Don't wait for the

PERFECT MOMENT

take the moment and make it

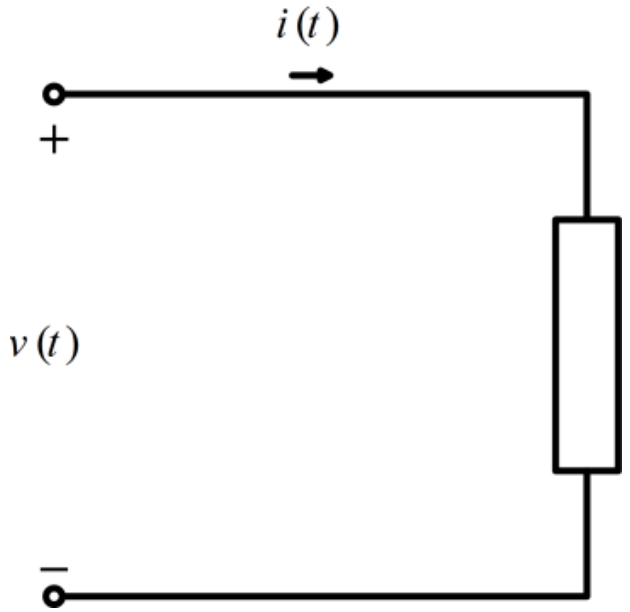
PERFECT

تحلیل سیستم‌های انرژی الکتریکی ۱

بهروز آدینه

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta_v)$$

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \theta_i)$$



$$p(t) = v(t) \times i(t) = V_m I_m \cos(\omega t + \theta_v)\cos(\omega t + \theta_i)$$

$$p(t) = \frac{1}{2} V_m I_m \left[\cos(\theta_v - \theta_i) + \cos(2\omega t + \theta_v + \theta_i)\right]$$

$$= \frac{1}{2} V_m I_m \left[\cos(\theta_v - \theta_i) + \cos(2(\omega t + \theta_v) - (\theta_v + \theta_i))\right]$$

$$= \frac{1}{2} V_m I_m \left[\cos(\theta_v - \theta_i) + \cos 2(\omega t + \theta_v)\cos(\theta_v - \theta_i) + \sin(2(\omega t + \theta_v)\sin(\theta_v - \theta_i)\right]$$

$$p(t) = |V||I|\cos\theta\left[1+\cos 2(\omega t+\theta_v)\right]+|V||I|\sin\theta\sin 2(\omega t+\theta_v)$$

$$p(t) = p_R(t) + p_X(t)$$

$$p_R(t) = |V||I|\cos\theta + |V||I|\cos\theta\cos 2(\omega t+\theta_v)$$

$$p(t) = |V||I|\cos\theta$$

$$p_X(t) = |V||I|\sin\theta\sin 2(\omega t+\theta_v)$$

$$Q = |V||I|\sin\theta$$

برای بار القایی، جریان عقب تر از ولتاژ بوده و **Q** نیز مثبت است

$$\theta = \theta_v - \theta_i > 0$$

برای بار خازنی، جریان از ولتاژ جلوتر بوده و **Q** نیز منفی است

$$\theta = \theta_v - \theta_i < 0$$

برای مقاومت خالص، زاویه امپدانس صفر و ضریب قدرت واحد (UPF[1]) است. یعنی توان ظاهری و حقیقی برابرند. انرژی الکتریکی به انرژی حرارتی تبدیل می‌شود.

اگر مدار القایی خالص باشد، جریان از ولتاژ به اندازه ۹۰ درجه عقب‌تر بوده و توان متوسط صفر است.

