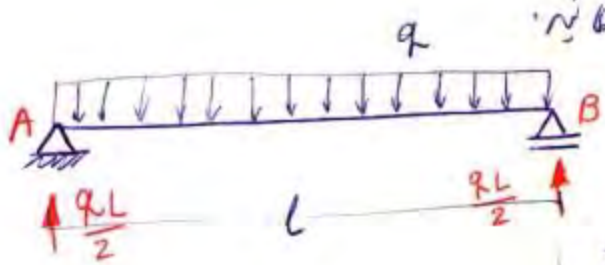
۱. در تیر مقابل دیاگرام خمش و برش را رسم نمائید.



حل:

الف) ابتدا دیاگرام آزاد عکس العمل تکیه گاه ها را بدست می آوریم

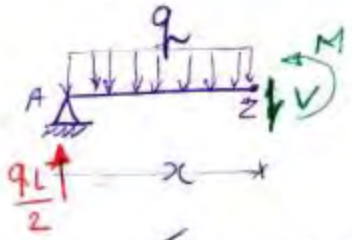
$$\pm\circlearrowleft \sum M_A = 0 \Rightarrow q \cdot L \times \frac{L}{2} - B_y \cdot L = 0$$

$$B_y = \frac{qL}{2}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -q \cdot L + \frac{qL}{2} + A_y = 0$$

$$A_y = \frac{qL}{2}$$

ب) برای رسم دیاگرام برش، محور x را در نقطه A انتخاب و جهت مثبت آن را به سمت B در نظر می گیریم و در فاصله x از مبدأ (نقطه A) برشی در تیر می زنیم و قسمتی را حذف و قسمتی را نگه می داریم.



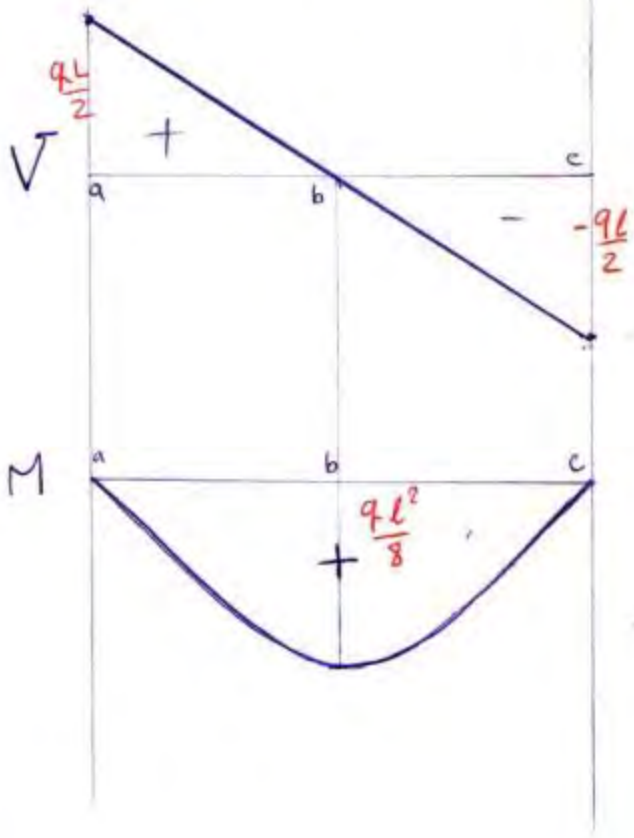
برای آنکه جسم باقی مانده در حال تعادل باشد باید اثر جسم حذف شده را بر آن اضافه کنیم (V, M)

حال با نوشتن معادلات تعادل V و M را بدست می آوریم

$$\pm\circlearrowleft \sum M_z = 0 \Rightarrow -q x \cdot \frac{x}{2} + \frac{qL}{2} x - M = 0 \Rightarrow \boxed{M = \frac{q}{2}(Lx - x^2)} \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -q \cdot x + \frac{qL}{2} - V = 0 \Rightarrow \boxed{V = q\left(\frac{L}{2} - x\right)} \quad (2)$$

همانطور که مشاهده می کنیم روابط (1) و (2) بصورت تابعی از x می باشند و با تغییر x مقدار آنها نیز تغییر می کند برای رسم دیاگرام گشتاور و برش تغییرات (1) و (2) را برحسب x رسم می کنیم شکل بالا.



برای آنکه ترسیم بهتر و دقیق‌تر باشد در نقاط مهم تیر برش و خمش را محاسبه می‌کنیم و سپس منحنی ترسیم می‌شود.

برای این منظور در نقاط a و b و c در شکل سمت چپ صفحه قبل مقدار V و M را محاسبه می‌کنیم

a) $x=0 \Rightarrow V = q(\frac{L}{2}-0) = \frac{qL}{2}$

$x=0 \Rightarrow M = \frac{q}{2}(Lx0 - 0^2) = 0$

b) $x=\frac{L}{2} \Rightarrow V = q(\frac{L}{2}-\frac{L}{2}) = qx0 = 0$

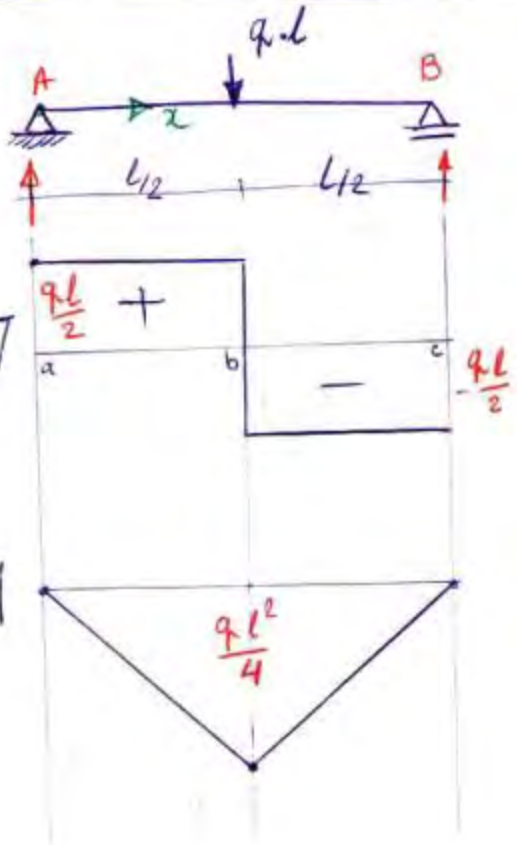
$M = \frac{q}{2}(Lx\frac{L}{2} - (\frac{L}{2})^2) = \frac{q}{2}(\frac{L^2}{2} - \frac{L^2}{4}) = \frac{q}{2}(\frac{2L^2-L^2}{4}) = \frac{q}{2}(\frac{L^2}{4}) = \frac{qL^2}{8}$

c) $x=L \Rightarrow V = q(\frac{L}{2}-L) = -\frac{qL}{2}$

$M = \frac{q}{2}(LxL - L^2) = \frac{q}{2}(L^2-L^2) = \frac{q}{2}(0) = 0$

---

۲. مطلوبست رسم شکل مماس ترسیم دیاگرام خمش و برش:



حل):

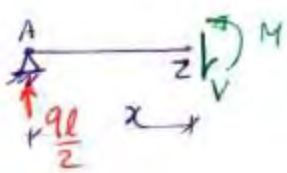
ابتدا عکس العمل تکیه گاه‌ها را بدست می‌آوریم.

$\sum M_A = 0 \Rightarrow q.l.\frac{L}{2} - B_y l = 0$

$B_y = \frac{ql}{2}$

$\sum F_y = 0 \Rightarrow -ql + ql/2 + A_y \Rightarrow A_y = \frac{ql}{2}$

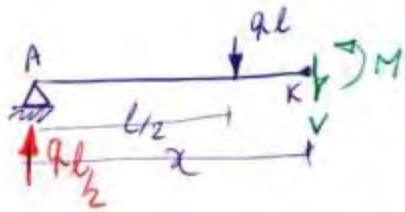
برای بدست آوردن معادلات برش یک برش در بین نیروی وسط و تکیه گاه A میزنیم.



حل مسائل مقاومت مصالح مدی (۱)

$\sum M_2 = 0 \Rightarrow \frac{ql}{2} \cdot x - M = 0 \Rightarrow \boxed{M = \frac{ql}{2} x}$ ① $\quad 0 \le x \le l/2$

$\sum F_y = 0 \Rightarrow -V + ql/2 = 0 \Rightarrow \boxed{V = \frac{ql}{2}}$ ② $\quad 0 \le x \le l/2$



$\sum M_k = 0 \Rightarrow \frac{ql}{2} \cdot x - ql\left(x - \frac{l}{2}\right) + M = 0 \Rightarrow M = ql\left(\frac{x}{2} - x + \frac{l}{2}\right)$

$M = ql\left(\frac{l}{2} - \frac{x}{2}\right)$

$\boxed{M = \frac{ql}{2}(l - x)}$ ③ $\quad l/2 \le x \le l$

$\sum F_y = 0 \Rightarrow \frac{ql}{2} - ql - V = 0 \Rightarrow \boxed{V = -\frac{ql}{2}}$ ④ $\quad l/2 \le x \le l$

برای ترسیم دقیق‌تر در نقاط a, b, c مقدار V و M را محاسبه می‌کنیم.

a) $x = 0$ $\quad$ ② $\rightarrow V = \frac{ql}{2}$

① $\rightarrow M = \frac{ql}{2}(0) = 0$

c) $x = l$ $\quad$ ④ $\rightarrow V = -\frac{ql}{2}$

③ $\rightarrow M = \frac{ql}{2}(l - l) = \frac{ql}{2}(0) = 0$

b) $x = \frac{l}{2}$ $\quad$ ① $\rightarrow M = \frac{ql}{2} \cdot \frac{l}{2} = \frac{ql^2}{4}$

③ $\rightarrow M = \frac{ql}{2}\left(l - \frac{l}{2}\right) = \frac{ql^2}{4}$

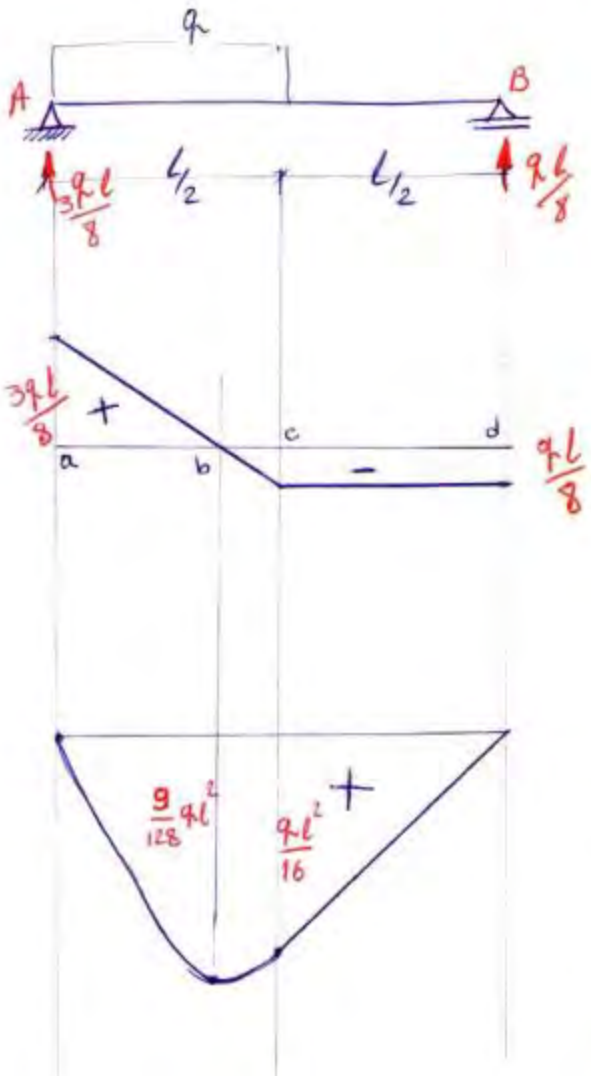
② $\rightarrow V = \frac{ql}{2}$

④ $\rightarrow V = -\frac{ql}{2}$

از نتایج برش متوجه می‌شویم در محل بار متمرکز برش دارای پرش است.

