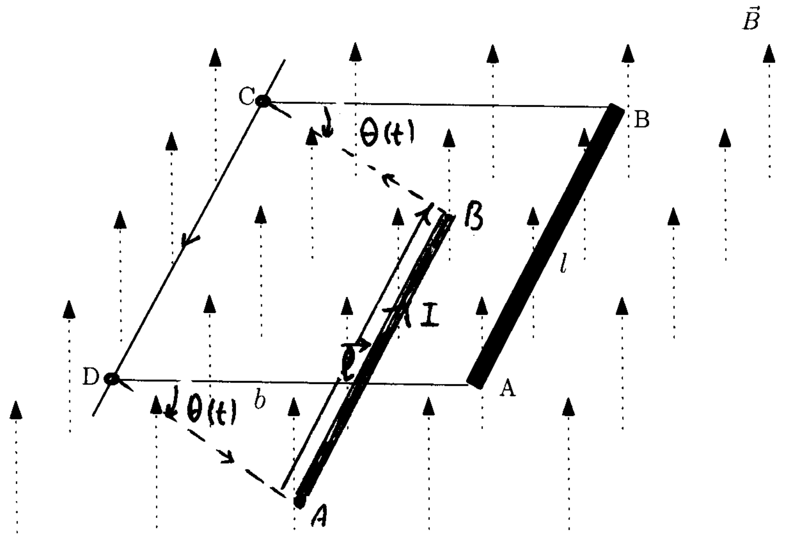
۱.



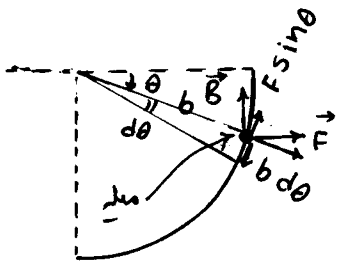
اگر در لحظه t ، زاویه صفحه ABCD با صفحه افقی اولیه θ(t) باشد شار مغناطیسی گذرنده از حلقه ABCD برابر است با

(الف) $$\phi_B = \ell b \cos\theta(t)\ B$$

نیروی محرکه القایی $\mathcal{E} = \left|-\dfrac{d\phi_B}{dt}\right|$ و $\mathcal{E} = IR$.

$$\frac{d\phi_B}{dt} = \ell b B \underbrace{\frac{d\theta(t)}{dt}}_{\omega} \left(-\sin\theta(t)\right) \Rightarrow I = \frac{\omega b \ell B \sin\theta}{R}$$

(ب) $$\vec{F} = I\vec{\ell}\times\vec{B} \ , \ \vec{\ell}\perp\vec{B} \Rightarrow F = I\ell B \Rightarrow F = \frac{\omega b \ell^2 B^2 \sin\theta}{R}$$



(ج) با توجه به شکل، هنگام جابجایی میله AB به اندازه dθ ، جابجایی bdθ و نیرو در خلاف جهت آن F sinθ است. پس برابر

$$dW_F = -(F\sin\theta)\, b\, d\theta$$

در نتیجه

$$\frac{dW_F}{dt} = -F b \sin\theta \underbrace{\frac{d\theta}{dt}}_{\omega} \Rightarrow \frac{dW_F}{dt} = -\frac{\omega^2 b^2 \ell^2 B^2 \sin^2\theta}{R}$$

(د) $$\frac{dQ}{dt} = -\frac{dW_F}{dt} \Rightarrow \frac{dQ}{dt} = \frac{\omega^2 b^2 \ell^2 B^2 \sin^2\theta}{R}$$