اگر بار خازنی باشد، جریان ۹۰ درجه جلوتر از ولتاژ بوده و توان متوسط صفر است

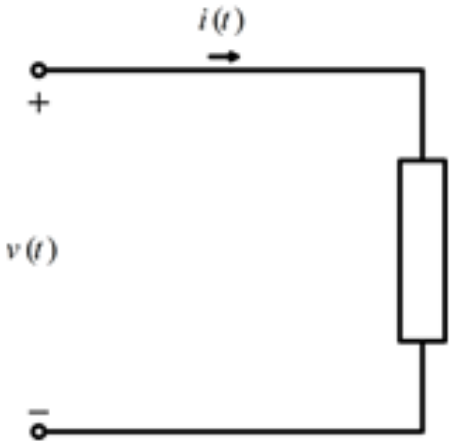
مثال ۲–۱

ولتاژ تغذیه در شکل ۱.۳ با $v(t)=۱۰۰\cos\omega t$ داده شده و بار القایی دارای امپدانس $Z=۱.۲۵\angle ۶۰^\circ$ می‌باشد. رابطه جریان لحظه‌ای $i(t)$ و توان لحظه‌ای $p(t)$ را تعیین کنید.

$$I=\frac{۱۰۰\angle ۰^\circ}{۱.۲۵\angle ۶۰^\circ}=۸۰\angle -۶۰^\circ$$

$$i(t)=۸۰\cos(\omega t-۶۰^\circ) \qquad A$$

$$p(t)=v(t)i(t)=۸۰۰\cos(\omega t)\cos(\omega t-۶۰) \qquad W$$



شکل ۱.۳ منبع سینوسی تغذیه کننده یک بار تک فاز.

توان مختلط

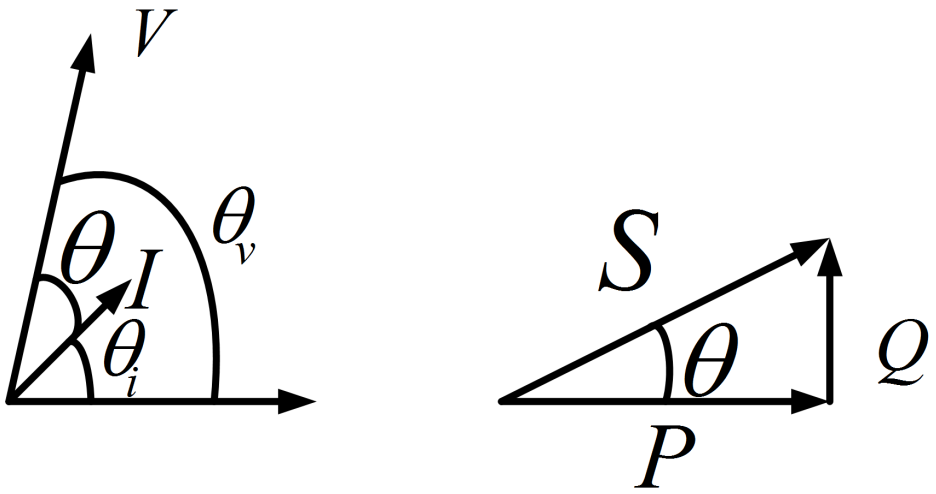
$$V = |V| \angle \theta_v \qquad I = |I| \angle \theta_i$$

$$\begin{aligned} S &= VI^* = |V||I| \angle (\theta_v - \theta_i) \\ &= |V||I| \angle \theta \\ &= |V||I| \cos\theta + |V||I| \sin\theta \end{aligned}$$

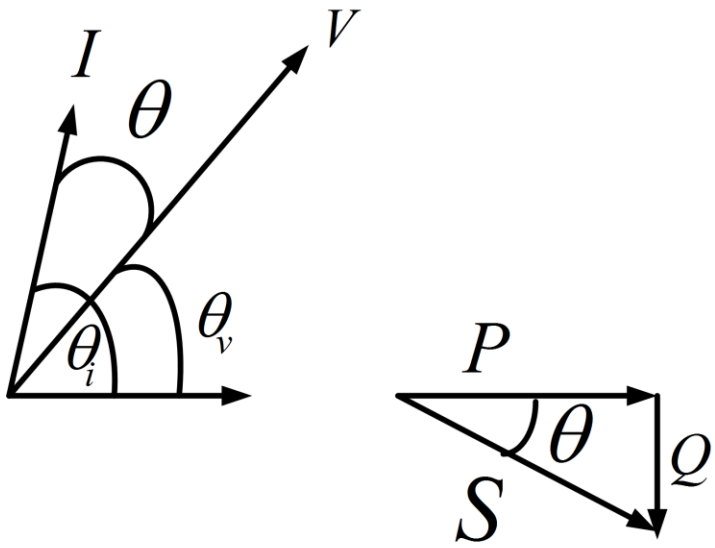
$$S = P + jQ$$

$$|S| = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

نمایش برداری و مثلث توان برای بار القایی (PF پس فاز)



