

دانشگاه فردوسی مشهد

گروه مهندسی برق - مخابرات

پروژه کارشناسی

موضوع پروژه:

آنالیز احتمال خطا در سیستم های مخابراتی دیجیتال

استاد راهنما:

دکتر قوشه عابد هدتنی

تهیه کننده:

حمیدرضا مازندرانی

سال تحصیلی ۹۲-۱۳۹۱

بسمه تعالی

فهرست

۳.....	پیش گفتار.....
۴.....	تعریف متغیرها.....
۵.....	تقریب قطار پالس بریده شده.....
۶.....	روش بدترین حالت ممکن.....
۷.....	روش کران چرنف.....
۱۳.....	محاسبه ی احتمال خطا به فرم ماتریسی و طراحی فیلتر ورودی بهینه.....
۱۶.....	پیوست یک: کران چرنف.....
۱۹.....	منابع.....

پیش‌گفتار

یکی از مسائل مهم در بررسی سیستم‌های مخابراتی دیجیتال، بررسی میزان تاثیر *تداخل بین سمبلی* (*inter-symbol interference*) که آن را به اختصار *ISI* می‌نامیم، در عملکرد این سیستم‌ها است. در سیستم‌هایی که از نسبت سیگنال به نویز بالایی بهره می‌برند، *ISI* معمولاً مهم‌ترین عامل تخریب‌کننده سیگنال ارسالی است. در این پروژه ما قصد داریم میزان تاثیر *ISI* و نویز را در حضور یکدیگر بررسی نماییم.

تاکنون سه روش برای محاسبه احتمال خطا به کار رفته است. در روش نخست که به تقریب قطار پالس بریده شده موسوم است، فرض بر این است که تاثیر پالس‌های کناری بر مقدار نمونه‌گیری شده به تعداد مشخصی از پالس‌ها محدود می‌شود. (برای نمونه N پالس از هر طرف). حال با این فرض برای هر کدام از 2^{2N+1} دنباله‌ی ممکن از این قطار پالس، احتمال خطا بررسی شده و میانگین آن محاسبه می‌گردد. این روش کران پایینی را برای خطا ارائه می‌دهد.

در روش دوم که به تقریب بدترین حالت *ISI* موسوم است، فرض بر این است که در لحظه‌ی نمونه برداری، *ISI* بیش‌ترین مقدار خود را دارد و با این فرض کران بالایی برای خطا محاسبه می‌گردد.

در روش سوم با بهره‌گیری از کران چرنف (*Chernoff Bound*)، به تقریب کران بالایی از احتمال خطا می‌رسیم. این روش نسبت به روش قطار پالس بریده شده، حجم محاسباتی کم‌تری دارد؛ ضمن این که هیچ‌گاه از تقریب بدترین حالت تجاوز نمی‌نماید. همچنین این تقریب در بسیاری از نمونه‌ها که روش بدترین حالت عملی نیست، کاملاً کاربردی است.

در روش تقریب با استفاده از نامساوی چرنف فرض بر این است که نویز جمع‌شونده و گوسی بوده و نیز نمونه‌های ارسالی مستقل از هم و با احتمال رخداد مساوی است.

تعریف متغیرها

دنباله ی تصادفی $\{a_n\}$ برای توصیف پیام ارسالی استفاده می گردد. در فرستنده این دنباله با دو پالس مشخص و غیر تصادفی ساخته می شود. (و دارای نمایه ی فیزیکی می گردد). آن گاه از کانال LTI عبور می کند.

در گیرنده سیگنال اعوجاج یافته به همراه نویز جمع شونده دریافت شده و از یک فیلتر LTI عبور می کند. سپس این سیگنال وارد نمونه بردار شده و در انتها از یک سیستم تشخیص آستانه گذر می کند تا دنباله ی $\{b_n\}$ که تقریبی از دنباله ی ارسالی است، ایجاد گردد.

خطا زمانی رخ می دهد که $b_n \neq a_n$. معیار عملکرد سیستم با دنباله ی $\{b_n \neq a_n\}$ توصیف می گردد. اگر سیستم را ایستاد (مستقل از n) فرض کنیم بدیهی ست که هر کدام از اعضای دنباله ی خطا به تنهایی برای توصیف عملکرد سیستم کافی هستند.

با توجه به تعریف های بالا، اکنون ورودی به گیرنده را با بسط زیر نمایش می دهیم:

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n x(t - nT) + n(t) \quad (1)$$

که $\{a_n\}$ دنباله ی ارسالی است. $x(t)$ پالس ارسالی و T فاصله ی زمانی بین هر دو پالس مجاور است که عکس آن یعنی r_b ($r_b = 1/T_b$) نرخ ارسال داده می باشد.

ضمناً فرض بر این است که $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^2(t - nT) < \infty$ و لذا ممان دوم قطار پالس کران دار است. $n(t)$ نیز نویز گوسی با میانگین صفر و انحراف معیار σ_n و مستقل از پیام اصلی است.

