کامپیوتر

۱- گزینه‌ی ۱ درست است. ابتدا ۷ دانش‌آموز سال اول را قرار می‌دهیم پس باید آن ۶ نفر را یکی در میان بین آن قرار دهیم. طوری که دانش‌آموزان سال دوم پشت سر هم قرار نگیرند که به $7!\times 2\times 3!3!$ می‌شود.

۲- گزینه‌ی ۲ درست است. اگر ۹ نقطه را یکی در میان دور دایره‌ای قرار دهیم با ۳ خط نمی‌شود. حال با چهار خط نیز می‌توان این کار را انجام داد.

۳- گزینه‌ی ۵ درست است. تعداد راه‌های رسیدن به خانه‌های دایره‌دار 2^9 روش است. حال باید حالت‌هایی که از آن خانه‌های ✕ رد می‌شوند را کم کنیم هر میری که از آن‌ها رد شود یعنی از ۳ خانه‌ی ✕دار قطر مربع، رد شده است که تعداد آن‌ها می‌شود $\binom{6}{3}\times 2^3+\binom{6}{2}2^3+\binom{6}{2}2^3$

۴- گزینه‌ی ۲ درست است. این عدد ۶ رقمی، با ۶ رقم مختلف ساخته شده است. برای آن‌که معلوم کنیم کدام ۲ رقم درست انتخاب شوند، $\binom{6}{2}$ حالت داریم. حال باید ۴ رقم باقی‌مانده، هیچ‌کدام در جای درست خود قرار نگیرند. جواب این قسمت، جواب همان پریش ۴ تایی است که با استفاده از اصل شمول و عدم شمول به شکل زیر محاسبه می‌شود:

$$P(4)=4!-\binom{4}{1}\times 3!+\binom{4}{2}\times 2!-\binom{4}{3}\times 1+1=9$$

پس تعداد حالت‌هایی که دو رقم را درست حدس بزنیم 9×10 می‌باشد.

۵- گزینه‌ی ۵ درست است. چون عدد ۷ رقمی موردنظر، بر ۳ بخش‌پذیر است، پس رقم حذف شده یکی از اعداد ۰، ۳، ۶ و ۹ بوده است. اگر عدد مفروض به شکل abcdefg باشد آن‌گاه: اگر رقم محذوف در جایگاه g بوده باشد و شرط بخش‌پذیری بر ۴ بخش‌پذیر بودن ۲ رقم سمت راست عدد بر ۴ است پس g فقط می‌توانسته ۰ باشد: ۳۳۶۶۳۶۰

اگر رقم محذوف در جایگاه f بوده، f فقط می‌توانسته ۳ یا ۹ باشد تا عدد بر ۴ بخش‌پذیر شود: ۳۳۶۶۳۳۶ ، ۳۳۶۶۳۹۶

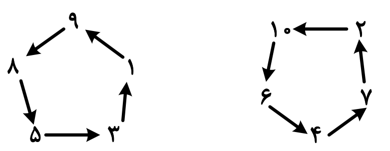
چون ۳۶ بر ۴ بخش‌پذیر است، رقم محذوف می‌تواند مربوط به یکی از a، b، c، d و e باشد.

اگر رقم محذوف ۳ یا ۶ بوده و به این جایگاه‌ها مربوط باشد، به حالت‌های زیر می‌رسیم:	۳ در a، b یا c	۳۳۳۶۶۳۶
(حالتی که ۳ در e قرار بگیرد در بالا محاسبه شده)	۶ در e، d یا c	۳۳۶۶۶۳۶
اگر آن رقم ۰ یا ۹ بوده، چون هیچ مشابهی ندارند، به راحتی به‌دست می‌آید.	۳ در d	۳۳۶۳۶۳۶
	۶ در b	۳۶۳۶۶۳۶
	۶ در a	۶۳۳۶۶۳۶

که برای حضور ۰ از a تا e ، ۴ حالت (b، c، d و e) و برای ۹، ۵ حالت (a، b، c، d و e) وجود دارد.

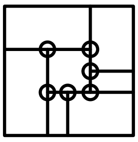
$$3+5+4+5=17$$

۶- گزینه‌ی ۳ درست است. اگر گراف جایگشت مگس‌ها را بکشیم به شکل زیر می‌شود:



حال با شروع از مگس ۶ و مگس ۸ از دو دور می‌توان مگس‌های ۱۰، ۶، ۷، ۹، ۸ و ۳ را خورد.