نمایش برداری و مثلث توان برای بار خازنی (PF پیش فاز)



اگر امپدانس بار Z باشد

$$V = ZI$$

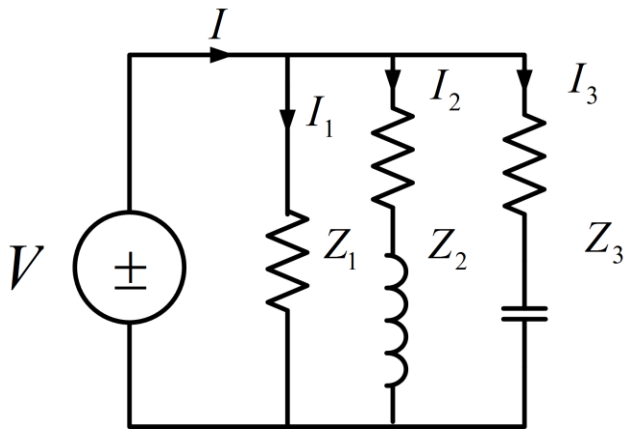
$$S = VI^* = ZII^* = R|I|^2 + jX|I|^2$$

$$S = VI^* = \frac{VV^*}{Z^*} = \frac{|V|^2}{Z^*}$$

$$Z = \frac{|V|^2}{S^*}$$

توازن توان مختلط

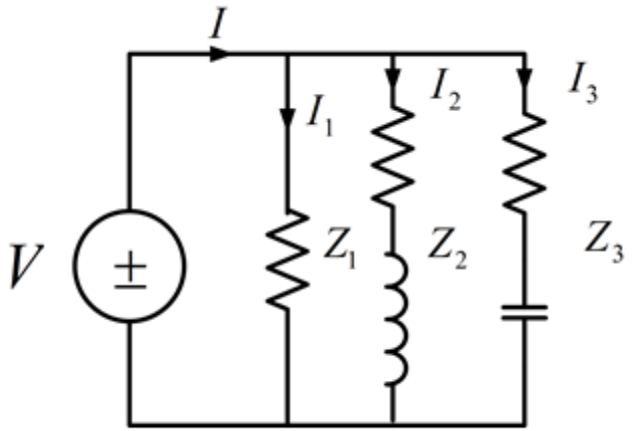
$$S = VI^* = V(I_1 + I_2 + I_3)^* = VI_1^* + VI_2^* + VI_3^*$$



تمرین:
برای سه بار سری توازن توان اثبات کنید.

مثال ۲-۲

در مدار بالا $V = ۱۲۰۰\angle ۰^\circ$ ، $Z_1 = ۶۰ + j ۰\,\Omega$ ، $Z_2 = ۶ + j ۱۲\,\Omega$ ، $Z_3 = ۳۰ - j ۳۰\,\Omega$ مفروض است. توان جذب شده توسط هر بار و توان مختلط را بیابید.



شکل ۴.۳ سه بار موازی

$$I_1 = \frac{۱۲۰۰\angle ۰^\circ}{۶۰\angle ۰^\circ} = ۲۰ + j ۰ \quad A$$

$$I_2 = \frac{۱۲۰۰\angle ۰^\circ}{۶ + j ۱۲} = \frac{۱۲۰۰\angle ۰^\circ}{۱۳.۴۲\angle ۱.۱۱^\circ} = ۸۹.۴۴\angle -۱.۱۱^\circ = ۴۰ - j ۸۰ \quad A$$

$$I_3 = \frac{۱۲۰۰\angle ۰^\circ}{۳۰ - j ۳۰} = \frac{۱۲۰۰\angle ۰^\circ}{۴۲.۴۳\angle -۰.۷۹^\circ} = ۲۸.۲۸\angle ۰.۷۹^\circ = ۲۰ + j ۲۰ \quad A$$

$$S_1 = VI_1^* = ۱۲۰۰\angle ۰^\circ (۲۰ - j ۰) = ۲۴۰۰۰\angle ۰^\circ VA = ۲۴۰۰۰ W + j ۰ VAr$$