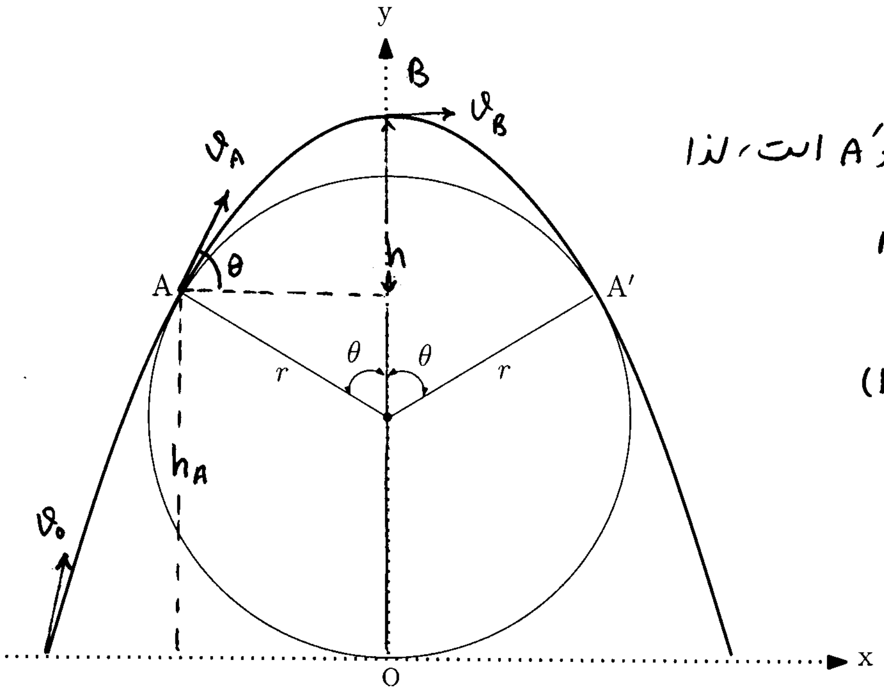
(هـ) با توجه به شکل قسمت ج) و نسبت به مبدأ مشخص شده، انرژی پتانسیل گرانشی میله برابر است با U.

$$U = -mgb\sin\theta \Rightarrow \frac{dU}{dt} = -mgb\cos\theta\ \omega$$

(و) کار کل انجام شده روی میله سبب تغییر انرژی جنبشی میله می‌شود.

$$dT = \underbrace{dW_g}_{\text{کار نیروی وزن}} + \underbrace{dW_F}_{\text{کار نیروی F}}$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{dW_g}{dt} + \frac{dW_F}{dt} \Rightarrow \frac{dT}{dt} = mgb\omega\cos\theta - \frac{\omega^2 b^2 \ell^2 B^2 \sin^2\theta}{R}$$



.۲

(الف) AA' برد مسیر بین نقطه‌ی A و A' است، لذا

$$AA' = 2r\sin\theta = \frac{v_A^2 \sin 2\theta}{g}$$

بنابراین (۱) $\boxed{v_A = \sqrt{\frac{rg}{\cos\theta}}}$

(ب) در غیاب مقاومت هوا بین نقطه‌ی پرتاب (روی سطح زمین) و نقطه‌ی A پایستگی انرژی مکانیکی می‌نویسیم

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v_A^2 + mgh_A \quad \text{و} \quad h_A = r + r\cos\theta$$

بنابراین (۲) $\boxed{v_0 = \sqrt{rg\left(\frac{1}{\cos\theta} + 2 + 2\cos\theta\right)}}$

(ج) مطابق شکل ارتفاع اوج، $OB = H$، برابر است با $H = h_A + h$

که h ارتفاع اوج پرتابه بین A و A' است، یعنی $h = \frac{v_A^2 \sin^2\theta}{2g}$

بنابراین (۳) $\boxed{H = r\left(1 + \cos\theta + \frac{\sin^2\theta}{2\cos\theta}\right)}$

(د) اگر پرتابه در نقطه‌ی B بر استوانه مماس شود $\theta = 0$ است و از معادلات (۲) و (۳) داریم

$$H = 2r \quad , \quad \boxed{v_0 = \sqrt{5rg}}$$

(هـ) پرتابه قرار است از نقطه‌ی مناسبی روی سطح زمین با کمینه‌ی سرعتی پرتاب شود که بتواند از روی استوانه بگذرد.

$$\frac{dv_0}{d\theta} = 0 \Rightarrow \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta} - 2\sin\theta = 0 \Rightarrow \sin\theta\,(1 - 2\cos^2\theta) = 0$$

$\theta = 0$ و $\theta = \frac{\pi}{4}$ ریشه‌های معادله‌اند.