در گیرنده در زمان های $pT + \tau$ ($p=0, \pm 1, \dots$) عمل نمونه برداری بر روی $y(t)$ انجام می شود. τ به گونه ای انتخاب می شود که سیستم در حالت بهینه کار کند. مثلاً یک انتخاب مقداری برای τ است که به ازای آن، سیگنال مقدار حداکثری را داشته باشد. در این پروژه مساله ی چگونگی تعیین τ مطرح نشده است.

سیگنال نمونه برداری شده به فرم زیر نمایش داده می شود:

$$y(pT + \tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n x(pT + \tau - nT) + n(pT + \tau) \quad (2)$$

$$= a_p x(\tau) + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq p}}^{+\infty} a_{p+n} x(\tau - nT) + n(pT + \tau) \quad (3)$$

$$= a_p x(\tau) + z_p(\tau) + n_p(\tau) \quad (4)$$

$Z_p(\tau)$ تاثیر پالس های مجاور بر مقدار نمونه در زمان τ است و چنان چه گفته شد، ISI نام دارد. $n_p(\tau)$ نیز نویز گوسی و جمع شونده است.

می دانیم که توزیع احتمال جملات مربوط به ISI و نویز، توزیعی زوج است و با توجه به این موضوع به آسانی می توان دریافت که آستانه ی بهینه (یعنی آستانه ای که با به کار بردن آن خطا کمینه می گردد). برابر صفر است. در نتیجه خطا زمانی رخ می دهد که $a_n=1$ را ارسال کنیم و در گیرنده مقدار نمونه یعنی $y(pT+\tau)$ کم تر از صفر باشد و یا $a_n=-1$ ارسال گردد ولی $y(pT+\tau)$ بزرگ تر از صفر باشد. چون احتمال رخ دادن ± 1 را مساوی در نظر گرفته ایم، احتمال خطا به فرم زیر به دست می آید:

$$P_e = \frac{1}{2} \Pr(|n_p + z_p| \geq |x(\tau)|) \quad (5)$$

فرمول ۵ مبنای استفاده در تمامی روش های تقریب احتمال خطا می باشد.

تقریب قطار پالس بریده شده

در این روش فرض می کنیم که مقدار نمونه علاوه بر پالس اصلی، به N پالس بعدی و قبلی وابستگی دارد. پالس هایی که از پالس N ام دورتر هستند، در لحظه ی نمونه برداری مقدار ناچیزی داشته و از تاثیرشان صرف نظر می کنیم.

در این حالت $Z_p(\tau)$ در فرمول ۳ که مربوط به مقدار ISI است، حد بالا و پایین محدودی پیدا نموده و به فرم زیر در می آید:

$$Z_p(\tau) = \sum_{\substack{n=-N+p \\ n \neq p}}^{+N+p} a_{p+n} x(\tau - nT) \quad (6)$$

از آن جایی که بخشی از سیگمای خطا را حذف کرده ایم، در این روش کران پایینی برای احتمال خطا به دست می آید؛ بدین معنی که خطای واقعی از مقدار محاسبه شده همیشه بیش تر است. با این حال زمانی که N به سمت بی نهایت میل می کند، نتیجه نیز به سمت خطای واقعی میل خواهد کرد.

بردار پیام را به صورت $\underline{a} = (a_{p-N} \ a_{p-(N-1)} \ \dots \ a_0 \ \dots \ a_{p+(N-1)} \ a_{p+N})$ تعریف می کنیم که در آن a_0 سمبل اصلی بوده و سایر اعضای بردار سمبل های کناری هستند. با این تعریف و با فرض $a_0=1$ ، 2^{2N}

بردار پیام داریم که اعضای این بردارها مقادیر ± 1 دارند. به ازای رخ دادن هر کدام از این بردارها، یک مقدار ISI به دست می آید که آن را با z_p^i نشان می دهیم، لذا احتمال خطا در فرمول ۵ به فرم زیر در می آید:

$$P_e = \frac{1}{2} \Pr(|n_p + z_p| \geq |x(\tau)|) \quad (7)$$

$$= 2^{-(2N+1)} \sum_{i=1}^{2^N} \Pr(|n_p + z_p^i| \geq |x(\tau)|) \quad (8)$$

از مزایای این روش آن است که به راحتی می توان آن را به بردارهای پیام وابسته تعمیم داد. در نقطه ی مقابل، در این روش هیچ درکی از میزان درست بودن تقریب نداریم. نقطه ی ضعف دیگر آن، سخت شدن محاسبات فوق در صورت بزرگ شدن N می باشد.