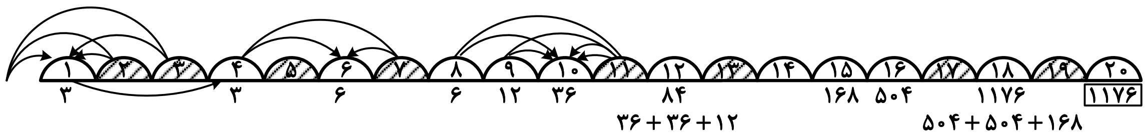
۷- گزینه‌ی ۲ درست است. هر نقطه‌ای از شکل قاب عکس‌ها که به محل برخورد ۳ تا پاره‌خط است، نشان‌دهنده‌ی ۳ قاب است که ۲ به ۲ با هم مجاورند. تعداد این نقطه‌ها که آن‌ها را در شکل مشخص کرده‌ایم، ۶ تا است پس برای انتخاب قاب‌های ۳ فرزند، ۶ حالت و برای چیدن عکس آن‌ها در این قاب‌ها !۳ حالت داریم. با یک بررسی سریع می‌توان فهمید در قاب‌های باقی‌مانده جفت شدن قاب‌ها منحصر به فرد انجام می‌گیرد. یک جفت از این‌ها را برای پدر و مادر انتخاب می‌کنیم (۲ حالت) حالا گذاشتن عکس آن‌ها !۲ و پدربزرگ و مادربزرگ در جفت باقی‌مانده هم !۲ است.



پس تعداد کل حالت‌ها $۶\times ۳!\times ۲\times ۲!\times ۲! = ۲۸۸$ می‌شود.

۸- گزینه‌ی ۲ درست است. همه‌ی مقادیر مجموعه‌ی $\{-۳۶, -۳۵, -۳۴, \dots, -۱, ۰, ۱, \dots, ۲۱۸, ۲۱۹\}$ تولید می‌شوند که تعداد آن‌ها ۲۵۶ است. بیش‌ترین عدد وقتی به‌دست می‌آید که همه‌ی x_i ها به جز $x_۲$ و $x_۵$ ، یک باشند و آن‌ها صفر باشند. هم‌چنین کم‌ترین عدد با صفر بودن همه‌ی x_i ها جز $x_۲$ و $x_۵$ و ۱ بودن آن‌ها تولید می‌شود. از آن‌جایی که $۱۲۸+۶۴+۳۲ = ۲۲۴$ و بیش‌تر از ۲۱۹ است، هیچ‌کدام از اعداد مجموعه‌ی بالا، به هر ۳ی ۶۴، ۳۲ و ۱۲۸ نیاز ندارند. پس می‌توان جایگزین مناسب برای ارقام مبنای ۲ی آن‌ها پیدا کرد. مثلاً $۶۴+۳۲ = ۹۶$ با $۱۲۸-۳۲$ جایگزین می‌شود. تعداد اعداد منفی و صفر $۳۶+۱ = ۳۷$ است پس جواب مسئله $۲۵۶-۳۷ = ۲۱۹$ می‌شود.

۹- گزینه‌ی ۳ درست است. تعداد پرش‌های رسیدن به هر سنگ را چه با پرش مستقیم از سنگ‌های عقب‌تر چه با سر خوردن از روی اعداد اول زیر آن نوشته‌ایم: (روی خشکی آغاز می‌شه)



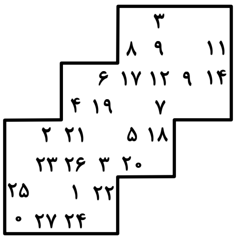
برای مثال از روش‌های رسیدن به سنگ شماره‌ی ۱۲، I) رفتن از سنگ ۱۰ به ۱۳ و سر خوردن به ۱۲ (۳۶ روش)، II) مستقیم روفتن از سنگ ۱۰ به ۱۲ (۳۶ روش) و III) رفتن از سنگ ۹ به ۱۲ است. (۱۲ روش) پس در مجموع ۸۴ روش وجود دارد که به سنگ ۱۲ رسید.