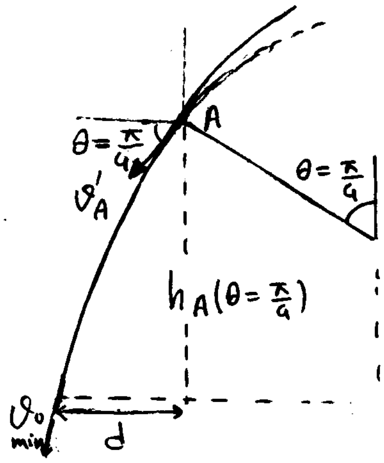
$$v_0\left(\theta = \tfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{(2 + 2\sqrt{2})rg} \quad , \quad v_0(\theta = 0) = \sqrt{5rg} \quad , \quad \sqrt{2 + 2\sqrt{2}} < \sqrt{5}$$

بنابراین به ازای $\theta = \frac{\pi}{4}$، $\boxed{v_{0min} = \sqrt{(2 + 2\sqrt{2})rg}}$ (۴) و $H\left(\theta = \frac{\pi}{4}\right) = r\left(1 + \frac{3\sqrt{2}}{4}\right) > 2r$

(۶) با توجه به تقارن مسیر، فرض می‌کنیم پرتابه از نقطه A

با سرعت v'_A و زاویه $\theta = \frac{\pi}{4}$ پرتاب شده و با سرعت

$v_{0\,min}$ به زمین برسد، یعنی



$$(5) \qquad v_{0\,min}^2 = 2gh_A + v_A'^2$$

و معادله مسیر نسبت به مبدأ واقع در A :

$$(4) \qquad y = -\frac{gx^2}{2v_A'^2\cos^2\theta} + x\,\mathrm{tg}\,\theta \quad , \quad \theta = -\frac{\pi}{4}$$

با قرار دادن (۴) در (۵) و اینکه

$$h_A = r\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

بدست می‌آوریم :

$$v_A'^2 = \sqrt{2}\,rg$$

مختصات محل برخورد پرتابه به زمین نسبت به A $(d, -h_A)$ است که در معادله (۴)

قرار می‌دهیم

$$-\frac{r}{2}(2+\sqrt{2}) = \frac{-gd^2}{2\sqrt{2}rg\left(\frac{1}{2}\right)} + d(-1)$$

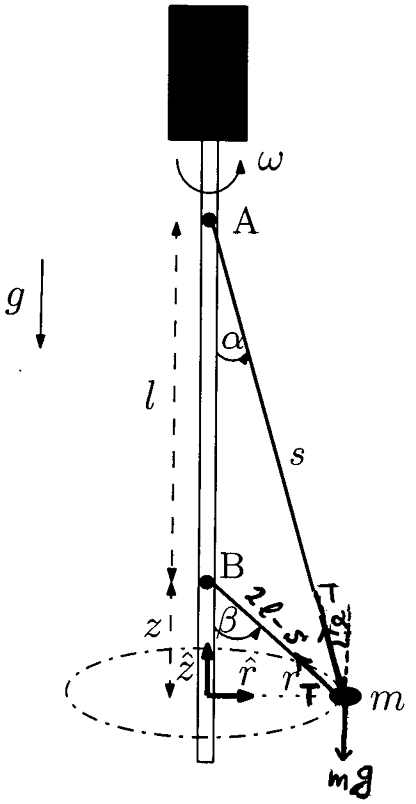
$$\sqrt{2}d^2 + 2rd - r^2(2+\sqrt{2}) = 0 \quad \Rightarrow \quad d = r\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}\right)$$

پس مکان پرتاب از روی سطح زمین نسبت به مبدأ O

$$R = -d - \frac{r}{\sqrt{2}}$$

$$\boxed{R = -\frac{\sqrt{6+4\sqrt{2}}}{2}r}$$

است.



۳. با صرف‌نظر از نیروی اصطکاک بین نخ و مهره، نیروی کشش

(الف) در طول نخ T است. به جرم m، نیروی وزن mg

و دو نیروی T از طرف نخ وارد می‌شود.

(الف)

$$\hat{z}: \quad T\cos\alpha + T\cos\beta - mg = 0 \qquad (۱)$$

$$\hat{r}: \quad T\sin\alpha + T\sin\beta = mr\omega^2 \qquad (۲)$$

(ب)

$$\sin\alpha = \frac{r}{s}, \quad \sin\beta = \frac{r}{2l-s}$$

$$\cos\alpha = \frac{l+z}{s}, \quad \cos\beta = \frac{z}{2l-s} \qquad (۳)$$

(ج) از تقسیم معادله (۲) به معادله (۱) و استفاده از معادله (۳):

$$\frac{2lr}{(l+z)(2l-s)+sz} = \frac{r\omega^2}{g} \Rightarrow z = \frac{s}{2} - l + \frac{g}{\omega^2} \qquad (۴)$$

