آزمون چهارم المپیاد فیزیک ایران (مرحله چهل نفر)

دوم شهریور ۹۶ ـ (مدت سه و نیم ساعت)

مسئله ۱ ـ این مسئله از دو قسمت مجزا تشکیل شده است.

الف)

فرض کنید هوا گاز کامل است و در حالت تعادل لایه های هوای اطراف زمین با هم مبادله گرمایی ندارند. در این حالت اگر در ارتفاع z از سطح زمین فشار $p(z)$ و چگالی $\rho(z)$ باشد می توان نشان داد کمیت $p\rho^{-\frac{7}{5}}$ در همه جا ثابت است. در سطح زمین فشار p_0 و چگالی ρ_0 است.

الف ۱) با فرض آنکه شتاب گرانش ثابت و برابر g است، $p(z)$ را به دست آورید. (۱٫۵ نمره)

الف ۲) فرض کنید شتاب گرانش ثابت نباشد و از قانون گرانش نیوتن به دست آید. شعاع زمین را R بگیرید و $p(z)$ را به دست آورید. در حد $z \ll R$ نخستین تصحیح ناشی از متغیر بودن شتاب گرانش را به دست آورید. (۲٫۵ نمره)

ب)

در لوله ای بلند به طول L و قطر کوچک در ابتدا مقداری هوا با چگالی $\bar{\rho}$ در دمای ثابت T محبوس است. لوله را در صفحه ای افقی حول محور قائمی که از یک انتهای آن در $r = 0$ می گذرد با سرعت زاویه ای ثابت ω به چرخش در می آوریم. هوا را گاز کامل با جرم مولی M بگیرید و فرض کنید ضمن دوران دمای آن در همه جا T می ماند. ثابت گازها R است و از آثار گرانشی می توان چشم پوشید.

ب ـ ۱) اگر چگالی هوا در $r = 0$ برابر ρ_0 باشد، فشار و چگالی آن را طول لوله بر حسب ρ_0 به دست آورید. (۳٫۵ نمره)

ب ـ ۲) با فرض آن که $M = 29\,\mathrm{gr/mol}$، $R = 8.3\,\mathrm{j/K\,mol}$، $T = 300\,\mathrm{K}$ و طول میله $L = 1\,\mathrm{m}$ باشد، بیشینه مقدار ω چقدر باشد تا تغییرات نسبی چگالی در طول میله، یعنی نسبت $\frac{\rho(L)-\rho_0}{\rho_0}$، از ۱۰ در صد کمتر باشد. (۱ نمره)

ب ـ ۳) با فرض آنکه ω مطابق فرض قبل کوچک باشد، تا اولین تقریب غیر بدیهی ρ_0 را بر حسب $\bar{\rho}$ به دست آورید. ؟ همچنین $\rho(L)$ و $\rho(L/2)$ را بر حسب $\bar{\rho}$ به دست آورید. (۱٫۵ نمره)

توجه: جواب هر قسمت را تا جایی که ممکن است ساده کنید و در کادر مشخص نمایش دهید.

۲) مقدمه:

در اثر شکافته شدن یک هستهٔ اورانیوم حدود ۲۰۰ MeV انرژی آزاد می‌شود که برای ۱ kg اورانیوم معادل انرژی آزاد شده در انفجار ۲۰۰۰۰ تن تی‌ان‌تی است. برای این که یک هستهٔ اورانیوم شکافته شود باید یک نوترون به آن برخورد کند. پس از شکافته شدن یک هستهٔ اورانیوم که همراه با آزاد شدن انرژی است به طور متوسط تقریباً ۲/۵ نوترون هم آزاد می‌شود که می‌تواند برای شکافتن هسته‌های اورانیوم بیشتری مورد استفاده قرار گیرد. حاصل این فرایند یک واکنش زنجیره‌ای خود محرک یا خود نگه‌دار است. برای این که واکنش زنجیره‌ای متوقف نشود نباید بیش از ۱/۵ نوترون از دست برود. با توجه به مسافت آزاد میانگین برخورد نوترون با هسته اگر نوترون حجم و در نتیجه جرم کافی از هسته سر راهش نباشد قبل از این که واکنشی اتفاق بیفتد به بیرون نشت می‌کند و واکنش زنجیره‌ای اتفاق نمی‌افتد.

جرم بحرانی جرمی است که پس از شکافته شدن یک هسته و تولید به طور متوسط تقریباً ۲/۵ نوترون، یک نوترون فرصت دارد در ایجاد شکافت در هستهٔ دیگر شرکت کند و بقیه هدر روند. این وضعیتی است که یک راکتور هسته‌ای با آن کار می‌کند. از طرف دیگر اگر هر واکنش شکافت بیشتر از یک شکافت دیگر تولید کند، گفته می‌شود راکتور در وضعیت فوق بحرانی است که منجر به انفجار آن می‌شود مانند آنچه که در یک بمب اتمی نیز اتفاق می‌افتد. در این مسئله می‌خواهیم جرم بحرانی را برای اورانیوم ۲۳۵، $^{235}\mathrm{U}$، محاسبه کنیم که اساس آن پخش نوترون است.