۱۰- گزینه‌ی ۴ درست است. ادعا می‌کنیم به ازای nهای فرد نفر اول و به ازای nهای زوج نفر دوم استراتژی برد دارد. ادعای خود را با استقرای قوی روی n ثابت می‌کنیم. پایه‌ی استقرا به ازای $n = ۲$ هر اول نمی‌تواند حرکتی بکند پس می‌بازد به ازای $n = ۳$ هم نفر اول مهره‌ی خانه‌ی ۱ را به ۳ برده و برنده می‌شود. فرض کنیم برای همه‌ی مقادیر کم‌تر از n، حکم برقرار باشد. اگر n فرد باشد، نفر اول، مهره‌ی خانه‌ی ۱ را به ۳ می‌برد. حالا این بازی مانند بازی با نواری با $n-۱$ (عدد زوج) خانه است که طبق فرض استقرا برنده‌ی آن نفر دومی است که حرکت می‌کند که در این حالت نفر دوم (مبینا) است. پس در nهای فرد نفر اول برنده‌ی بازی می‌شود. (خانه‌ی شماره‌ی ۱ قابل استفاده‌ی مجدد نیست پس برای رسیدن به فرض استقرا آن را حذف کرده و ۲ تا n را با ۱ تا $n-۱$ شماره‌گذاری می‌کنیم.)

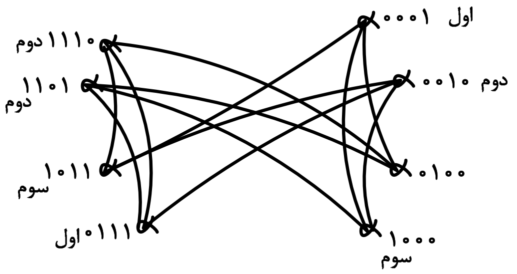
اگر n زوج باشد و نفر اول مهره‌اش را به خانه‌ی iام ببرد، اگر i زوج باشد، نفر دوم مهره‌اش را در $i-۱$ قرار می‌دهد (این خانه همواره وجود دارد) و اگر i فرد باشد، نفر دوم مهره‌اش را در $i+۱$ قرار می‌دهد. بدین‌ترتیب تعداد خانه‌هایی که مهره‌ها در آن قرار دارند و خانه‌های جلوی آن‌ها (که مجاز به حرکت در آن‌ها هستیم) زوج تا هستند و نوبت نفر اول (مبینا) است طبق فرض استقرا برنده‌ی این بازی نفر دوم (مهشید) است پس برنده‌ی بازی اصلی هم مهشید است.

بدین‌ترتیب مبینا برای برنده شدن باید nهای فرد را انتخاب کند یعنی ۳ عدد ۲۰۱۳، ۴۳ و ۱۱.

۱۱- گزینه‌ی ۱ درست است. با شروع از خانه‌ی ۰ و ادامه دادن حرکت‌ها مطابق شکل مهسا می‌تواند همه‌ی مهره‌ها را با اسب عزیزش درو کند.



۱۲- گزینه‌ی ۴ درست است. تعداد ۰ها یا ۱های هر دنباله ۴ تایی که توسط علی تولید می‌شود، فرد است. در گراف شکل زیر، بین هر ۲ وضعیت لامپ‌ها که با دنباله‌های ۰ و ۱ نشان داده می‌شود، بین هر ۲ دنباله که با تغییر مجاز، از یکی به دیگری می‌رسیم یال کشیده شده است.



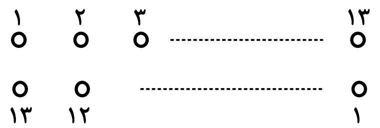
با توجه به گراف، دنباله‌ی <۱۰۱۱> مربوط به طبقه‌ی سوم است.

چون یکی از همسایه‌هایش <۱۰۰۰> مربوط به طبقه‌ی اول

بوده و یکی <۰۰۱۰> مربوط به طبقه‌ی دوم است.

به همین ترتیب می‌فهمیم <۰۱۰۰>، برای طبقه‌ی دوم است. دنباله‌ی <۱۱۰۱> با توجه به همسایه‌هایش (<۱۰۰۰>,<۰۱۱۱>) برای طبقه‌ی دوم و دنباله‌ی <۱۱۱۰> با توجه به همسایه‌هایش (<۰۱۱۱>,<۱۰۱۱>) برای طبقه‌ی دوم هستند. به این ترتیب <۰۱۰۰> مربوط به طبقه‌ی سوم به دست می‌آید پس جواب منحصر به فرد مسئله، طبقه‌ی سوم است.