روش بدترین حالت ممکن

یک روش دیگر برای محاسبه ی خطا آن است که مقدار $Z_p(\tau)$ را با بیشینه اش جایگزین نماییم. بیش ترین مقدار ISI زمانی رخ می دهد که تاثیر پالس های کناری افزاینده باشد. در نتیجه فرض می کنیم همه ی پالس های کناری علامت یکسانی داشته باشند. $B(\tau)$ را معرف مقدار بیشینه ی ISI در نظر می گیریم:

$$B(\tau) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} |x(\tau - nT)| \quad (9)$$

برای مفید بودن روش فوق لازم است که فرض نماییم مقدار $B(\tau)$ در فرمول ۹ هیچ گاه بیش تر از مقدار پالس اصلی نخواهد شد، یعنی: $B(\tau) < |x(\tau)|$. از آن جایی که بیش ترین مقدار ISI را نشان می دهد، خطای واقعی همیشه کم تر از مقدار محاسبه شده در این روش است:

$$P_e \leq \frac{1}{2} \Pr(|n_p| \geq |x(\tau)| - B(\tau)) \quad (10)$$

عیب آشکار این روش آن است که مقدار محاسبه شده ممکن است از خطای واقعی بسیار بیش تر باشد. برای مثال اگر $x(t) = \frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T}$ به ازای همه ی مقادیر τ به جز صفر، خطا برابر بی نهایت می گردد.

روش کران چرنف

در ابتدا فرمول خطا را به گونه ای بازنویسی می کنیم که استفاده از مزایای کران چرنف امکان پذیر باشد. لازم به ذکر است که تابع زوج $f(\cdot)$ برای نشان دادن توزیع نویز به کار رفته است.

$$P = 2P_e = \Pr(|n_p + z_p| \geq |x|) \quad (11)$$

$$= \Pr(n_p + z_p \geq |x|) + \Pr(n_p + z_p \leq -|x|) \\ = \int_{-\infty}^{\infty} f(m) \Pr(n_p + z_p \geq m) dm + \int_{-\infty}^{\infty} f(m) \Pr(n_p + z_p \leq -m) dm \quad (12)$$

در محاسبه ی انتگرال های فوق از بسط $P(X) = \sum_i P(Y_i) P(X|Y_i)$ استفاده گردیده است. حال با تغییر متغیر $s = |x| - m$ انتگرال های زیر را به دست می آوریم:

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} f(|x| - s) \Pr(z_p \geq s) ds + \int_{-\infty}^{\infty} f(s - |x|) \Pr(z_p \leq -s) ds \quad (13)$$

$$= \int_0^{\infty} f(|x| - s) \Pr(z_p \geq s) ds + \int_0^{\infty} f(|x| + s) \Pr(z_p \geq -s) ds \\ + \int_0^{\infty} f(|x| - s) \Pr(z_p \leq -s) ds + \int_0^{\infty} f(|x| + s) \Pr(z_p \leq s) ds \quad (14)$$

از آن جایی که احتمال $\Pr(z_p \geq -s)$ برابر یک بوده (s نامنفی است.) و احتمال $\Pr(z_p \leq -s)$ نیز صفر است، چهار انتگرال فوق را می توان به فرم زیر خلاصه کرد:

$$P_e = \frac{1}{2} P = \frac{1}{2} \Pr(|n| \geq |x|) + \frac{1}{2} \int_0^\infty [f(|x| - s) - f(|x| + s)] \Pr(z_p \geq s) ds \quad (15)$$

جمله ی اول در معادله ی ۱۵ مربوط به تاثیر نویز، در غیاب ISI ، می باشد. جمله ی دوم نیز افزایش خطا را به ازای ISI نشان می دهد.

در ادامه توجه خود را به پیدا نمودن کران بالایی برای احتمال $\Pr(z_p \geq s)$ معطوف می نماییم. در ضمیمه ی یک نشان داده شده که نامساوی زیر همواره برقرار است:

$$\Pr(z_p \geq s) \leq \min\left(2 e^{-\frac{s^2}{2\sigma_z^2}}, X(s)\right) \quad (16)$$

در نامساوی بالا، $X(s)$ تابعی ست که به فرم زیر تعریف می شود:

$$X(s) = \begin{cases} 1 & 0 \leq s \leq B(\tau) \\ 0 & B(\tau) < s \end{cases}$$

یادآور می شود که $B(\tau)$ بیشینه ی خطای ناشی از ISI می باشد، که در روش بدترین حالت ممکن توضیح داده شده است.

$$\sigma_z^2 \text{ نیز واریانس } Z_p \text{ می باشد، که برابر ست با: } \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} |x(\tau - nT)|^2$$

حال باید از نامساوی چرنف در فرمول خطای شماره ۱۷ استفاده نماییم. قبل از آن تعریف چند متغیر ضروری می باشد:

$$\eta = \frac{|x|}{\sigma_n}$$

$$\beta^2 = \frac{\sigma_z^2}{\sigma_z^2 + \sigma_n^2} = \frac{\sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} |x(\tau - nT)|^2}{\sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} |x(\tau - nT)|^2 + \sigma_n^2}$$

$$\rho = \frac{B(\tau)}{\sigma_z} = \frac{\sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} |x(\tau - nT)|}{\sqrt{\sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} |x(\tau - nT)|^2}}$$

η برابر نسبت سیگنال به نویز (SNR) در غیاب ISI است؛ β^2 نسبت توان ISI به کل توان اعوجاج می باشد. ρ نیز نسبت بیشینه ی ISI به مقدار rms آن است. دقت شود که $\beta^2 \leq 1$ و $\rho > 1$. سه پارامتر فوق برای محاسبه کران های انتگرال خطا استفاده می شوند.