از هندسه شکل:

$$r^2 = s^2 + (l+z)^2 = (2l-s)^2 - z^2$$

$$\Rightarrow z = -\frac{5}{2}l + 2s \qquad (۵)$$

از معادله (۴) و (۵) خواهیم داشت:

$$s = l + \frac{2g}{3\omega^2}, \quad z = -\frac{l}{2} + \frac{4g}{3\omega^2}$$

$$\cos\alpha = \frac{\frac{l}{2} + \frac{4g}{3\omega^2}}{l + \frac{2g}{3\omega^2}}, \quad \cos\beta = \frac{-\frac{l}{2} + \frac{4g}{3\omega^2}}{l - \frac{2g}{3\omega^2}}$$

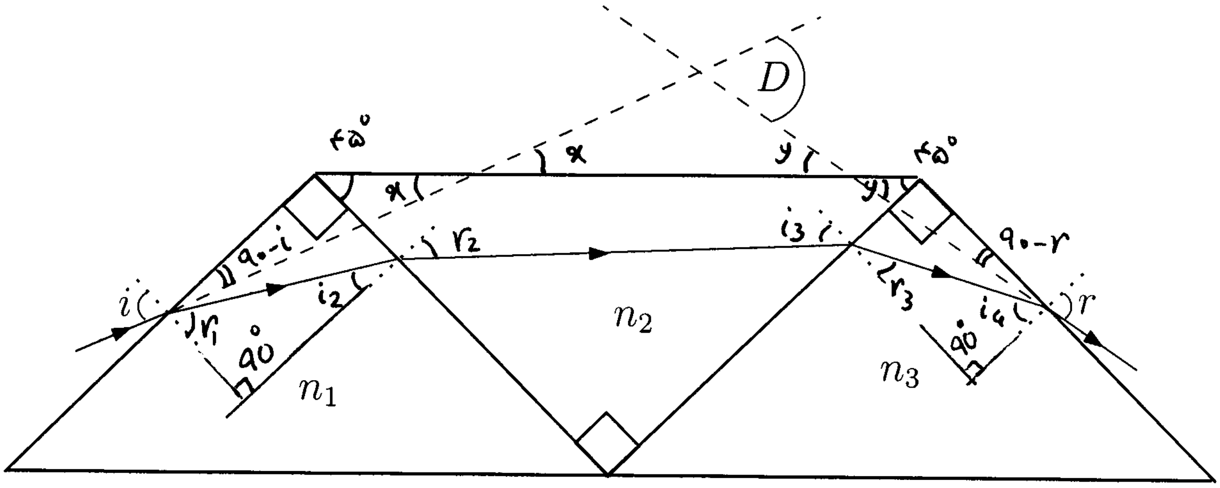
$$T = \frac{mg}{\cos\alpha + \cos\beta} \Rightarrow T = \frac{1 - \frac{4}{9}\left(\frac{g}{l\omega^2}\right)^2}{2\left(\frac{g}{l\omega^2}\right)} mg$$

(د) پس از محاسبه $\sin\alpha$ از روی $\cos\alpha$:

$$r = s\sin\alpha = \sqrt{\frac{3}{4}l^2 - \frac{4}{3}\frac{g^2}{\omega^4}}$$

$$r > 0 \Rightarrow \frac{3}{4}l^2 > \frac{4}{3}\frac{g^2}{\omega^4} \Rightarrow \omega^2 > \frac{4}{3}\frac{g}{l} \Rightarrow \omega_{min} = \sqrt{\frac{4g}{3l}}$$

۴.



(الف) قانون اسنل را در مرز هر دو منشور می‌نویسیم

$$\sin i = n_1 \sin r_1$$
$$n_1 \sin i_2 = n_2 \sin r_2$$
$$n_2 \sin i_3 = n_3 \sin r_3$$
$$n_3 \sin i_4 = \sin r$$

مطابق شکل $r_1 + i_2 = \frac{\pi}{2}$ و $r_2 + i_3 = \frac{\pi}{2}$ و $r_3 + i_4 = \frac{\pi}{2}$ بنابراین

$$\sin i = n_1 \cos i_2$$
$$n_2 \cos i_3 = n_1 \sin i_2$$
$$n_2 \sin i_3 = n_3 \cos i_4$$
$$\sin r = n_3 \sin i_4$$