۱۳- گزینه‌ی ۱ درست است. اگر ۲۶ نقطه‌ی خود را به شکل زیر بکشد:



کوچک فقط یک خط می‌تواند بکشد.

۱۴- گزینه‌ی ۲ درست است. در صورتی کباب می‌شود که به خانه‌ای برود که قرینه‌ی آن خانه نیز مانند خود آن تله باشد پس نباید به دو خانه‌ای که این ویژگی را دارند برویم. در جدول زیر آمده است به هر خانه به چند حالت می‌توان رفت.

۰	۸	۱۶	۰	۷۰	۱۴۰
۰	۸	۸	۲۸	۷۰	۷۰
۰	۸	۰	۲۰	۴۲	۰
۰	۲	۶	۲۰	۲۲	۲۶
۰	۲	۴	۰	۲	۴
۱	۲	۲	۲	۲	۲

توضیح: ابتدا با بررسی حالت‌های کوچک n، حدس می‌زنیم حداقل $\left\lceil \frac{n}{۲} \right\rceil$ مهره باقی می‌ماند و برای nهای زوج فقط با یک روش حذف مهره‌ها، می‌توان به کمینه‌ی مهره‌های باقی‌مانده یعنی $\frac{n}{۲}$ رسید. این حدس را با استقرا روی n ثابت می‌کنیم. پایه‌ی استقرا برای $n=۱$، باقی ماندن یک مهره و برای $n=۲$ حذف یک مهره و باقی ماندن دیگری برقرار است.

فرض می‌کنیم برای همه‌ی مقادیر کم‌تر از n، حداقل $\left\lceil \frac{n}{۲} \right\rceil$ مهره باقی می‌ماند.

اگر مهره‌ی nام باقی بماند، طبق فرض استقرا، از بین $n-۱$ مهره‌ی اول، $\left\lceil \frac{n-۱}{۲} \right\rceil$ مهره باقی می‌ماند. اگر n فرد باشد ($n-۱$ زوج باشد)، دقیقاً $\left\lceil \frac{n}{۲} \right\rceil$ مهره باقی می‌ماند. اگر n فرد باشد ($n-۱$ زوج باشد)، دقیقاً $\left\lceil \frac{n}{۲} \right\rceil$ مهره باقی می‌ماند. اگر n زوج باشد، $\left\lceil \frac{n-۱}{۲} \right\rceil+۱=\frac{n}{۲}+۱$ مهره باقی می‌ماند.

اگر مهره‌ی nام را حذف کنیم، مهره‌ی $n-1$ را حرکت داده‌ایم و آن را به جایگاه $n+1$ برده‌ایم. هیچ‌کدام از مهره‌های عقبی، نمی‌توانند به آن بروند و حذفش کنند (چرا؟) حال طبق فرض استقرا برای $n-2$ مهره، $\left\lceil \frac{n-2}{2} \right\rceil$ مهره باقی می‌ماند.

اگر n زوج باشد، در مجموع $\frac{n}{2} = 1 + \left\lceil \frac{n-2}{2} \right\rceil$ مهره باقی می‌ماند و اگر n فرد باشد، $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil = 1 + \left\lceil \frac{n-2}{2} \right\rceil$ مهره می‌ماند بنابراین چون در هیچ کدام از حالت‌ها برای nهای مختلف کم‌تر از $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ مهره باقی نماند و روشی برای باقی ماندن $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ مهره ارائه دایم، حکم ثابت می‌شود.

با مقایسه‌ی دو حالت بالا برای nهای زوج می‌بینیم فقط در صورتی که مهره‌ی nام را حذف کنیم می‌توان کرای کرد که $\frac{n}{2}$ مهره باقی بماند ولی اگر مهره‌ی nام را باقی بگذاریم، بیش از $\frac{n}{2}$ مهره در نهایت باقی می‌ماند پس در گام استقرا توانستیم ثابت کنیم حالت نهایی می‌بینیم برای nهای زوج یکتا به دست می‌آید.