۰۳ مطلوبیت ترسیم دیاگرام نیروبرشی

تیر مقابل :



حل)

الف) ابتدا عکس العمل تکیه گاهها را بدست می آوریم.

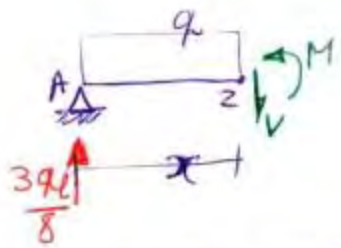
$$\sum M_A = 0 \Rightarrow q \times \frac{l}{2} \times \frac{l}{4} - B_y \cdot l = 0$$

$$B_y = \frac{ql}{8}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -\frac{ql}{2} + A_y + \frac{ql}{8} = 0$$

$$A_y = \frac{4ql - ql}{8} = \frac{ql}{8}$$

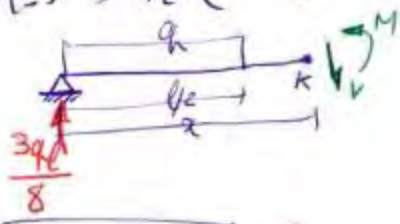
برای ترسیم دیاگرام برش حرکت را از نقطه A شروع و در طول تیر منطبق بر نیروی گسترده حفظ و سمت راست را حذف می کنیم.



$$+\circlearrowleft \sum M_z = 0 \Rightarrow \frac{3ql}{8} \times x - q x \cdot \frac{x}{2} - M = 0 \Rightarrow \boxed{M = q\left(\frac{3l}{8}x - \frac{x^2}{2}\right)} \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \frac{3ql}{8} - qx + V = 0 \Rightarrow \boxed{V = q\left(\frac{3l}{8} - x\right)} \quad (2)$$

با رد گیری تعادل ما بین $l/2$ و از سمت چپ حفظ و سمت راست حذف می شود داریم.



$$+\circlearrowleft \sum M_k = 0 \Rightarrow \frac{3ql}{8}x - q\frac{l}{2}\left(x - \frac{l}{2} + \frac{l}{4}\right) - M = 0$$

$$M = \frac{q}{2}\left(\frac{3l}{4}x - lx + \frac{l^2}{2} - \frac{l^2}{4}\right)$$

$$M = \frac{q}{2}\left(-\frac{l}{4}x + \frac{l^2}{4}\right) = \frac{ql}{2}\left(\frac{l}{4} - \frac{x}{4}\right) = \boxed{\frac{ql}{8}(l - x)} \quad (3)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \frac{3ql}{8} - \frac{ql}{2} - V = 0 \Rightarrow \boxed{V = -\frac{ql}{8}} \quad ④$$

a) $x = 0 \Rightarrow^{①} M = q\left(\frac{3l}{8} \times 0 - \frac{0^2}{2}\right) = 0$

$② \Rightarrow V = q\left(\frac{3l}{8} - 0\right) = \frac{3ql}{8}$

b) $② \Rightarrow V = q\left(\frac{3l}{8} - x\right) = 0 \Rightarrow x = \frac{3l}{8}$

$① \Rightarrow M = q\left[\frac{3l}{8} \times \frac{3l}{8} - \frac{1}{2}\left(\frac{3l}{8}\right)^2\right] = q\left(\frac{9l^2}{64} - \frac{9l^2}{2 \times 64}\right)$

$M = q\left(\frac{18l^2 - 9l^2}{128}\right) = \frac{9}{128} ql^2$

c) $x = l/2 \quad ② \Rightarrow V = q\left(\frac{3l}{8} - \frac{l}{2}\right) = q\frac{3l-4l}{8} = -\frac{ql}{8}$

$④ \Rightarrow V = -\frac{ql}{8}$

$① \Rightarrow M = q\left[\frac{3l}{8} \times \frac{l}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{l}{2}\right)^2\right] = q\left[\frac{3l^2}{16} - \frac{l^2}{8}\right] = q\left(\frac{3l^2 - 2l^2}{16}\right)$

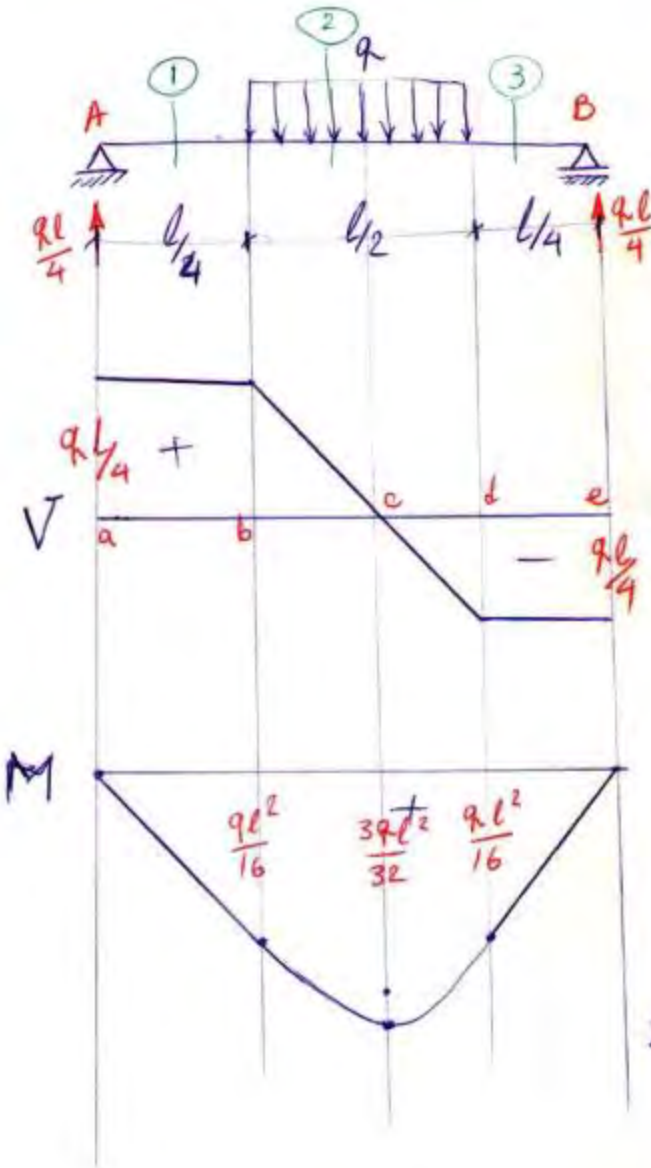
$M = q\frac{l^2}{16}$

$③ \Rightarrow M = \frac{ql}{8}\left(l - \frac{l}{2}\right) = \frac{ql}{8}\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{ql^2}{16}$

$x = l \quad ③ \Rightarrow M = ql/8\,(l - l) = 0$

$④ \Rightarrow V = -\frac{ql}{8}$

4. مطلوبست ترسیم دیاگرام خمش و برش تیر



حل) ابتدا، عکس العمل تکیه گاه ها را بدست می آوریم

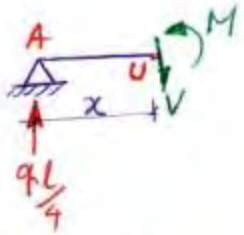
$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \Rightarrow q\,l/2 \times \frac{l}{2} - B_y \cdot l = 0$$

$$B_y = \frac{ql}{4}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y - \frac{ql}{2} + \frac{ql}{4} = 0$$

$$A_y = \frac{2ql - ql}{4} = \frac{ql}{4}$$

در محل ① مقطع می زنیم و سمت چپ را نگه می داریم



$0 \le x \le l/4$

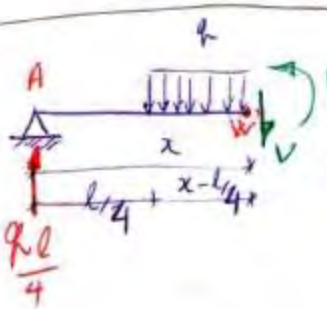
$$+\circlearrowleft \sum M_U = 0 \Rightarrow \frac{ql}{4} \cdot x - M = 0$$

$$\boxed{M = \frac{ql}{4} x} \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \frac{ql}{4} - V = 0 \Rightarrow \boxed{V = \frac{ql}{4}} \quad (2)$$

$l/4 \le x \le 3l/4$

در محل ② مقطع می زنیم و سمت چپ را حفظ می کنیم.



$$+\circlearrowleft \sum M_\omega = 0 \Rightarrow \frac{ql}{4} \cdot x - q(x - l/4)(x - l/4)/2 - M = 0$$

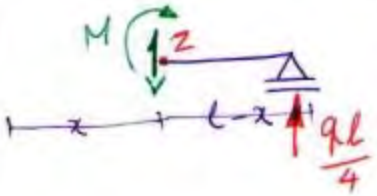
$$M = \frac{ql}{4} x - \frac{q}{2}(x - \frac{l}{4})^2 = \frac{q}{2}\left\{\frac{l}{2} \cdot x - x^2 + \frac{xl}{2} - \frac{l^2}{16}\right\}$$

$$\boxed{M = \frac{q}{2}\left\{ lx - x^2 - \frac{l^2}{16}\right\}} \quad (3)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \frac{ql}{4} - (x-\frac{l}{4})q - V = 0 \Rightarrow V = q(\frac{l}{4} - x + \frac{l}{4})$$

$$\boxed{V = q(\frac{1}{2}l - x)} \quad (4)$$

در محل ③ مقطع مزنیم و سمت راست را نگه می‌داریم. $\frac{3l}{4} \leq x \leq l$



$$+\circlearrowleft \sum M_z = 0 \Rightarrow M - \frac{ql}{4}(l-x) = 0$$

$$\boxed{M = \frac{ql}{4}(l-x)} \quad (5)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -V + ql/4 = 0 \Rightarrow \boxed{V = -\frac{ql}{4}} \quad (6)$$

---

a) $x = 0 \Rightarrow ① \rightarrow M = \frac{ql}{4} \times 0 = 0$

$② \rightarrow V = \frac{ql}{4}$

---

b) $x = l/4$ $\quad ① \Rightarrow M = \frac{ql}{4} \cdot \frac{l}{4} = \frac{ql}{16}$