هر معادله را به توان ۲ می‌رسانیم و سپس باهم جمع می‌کنیم

$$\Longrightarrow \sin^2 i + n_2^2 + \sin^2 r = n_1^2 + n_3^2$$

$$r = \sin^{-1}\left(\sqrt{n_1^2 + n_3^2 - n_2^2 - \sin^2 i}\right)$$

(ب) D زاویه خارجی مثلث است که برابر است با مجموع دو زاویه x و y یعنی $D = x + y$

اما با توجه به شکل $90 - i + 135 + x = 180$ و $90 - r + 135 + y = 180$

بنابراین $x = i - 45^\circ$ و $y = r - 45^\circ$ و لذا $D = i + r - 90$

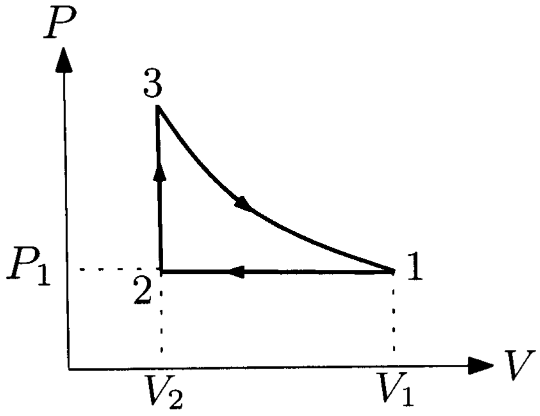
که با قرار دادن r از قسمت الف) در معادله اخیر

$$D = i + \sin^{-1}\sqrt{n_1^2 + n_3^2 - n_2^2 - \sin^2 i} - \frac{\pi}{2}$$

(ج) $D = 0 \Leftarrow \frac{\pi}{2} - i = \sin^{-1}\sqrt{n_1^2 + n_3^2 - n_2^2 - \sin^2 i}$

از دو طرف sin می‌گیریم $\cos i = \sqrt{n_1^2 + n_3^2 - n_2^2 - \sin^2 i}$

به توان ۲ می‌رسانیم، در نتیجه $D=0$ است اگر: $n_1^2 - n_2^2 + n_3^2 = 1$



۵.

ابتدا با استفاده از معادله حالت گاز

$$P(V-nb)=nRT$$

دما را در نقاط ۱ و 2 محاسبه می‌کنیم

$$T_1 = \frac{P_1(V_1-nb)}{nR} \qquad (۱)$$

$$T_2 = \frac{P_1(V_2-nb)}{nR} \qquad (۲)$$

فرآیند ۱→۳ بی دررو است که در آن $T\,(V-nb)^{R/C_{mV}}$ ثابت است، پس

$$T_3\,(V_2-nb)^{R/C_{mV}} = T_1\,(V_1-nb)^{R/C_{mV}} \qquad (۳)$$

که با قرار دادن T_1 از معادله (۱) در (۳)

$$T_3 = \frac{P_1(V_1-nb)}{nR}\left(\frac{V_1-nb}{V_2-nb}\right)^{R/C_{mV}} \qquad (٤)$$

در فرآیند ۱→3 ؛ $Q_{3\to1}=0$

در فرآیند 2→۱ برای اینکه در فشار ثابت حجم کاهش یابد، باید گرما از گاز گرفته شود.

در فرآیند 3→2 برای اینکه در حجم ثابت فشار افزایش یابد، باید به گاز گرما داده شود.

$Q_{in}=Q_{2\to3}$ ، $Q_{out}=|Q_{1\to2}|$ ، $W=Q_{in}-Q_{out}$ (در یک چرخه)

بازده $e=\frac{W}{Q_{in}}=1-\frac{Q_{out}}{Q_{in}}$

قانون اول ترمودینامیک را بین نقطه ۱ و ۲ می‌نویسیم

$$U_2-U_1 = W_{1\to2}+Q_{1\to2}$$

$$U_2-U_1 = nC_{mV}(T_2-T_1) = \frac{C_{mV}P_1}{R}(V_2-V_1)$$

$$W_{1\to2} = -\int_{V_1}^{V_2} P_1\,dV = -P_1(V_2-V_1)$$

بنابراین

$$Q_{1\to2} = -P_1(V_1-V_2)\left(1+\frac{C_{mV}}{R}\right)$$

$$Q_{out} = P_1(V_1-V_2)\left(1+\frac{C_{mV}}{R}\right)$$

قانون اول ترمودینامیک را بین نقاط ۲ و ۳ می‌نویسیم

$$U_3 - U_2 = W_{2\to 3} + Q_{2\to 3}$$

$$U_3 - U_2 = n C_{mv} (T_3 - T_2) = n C_{mv} \left(\frac{P_1 (V_1 - nb)}{nR} \left(\frac{V_1 - nb}{V_2 - nb} \right)^{R/C_{mv}} - \frac{P_1 (V_2 - nb)}{nR} \right)$$

$$= \frac{C_{mv}}{R} P_1 (V_2 - nb) \left(\left(\frac{V_1 - nb}{V_2 - nb} \right)^{\frac{R}{C_{mv}} + 1} - 1 \right)$$