تابع $2 e^{-\frac{s^2}{2\sigma_z^2}}$ یک تابع اکیداً نزولی (در بخش مثبت محور افقی) بوده که از ۲ شروع می شود و در $s = \infty$ به صفر میل می کند. اولین نقطه ی تلاقی این تابع با تابع $X(s)$ (در صورت وجود) در $s = \sigma_z \sqrt{\ln 4}$ می باشد. ($2 e^{-\frac{s^2}{2\sigma_z^2}} = 1$) با توجه به مقدار بیشینه ی ISI دو حالت رخ می دهد: نقطه ی تلاقی وجود داشته باشد یعنی $B(\tau) < \sqrt{\ln 4}$. یا این که نقطه ی تلاقی وجود نداشته باشد و در این صورت تعیین کننده ی حدود انتگرال، تابع $X(s)$ است. با توجه به توضیحات فوق می توان بسط خطا به فرم زیر نوشت:

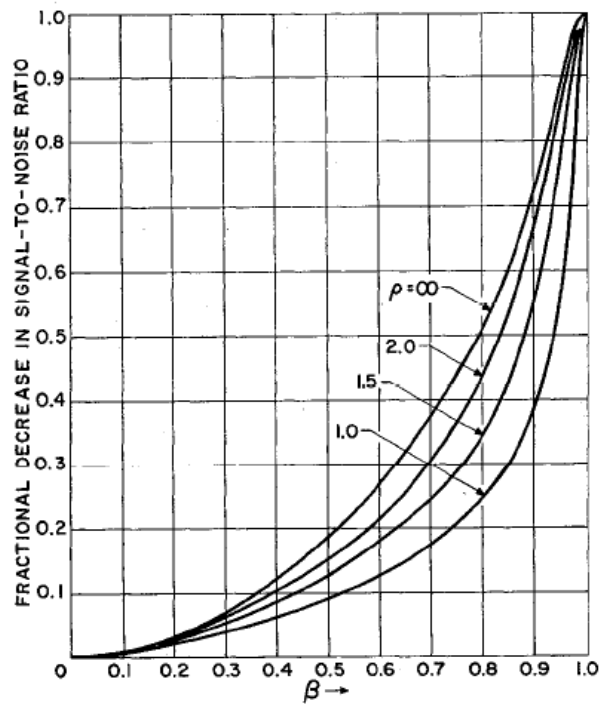
$$\begin{aligned}
 P_e &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [f(|x| - s) - f(|x| + s)] Pr(z_p \geq s) ds \\
 &\leq \frac{1}{2} \int_0^{m\sigma_z} [f(|x| - s) - f(|x| + s)] \cdot 1 ds \\
 &+ \int_{\sqrt{\ln 4}\sigma_z}^{M\sigma_z} [f(|x| - s) - f(|x| + s)] \cdot e^{-\frac{s^2}{2\sigma_z^2}} ds \quad (17)
 \end{aligned}$$

که در آن m و M برابرند با:

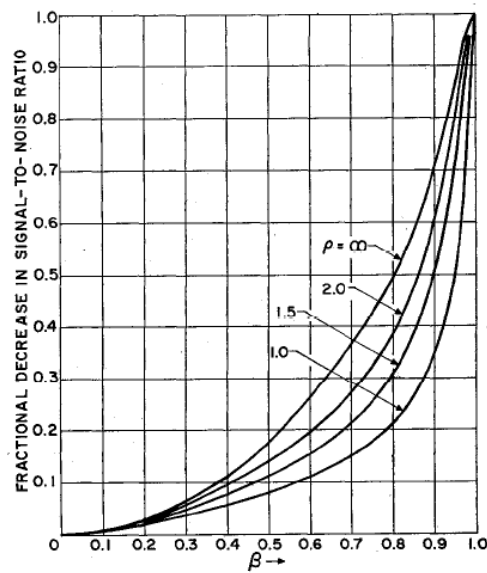
$$m = \min(\rho, \sqrt{\ln 4}) \quad M = \max(\rho, \sqrt{\ln 4})$$

در ادامه به بررسی تاثیر پارامترهای η ، β و ρ بر میزان خطا با استفاده از شبیه سازی های انجام شده در منبع (۲) پرداخته خواهد شد. مشاهده می گردد که در هر دو نمودار ۱ و ۲، کاهش سیگنال به نویز با افزایش β ، که نسبت اعوجاج ناشی از ISI به کل اعوجاج است، بیش تر می شود. همچنین در نقاط میانی هر دو نمودار با افزایش ρ سیگنال به نویز وضعیت بدتری پیدا می کند. این بدان معنی است که در β ی صفر و بی نهایت، یعنی زمانی که ISI صفر یا حداکثر میزان ممکن است، ρ تاثیری در مقدار سیگنال به نویز ندارد.