$② \Rightarrow V = \frac{ql}{4}$

---

c) $V = 0$ $\quad ④ \Rightarrow V = 0 = q(\frac{1}{2} - x) \Rightarrow x = \frac{l}{2}$

$$③ \Rightarrow M = \frac{q}{2}\left\{ l(\frac{l}{2}) - (\frac{l}{2})^2 + \frac{l^2}{16} \right\} = \frac{q}{2}\left\{ \frac{1}{2}l^2 - \frac{l^2}{4} + \frac{l^2}{16} \right\}$$

$$M = \frac{ql^2}{2}\left\{ \frac{8-4+1}{16} \right\} = \frac{ql^2}{2}(\frac{5}{16}) = \frac{5}{32}ql^2$$

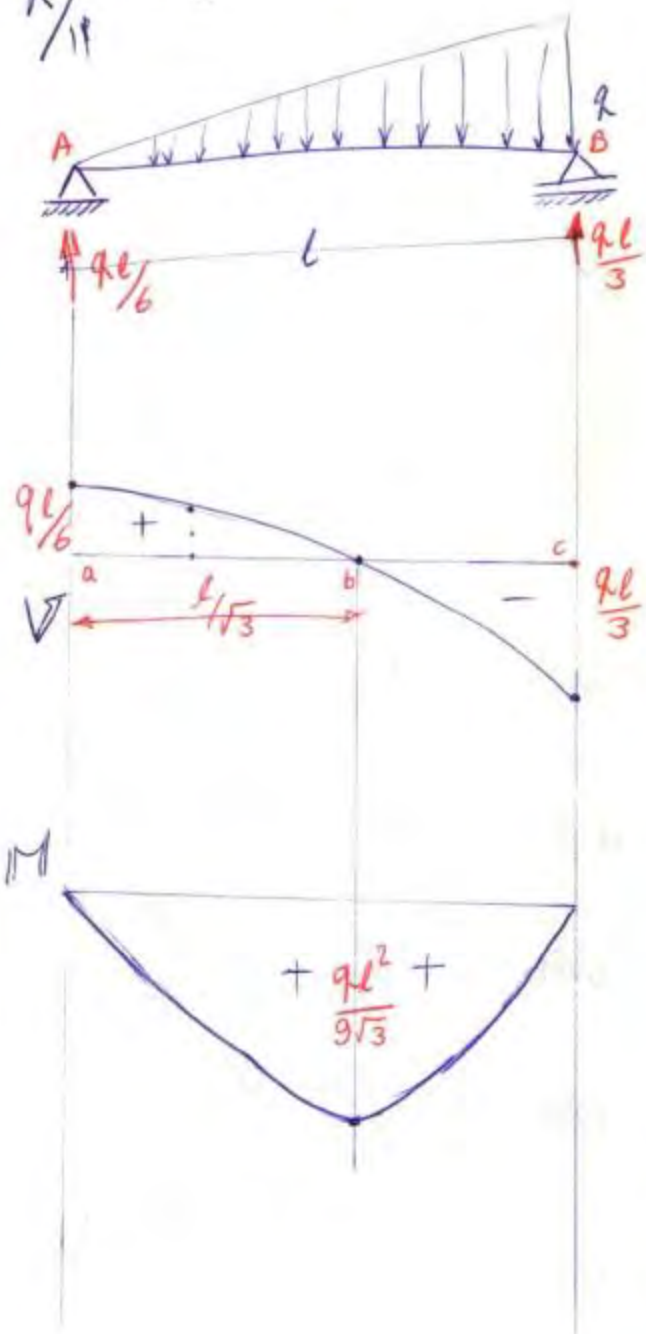
---

d) $V = -\frac{ql}{4}$, $M = \frac{ql}{16}$

انجام محاسبات این بخش مثل بخش‌های بالاتر است و به عنوان تمرین به عهده دانشجو گذاشته می‌شود.

e) $V = -\frac{ql}{4}$, $M = 0$

۸/۱۴



5. مطلوبست ترسیم نمودار برشی و خمشی تیر مقابل

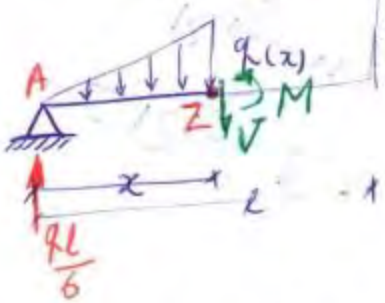
حل) ابتدا عکس العملها را محاسبه می کنیم.

$$\circlearrowleft \sum M_A = 0 \quad \frac{q \cdot l}{2} \times \frac{2}{3}l - B_y \cdot l = 0$$

$$B_y = \frac{ql}{3}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y - \frac{ql}{2} + \frac{ql}{3} = 0$$

$$A_y = \frac{3ql - 2ql}{6} = \frac{ql}{6}$$



$$\frac{q(x)}{q} = \frac{x}{l}$$

$$q(x) = q\frac{x}{l}$$

$$\circlearrowleft \sum M_z = 0 \Rightarrow \frac{ql}{6} \cdot x - \frac{q(x) \cdot x}{2} \times \frac{x}{3} - M = 0$$

$$M = \frac{ql}{6}x - q\frac{x}{l} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3} = qx\left(\frac{l}{6} - \frac{x^2}{6l}\right)$$

$$\boxed{M = \frac{qx}{6}\left(l - \frac{x^2}{l}\right)} \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \frac{ql}{6} - \frac{q(x) \cdot x}{2} - V = 0 \Rightarrow V = \frac{ql}{6} - q\frac{x}{l} \cdot \frac{x}{2}$$

$$\boxed{V = q\left(\frac{l}{6} - \frac{x^2}{2l}\right)} \quad (2)$$

a) $x = 0$ $\quad (1) \Rightarrow M = \frac{q}{6}(0)\left(l - \frac{0^2}{l}\right) = 0$

$$(2) \Rightarrow V = q\left(\frac{l}{6} - \frac{0}{2l}\right) = \frac{ql}{6}$$

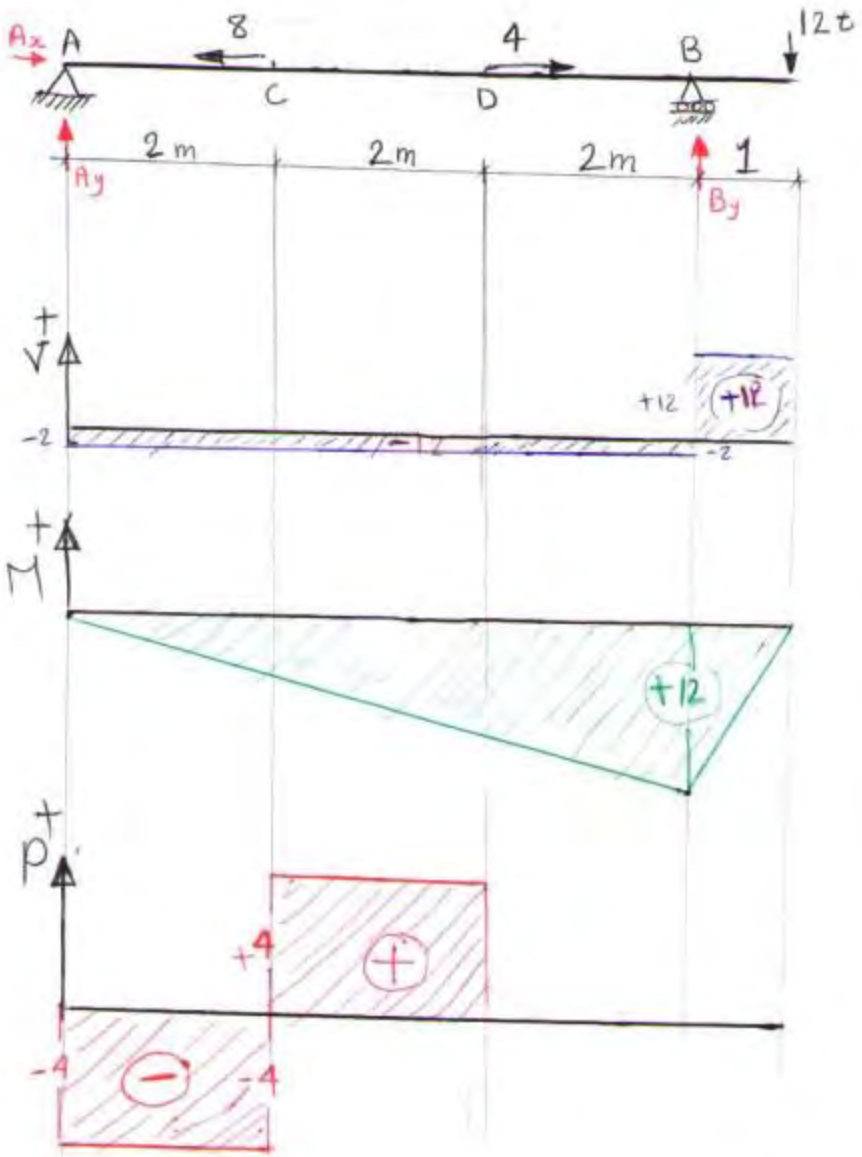
b) $V=0$ ② $\rightarrow V=0=q\left(\frac{l}{6}-\frac{x^2}{2l}\right)=0 \Rightarrow \frac{l}{6}-\frac{x^2}{2l}=0$

$$\frac{x^2}{2l}=\frac{l}{6} \Rightarrow x^2=\frac{l^2}{3} \Rightarrow x=\pm\frac{l}{\sqrt{3}}$$

$$x=\frac{l}{\sqrt{3}}$$

① $\xrightarrow{x=\frac{l}{\sqrt{3}}}$ $M=\frac{q\frac{l}{\sqrt{3}}}{6}\left(l-\frac{\frac{l^2}{3}}{l}\right)=\frac{ql}{6\sqrt{3}}\left(l-\frac{l^2}{3l}\right)=\frac{ql}{6\sqrt{3}}\left(\frac{3l^2-l^2}{3l}\right)$

$$M=\frac{ql}{6\sqrt{3}}\left(\frac{2}{3}l\right)=\frac{2ql^2}{18\sqrt{3}}=\frac{ql^2}{9\sqrt{3}}$$