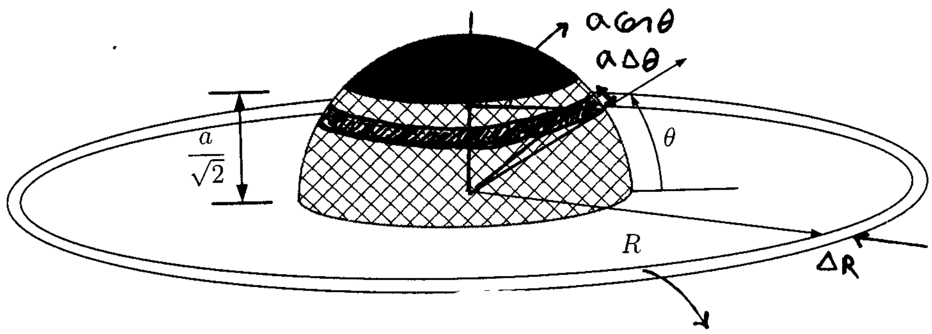
$$W_{2\to 3} = 0$$

$$Q_{in} = Q_{2\to 3} = \frac{C_{mv}}{R} P_1 (V_2 - nb) \left(\left(\frac{V_1 - nb}{V_2 - nb} \right)^{\frac{R}{C_{mv}} + 1} - 1 \right)$$

$$e = 1 - \frac{1 + \frac{R}{C_{mv}}}{\left(\frac{V_1 - nb}{V_2 - nb} \right)^{1 + R/C_{mv}} - 1} \; \frac{V_1 - V_2}{V_2 - nb}$$

سرانجام

۶.



مساحت این حلقه $2\pi R\Delta R$ است.

(الف) با فرض اینکه قطره از مرکز نیم‌کره با سرعت v_0 تحت زاویه‌ی θ پرتاب می‌شود

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$$

(ب)

$$\Delta R = R(\theta + \Delta\theta) - R(\theta)$$

$$\frac{\Delta R}{\Delta\theta} = \frac{R(\theta+\Delta\theta) - R(\theta)}{\Delta\theta}$$

برای $\Delta\theta \to 0$: $\Delta R = \frac{dR}{d\theta}\Delta\theta$

$$\Delta R = \frac{2v_0^2 \cos 2\theta}{g}\Delta\theta$$

(ج) مقدار آبی که به نواری به مساحت $2\pi R\Delta R$ روی سطح زمین می‌رسد مربوط به نواری روی سطح نیم‌کره به پهنای $a\Delta\theta$ و طول $2\pi a\cos\theta$ است، یعنی مساحت $(2\pi a\cos\theta)(a\Delta\theta)$.

اگر تعداد سوراخ‌ها در واحد سطح نیم‌کره n_0 باشد و از هرکدام در واحد زمان به مقدار Q آب خارج شود، پس از نواری به مساحت $2\pi a^2\cos\theta\,\Delta\theta$ مقدار آب خارج شده برابر است با $(2\pi a^2\cos\theta\Delta\theta)(n_0Q)$.

با یک تناسب مقدار $2\pi a^2\cos\theta\,\Delta\theta\, n_0Q$ روی سطح $2\pi R\,\Delta R$ توزیع می‌شود و لذا سهم واحد سطح برابر است با

آب رسیده به واحد سطح زمین در واحد زمان $= \frac{2\pi a^2 n_0 Q \cos\theta\,\Delta\theta}{2\pi R\,\Delta R}$

با قرار دادن R و ΔR از قسمت الف) و ب)

