

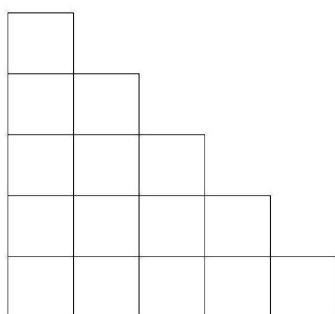
### رنگ آمیزی حوزوی [۳۳ نمره]

$\Pi$  خط راست در صفحه رسم کرده‌ایم که صفحه را به چند حوزه تقسیم کرده‌اند. بعضی از این حوزه‌ها را رنگ آمیزی کرده‌ایم، به طوری که هیچ دو حوزه‌ای که رنگ شده‌اند مرز مشترک ندارند. ثابت کنید، تعداد حوزه‌های رنگ شده از  $\frac{1}{3} \times (n^2 + n)$  تجاوز نمی‌کند.

### دابل رویال [۳۳ نمره]

ثابت کنید به ازای هر گراف سه منتظم دو بخشی  $G$ ، مجموعه‌ی  $S$  از دورها در  $G$  وجود دارد به صورتی که هر یال  $G$  دقیقاً در دو دور از  $S$  باشد.

### اقتباس از سازه‌های پله‌ای [۳۴ نمره]



یک  $n$ -پله شکلی مانند شکل رو به رو است که  $n$  سطر دارد و سطر  $i$ -ام، از  $i$  مربع تشکیل شده. یک کاشی را مربعی گوییم هرگاه به شکل مربع با طول ضلع طبیعی باشد. فرض کنید  $f(n)$  کمینه‌ی تعداد کاشی‌های مربعی باشد که با آن‌ها می‌توان یک  $n$ -پله را پوشاند. [دقت کنید که نمی‌توانیم دو کاشی را روی هم قرار دهیم و همچنین نباید قسمتی از کاشی‌ها از شکل بیرون بزنند] مثلاً  $f(2)=3$  و  $f(4)=7$ .

الف) تمام  $n$  هایی را بیابید که به ازای آن‌ها  $f(n)=n$ .

ب) تمام  $n$  هایی را بیابید که به ازای آن‌ها  $f(n)=n+1$ .

ای کز تو دلم پر سمن و یاسمنست  
وز دولت تو کیست که او همچو منست

برخاستن از جان و جهان مشکل نیست  
مشکل ز سر کوی تو برخاستن است  
- مولانا