

به نام خدا

نام و نام خانوادگی: شماره دانشجویی: تاریخ: ۱۳۹۷/۰۲/۲۳ مدت امتحان: ۹۰ دقیقه

در جدول زیر چیزی ننویسید.

سوال ۱	سوال ۲	سوال ۳	سوال ۴	سوال ۵	سوال ۶	جمع
۱۶	۲۰	۲۰	۱۲	۱۸	۱۴	۱۰۰

سوال ۱: معادله دیفرانسیل دسته منحنی زیر را پیدا کنید. $y = (c_1 + c_2 x)e^x$.
حل. پارامترهای c_1 و c_2 را در دستگاه زیر حذف می‌کنیم:

$$\begin{cases} y = c_1 e^x + c_2 x e^x \\ y' = c_1 e^x + c_2 e^x + c_2 x e^x \\ y'' = c_1 e^x + 2c_2 e^x + c_2 x e^x \end{cases}$$

از معادلات دوم و سوم دستگاه داریم: $y'' - 2y' = -c_1 e^x - c_2 x e^x$
طرف راست عبارت برابر $-y$ می‌باشد و جواب مطلوب: $y'' - 2y' + y = 0$.
سوال ۲: نوع، مرتبه، درجه و خطی یا غیرخطی بودن معادلات زیر را مشخص کنید.

الف- $x^3 y'' + y'^4 - 4x = 0$

معادله دیفرانسیل، مرتبه ۲، درجه اول و غیرخطی.

ب- $x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - x \frac{\partial u}{\partial x} + y^2 \frac{\partial u}{\partial y} - 4x = 0$

معادله دیفرانسیل، مرتبه ۲، خطی، بدون درجه.

سوال ۳: جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y' = (x + y)^2$ را بیابید.
حل: از نکته مربوط به معادلات دیفرانسیل مرتبه اول تفکیک‌پذیر استفاده نموده و با تغییر متغیر داریم:

$$u(x) = x + y \Rightarrow u' = 1 + y' \xrightarrow{\text{با جایگذاری در معادله}} u' - 1 = u^2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 1 + u^2 \Rightarrow$$

خواهیم داشت:

$$\int \frac{du}{1+u^2} = \int dx \Rightarrow \tan^{-1} u = x + c \Rightarrow u = \tan(x + c)$$

$$\xrightarrow{u=x+y} x + y = \tan(x + c)$$

با توجه به اینکه

سوال ۴: معادله دیفرانسیل همگن $y' = \frac{y}{x + \sqrt{xy}}$ را حل کنید.
حل: معادله را به فرم زیر می‌نویسیم

$$(x + \sqrt{xy})dy - ydx = 0$$

معادله همگن می‌باشد.

$$(x + \sqrt{x^2 v})(vdx + xdv) - vxdx = 0$$

طرفین را بر x تقسیم می‌کنیم

$$\begin{aligned} (\sqrt{v})(vdx + xdv) - vdx &= 0 \Rightarrow v\sqrt{v}dx + x(\sqrt{v})dv = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{dx}{x} + \frac{\sqrt{v}}{v\sqrt{v}} &= 0 \Rightarrow \int \frac{dx}{x} + \int \frac{\sqrt{v}}{v\sqrt{v}} = c \Rightarrow \ln x - \frac{1}{2}v^{-\frac{1}{2}} + \ln v = c \\ \Rightarrow \ln vx = c + \frac{1}{2}v^{-\frac{1}{2}} &\Rightarrow \ln y = c + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{y}} \end{aligned}$$

سوال ۵: در معادله دیفرانسیل همراه با شرط کمکی داده شده زیر حاصل $y(1)$ را بیابید.

$$\begin{cases} y' + 2y = x^2 + x \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

با توجه به اینکه معادله از نوع خطی مرتبه اول است، لذا خواهیم داشت:

$$P(x) = 2, \quad Q(x) = x^2 + x$$

$$y(x) = e^{-\int 2dx} \left[\int (x^2 + x)e^{\int 2dx} + c \right] \Rightarrow y(x) = e^{-2x} \left[\int (x^2 + x)e^{2x} dx + c \right]$$

برای محاسبه انتگرال فوق از روش جز به جز خواهیم داشت:

مشتق	انتگرال
$x^2 + x$	$+ e^{2x}$
$2x + 1$	$- \frac{1}{4}e^{2x}$
2	$+ \frac{1}{4}e^{2x}$
0	$+ \frac{1}{8}e^{2x}$

$$\begin{aligned} \int (x^2 + x)e^{2x} dx &= \frac{1}{4}(x^2 + x)e^{2x} - \frac{1}{4}(2x + 1)e^{2x} + \frac{1}{4}e^{2x} \\ \Rightarrow y(x) &= e^{-2x} \left[\frac{1}{4}(x^2 + x)e^{2x} - \frac{1}{4}(2x + 1)e^{2x} + \frac{1}{4}e^{2x} + c \right] \\ \Rightarrow y(x) &= \frac{x^2 + x}{4} - \frac{2x + 1}{4} + \frac{1}{4} + ce^{-2x} \end{aligned}$$

حال با اعمال $y(0) = 1$ داریم:

$$y(0) = 1 \Rightarrow c = 1 \Rightarrow y(x) = \frac{x^2}{4} + e^{-2x} \Rightarrow y(1) = \frac{1}{4} + e^{-2}$$

سوال ۶: معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید. $\frac{dy}{dx} - y = xy^2$.
حل: بدیهی است معادله فوق به ازای $n = 2$ از نوع برنولی است. لذا طرفین را بر y^2 تقسیم می‌کنیم:

$$y^{-2} \frac{dy}{dx} - y^{-1} = x$$

تغییر متغیر زیر را انجام می‌دهیم:

$$u = y^{-2} = y^{-1}, \quad \frac{du}{dx} = -y^{-2} \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{du}{dx} + u = -x \Rightarrow P(x) = 1, Q(x) = -x$$

$$\Rightarrow g(x) = \int P(x) dx = \int 1 dx = x \Rightarrow$$

$$u = e^{-g(x)} \left[\int Q(x) e^{g(x)} dx + c \right] = e^{-x} \left[\int -x e^x dx + c \right] = e^{-x} [(1-x)e^x + c]$$

$$\Rightarrow u = 1 - x + ce^{-x} \Rightarrow \frac{1}{y} = 1 - x + ce^{-x}$$