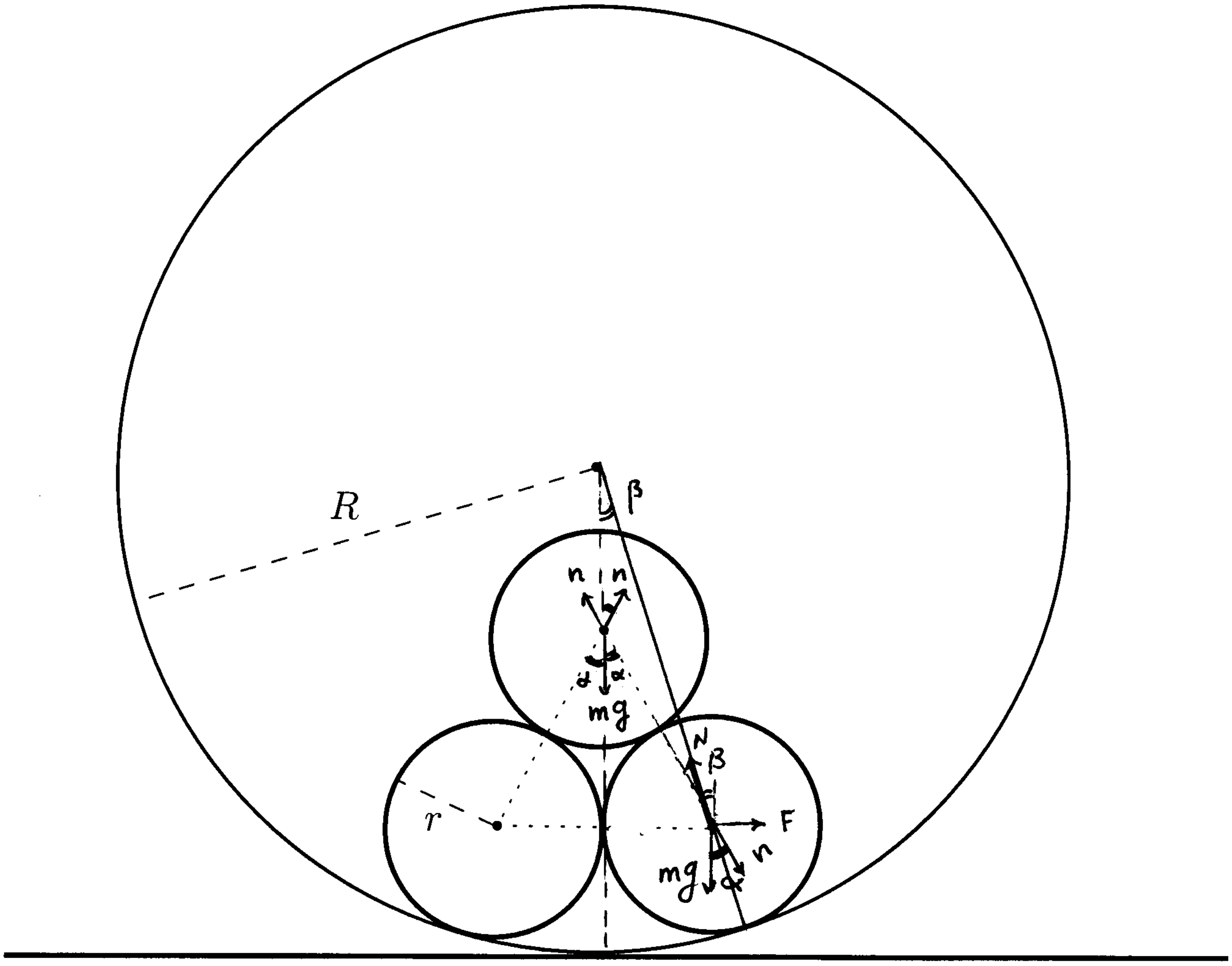
$$= n_0 a^2 Q\left(\frac{g}{v_0^2}\right)^2 \frac{\cos\theta}{2\sin 2\theta\cos 2\theta}$$

اما در فاصله $R = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{v_0^2}{g}$ و با توجه به $R = \frac{v_0^2\sin 2\theta}{g}$ داریم $\theta = 30^\circ$ و بنابراین

$$= n_0 a^2 Q\left(\frac{g}{v_0^2}\right)^2$$

لازم به ذکر است که اگر همچنین $\theta > \frac{\pi}{4}$ روی سطح کره مسدود نبود از دو زاویه‌ی θ آب به برد R می‌رسیدند.

۷.



نیروهای وارد بر استوانهٔ بالایی n و n از سوی دو استوانهٔ زیری و mg وزن آن است.

نیروهای وارد بر استوانهٔ زیری سمت راست n از سوی استوانهٔ بالایی، F از سوی استوانهٔ سمت چپ، N از سوی استوانهٔ بزرگ و mg وزن آن است.