برای nهای فرد با نوشتن رابطه‌ی بازگشتی مقابل و به دست آوردن جواب آن می‌بینیم با $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ روش می‌توان به حالت نهایی کمیت رسید:

$$\begin{cases} f(1)=1 \qquad f(2)=1 \qquad f(3)=2 \\ f(2k+1) = \underbrace{f(2k-1)}_{\text{حالتی که مهره‌ی } n \text{ حذف شود.}} + \underbrace{\overset{1}{\cancel{f(2k)}}}_{\text{حالتی که } n \text{ باقی بماند.}} \end{cases} \Rightarrow f(2k+1) = k+1$$

۱۵- گزینه‌ی ۲ درست است. $\left\lceil \frac{2013}{2} \right\rceil = 1007$

۱۶- گزینه‌ی ۲ درست است. فقط به ازای $n=48$ یکتاست پس فقط ۱ جواب داریم.

۱۷- گزینه‌ی ۳ درست است. به ازای nهای زوج از ۱ تا ۱۰۰، ۱ روش و nهای فرد، $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ روش داریم پس جواب ۱۳۲۵ است.

$$50\times 1 + \underbrace{(1+2+3+\ldots+50)}_{\left\lceil \frac{1}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{3}{2} \right\rceil + \ldots + \left\lceil \frac{99}{2} \right\rceil} = 50 + \binom{51}{2} = 1325$$

۱۸- گزینه‌ی ۳ درست است. حالت‌های مختلف تجزیه عبارتند از:

$2\times2\times56$	$3\times3\times24$	$4\times6\times9$
$2\times3\times36$	$3\times4\times18$	$6\times6\times6$
$2\times4\times27$	$3\times6\times12$	
$2\times6\times18$	$3\times8\times9$	
$2\times9\times12$		

(سعی کنید مسئله را برای 10^7 حل کنید.)

۱۹- گزینه‌ی ۲ درست است. بعد از اولین حرکت سرباز سفید، با توجه به این‌که سرباز سیاه می‌تواند ۱ (فرد) یا ۲ (زوج) خانه به جلو برود، کاری می‌کند که تعداد ستون‌های بین او و سفید، فرد باشد. در این صورت چون در حرکت‌های باقی‌مانده هر کدام فقط ۱ خانه به جلو می‌روند، ابتدا سرباز سفید وارد ستون وسط بینشان می‌شود (اگر $2k+1$ ستون بین آن‌ها باشد، منظور $k+1$امین ستون از سمت سفید یا سیاه است) پس سرباز سیاه، سفید را می‌زند و بقیه‌ی مسیر را تا انتهای جدول می‌رود. بنابراین مستقل از n، همواره سرباز سیاه استراتژی برد دارد.

۲۰- گزینه‌ی ۱ درست است.

با روش مقابل، نشان می‌دهیم همه‌ی این ۵ حجم تولید می‌شوند:

(زیر هر ظرف مقدار آبی که در آن مرحله دارد را نوشته‌ایم.)

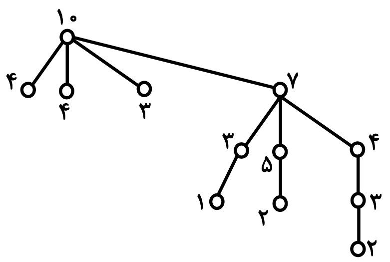
	x = ۳	y = ۵	z = ۸
۱)	۰	۰	۸
۲)	۳	۰	۵
۳)	۰	۳	۵
۴)	۳	۳	۲
۵)	۱	۵	۲
۶)	۱	۰	۷
۷)	۰	۱	۷
۸)	۳	۱	۴
۹)	۰	۴	۴
۱۰)	۰	۰	۸
۱۱)	۰	۵	۳
۱۲)	۳	۲	۳

۲۱- گزینه‌ی ۴ درست است.

۲۲- گزینه‌ی ۳ درست است. از آن‌جایی که جواب xOR چند بیت، به زوج یا فرد بودن تعداد ۱های آن‌ها مربوط می‌شود، می‌توان همه‌ی بیت‌هایی که با انجام عمل گفته شده در صورت سؤال، سرانجام در ساختن بیت سمت راست پلاک شرکت می‌کنند، زیر هم نوشت و با یک بار عمل xOR، به رقم سمت راست رسید.