مسئله ی مورد توجه دیگر آن است که در هر دو نقطه با β و ρ یکسان از دو نمودار سیگنال به نویز دومی بیش تر است، چرا که η در آن بیش تر است.



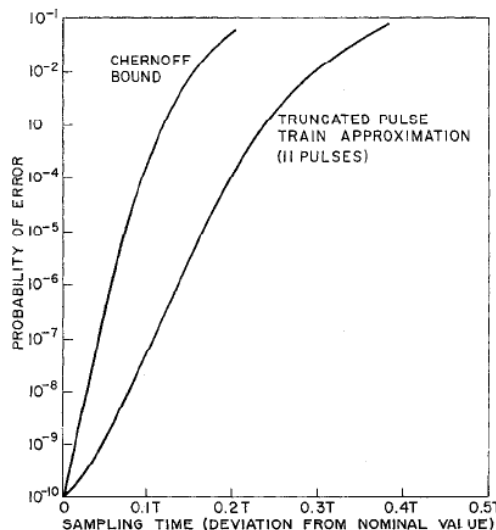
شکل ۱: کاهش سیگنال به نویز نسبت به β (به ازای $\eta = 4.753$)
(نمودار برداشته شده از منبع ۲)



شکل ۲: کاهش سیگنال به نویز نسبت به β (به ازای $\eta = 5.612$)
(نمودار برداشته شده از منبع ۲)

در پایان این بخش بنا داریم کارکرد روش های مختلف ذکر شده را برای چند پالس متداول بررسی می نماییم.

اولین مثال پالس ایده آل باند پایه است که با رابطه ی $x(t) = \frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T}$ نشان داده می شود.



شکل ۳: احتمال خطا نسبت به زمان نمونه برداری برای پالس ایده آل باند پایه (نمودار برداشته شده از منبع ۲)

چنان چه قبلاً گفته شد، روش بدترین حالت ممکن در این مثال جواب نمی دهد. هر دو روش تقریب قطار پالس بریده شده و کران چرنف از مبدا عبور می نمایند؛ چرا که در صورت نمونه برداری در زمان ایده آل، پالس در زمان های مضرب دوره تناوب صفر است. مشخص است که در این روش مقدار روش کران چرنف خیلی بیش تر از مقدار واقعی خطا است.

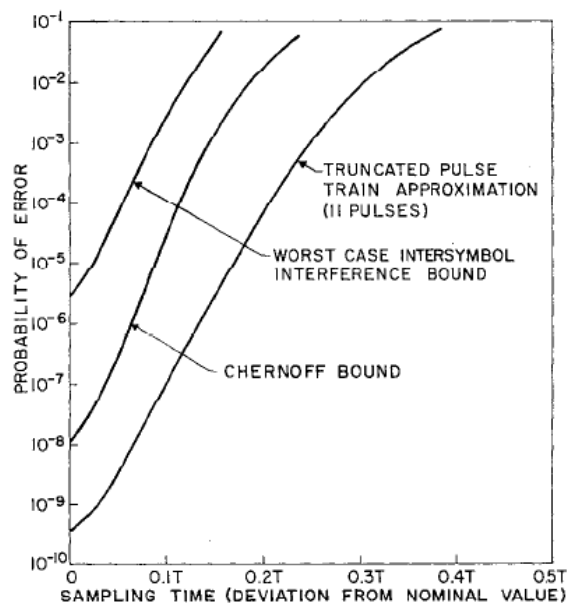
مثال دیگر پالس چپی چف مرتبه ی چهارم است. این پالس تقریبی از پالس ایده آل باند پایه است. این پالس در شرایطی که پالس ایده آل باند پایه از یک فیلتر با تعداد محدودی اجزا عبور می نماید، مناسب است. پالس فوق را با رابطه ی زیر نشان می دهند:

$$x(t) = A_1 \cos(\omega_1 |t|/T - \phi_1) \exp(-\alpha_1 |t|/T) + A_2 \cos(\omega_2 |t|/T - \phi_2) \exp(-\alpha_2 |t|/T)$$

مقادیر مورد استفاده در شبیه سازی در جدول زیر آمده است.