$\overset{+}{\circlearrowleft}\sum M_A = 0$

$-6B_y + 12\times 7 = 0 \Rightarrow B_y = \frac{84}{6}$

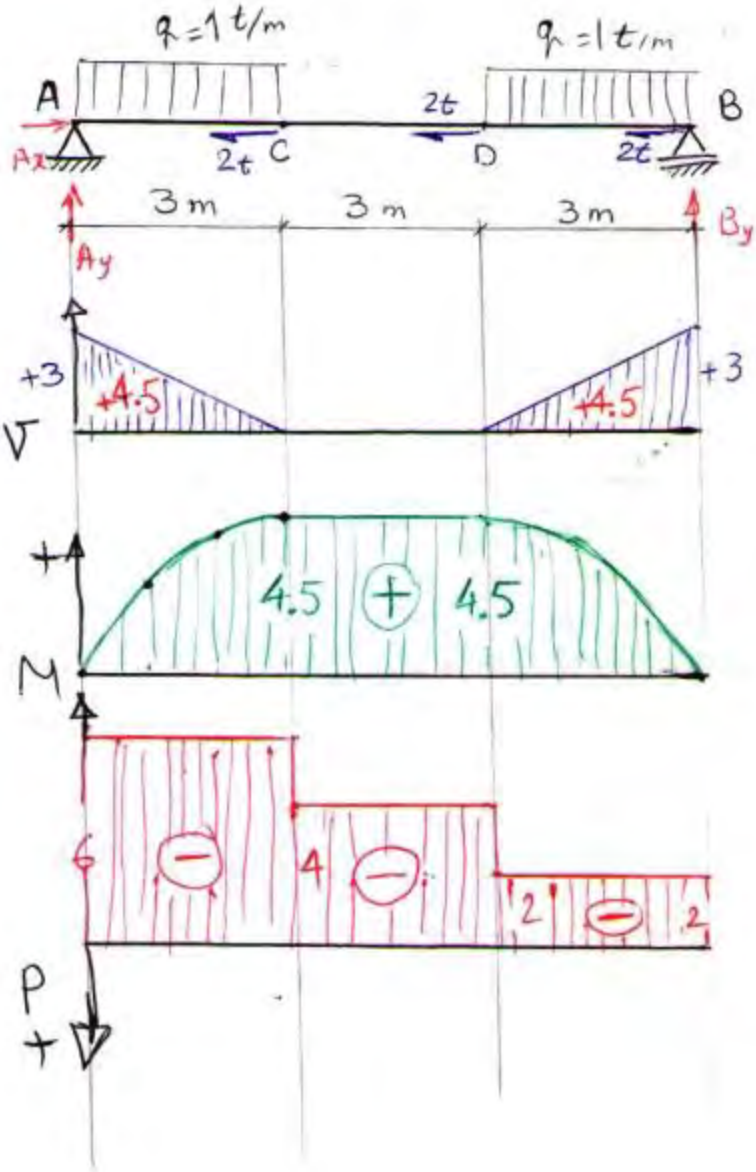
$\boxed{B_y = 14}$

$\overset{+}{\uparrow}\sum F_y = 0$

$A_y + 14 - 12 = 0$ $\boxed{A_y = -2}$

$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0$

$A_x - 8 + 4 = 0$ $\boxed{A_x = 4}$



$+\circlearrowleft \sum M_A = 0$

$1 \times 3 \times \frac{3}{2} + 1 \times 3 \times \left(6 + \frac{3}{2}\right) - 9B_y = 0$

$9B_y = \frac{9}{2} + 3\left(\frac{12+3}{2}\right) = 27$

$B_y = \frac{27}{9} = 3$ ↑

$+\uparrow \sum F_y = 0$

$A_y - 3\times1 - 3\times1 + B_y = 0$

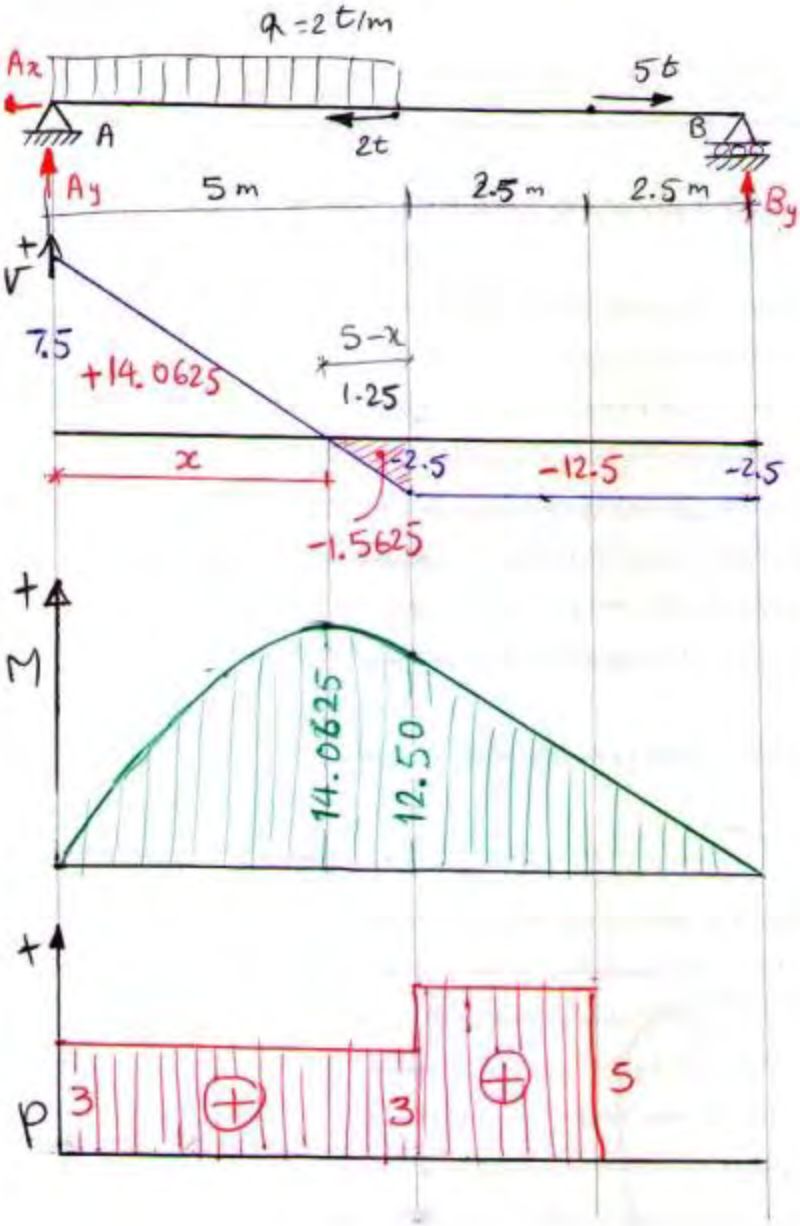
$A_y - 6 + 3 = 0$

$A_y = 6 - 3 = 3$ ↑

$\overrightarrow{\sum F_x} = 0$

$A_x - 2 - 2 - 2 = 0$

$A_x = 6$ ←



$+\circlearrowleft \sum M_A = 0$

$2 \times 5 \times \frac{5}{2} - 10\,B_y = 0$

$10 B_y = 25$

$B_y = \frac{25}{10} = 2.5$

$\xrightarrow{+} \sum F_x = 0$

$-A_x - 2 + 5 = 0$

$A_x = 3$

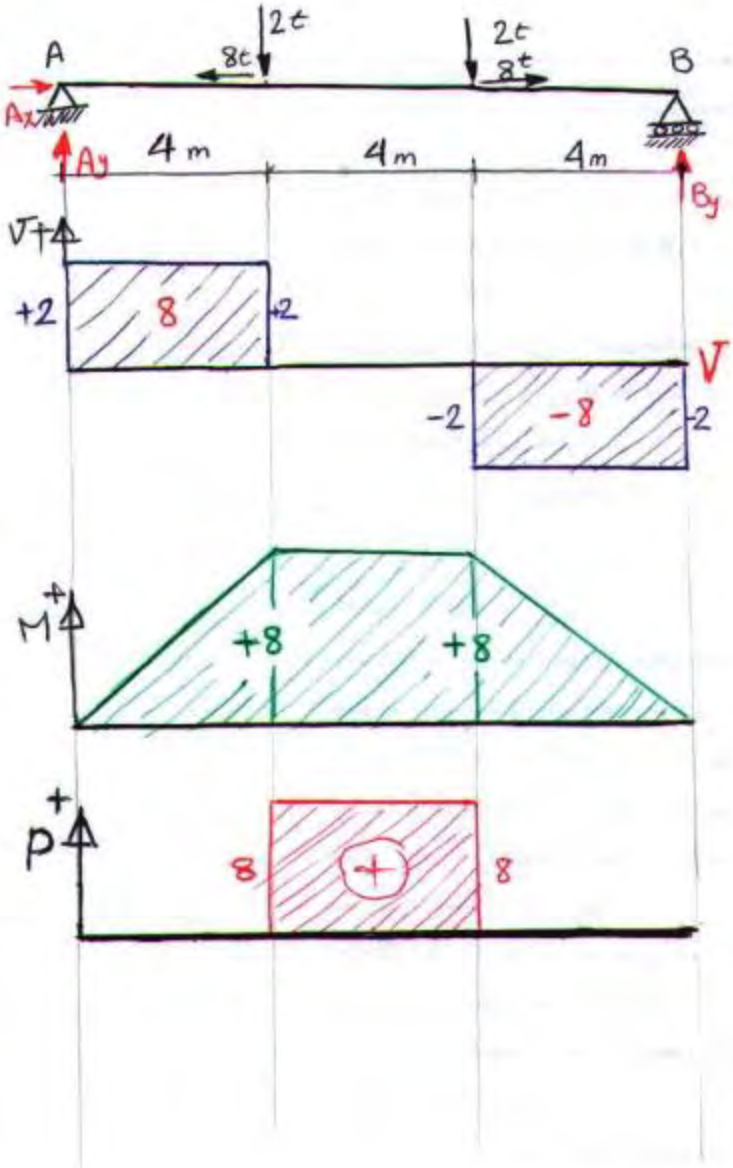
$+\uparrow \sum F_y = 0$

$A_y - 2 \times 5 + B_y = 0$

$A_y = 10 - B_y = 10 - 2.5 = 7.5$

$\frac{x}{7.5} = \frac{5}{10}$

$x = \frac{5 \times 7.5}{10} = 3.75$



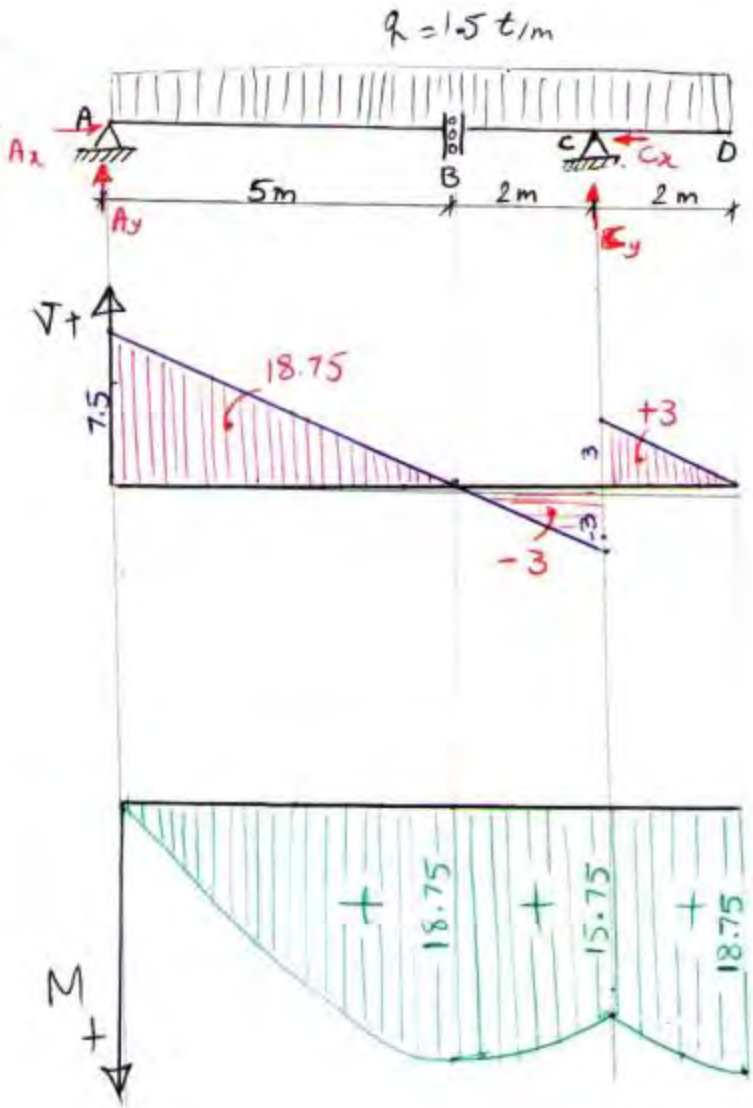
$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \Rightarrow +2\times4 + 2(4+4) - 12B_y = 0$