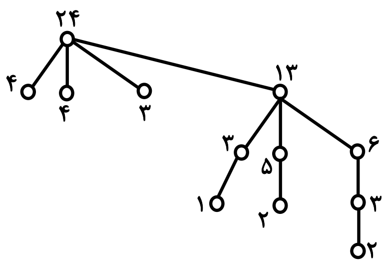
با این استدلال می‌توان در نظر گرفت برای هر دنباله‌ی ۳۲ بیتی، ۱۶ بیت زیر هم قرار گرفته و xOR آن‌ها رقم سمت راست پلاک و ۱۶ بیت دیگر، رقم سمت چپ آن را می‌سازند. یکی از ۱۶ بیت راست را ۱ و بقیه را ۰ قرار می‌دهیم. یکی از ۱۶ بیت چپ را هم ۱ قرار داده و بقیه ۰ می‌شوند و در دنباله‌ی ۳۲ بیتی دیگر در یکی از ۱۶ بیت راست ۱ و در ۷ تا بیت از ۱۶ بیت چپ هم ۱ قرار می‌دهیم و بقیه ۰. به این‌ترتیب تعداد ۱های سازنده‌ی هر جایگاه فرد می‌شود و حاصل xOR آن‌ها ۱ شده و پس پلاک هر کدام $(۱۱)_۲$ می‌شود و مجموع پلاک‌ها ۶ = ۳ + ۳ می‌شود.

۲۳- گزینه‌ی ۴ درست است. درخت متناظر با شکل را رسم می‌کنیم.

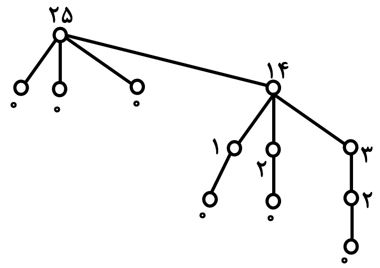


حال برای هر رأس دو عدد می‌خواهیم به دست آوریم یکی این‌که اگر آن رأس انتخاب شود حداکثر چه مربع‌هایی زیر درخت آن می‌تواند انتخاب شود و اگر انتخاب نشود حداکثر چه‌قدر. این مقدار را می‌توان به صورت بازگشت از روی بچه‌های هر رأس ساخت.

انتخاب شوند:



انتخاب نشوند:



پس جواب ۲۵ می‌شود.

۲۴- گزینه‌ی ۴ درست است. $f_{۲n+۱}$ را تعداد راه‌های رسیدن در جدول $(۲n+۱)\times۱$ به خانه‌ی مرکزی تعریف می‌کنیم حال داریم:

$$f_{۲n+۱}=f_{۲n-۱}+f_{۲n-۱}$$

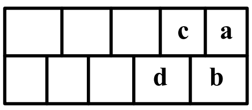
$$f_{۳}=۲\rightarrow f_{۵}=۴\rightarrow f_{۷}=۸\rightarrow f_{۹}=۱۶\rightarrow f_{۱۱}=۳۲\rightarrow f_{۱۳}=۶۴$$ و

۲۵- گزینه‌ی ۵ درست است. شکل را به‌صورت زیر می‌کشیم:

f_n را تعداد راه‌های رسیدن از خانه‌ی nام به خانه‌ی یکم تعریف می‌کنیم با این شرط که بتوان حداکثر یکی عقب رفت و g_n را این‌گونه تعریف می‌کنیم که نتوان عقب رفت حال داریم:

$$f_n=f_{n-۱}+f_{n-۲}+g_n+g_{n-۱}\ ,\ f_۱=۱\ ,\ f_۲=۲$$
$$g_n=g_{n-۱}+g_{n-۲}\ ,\ g_۱=۱\ ,\ g_۲=۱$$

n	f_n	g_n
۱	۱	۱
۲	۲	۱
۳	۶	۲
۴	۱۳	۳
۵	۲۷	۵
۶	۵۳	۸
۷	۱۰۱	۱۳
۸	۱۸۸	۲۱



۲۶- گزینه‌ی ۱ درست است. سه خانه‌ی a، b و c ۲ به ۲ مجاورند پس حداقل ۳ رنگ لازم داریم.