معادله‌ی پخش نوترون در ماده (اورانیوم)

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{v_{neut}}{\lambda_f}(\nu - 1)n + \frac{\lambda_t v_{neut}}{3}\nabla^2 n$$

است که در آن n تعداد نوترون در واحد حجم، v_{neut} سرعت متوسط نوترون، λ_f مسافت آزاد میانگین شکافت نوترون، λ_t مسافت آزاد میانگین ترابرد نوترون و ν تعداد متوسط نوترون‌های آزاد شده در هر شکافت است.

آ) برای داخل کره‌ای به شعاع R که به طور یکنواخت از اورانیوم تشکیل شده جوابی به صورت $n(r,t) = \exp(\alpha t/\tau) f(r)$ در نظر بگیرید و معادلهٔ دیفرانسیل حاکم بر $f(r)$ را به

دست آورید. $\tau = \frac{\lambda_f}{v_{neut}}$ زمان متوسط آزاد میانگین نوترون قبل از برخورد به یک هسته و α ضریب ثابتی است. (۱ نمره)

ب) $f(r)$ را به دست آورید. (۲ نمره)

پ) شرط مرزی $n(r = R + 0.71\lambda_t, t) = 0$ را به کار ببرید و شعاع کرهٔ اورانیومی را به دست آورید. (۱ نمره)

ت) این بار شرط مرزی $n(r = R, t) = -\frac{2\lambda_t}{3}(\frac{\partial n}{\partial r}|_{r=R})$ را به کار ببرید و معادله‌ای که شعاع کرهٔ اورانیومی از آن قابل محاسبه است به دست آورید. (۱ نمره)

شعاع بحرانی، کوچکترین شعاعی است که به ازای $\alpha = 0$ اتفاق می‌افتد.

ث) مقدار عددی شعاع بحرانی و جرم بحرانی را به ازای هر یک از دو شرط مرزی فوق و با استفاده از مقادیر عددی زیر برای $^{235}\mathrm{U}$ به دست آورید. (۵ نمره)

$$\rho = 18.71\ \mathrm{g/cm^3}, \qquad \sigma_f = 1.235 \times 10^{-24}\ \mathrm{cm^2}, \qquad \sigma_{el} = 4.566 \times 10^{-24}\ \mathrm{cm^2}$$

$$\nu = 2.637, \qquad n_0 = 4.794 \times 10^{22}\ /\mathrm{cm^3}, \qquad \tau = 8.635 \times 10^{-9}\ \mathrm{s}$$

همچنین داریم $\lambda_f = \frac{1}{\sigma_f n_0}$ و $\lambda_t = \frac{1}{\sigma_t n_0}$ و $\sigma_t = \sigma_f + \sigma_{el}$.

در صورت نیاز:

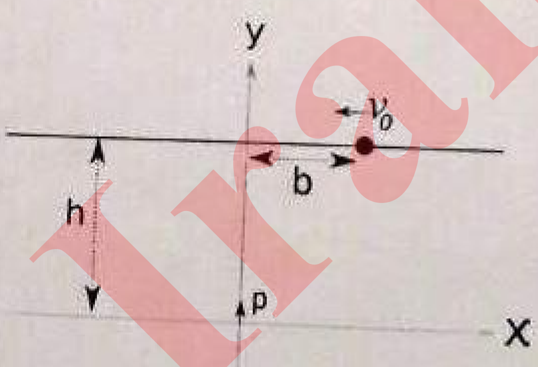
$$\nabla^2 f(r) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 \frac{\partial f}{\partial r})$$

مسئله ی 3) دوقطبی الکتریکی، از دو بارِ نقطه‌ای با بارهای هم‌اندازه با علامت‌های مخالف تشکیل می‌شود که به فاصله‌ی کمی از هم قرار دارند. در صفحه‌ی دوبعدی، فرض کنید بارِ $-q$ در مبدا قرار دارد و بارِ $+q$ در نقطه‌ی $(0,d)$. وقتی فاصله‌ی بارها خیلی کم باشد (یعنی d به صفر میل کند ولی q طوری بزرگ باشد که حاصل‌ضربِ qd مقداری محدود باشد)، دوقطبی را اصطلاحاً «دوقطبی نقطه‌ای» می‌نامیم، و حاصل‌ضربِ qd را با p نشان می‌دهیم.

الف) پتانسیلِ الکتریکی را در نقطه‌ی (x,y) بر حسبِ p,x,y حساب کنید.

ب) بردارِ میدانِ الکتریکی را در نقطه‌ی (x,y) بیابید.

پ) خطِّ $y=h$ در صفحه ی x-y را در نظر بگیرید که h مقداری مثبت است. نمودارِ مولّفه‌ی عمودی میدانِ الکتریکی روی این خطّ را به صورتِ تابعی از x رسم کنید. نقاطِ عبور از صفر، مکانِ بیشینه ها و کمینه های موضعی، و مقدارِ تابع در این نقاط، باید دقیق مشخّص شوند.



حالا فرض کنید ذرّه‌ای با بارِ $-Q$ و جرمِ m داریم که مطابقِ شکل، روی میز افقی بدون اصطکاک به معادله‌ی $y=h$، در راستای x حرکت می‌کند. شتابِ گرانش g و در جهت $-y$ است. ذرّه ای در ابتدا در نقطه ی (b,h) قرار دارد، که b خیلی از h بزرگ‌تر است و با سرعتِ اوّلیّه‌ی v_0 به سمتِ چپ (یعنی به سمتِ محورِ y) به حرکت در می‌آید.