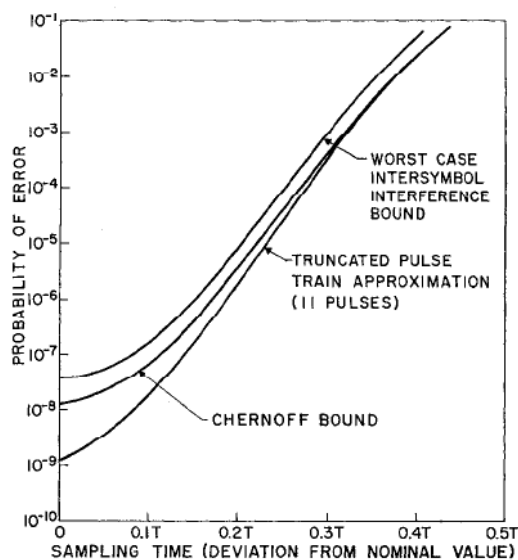
$$\begin{aligned} A_1 &= 0.4023 \\ \omega_1 &= 2.839 \\ \phi_1 &= 0.7553 \\ \alpha_1 &= 0.4587 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_2 &= 0.7163 \\ \omega_2 &= 1.176 \\ \phi_2 &= 0.1602 \\ \alpha_2 &= 1.107 \end{aligned}$$



شکل ۴: احتمال خطا نسبت به نمونه برداری برای پالس چپی چف مرتبه چهار (نمودار برداشته شده از منبع ۲)

مشخص است که کران چرنف دقت قابل ملاحظه ای نسبت به روش بدترین حالت دارد. مثال آخر پالس گوسی می باشد که در حوزه ی زمان فشرده تر است. این پالس با معادله ی $x(t) = \exp\left(-\left(\frac{8T}{5T}\right)^2\right)$ بیان می شود. ρ در این مثال از ۱,۴۱۵ در مبدا به ۱,۰۱۵ در $0.5T$ کاهش می یابد. مشاهده می شود که کران چرنف بهبود چندانی نسبت به روش بدترین حالت ندارد.



شکل ۵: احتمال خطا نسبت به زمان نمونه برداری برای پالس گوسی (نمودار برداشته شده از منبع ۲)

نتیجه ای که در حالت کلی می توان گرفت، در پالس هایی که در حوزه ی زمان پخش هستند، یا به طور معادل p در آن ها بزرگ تر است، تقریب کران چرنف به خطای واقعی نزدیک تر است.

محاسبه ی احتمال خطا به فرم ماتریسی و طراحی فیلتر ورودی بهینه

در تمامی بخش های بالا به بررسی احتمال خطا به صورت جبری پرداخته شد. حال در این بخش بنا داریم احتمال خطا را به صورت ماتریسی و بر اساس روش تقریب قطار پالس بریده شده انجام دهیم. علاوه بر آن فیلتری بهینه را معرفی خواهیم نمود که با تنظیم پارامتر های آن می توان نمودار چشمی (*eye pattern*) را کاملاً باز نمود، و در نتیجه خطا را به کم ترین میزان کاهش داد.

بردار پیام را به فرم $\underline{a} = (a_{p-N} \ a_{p-(N-1)} \ \dots \ a_0 \ \dots \ a_{p+(N-1)} \ a_{p+N})$ در نظر می گیریم. برای سادگی کار می توان p را برابر صفر در نظر گرفت. در نتیجه بردار پیام به فرم زیر ساده می شود:

$$\underline{a} = (a_{-N} \ a_{-(N-1)} \ \dots \ a_0 \ \dots \ a_{(N-1)} \ a_{+N})$$

حال اگر $I(t)$ را پالس ورودی به فیلتر و $w(t)$ را پاسخ ضربه ی فیلتر گیرنده در نظر بگیریم، داریم:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} r(h) w(t-h) dh = F^{-1} [R(f)W(f)] \quad (18)$$

مقدار نمونه برداری شده (در غیاب نویز) در لحظه ی τ برابر ست با:

$$m(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n x(\tau - nT) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \cdot F^{-1} [R(f)W(f)]|_{t=\tau-nT} \quad (19)$$

اگر مقادیر پالس $x(t)$ را در نقاط $\pm kT$ (عدد صحیح) به صورت یک بردار نمایش دهیم، یعنی بردار $\underline{x} = (X_N \ X_{x(N-1)} \ \dots \ X_0 \ \dots \ X_{-(N-1)} \ X_{-N})$ مقدار نمونه برداری شده را به فرم ساده تری نیز می توان نمایش داد:

$$m(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n x_n \quad (20)$$

یا به فرم ساده تر:

$$m = \underline{a} \underline{x}T \quad (21)$$

نویز نیز یک سیگنال نمونه برداری شده از یک فرآیند گاوسی با میانگین صفر و واریانس σ_n^2 است. اگر نویز را ایستاد فرض کنیم، مقدار واریانس آن از رابطه ی زیر به دست می آید:

$$\sigma_n^2 = \int_{-\infty}^{\infty} N(f) |W(f)|^2 df \quad (22)$$

احتمال خطا نیز از فرمول زیر به دست می آید:

$$P_e = \sum_{i=1}^{2^{2N+1}} P(i)P(E|i) \quad (23)$$

در فرمول بالا $P(E|i)$ احتمال خطا به شرط ارسال دنباله ی i ام از $2N+1$ دنباله ی ممکن است. برای سادگی کار می توان فرض کرد که نیمه ی اول بردارها (بردار ۱ تا 2^{2N}) دارای a_0 ای برابر یک باشند و نیمه ی دوم (بردار $2^{2N} + 1$ تا 2^{2N+1}) a_0 برابر -1 داشته باشند. همچنین می توان فرض کرد که اعضای بردارهای نیمه ی اول با اعضای بردارهای نیمه ی دوم قرینه باشند. برای مثال در یک حالت ساده اگر $N=1$ باشد، یعنی تنها یک پالس از هر طرف را در مقدار ISI تاثیر گذار بدانیم، ماتریس \underline{a} به فرم زیر در می آید. در این ماتریس هر سطر یکی از حالت های ممکن از ۸ حالت کل است.