$$B_y = \frac{24}{12} = 2$$

$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow A_y - 2 - 2 + B_y = 0$

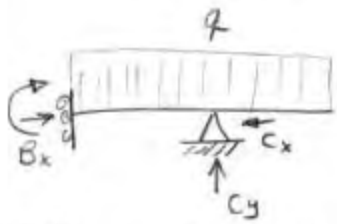
$$A_y = 4 - B_y = 4 - 2 = 2$$

$\overset{+}{\sum} F_x = 0 \Rightarrow A_x - 8 + 8 = 0 \quad A_x = 0$



دیاگرام نیروهای داخلی سازه مقابل را ترسیم کنید.

حل) در B مقطع زده و برای قسمت راست معادلات تعادل را می‌نویسیم



$\Sigma F_y = 0 \quad C_y - 1.5 \times 4 = 0$

$$\boxed{C_y = 6}$$

$\Sigma F_x = 0$

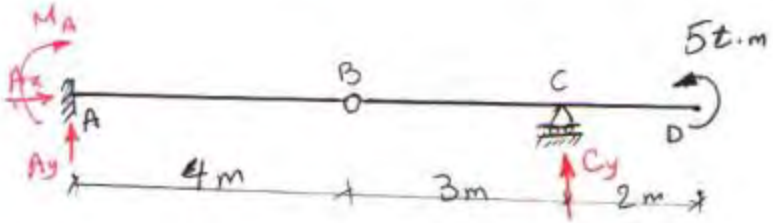
$B_x - C_x = 0 \quad \boxed{B_x = C_x}$

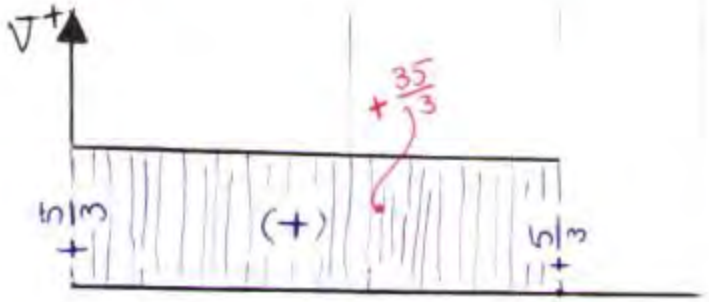
برای کل سازه $\uparrow \Sigma F_y = 0$

$A_y - 9 \times 1.5 + C_y = 0$

$A_y = 13.5 - 6 = 7.5$

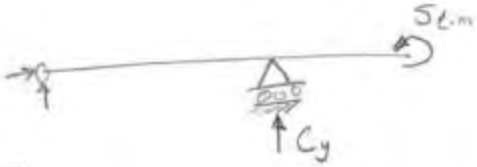
$A_x = C_x = 0$





مطلوبت ترسیم دیاگرام برش و خمش تیر مقابل

حل: از B مقطع زده و برای سمت راست در حول B معادله لنگر می‌نویسیم



$$\circlearrowleft \sum M_B = 0$$

$$-3C_y - 5 = 0 \Rightarrow \boxed{C_y = -\frac{5}{3}}$$

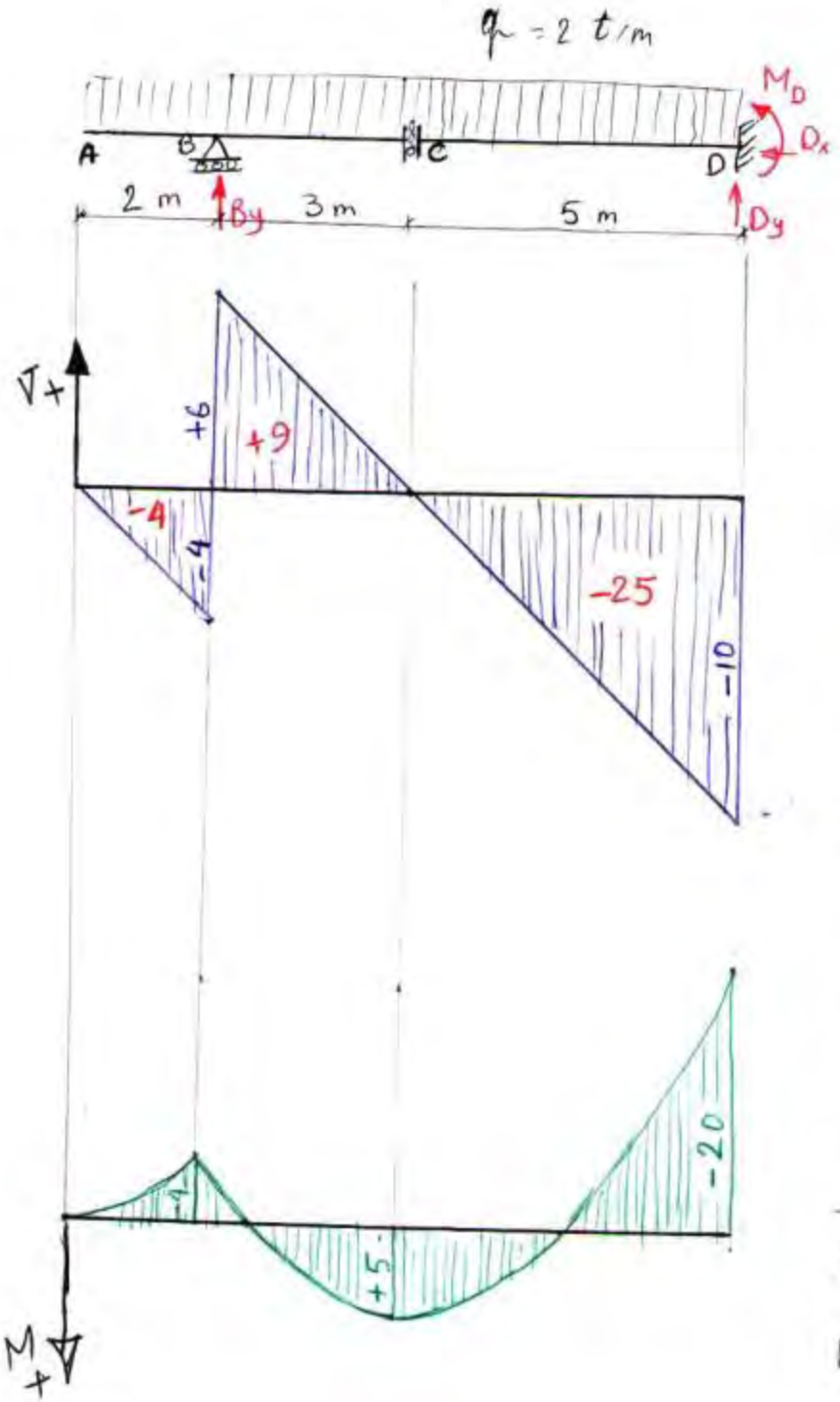
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \boxed{A_x = 0}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + C_y = 0$$

$$\boxed{A_y = +\frac{5}{3}}$$

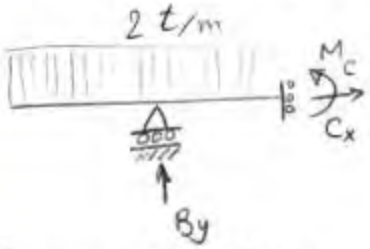
$$\circlearrowleft \sum M_A = 0 \Rightarrow M_A + 7\frac{5}{3} - 5 = 0$$

$$M_A = -7 \times \frac{5}{3} + 5 = \boxed{-\frac{20}{3}}$$



مطلوبست ترسیم دیاگرام برشی و خمشی در تیر مقابل

حل ابتدا مجهولات مسئله را مشخص می‌کنیم پس از C مقطع زده و برای سمت چپ تعادل قائم را می‌نویسیم



$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow -2(2+3) + B_y = 0$$

$$\boxed{B_y = 10}$$

حال معادلات تعادل را برای کل سره می‌نویسیم

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow \boxed{D_x = 0}$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow B_y + D_y - 2\times(2+3+5) = 0$$

$$D_y = 2\times 10 - B_y = 20 - 10$$

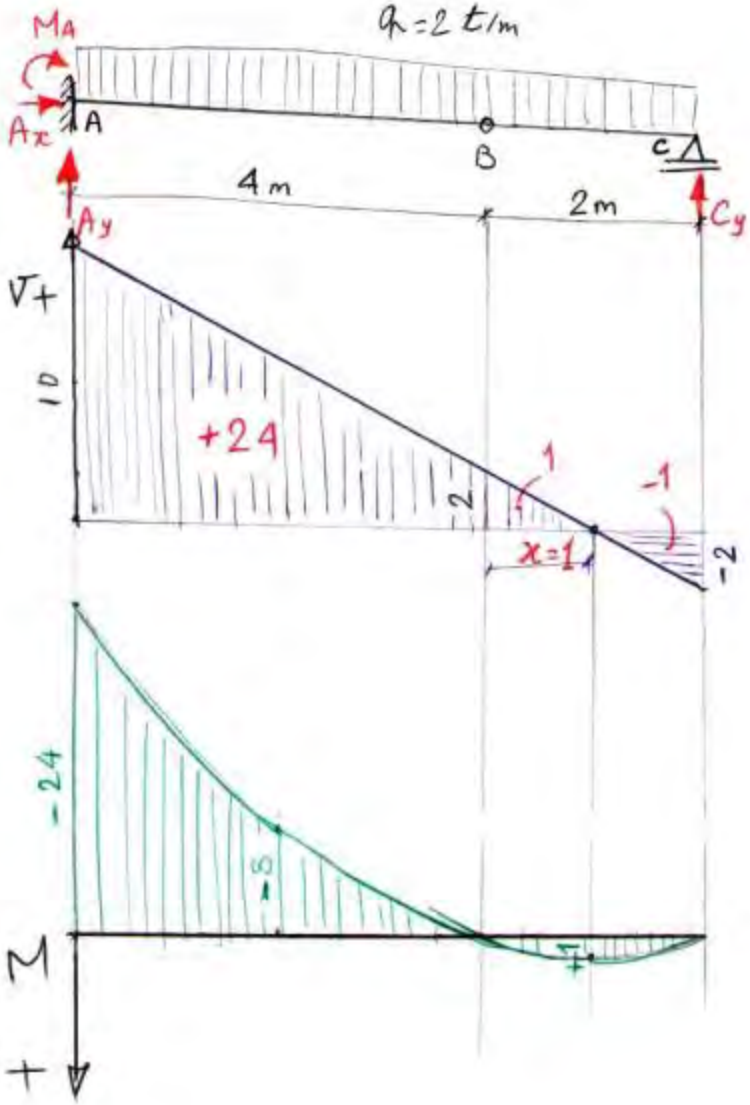
$$\boxed{D_y = 10}$$

$$+\circlearrowleft \Sigma M_D = 0$$

$$-2\times 10\times\frac{10}{2} + B_y(3+5) - M_D = 0$$

$$M_D = -100 + 10(8) = -100 + 80 = -20$$

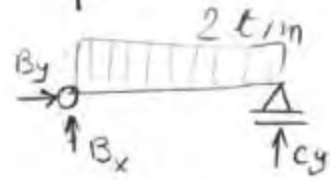
$$\boxed{M_D = -20}$$



مطلوبست ترسیم دیاگرام برش وخمش تیر مقابل:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \boxed{A_x = 0}$$