$$S_2 = VI_2^* = ۱۲۰۰\angle ۰^\circ (۴۰ + j ۸۰) = ۱۰۷۳۳۱.۲۶\angle ۱.۱۲^\circ VA = ۴۸۰۰۰ W + j ۹۶۰۰۰ VAr$$

$$S_3 = VI_3^* = ۱۲۰۰\angle ۰^\circ (۲۰ - j ۲۰) = ۳۳۹۴۱.۱۳\angle ۰.۷۹^\circ VA = ۲۴۰۰۰ W - j ۲۴۰۰۰ VAr$$

$$S = (S_1 + S_2 + S_3) = ۹۶۰۰۰ W + j ۷۲۰۰۰ VAr$$

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = (۲۰ + j ۰) + (۴۰ - j ۸۰) + (۲۰ + j ۲۰)$$

$$= ۸۰ - j ۶۰ = ۱۰۰\angle -۳۶.۸۷^\circ \quad A$$

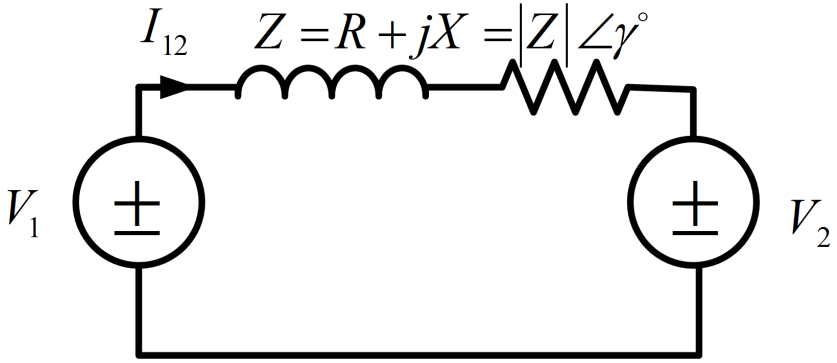
$$S = VI^* = (۱۲۰۰\angle ۰^\circ)(۱۰۰\angle ۳۶.۸۷^\circ) = ۱۲۰۰۰۰\angle ۳۶.۸۷^\circ \quad VAr$$

$$= ۹۶۰۰۰ W + j ۷۲۰۰۰ VAr$$

$$S_{۱} = \frac{|V|^{۲}}{Z_{۱}^{*}} = \frac{(۱۲۰۰)^{۲}}{۶۰} = ۲۴۰۰۰W + j۰VAr$$

$$S_{۲} = \frac{|V|^{۲}}{Z_{۲}^{*}} = \frac{(۱۲۰۰)^{۲}}{۶ - j۱۲} = ۴۸۰۰۰W + j۹۶۰۰۰VAr$$

$$S_{۳} = \frac{|V|^{۲}}{Z_{۳}^{*}} = \frac{(۱۲۰۰)^{۲}}{۳۰ + j۳۰} = ۲۴۰۰۰W - j۲۴۰۰۰VAr$$



$$V_1 = |V_1| \angle \delta_1$$
$$V_2 = |V_2| \angle \delta_2$$

$$I_{12} = \frac{|V_1| \angle \delta_1 - |V_2| \angle \delta_2}{|Z| \angle \gamma} = \frac{|V_1|}{|Z|} \angle (\delta_1 - \gamma) - \frac{|V_2|}{|Z|} \angle (\delta_2 - \gamma)$$

$$S_{12} = V_1 I_{12}^{*} = |V_1| \angle \delta_1 \left[\frac{|V_1|}{|Z|} \angle (\gamma - \delta_1) - \frac{|V_2|}{|Z|} \angle (\gamma - \delta_2) \right]$$

$$= \frac{|V_1|^2}{|Z|} \angle \gamma - \frac{|V_1||V_2|}{|Z|} \angle (\gamma + \delta_1 - \delta_2)$$

$$P_{12} = \frac{|V_1|^2}{|Z|} \cos \gamma - \frac{|V_1||V_2|}{|Z|} \cos(\gamma + \delta_1 - \delta_2)$$