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} +1 & +1 & +1 \\ +1 & +1 & -1 \\ -1 & +1 & +1 \\ -1 & +1 & -1 \\ +1 & -1 & +1 \\ +1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & +1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

حال فرض می کنیم به ازای یکی از حالت های ممکن مقدار نمونه برداری شده از سطح آستانه (در این جا صفر) کم تر باشد. در این حالت نمودار چشمی به صورت بسته در می آید و احتمال خطای شرطی آن حداقل ۰,۵ خواهد بود. لذا داریم:

$$P_{e_{min}} = P(i)P(E|i)_{min} = \frac{1}{2}P(i) \quad (24)$$

از آن جایی که برداری با اعضای قرینه ی بردار i ام در نیمه ی دوم بردارها فرض کرده ایم، احتمال خطای کمینه به صورت زیر افزایش می یابد:

$$P_{e_{min}} = \frac{1}{2} [P(i) + P(2^{2N+1} - i + 1)] \quad (25)$$

حال فرض می کنیم که $N=5$ در نتیجه کم ترین میزان خطا برابر می شود با 2^{-11} ، که عدد بزرگی ست و در برخی کاربردها ممکن است مطلوب نباشد.

در ادامه ما تمرکز خود را بر روی حالت خاصی معطوف می سازیم که در آن هیچ کدام از حالت ممکن ISI ، نمودار چشمی را نمی بندند. بدین منظور یک بردار \underline{x} مطلوب (x -Good) تعریف می کنیم که در آن رابطه ی زیر برقرار است:

$$\sum_{n=-N, n \neq 0}^N |x_n| \leq |x_0| \quad (26)$$

رابطه ی ۲۶ تضمین می سازد که در بدترین حالت ممکن نیز ISI به تنهایی نمی تواند خطا به وجود آورد. همچنین مقدار x_0 را برابر یک در نظر می گیریم. مشخص است که چنین فرضی عمومیت مسئله را زیر سوال نمی برد.

به ازای هر بردار \underline{x} مطلوب، می توان با کاهش توان نویز، خطا را کمینه ساخت. ثابت می شود یک فیلتر تطبیق یافته ($mached\ filter$) که به دنبال آن یک خط تاخیر شیردار ($tapped\ delay\ line$) قرار گرفته، چنین هدفی را بر آورده می سازد. پاسخ فرکانسی این فیلتر را به صورت زیر نشان می دهیم:

$$W_{opt}(f) = \frac{R^*(f)e^{-j2\pi f\tau}}{N(f)} \sum_{k=-N}^N C_k e^{+j2\pi fT} \quad (27)$$

حال می توانیم بردار $\underline{c} = (C_N \ C_{(N-1)} \ \dots \ C_0 \ \dots \ C_{-(N-1)} \ C_{-N})$ را تشکیل دهیم که آرایه های آن ضرایب $tapped\ delay\ line$ هستند. لذا به فرم ماتریسی داریم:

$$\underline{C} L = \underline{x} \quad (28)$$

اعضای ماتریس مربعی L از جایگزینی مقدار عبارت ۲۷ در رابطه ی سیگنال ورودی حاصل می شود. در نتیجه داریم:

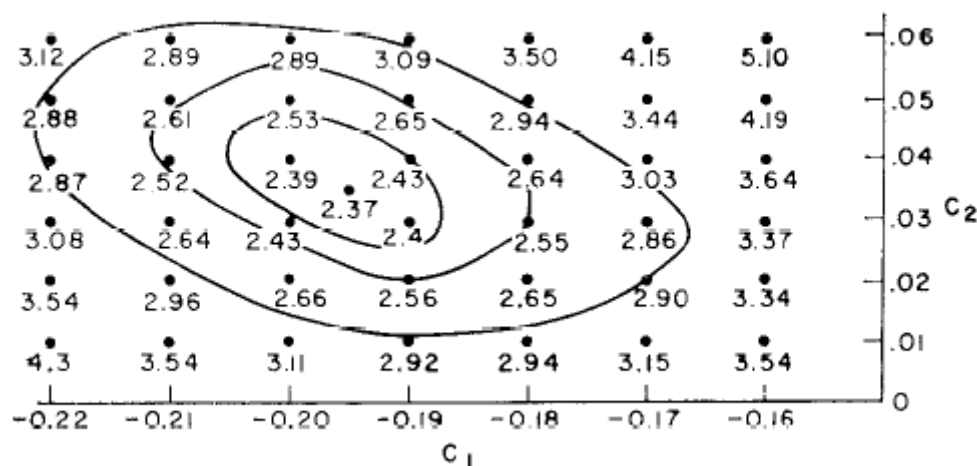
$$l(k-n) = l_{kn} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{R(f)R^*(f)}{N(f)} \right] e^{j2\pi(k-n)fT} df \quad (29)$$