از B برش را مبدا گرفته و راست حرکت کنیم حل B می نویسیم



$$\sum M_B = 0 \quad 2 \times 2 \times \frac{2}{2} - 2C_y = 0$$

$$\boxed{C_y = 2}$$

برای کل سازه معادلات تعادل را می نویسیم

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + C_y - 2 \times 6 = 0$$

$$\boxed{A_y = 12 - 2 = 10}$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow M_A + 2 \times 6 \times \frac{6}{2} - 2 \times 6 = 0$$

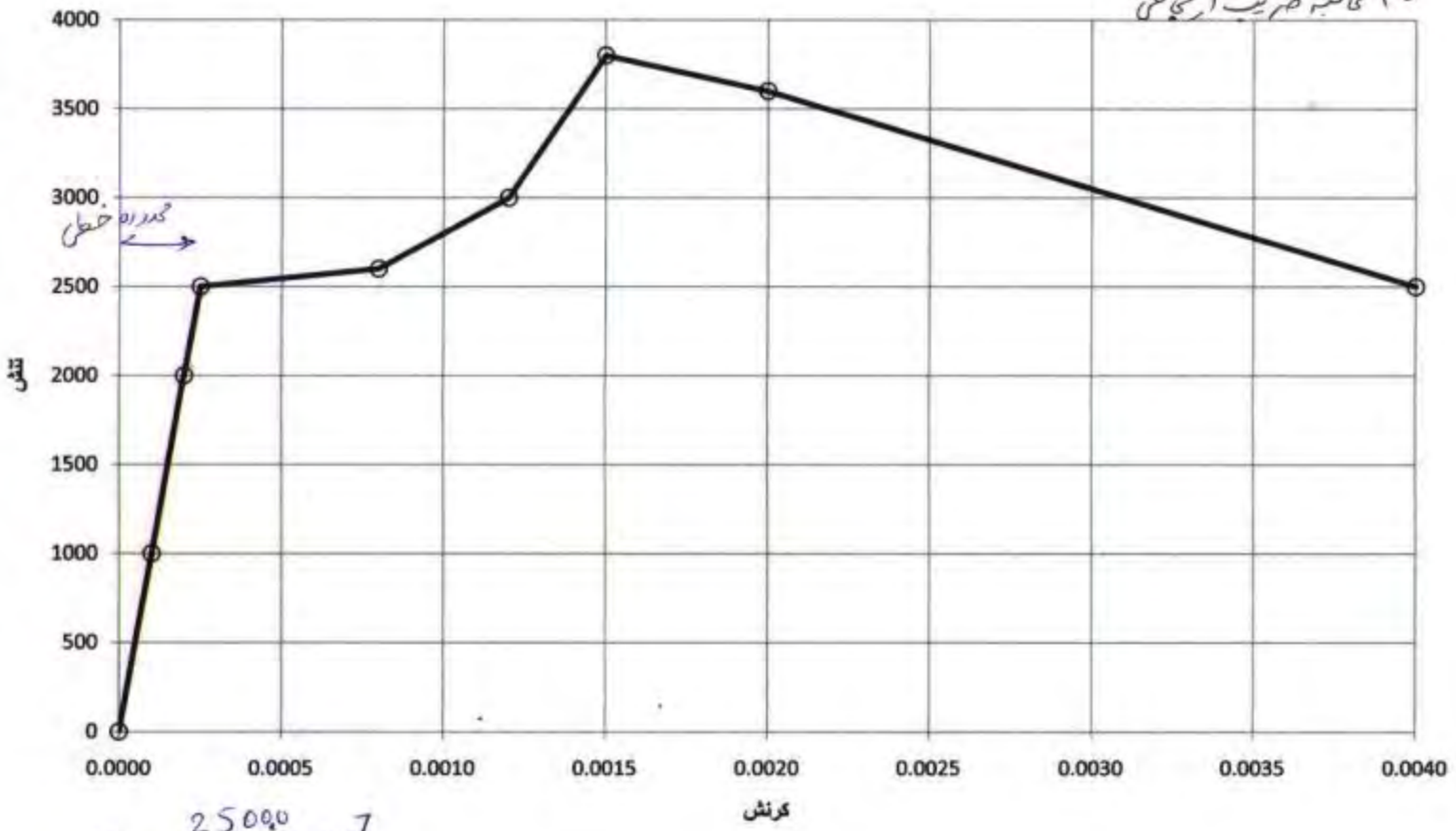
$$\boxed{M_A = 36 - 12 = 24\ t.m}$$

۱. اگر در آزمایش کشش مقادیر مطابق جدول برای تنش و کرنش اندازه‌گیری شده باشد، مطلوبت

۹) ترسیم منحنی تنش و کرنش

ط) محاسبه ضریب ارتجاعی

ε	σ
0.0000	0
0.0001	1000
0.0002	2000
0.0003	2500
0.0008	2600
0.0012	3000
0.0015	3800
0.0020	3600
0.0040	2500



$$E = \frac{25000}{0.00025} = 10^7$$

حل مسائل مقاومت مصالح
سری (۲)
مدرس: ناظمی

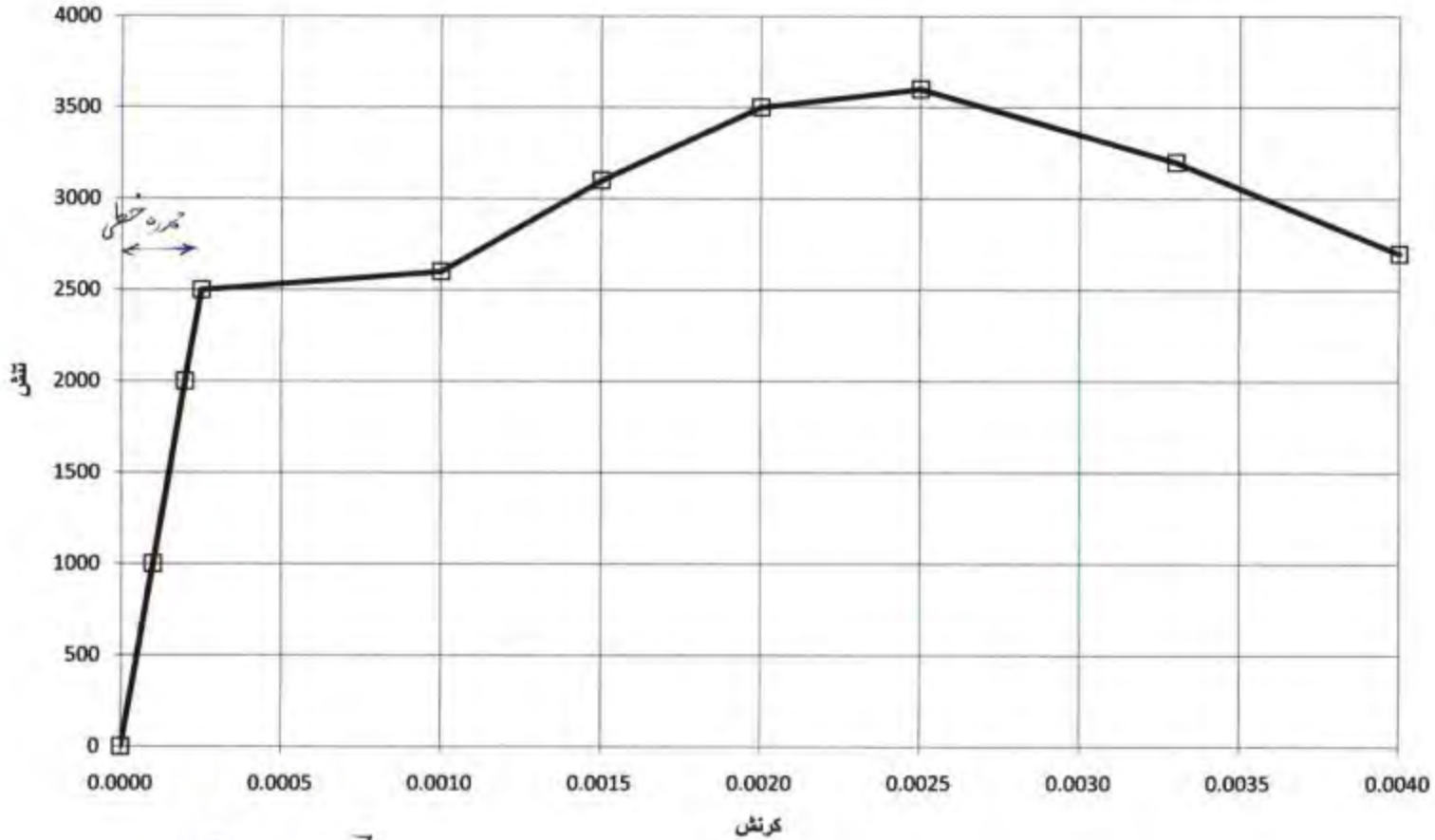
۴۳
۱۰/۱۲

۲- در آزمایش کشش مقادیر تنش و کرنش مطابق جدول تعیین شده است. مطلوبست

a) ترسیم منحنی تنش و کرنش

b) محاسبه مدول ارتجاعی مصالح

ε	M2
0.0000	0
0.0001	1000
0.0002	2000
0.0003	2500
0.0010	2600
0.0015	3100
0.0020	3500
0.0025	3600
0.0033	3200
0.0040	2700



$$E = \frac{2500}{0.0025} = 10^7$$

حل مسائل مقاومت مصالح

مطلوبست

الف) طراحی میله شکل با ضرایب SF=1.67 و $\sigma_y = 2400$

ب) طراحی براساس ضرایب بارمقاومت با ضریب بار 1.7

و ضریب کاهش مقاومت 0.9

در دوحالت فوق اگر قطر میل گرد 26mm باشد مطلوب:

