s)=\frac{s-1}{s+2}R(s) \longrightarrow \dot{x}_1=-2x_1+\dot{r}-r$$

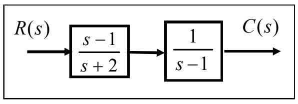
?



$$x_2(s)=\frac{1}{s-1}(x_1(s)+R(s)) \rightarrow \dot{x}_2=x_1+x_2+r$$

$$x_1(s)=\frac{-3}{s+2}R(s) \rightarrow \dot{x}_1=-2x_1-3r$$

Internal stability and input-output stability پایداری داخلی و ورودی خروجی



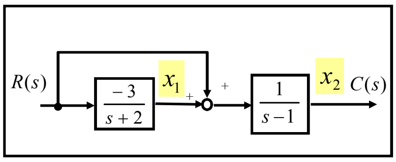
مثال ۵-۵: سیستم مقابل داده شده است. مطلوبست بررسی پایداری مجانبی و پایداری BIBO

BIBO stability:

فاقد قطب سمت راست پس پایدار

Internal stability:

For internal stability we need state-space model so we have:



$$\dot{x}_1=-2x_1-3r \qquad \dot{x}_2=x_1+x_2+r$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-3\\ 1\end{bmatrix}r$$

$$c=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad |sI-A|=\begin{vmatrix}s+2 & 0\\ -1 & s-1\end{vmatrix}=(s-1)(s+2)$$

$$\rightarrow \lambda_1=+1,\lambda_2=-2$$

The system is not internally stable (neither asymptotic nor Lyapunov stable).

Very important note: If RHP poles and zeros between different part of system omitted then the system is internally unstable although it may be BIBO stable.

Internal stability پایداری داخلی

قضیه ۵-۷:
تمام مقادیر ویژه ماتریس A دارای بخش حقیقی منفی هستند، اگر و فقط اگر برای هر ماتریس متقارن معین مثبت N معادله لیاپانوف $A'M + MA = -N$ دارای جواب متقارن، معین مثبت و یکتای M باشد.

تمرین ۵-۱۲: قضیه فوق را اثبات کنید.

قضیه ۵-۸:
اگر تمام مقادیر ویژه A دارای بخش حقیقی منفی باشند، معادله لیاپانوف $A'M + MA = -N$ به ازاء هر ماتریس N دارای جواب یکتایی به صورت زیر است.

$$M = \int_0^{\infty} e^{A't} N e^{At} \, dt$$

تمرین ۵-۱۳: قضیه فوق را اثبات کنید.

21

BIBO stability of LTV systems
پایداری BIBO در سیستمهای LTV

رابطه ورودی-خروجی یک سیستم متغیر با زمان خطی، تک ورودی-تک خروجی:

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} g(t,\tau) u(\tau) d\tau$$

یک سیستم دارای پایداری ورودی-خروجی یا BIBO است در صورتی که هر ورودی محدود منجر به خروجی محدود شود.

شرط پایداری BIBO این است که:

$$\int_{t_0}^{t} |g(t,\tau)| d\tau \le M < \infty \quad \forall t,\ t_0 \ and\ t \ge t_0$$

رابطه ورودی-خروجی یک سیستم متغیر با زمان خطی، چندمتغیره:

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} G(t,\tau) u(\tau) d\tau$$

شرط پایداری BIBO سیستم فوق اینست که هر درایه G بطور مطلق انتگرال پذیر باشد و یا

$$\int_{t_0}^{t} \|G(t,\tau)\| d\tau \le M < \infty \quad \forall t,\ t_0 \ and\ t \ge t_0$$

22

BIBO stability of LTV systems

پایداری BIBO در سیستمهای LTV

در صورتی که معادلات حالت سیستم داده شده باشد:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$
$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t)$$

پاسخ ضربه سیستم:

$$G(t,\tau) = C(t)\Phi(t,\tau)B(\tau) + D(t)\delta(t-\tau)$$

پاسخ حالت صفر سیستم:

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} C(t)\Phi(t,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau + D(t)\delta(t-\tau)$$

پاسخ حالت صفر سیستم دارای پایداری ورودی-خروجی (BIBO) است اگر و فقط اگر M_2 و M_1 موجود باشند به قسمی که

$$\int_{t_0}^{t} \|G(t,\tau)\| d\tau \le M_2 < \infty \qquad \forall t,\ t_0\ \ and\ t \ge t_0$$
$$\|D(t)\| \le M_1 < \infty$$

23

Internal stability of LTV systems

پایداری داخلی سیستمهای LTV

در پایداری داخلی ورودی نداریم لذا با معادله مقابل باید کار کنیم:

$$\dot{x} = A(t)x$$

جواب معادله حالت فوق عبارتست از:

$$x(t) = \Phi(t,t_0)x(t_0)$$

پاسخ ورودی صفر سیستم یعنی پاسخ معادله $\dot{x} = A(t)x$ پایدار حاشیه ای است اگر هر شرط اولیه محدود منجر به حالت محدود شود.