ماتریس L را به صورت زیر می نویسیم:

$$L = \begin{bmatrix} l_{-N,-N} & \cdots & l_{-N,N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{N,-N} & \cdots & l_{N,N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_0 & \cdots & l_{-2N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{2N} & \cdots & l_0 \end{bmatrix} \quad (30)$$

مسئله ی یافتن بردار \underline{x} مطلوب را می توان با مسئله ی یافتن بردار \underline{c} مطلوب به ازای یک بردار \underline{x} مشخص جایگزین نمود. این مساله یک مساله ی غیر خطی پیچیده است که در این پروژه از شبیه سازی انجام شده در منبع ۱ برای حل آن استفاده شده است.

در نمودار زیر مقادیر خطا برای پالس ورودی گوسی با فرمول $r(t) = \exp\left(-\left(8T/5T\right)^2\right)$ که از tapped delay line عبور می نماید، مشخص شده است. خطوط رسم شده مقادیر خطای یکسان هستند.



شکل ۶: احتمال خطا (با مقیاس ۱/۱۰۰۰۰۰) نسبت به C_1 و C_2
(شکل برداشته شده از منبع ۱)

پیوست ۱

کران چرنف

کران چرنف کران بالایی برای احتمال $\Pr(X > m)$ است که تقریب دقیق تری نسبت به کران چبی چف است، و البته پیش فرض های بیش تری نیاز دارد.
برای شروع نامساوی مارکف (*Markov's inequality*) را در نظر می گیریم:

$$\Pr(X > m) < E(X)/m$$

در نامساوی بالا X باید حقیقی و نامنفی باشد. می توان هر تابع مثبتی از X را در نامساوی بالا جایگزین نمود.

$$\Pr(f(X) > m) < E(f(X))/m$$

اگر تابع f غیرنزولی باشد، سمت چپ نامساوی با سمت چپ نامساوی اولی برابر است. بدین صورت که:

$$\Pr(X > m) = \Pr(f(X) > m) < E(f(X))/m$$

در کران چرنف تابع مذکور را تابع نمایی در نظر می گیریم. نامساوی به فرم زیر در می آید:

$$\Pr(X > (1 + \delta)m) = \Pr(e^{tX} > e^{t(1+\delta)m}) < \frac{E(e^{tX})}{e^{t(1+\delta)m}}$$

حال فرض می کنیم که X مجموعه ای از رخدادهای مستقل از هم به نام X_i باشد. m را میانگین این متغیرها در نظر می گیریم. لذا داریم:

$$m = E(X) = E\left(\sum X_i\right) = \sum E(X_i)$$

با توجه به نتایج قبلی روابط زیر را می توان نوشت:

$$E(e^{tX}) = E(e^{t\sum X_i}) = E\left(\prod e^{tX_i}\right)$$

چون X_i ها را مستقل از هم فرض کرده ایم می توان نوشت:

$$E(e^{tX}) = \prod E(e^{tX_i}) = \prod p_i e^t + (1 - p_i) \cdot 1 = \prod 1 + p_i(e^t - 1)$$

دو جمله ی آخر تساوی بالا از آن جا ناشی می شود که X_i را دارای دو مقدار ۰ و ۱ و با میانگین آماری p_i فرض کرده ایم.

با استفاده از نامساوی $1 + x \leq e^x$ (برای هر x حقیقی) برای عبارت میانگین e^{tX} می یابیم:

$$E(e^{tX}) \leq \prod e^{p_i(e^t-1)} = e^{\sum p_i(e^t-1)} = e^{m(e^t-1)}$$

در ادامه کران چرنف به فرم زیر در می آید:

$$\Pr(X > (1 + \delta)m) \leq e^{(e^t - 1)m} / e^{t(1 + \delta)m}$$

در نهایت مقدار t را می یابیم، به طوری که سمت راست نامساوی فوق کمینه گردد. نامساوی چرنف به صورت زیر در می آید:

$$\Pr(X > (1 + \delta)m) \leq e^{-\delta^2 m / 3}$$

منابع:

- 1- M. R. AARON and D. W. TUFTS, *Intersymbol Interference and Error Probability*, IEEE Transaction on Information Theory Vol. 12 No. 1, 1966
- 2- ROBERT LUGANNANI, *Intersymbol Interference and Probability of Error in Digital Systems*, IEEE Transaction on Information Theory Vol. 15 No.6, 1969
- 3- A. BRUCE CARLSON, *Communication Systems*, McGraw-Hill, 2002