پ) تعیین ضریب اطمینان

ت) تعیین ضریب بار

الف) تنش مجاز $\sigma_{مجاز} = \frac{\sigma_y}{SF} = \frac{2400}{1.67} = 1437 \ Kg/cm^2$

$$\sigma = \frac{P}{A} \Rightarrow A = \frac{P}{\sigma} = \frac{7000}{1437} = 4.87 \ cm^2$$

$$A = \frac{\pi D^2}{4} \Rightarrow D = \sqrt{\frac{4A}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \times 4.87}{3.14}} = 2.49 \ cm$$

چون قطرهای استاندارد 2mm افزایش پیدا می‌کنند لذا

$$\phi = 26 \ mm$$

الف) ضرایب بارمقاومت:

$$P_u = 7000 \times 1.7 = 11'900 \ kg$$

$$P_D = \frac{P_u}{0.9} = \frac{11'900}{0.9} = 13'222 \ kg$$

$$A = \frac{P_D}{\sigma_y} = \frac{13'222}{2400} = 5.51 \ cm^2 \Rightarrow D = \sqrt{\frac{4A}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \times 5.51}{3.14}}$$

$$D = 2.65 \ cm$$

$$\phi = 28 \ mm$$

ب) تنش مجاز:

$$\sigma_{\text{مجاز}} = \frac{P}{A} = \frac{7000}{\frac{3.14 \times 2.6^2}{4}} = 1319 \ \ kg/cm^2$$

$$SF = \frac{\sigma_y}{\sigma_{\text{مجاز}}} = \frac{2400}{1319} = 1.82$$

ت) ضرایب بار مقاومت:

$$P_D = \sigma_y \cdot A = 2400 \times \frac{3.14 \times 2.6^2}{4} = 12'736 \ \ kg$$

$$P_u = 0.9 \, P_D = 11'462 \ \ kg$$

ضریب بار $= \frac{11'462}{7000} = 1.637$

در شکل مقابل اگر وزنه m مقدار های زیر را داشته باشد

الف) 1000 kg

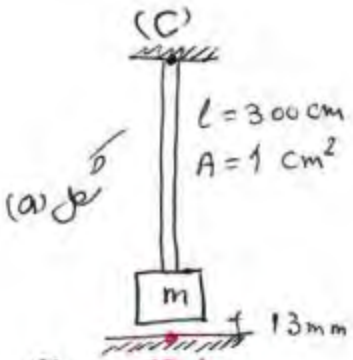
ب) 1800 kg

ج) 1990 kg

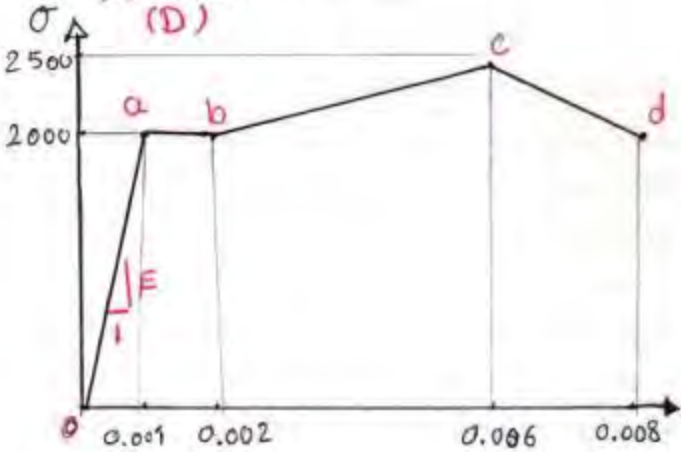
د) 2010 kg

ه) 2300 kg

و) 2450 kg



شکل (a)



شکل (b)

و مشخصات مصالح مطابق شکل (b) باشد.

مطلوبست تعیین تغییر طول در هر حالت و فاصله پائین وزنه تا زمین و میزان نیروئی که به زمین و گیره (C) وارد می شود.

حل) میزان تنش در میله برابر خواهد بود با

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{m}{1} = m$$

یعنی در این حالت با اطلاعات مسئله مقدار تنش برابر با میزان وزن m خواهد بود با توجه به منحنی تنش کرنش (شکل b) اگر تنش در محدوده 0~2000 باشد رابطه تنش و تغییر شکل خطی است و لذا می توان برای محاسبه تغییر طول از رابطه

$$\Delta l = \frac{PL}{EA}$$ استفاده کرد.

مدول ارتجاعی (E) برابر شیب منحنی تنش کرنش در قسمت خطی (محدوده 0-a در شکل داده شده) می‌باشد.

$$E = \frac{2000-0}{0.001-0.} = 2\times10^{6} \quad kg/cm^2$$

با توجه به مطالب گفته شده در حالت های الف، ب، پ می‌توان از رابطه $\Delta L = \frac{PL}{EA}$ استفاده نمود. به شرطی که تغییر شکل کوچکتر از 13mm (فاصله وزنه تا زمین) باشد.

الف) $$\Delta L = \frac{1000\times300}{2\times10^{6}\times1} = 0.15 \ cm = 1.5 \ mm$$

ب) $$\Delta L = \frac{1800\times300}{2\times10^{6}\times1} = 0.27 \ cm = 2.7 \ mm$$

پ) $$\Delta L = \frac{1990\times300}{2\times10^{6}\times1} = 0.2985 \ cm = 2.99 \ mm$$

در این سه حالت چون $\Delta L < 13mm$ است پس وزنه به زمین نمی‌رسد، و نیروی یکنواخت C برابر با وزن وزنه خواهد بود.

در حالت ت)
$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{2010}{1} = 2010 \ kg/cm^2 > \sigma_y$$

با مراجعه به منحنی تنش کرنش (شکل ط)

$$\varepsilon = 0.002$$

$$\Delta L = \varepsilon \cdot L = 0.002\times300 = 0.6 \ cm = 6 \ mm$$

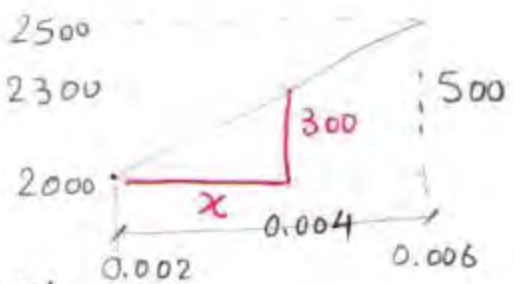
در این حالت نیز وزنه از زمین فاصله خواهد داشت و نیروی کابل C برابر وزن وزنه m خواهد بود.

حالت 1)

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{2300}{1} = 2300 \quad kg/cm$$

با مراجعه به منحنی تنش و کرنش خواهیم داشت:

σ	2000	2500
ε	0.002	0.006



$$\frac{x}{0.004} = \frac{300}{500} \Rightarrow x = \frac{300 \times 0.004}{500} = 0.0024$$

$$\varepsilon_{2300} = \varepsilon_{2000} + x = 0.002 + 0.0024 = 0.0044$$

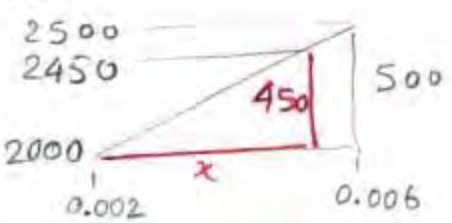
$$\Delta l = \varepsilon \cdot L = 0.0044 \times 300 = 1.32 \text{ cm} = 13.2 \text{ mm}$$

در این حالت کف وزنه بر زمین رسیده و نیروی کابل C برابر وزن وزنه می باشد.

حالت 2)

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{2450}{1} = 2450 \quad kg/cm^2$$

$$\frac{x}{0.004} = \frac{450}{500} \Rightarrow x = \frac{450 \times 0.004}{5000}$$



$x = 0.0036$

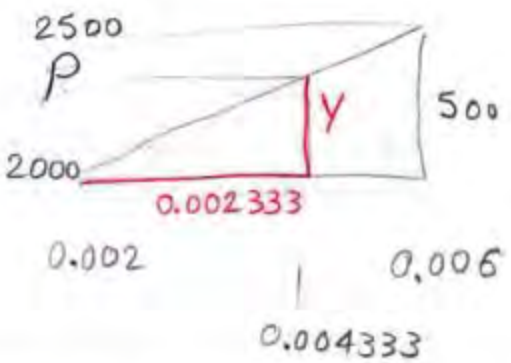
$\varepsilon_{2450} = \varepsilon_{2000} + x = 0.002 + 0.0036 = 0.0056$

$\Delta L = \varepsilon \cdot L = 0.0056 \times 300 = 1.68\ cm = 16.8\ mm$

چون ΔL بیشتر از 13mm می‌باشد لذا می‌بایست در محاسبات بازنگری کنیم،
بدین معنی که میله با تغییر طول 13mm عضو نیرو تحمل می‌کند و بعد از آن کف میله
به زمین رسیده مابقی نیرو توسط زمین تحمل می‌شود (تکیه‌گاه D) بدین ترتیب از تغییر
طول شروع کرده و مقدار نیرویی که برای 13mm میله می‌تواند تحمل کند را محاسبه می‌کنیم

$\Delta L = 13\ mm = 1.3\ cm \qquad \varepsilon = \frac{\Delta L}{L} = \frac{1.3}{300} = 0.004333$

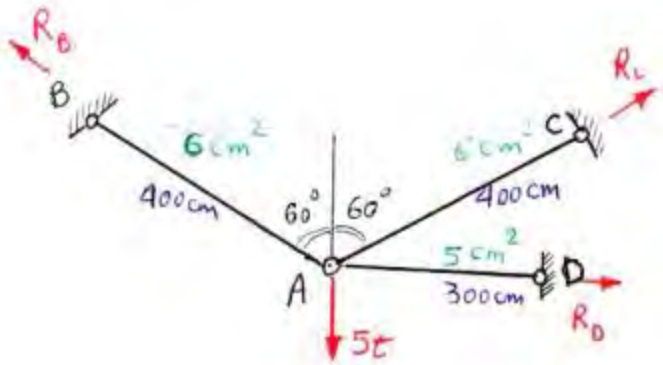
$\frac{y}{500} = \frac{0.002333}{0.004}$



$y = 500 \frac{0.002333}{0.004} = 291.6$

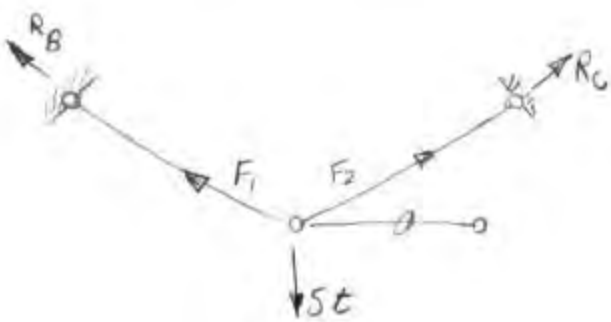
$P = 2000 + y = 2000 + 291.6 = 2291.6\ kg$ نیروی میله

$D_y = 2450 - P = 2450 - 2291.6 = 158\ Kg$ عکس‌العمل تکیه‌گاه D



مطلوبست تغییر مکان نقطه A را در شکل مقابل در صورتیکه مدول ارتجاعی میله‌ها برابر $2\times10^6 kg/cm^2$ باشد را بدست آورید.