$$Q_{12} = \frac{|V_1|^2}{|Z|} \sin \gamma - \frac{|V_1||V_2|}{|Z|} \sin(\gamma + \delta_1 - \delta_2)$$

$$R = 0 \quad Z = X \angle 90^\circ$$

$$P_{12} = \frac{|V_1|^2}{|Z|}\cos\gamma - \frac{|V_1||V_2|}{|Z|}\cos(\gamma + \delta_1 - \delta_2)$$

$$P_{12} = \frac{|V_1||V_2|}{X}\sin(\delta_1 - \delta_2)$$

$$Q_{12} = \frac{|V_1|^2}{|Z|}\sin\gamma - \frac{|V_1||V_2|}{|Z|}\sin(\gamma + \delta_1 - \delta_2)$$

$$Q_{12} = \frac{|V_1|}{X}\left[|V_1| - |V_2|\cos(\delta_1 - \delta_2)\right]$$

از آنجایی که $R=0$ است، خط انتقال تلفات نداشته و توان حقیقی ارسال شده برابر توان حقیقی دریافت شده است.

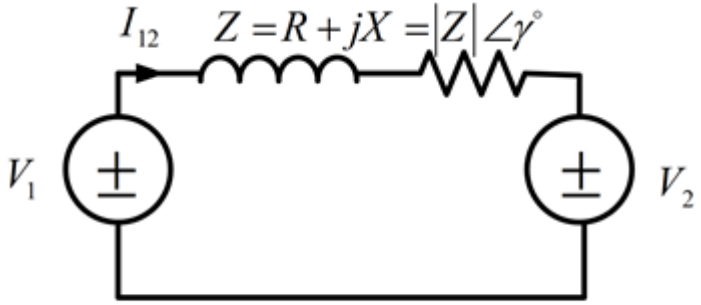
برای یک سیستم قدرت نوعی با نسب کوچک $\frac{R}{X}$

$P_{12} = \frac{|V_1||V_2|}{X}\sin(\delta_1 - \delta_2)$ نشان می‌دهد که تغییرات کوچک در δ_1 یا δ_2 اثر قابل توجهی در پخش توان حقیقی دارد، در حالی که تغییرات کوچک در دامنه ولتاژها اثر محسوسی در پخش توان حقیقی نخواهد داشت. بنابراین، پخش توان حقیقی در یک خط انتقال بوسیله اختلاف زاویه ولتاژ پایانه‌ها (یعنی $P_{12} \propto \sin\delta$ که در آن $\delta = \delta_1 - \delta_2$ است) کنترل می‌شود. اگر V_1 جلوتر از V_2 باشد δ مثبت بوده و پخش توان حقیقی از گره ۱ به طرف گره ۲ می‌باشد. اگر V_1 عقب‌تر از V_2 باشد، δ منفی شده و توان حقیقی از گره ۲ به گره ۱ جریان می‌یابد.

با فرض R=0، حداکثر توان تئوری (ظرفیت انتقال استاتیک) وقتی رخ می‌دهد که $\delta = 90^\circ$ باشد و $P_{\max} = \frac{|V_1||V_2|}{X}$ حداکثر توان انتقالی برابر است با:

پخش توان راکتیو بوسیله اختلاف اندازه ولتاژها تعیین می‌گردد $Q \propto |V_1| - |V_2|$

مثال ۲–۵



شکل ٦.٣ اتصال دو منبع ولتاژ

دو منبع ولتاژ $V_2 = 100\angle 0^\circ$ ، $V_1 = 120\angle -5^\circ V$ توسط یک خط کوتاه با امپدانس $Z = 1 + j\,7\Omega$ مطابق شکل ٦.٣ به یکدیگر وصل شده‌اند. توان‌های اکتیو و راکتیو تحویلی یا دریافتی هر یک از منابع و تلفات خط را تعیین کنید.