پاسخ ورودی صفر سیستم $\dot{x} = A(t)x$ پایدار حاشیه ای است اگر وفقط اگر عدد ثابت و محدود M وجود داشته باشد به قسمی که

$$\|\Phi(t,t_0)\| \le M < \infty,\ \ \forall t_0\ \ and\ t \ge t_0$$

24

Internal stability of LTV systems
پایداری داخلی سیستمهای LTV

در پایداری داخلی ورودی نداریم لذا با معادله مقابل باید کار کنیم:

$$\dot{x} = A(t)x$$

جواب معادله حالت فوق عبارتست از:

$$x(t) = \Phi(t,t_0)x(t_0)$$

پاسخ ورودی صفر سیستم یعنی پاسخ معادله $\dot{x} = A(t)x$ پایدار مجانبی است اگر هر شرط اولیه محدود پاسخ محدودی بوجود آورد که در $t \to \infty$ به صفر میل کند.

پاسخ ورودی صفر سیستم $\dot{x} = A(t)x$ پایدار مجانبی است اگر عدد ثابت و محدود M وجود داشته باشد به قسمی که

$$\|\Phi(t,t_0)\| \le M < \infty, \ \forall t_0 \ \ and \ t \ge t_0$$

و

$$\|\Phi(t,t_0)\| \to 0 \quad as \quad t \to \infty$$

25

Internal stability of LTV systems
پایداری داخلی سیستمهای LTV

مثال ۵-۶ : سیستم مقابل داده شده است، پایداری حاشیه ای و مجانبی این سیستم را بررسی کنید.

$$\dot{x} = A(t)x = \begin{bmatrix} -1 & e^{2t} \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x$$

چندجمله ای مشخصه :

$$\Delta(\lambda) = (\lambda + 1)^2$$

لذا برای تمام t دو مقدار ویژه در ۱- داریم.

می توان نشان داد که ماتریس گذار حالت عبارتست از:

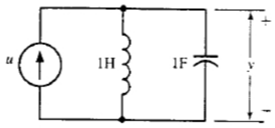
$$\Phi(t,0) = \begin{bmatrix} e^{-t} & 2(e^{t} - e^{-t}) \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$$

واضح است که سیستم نه پایداری حاشیه ای دارد و نه مجانبی.

26

Exercises تمرینها

5.1 Is the network shown in **Figure** BIBO stable? If not, find a bounded input that will excite an unbounded output.



5.2 Is a system with impulse response $g(t) = 1/(t+1)$ BIBO stable? How about $g(t) = te^{-t}$ for $t \geq 0$?

5.3 Consider a system with transfer function $\hat{g}(s) = (s-2)/(s+1)$. What are the steady-state responses excited by $u(t) = 3$, for $t \geq 0$, and by $u(t) = \sin 2t$, for $t \geq 0$?

5.4 Consider

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 10 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}u$$
$$y = [-2 \quad 3]\mathbf{x} - 2u$$

Is it BIBO stable?

5.5 Consider

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 10 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}u$$
$$y = [-2 \quad 3]\mathbf{x} - 2u$$

Is the state equation marginally stable? Asymptotically stable?

Exercises تمرینها

5.6 Is the homogeneous state equation

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x}$$

marginally stable? Asymptotically stable?

5.7 Is the homogeneous state equation

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x}$$

marginally stable? Asymptotically stable?

5.8 Is a system with impulse response $g(t, \tau) = e^{-2|t|-|\tau|}$, for $t \geq \tau$, BIBO stable? How about $g(t, \tau) = \sin t(e^{-(t-\tau)}) \cos \tau$?

5.9 Consider the time-varying equation

$$\dot{x} = 2tx + u \qquad y = e^{-t^2}x$$

Is the equation BIBO stable? Marginally stable? Asymptotically stable?

Exercises

تمرینها

5.10 Show that the equation in Problem 5.21 can be transformed by using $\bar{x} = P(t)x$, with $P(t) = e^{-t^2}$, into

$$\dot{\bar{x}} = 0 \cdot \bar{x} + e^{-t^2} u \qquad y = \bar{x}$$

Is the equation BIBO stable? Marginally stable? Asymptotically stable? Is the transformation a Lyapunov transformation?

5.11 Is the homogeneous equation

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -e^{-3t} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

تمرین ۵-۱۲: قضیه ۵-۷را اثبات کنید.

تمرین ۵-۱۳: قضیه ۵-۸ را اثبات کنید.

29

Answers to selected problems

جواب ۵-۱:

It is not BIBO stable since $u(t) = \sin t \;\rightarrow\; y(t) = 0.5t \sin t$

جواب ۵-۲: خیر ، بلی

جواب ۵-۳:

y(t)→ 1.26sin(2t+1.25) و y(t)→-6

جواب ۵-۶: مجانبی نیست ولی حاشیه ای است.

جواب ۵-۸: هر دو پایدار BIBO هستند.

جواب ۵-۱۰: پایدار BIBO و حاشیه ای است ولی مجانبی نیست. P(t) تبدیل لیاپانوفی نیست.

30