شرط تعادل استوانهٔ بالایی:

$$2n\cos\alpha = mg$$

شرط تعادل استوانهٔ زیری:

$$F + n\sin\alpha = N\sin\beta$$
$$N\cos\beta = mg + n\cos\alpha$$

در ضمن، مطابق شکل:

$$\sin\alpha = \frac{r}{2r} = \frac{1}{2} \quad , \quad \sin\beta = \frac{r}{R-r}$$

از سه معادلهٔ اول:

$$F = \frac{mg}{2}\left(3\,tg\beta - tg\alpha\right)$$

همچنین

$$tg\beta = \frac{1}{cotg\beta} \Rightarrow 1 + cotg^2\beta = \frac{1}{\sin^2\beta} \Rightarrow tg\beta = \frac{r}{\sqrt{R^2-2rR}}$$

$$\sin\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow tg\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

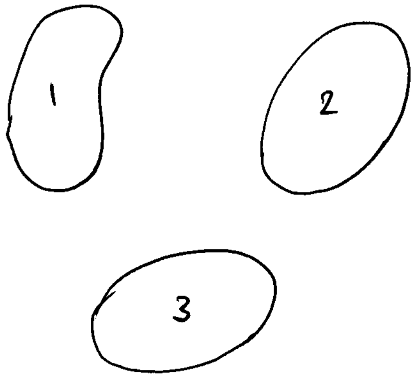
بنابراین

$$F = \frac{mg}{2}\left(\frac{3r}{\sqrt{R^2-2rR}} - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

به شرطی لوله‌های زیری در تماس با هم می‌مانند که $F>0$ باشد، یعنی: $\left(\frac{R}{r}\right)^2 - 2\left(\frac{R}{r}\right) - 27 < 0$

پس باید $\frac{R}{r} < 1+2\sqrt{7}$ و $\left(\frac{R}{r}\right)_{max} = 1+2\sqrt{7}$

۸.



$$Q_1 = 25\,\mu C \quad , \quad Q_2 = 10\,\mu C \quad , \quad Q_3 = 15\,\mu C$$

$$V_1 = 10\,V \quad , \quad V_2 = 0 \quad , \quad V_3 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\alpha_1 = 2.5\,\mu C/V \quad , \quad \alpha_2 = 1\,\mu C/V \quad , \quad \alpha_3 = 1.5\,\mu C/V$$

$$Q_1 = 35\,\mu C \quad , \quad Q_2 = 60\,\mu C \quad , \quad Q_3 = 25\,\mu C$$

$$V_1 = 10\,V \quad , \quad V_2 = 10\,V \quad , \quad V_3 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\beta_1 = 1\,\mu C/V \quad , \quad \beta_2 = 5\,\mu C/V \quad , \quad \beta_3 = 1\,\mu C/V$$

$$Q_1 = 50\,\mu C \quad , \quad Q_2 = 70\,\mu C \quad , \quad Q_3 = 50\,\mu C$$

$$V_1 = 10\,V \quad , \quad V_2 = 10\,V \quad , \quad V_3 = 10\,V$$

$$\Downarrow$$

$$\gamma_1 = 1.5\,\mu C/V \quad , \quad \gamma_2 = 1\,\mu C/V \quad , \quad \gamma_3 = 2.5\,\mu C/V$$

به ازای $Q_3 = 0$ و بنا به تعریف خازن: $Q_2 = -Q_1 = Q$ $\Leftarrow$

$$-Q = 2.5\,V_1 + V_2 + 1.5\,V_3$$

$$Q = V_1 + 5\,V_2 + V_3$$

$$0 = 1.5\,V_1 + V_2 + 2.5\,V_3$$

با قرار دادن V_3 از معادله سوم در دو معادله اول:

$$\begin{cases} -Q = \frac{8}{5} V_1 + \frac{2}{5} V_2 \\ Q = \frac{2}{5} V_1 + \frac{23}{5} V_2 \end{cases} \Rightarrow V_1 = -\frac{25}{36} Q \qquad V_2 = \frac{5}{18} Q$$

که Q برحسب μC و V_1 ، V_2 برحسب ولت اند.

$$\Delta V = V_2 - V_1 \quad , \quad \Delta V = \frac{Q}{C}$$

$$\Downarrow$$

$$C = \frac{36}{35}\,\mu F = 1.03\,\mu F$$