$$I_{۱۲} = \frac{۱۲۰\angle -۵^\circ - ۱۰۰\angle ۰^\circ}{۱ + j\,۷} = ۳.۱۳۵\angle -۱۱۰.۰۲^\circ \quad A$$

$$I_{۲۱} = \frac{۱۰۰\angle ۰^\circ - ۱۲۰\angle -۵^\circ}{۱ + j\,۷} = ۳.۱۳۵\angle ۶۹.۹۸^\circ \quad A$$

$$S_{۱۲} = V_۱ I_{۱۲}^* = ۳۷۶.۲\angle ۱۰۵.۰۲^\circ = -۹۷.۵\,W + j\,۶۳۶.۲\,VAr$$

$$S_{۲۱} = V_۲ I_{۲۱}^* = ۳۱۳.۵\angle -۶۹.۹۸^\circ = ۱۰۷.۳\,W - j\,۲۹۴.۵\,VAr$$

تلفات خط برابر است با:

$$S_L = S_۱ + S_۲ = ۹.۸\,W + j\,۶۸.۸\,VAr$$

با توجه به نتایج بالا، از آنجایی که P_1 منفی و P_2 مثبت است، منبع ۱ توان ۹۷.۵ وات را دریافت و منبع ۲ توان ۱۰۷.۳ وات را تولید می‌نماید و تلفات توان حقیقی در خط ۹.۸ وات می‌باشد. تلفات توان حقیقی در خط با رابطه زیر آزمایش می‌گردد:

$$P_L = R\left|I_{12}\right|^2 = 1(3.135)^2 = 9.8 \quad W \qquad (3.34)$$

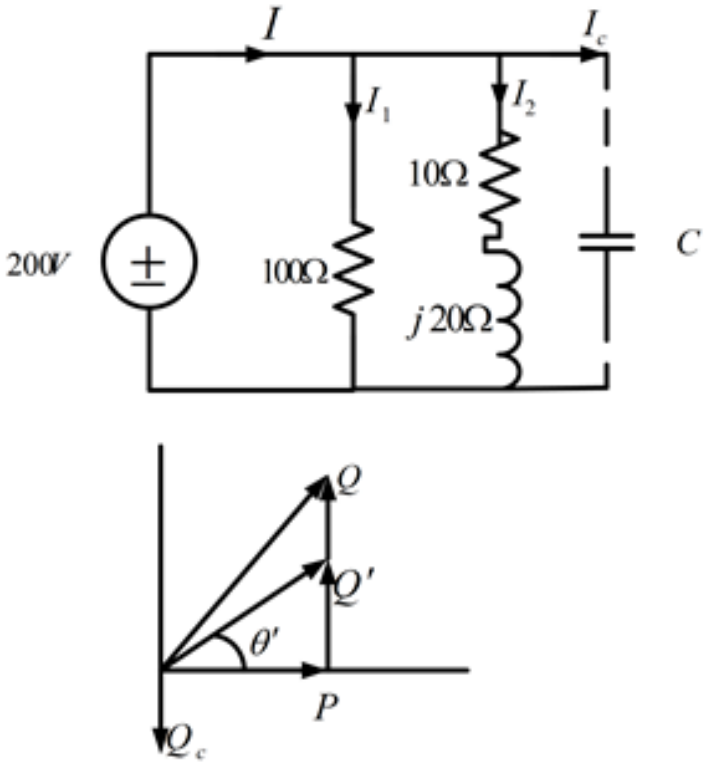
همچنین چون Q_1 مثبت و Q_2 منفی است، منبع ۱ توان ۳۶۳.۳ وار را تحویل و منبع ۲ توان ۲۹۴.۵ وار را دریافت می‌نماید و تلفات توان راکتیو خط ۶۸.۶ وار می‌باشد. تلفات توان راکتیو در خط را می‌توان با رابطه زیر آزمایش نمود:

$$Q_L = X\left|I_{12}\right|^2 = 7(3.135)^2 = 68.8 \quad VAr \qquad (3.35)$$

$$p(t) = |V||I|\cos\theta \qquad (۸.۳)$$

از معادله (۸.۳) می‌توان دید که اگر ضریب قدرت کمتر از ۱ باشد، توان ظاهری بزرگتر از P خواهد بود. در نتیجه جریان I که باید تحویل داده شود برای $PF <$ ۱ بزرگتر از حالتی است که $PF =$ ۱ باشد، حتی اگر توان متوسط P در هر دو حالت یکسان تحویل داده شود. شرکت برق نمی‌تواند بدون هزینه اضافی جریان بیشتری تحویل دهد. در نتیجه به نفع شرکت برق است که بارهای اصلی سیستم تا حد امکان دارای ضریب قدرت نزدیک به ۱ باشند. به همین منظور، شرکت‌های برق متناسب با نیاز خود در سرتاسر شبکه بانک‌های خازنی نصب می‌کنند. آنها همچنین مصرف‌کننده‌های صنعتی با ضرایب قدرت پایین را وادار به پرداخت هزینه‌های اضافی می‌کنند. مشتری‌های خانگی و تجاری کوچک ضریب قدرت نزدیک به۱ دارند.