برای رنگ‌آمیزی با ۳ رنگ با $\binom{۷}{۳}$ روش، رنگ‌ها را تعیین می‌کنیم. برای رنگ خانه‌ی a، ۳ انتخاب، رنگ b، ۲ انتخاب و c، ۱ انتخاب داریم. اگر رنگ‌آمیزی را به همین ترتیب ادامه دهیم مشخص می‌شود که هر خانه‌ی رنگ شده که سراغش می‌رویم (مثل d) با ۲ تا از خانه‌هایی که قبلاً رنگ شده مجاور است. پس رنگ خانه‌های باقی‌مانده یکتا تعیین می‌شود. $\binom{۷}{۳}\times۳!$

برای رنگ‌آمیزی با ۴ رنگ، $\binom{۷}{۴}$ روش برای انتخاب رنگ‌ها داریم. برای رنگ a، ۴ انتخاب، b، ۳ انتخاب و رنگ c، ۲ انتخاب داریم. حالا d می‌تواند هر کدام از رنگ خانه‌ی a یا رنگ چهارم را بگیرد. (۲ انتخاب) به همین ترتیب هر کدام از خانه‌های باقی‌مانده با ۲ روش رنگ می‌شوند پس جواب این قسمت $\binom{۷}{۴}\times۴\times۳\times۲^{۸}=\binom{۷}{۴}\times۲^{۱۰}\times۳$ می‌شود.

۲۷- گزینه‌ی ۳ درست است. هر بار که عمل تا کردن را انجام می‌دهیم، مجموع اعداد جدول بدون تغییر می‌ماند. از طرفی چون هر بار، مقدار یک خانه با هزینه‌ی حاصل از آن جایگزین می‌شود و این هزینه برابر حاصل جمع تعدادی از اعداد ۱ تا $۱۰۲۴^۲$ است و هر کدام از این اعداد، در هر مرحله، در دقیقاً یک خانه‌ی جدول وجود دارند (در حاصل جمع) پس هزینه‌ی هر مرحله برابر است با مجموع اعداد ۱تا $۱۰۲۴^۲$ که مستقل از ترتیب تا کردن‌ها به دست می‌آید.

در هر مرحله، یکی از ابعاد جدول نصف می‌شود و $۲^{۱۰} = ۱۰۲۴$ یا $\log_۲^{۱۰۲۴} = ۱۰$

پس در ۱۰ مرحله، تعداد سطرها به ۱ می‌رسد و در ۱۰ مرحله تعداد ستون‌ها به ۱ می‌رسد.

یعنی در ۲۰ مرحله و در هر مرحله به اندازه‌ی $۱+۲+...+۱۰۲۴^۲$، هزینه پرداخت کرده‌ایم پس هزینه‌ی نهایی $۲۰\times\binom{۱۰۲۴^۲+۱}{۲}$ می‌شود.

۲۸- گزینه‌ی ۳ درست است. ابتدا به $\binom{۱۲}{۴}$ طریق افراد تاکسی اول و به $\binom{۸}{۴}$ طریق افراد تاکسی دوم را مشخص می‌کنیم. در تاکسی‌ای که نفر اول وجود دارد به جلو می‌رود. در دو تاکسی دیگر به ۴×۴ طریق کسی که جلو می‌نشیند مشخص می‌شود.

۲۹- گزینه‌ی ۲ درست است. اعداد ۱ تا ۲۰۴۷ را اگر در نظر بگیرید هر کدام را می‌توان به صورت یک عدد ۱۱ رقمی در مبنای ۲ در نظر گرفت. پس تعداد یک‌هایی که در جایگاه اول آمده است می‌شود $۲^{۱۰}$ تا همین‌طور برای جایگاه‌های دیگر پس در اعداد ۱ تا ۲۰۴۷ در مجموع ۱۱×۲^{۱۰} یک آمده است. حال اعداد ۲۰۴۸، ۲۰۴۹ و ۲۰۵۰ را جداگانه محاسبه می‌کنیم که در مجموع می‌شود $۱۱\times۲^{۱۰}+۵$.

۳۰- گزینه‌ی ۳ درست است. کسی که راستگو است نمی‌گوید کس دیگری راستگوست زیرا در این‌صورت دو راستگو خواهیم داشت پس هـ دروغگوست و در نتیجه الف هم دروغگو می‌شود زیرا حرف هـ غلط است. حال اگر د راستگو باشد ب دروغگو می‌شود ج هم می‌گوید یکی از او و د راستگواند که حرف درست است اما ج دروغگوست که تناقض است پس د دروغگو است. حال حرف ب هم بین غلط نیز غلط است می‌ماند ج که حرف درستی زده است.