دو بار $Z_1 = ۱۰۰ + j ۰\Omega$ و $Z_2 = ۱۰ + j ۲۰\Omega$ به منبعی با ولتاژ موثر ۲۰۰ ولت و فرکانس ۶۰ هرتز مطابق شکل ۷.۳ وصل شده‌اند.



شکل ۷.۳ مدار مثال ۳-۲ و مثلث توان

الف) توان‌های اکتیو و راکتیو کل، ضریب قدرت منبع و جریان کل را تعیین کنید.

$$I_{۱} = \frac{۲۰۰\angle ۰^{\circ}}{۱۰۰} = ۲\angle ۰^{\circ} \qquad A$$

$$I_{۲} = \frac{۲۰۰\angle ۰^{\circ}}{۱۰ + j\,۲۰} = ۴ - j\,۸ \qquad A$$

$$S_{۱} = VI_{۱}^{*} = ۲۰۰\angle ۰^{\circ}(۲ - j\,۰) = ۴۰۰W + j\,۰VAr$$

$$S_{۲} = VI_{۲}^{*} = ۲۰۰\angle ۰^{\circ}(۴ + j\,۸) = ۸۰۰W + j\,۱۶۰۰VAr$$

$$S = P + jQ = ۱۲۰۰ + j\,۱۶۰۰ = ۲۰۰۰\angle ۵۳.۱۳^{\circ} \qquad VA$$

$$I = \frac{S^{*}}{V^{*}} = \frac{۲۰۰\angle -۵۳.۱۳^{\circ}}{۲۰۰\angle ۰^{\circ}} = ۱۰\angle -۵۳.۱۳^{\circ}$$

$$PF = \cos(۵۳.۱۳^{\circ}) = ۰.۶$$

ضریب قدرت پس‌فاز است.

ب) ظرفیت خازن وصل شده به دوسر بارها را طوری تعیین کنید که ضریب قدرت کل به ۰.۸ پس‌فاز بهبود یابد.

توان اکتیو کل در ضریب قدرت جدید ۰.۸ پس فاز $P = ۱۲۰۰ MW$ است. بنابراین:

$$\theta' = \cos^{-۱}(۰.۸) = ۳۶.۸۷^\circ$$
$$Q' = P \tan\theta' = ۱۲۰۰ \tan(۳۶.۸۷^\circ) = ۹۰۰ \quad VAr$$
$$Q_c = -j\left|۱۶۰۰ - ۹۰۰\right| = -j\,۷۰۰ \quad VAr \qquad (۳۹.۳)$$
$$Z_c = \frac{|V|^۲}{Q_c^*} = \frac{(۲۰۰)^۲}{j\,۷۰۰} = -j\,۵۷.۱۴ \quad \Omega, \quad X_c = ۵۷.۱۴ \quad \Omega$$
$$X_c = \frac{۱}{C\omega} = \frac{۱}{C \times ۲\pi \times ۶۰} \Rightarrow C = \frac{۱}{۱۲۰\pi \times ۵۷.۱۴} = ۴.۶۴۲ \times ۱۰^{-۵} F = ۴۶.۴۲ \mu F$$

توان کل و جریان جدید این چنین محاسبه می‌شود:

$$S' = ۱۲۰۰ + j۹۰۰ = ۱۵۰۰ \angle ۳۶.۸۷^\circ \quad VA$$
$$I' = \frac{S'^*}{V^*} = \frac{۱۵۰۰ \angle -۳۶.۸۷^\circ}{۲۰۰ \angle ۰^\circ} = ۷.۵ \angle -۳۶.۸۷^\circ \quad A \qquad (٤۰.۳)$$

کاهش جریان تغذیه از ۱۰A به ۷/۵A قابل توجه است.