حل) از روش نیرو استفاده می‌کنیم و برای این منظور عکس‌العمل R_D را حذف و سازه را تحت تاثیر نیروهای خارجی تحلیل می‌کنیم



$$\sum F_x=0 \Rightarrow -F_1\sin60+F_2\sin60=0$$

$$\boxed{F_1=F_2} \quad (9)$$

$$\sum F_y=0 \Rightarrow F_1\cos60+F_2\cos60-5000=0$$

$$\tfrac{1}{2}F_1+\tfrac{1}{2}F_2=5000$$

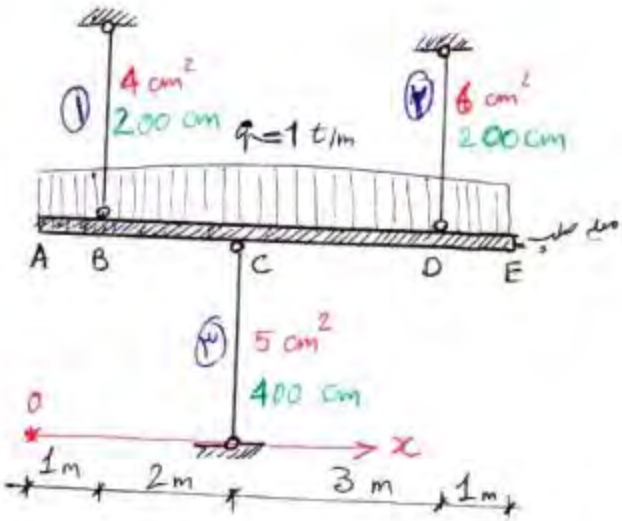
$$\tfrac{1}{2}F_1+\tfrac{1}{2}F_1=5000$$

$$\boxed{F_1=F_2=5000}$$

$$\Delta_1=\Delta_2=\frac{FL}{EA}=\frac{5000\times400}{2\times10^6\times6}=0.167\ cm$$

$$\Delta=\frac{\Delta 1}{\cos60^\circ}=\frac{0.167}{1/2}=0.334\ cm$$

چون در این حالت تغییر شکلی در امتداد نقطه D بوجود نمی‌آید لذا مقدار نیروی گذاشته شده از طرف تکیه D در سازه اصلی نیز اعمال شود صفر خواهد بود و عضو AD خنثی بوده و نیروها و تغییر مکان‌ها در سازه اصلی برابر مقادیر فوق خواهد بود.



در سازه مقابل نیروی میله‌ها را بدست آورید.

اگر $E = 2\times10^6 \frac{kg}{cm^2}$ باشد تغییر مکان قائم نقاط را بروی میله صلب بدست آورید.

حل:

$$F = \frac{EA}{L}\cdot\Delta = K\Delta$$

K را سختی عضو می‌نامیم

$$K_1 = K_2 = \frac{E\times4}{200} = \frac{E}{50}$$

$$K_3 = \frac{E\times5}{400} = \frac{E}{80} \quad : \quad \frac{K_3}{K_1} = \frac{E/80}{E/50} = \frac{5}{8} \Rightarrow \boxed{K_3 = \frac{5}{8}K_1}$$

$$\bar{x} = \frac{1\times K_1 + 6K_1 + 3K_3}{K_1+K_2+K_3} = \frac{7K_1 + 3\times\frac{5}{8}K_1}{2K_1 + \frac{5}{8}K_1} = \text{صورت و مخرج بر } K_1 \text{ تقسیم شده} \frac{7+3\frac{5}{8}}{2+\frac{5}{8}} = \frac{71/8}{21/8} = \frac{71}{21} = 3{,}38$$

چون مرکز سختی با مرکز نیروها یکی نیست لذا جسم صلب دوران خواهد داشت.

آنرا فرض کنیم که تغییر مکان در جسم صلب به شکل زیر است

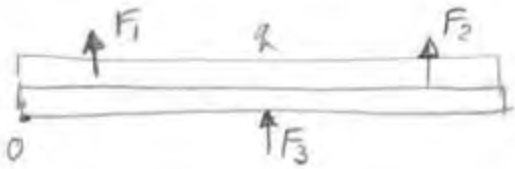
$$\Delta = \Delta_0 + \alpha x$$

می‌توان با بدست آوردن α و Δ_0 مسئله را حل کرد.

$$\Delta_1 = \Delta_0 + \alpha \Rightarrow F_1 = K_1\Delta_1 \Rightarrow F_1 = K_1(\Delta_0+\alpha) \quad (1)$$

$$\Delta_2 = \Delta_0 + 6\alpha \Rightarrow F_2 = K_1\Delta_2 \Rightarrow F_2 = K_1(\Delta_0+6\alpha) \quad (2)$$

$$\Delta_3 = \Delta_0 + 3\alpha \Rightarrow F_3 = K_3\Delta_3 \Rightarrow F_3 = K_3(\Delta_0+3\alpha) \quad (3)$$



$$\Sigma F_y = 0 \quad F_1 + F_2 + F_3 - 1 \times 7 = 0 \qquad (3)$$

$$\Sigma M_0 = 0 \quad F_1 + 6F_2 + 3F_3 - 1 \times 7 \times \frac{7}{2} = 0 \qquad (4)$$

از روابط (4)، (3)، (2)، (1) داریم:

$$k_1(\Delta_0 + \alpha) + k_1(\Delta_0 + 6\alpha) + \frac{5}{8} k_1(\Delta_0 + 3\alpha) = 7$$

$$k_1(\Delta_0 + \alpha) + 6k_1(\Delta_0 + 6\alpha) + 3 \times \frac{5}{8} k_1(\Delta_0 + 3\alpha) = \frac{49}{2}$$

$$\left(1 + 1 + \frac{5}{8}\right) k_1 \Delta_0 + \left(1 + 6 + \frac{15}{8}\right) k_1 \alpha = 7$$

$$\left(1 + 6 + \frac{15}{8}\right) k_1 \Delta_0 + \left(1 + 36 + \frac{45}{8}\right) k_1 \alpha = \frac{49}{2}$$

$$\begin{cases} \frac{21}{8} k_1 \Delta_0 + \frac{71}{8} k_1 \alpha = 7 \\ \frac{71}{8} k_1 \Delta_0 + \frac{341}{8} k_1 \alpha = \frac{49}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 21 k_1 \Delta_0 + 71 k_1 \alpha = 56 \\ 71 k_1 \Delta_0 + 341 k_1 \alpha = 196 \end{cases}$$

$$k_1 \Delta_0 = \frac{5180}{2120} = \frac{259}{106} = 2.44 \Rightarrow \Delta_0 = \frac{2.44}{k_1}$$

$$k_1 \alpha = \frac{140}{2120} = \frac{7}{106} = 0.066 \Rightarrow \alpha = \frac{0.066}{k_1}$$

$$F_1 = k_1(\Delta_0 + \alpha) = k_1\left(\frac{2.44}{k_1} + \frac{0.066}{k_1}\right) = 2.506 \text{ ton}$$

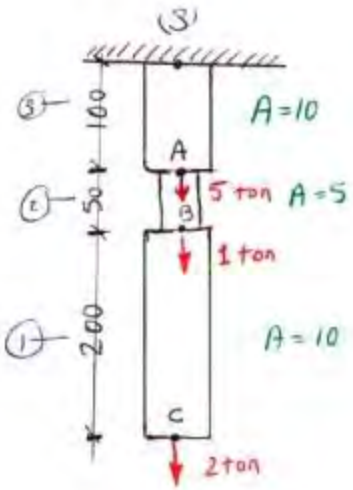
$$F_2 = k_1(\Delta_0 + 6\alpha) = k_1\left(\frac{2.44}{k_1} + 6\frac{0.066}{k_1}\right) = 2.836 \text{ ton}$$

$$F_3 = k_3(\Delta_0 + 3\alpha) = \frac{5}{8} k_1\left(\frac{2.44}{k_1} + 3\frac{0.066}{k_1}\right) = 1.649 \text{ ton}$$

$$\Delta_1 = \Delta_0 + \alpha = \frac{2.44}{K_1} + \frac{0.066}{K_1} = \frac{2.506}{K_1} = \frac{2.506 \times 10^3}{\frac{2 \times 10^6}{50}} = 0.0627\ cm$$

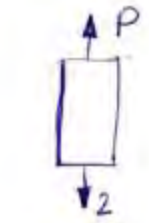
$$\Delta_2 = \Delta_0 + 6\alpha = \frac{2.44}{K_1} + \frac{6 \times 0.066}{K_1} = \frac{2.836}{K_1} = \frac{2.836 \times 10^3}{\frac{2 \times 10^6}{50}} = 0.071\ cm$$

$$\Delta_3 = \Delta_0 + 3\alpha = \frac{2.44}{K_1} + \frac{3 \times 0.066}{K_1} = \frac{2.638}{K_1} = \frac{2.638 \times 10^3}{\frac{2 \times 10^6}{50}} = 0.066\ cm$$



۱. در شکل مقابل با فرض $E=2.1\times10^6\ kg/cm^2$ مطلوبست
تعیین تغییر مکانهای نقاط A, B, C و
اندازه طولها برحسب سانتیمتر و مساحت مقاطع برحسب cm^2 می‌باشد.

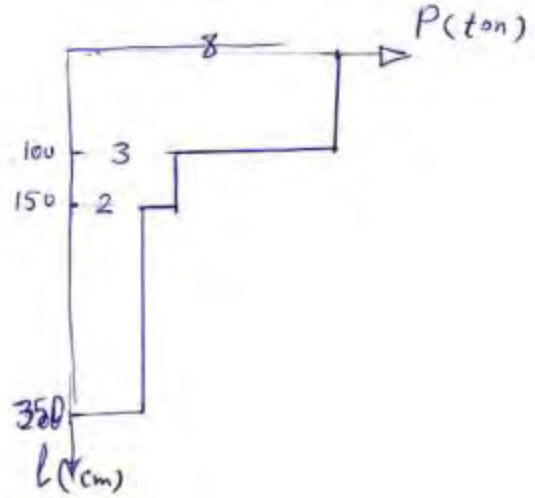
حل: ابتدا نمودار نیروی محوری را ترسیم می‌کنیم.
برای اینکار در طول عضو سه مقطع ترسیم می‌کنیم و برای هرقسمت
جسم آزاد ترسیم می‌کنیم.



$\Sigma F_y=0 \quad P-2=0 \Rightarrow P=2\ ton$

$\Sigma F_y=0 \Rightarrow P-1-2=0 \Rightarrow P=3\ ton$

$\Sigma F_y=0 \Rightarrow P-5-1-2=0 \Rightarrow P=8\ ton$



$$\Delta l_{SA} = \frac{Pl}{EA} = \frac{8000 \times 100}{2.1\times10^6 \times 10} = 0.038 \text{ cm}$$

$$\Delta l_{AB} = \frac{Pl}{EA} = \frac{3000 \times 50}{2.1\times10^6 \times 5} = 0.0143 \text{ cm}$$

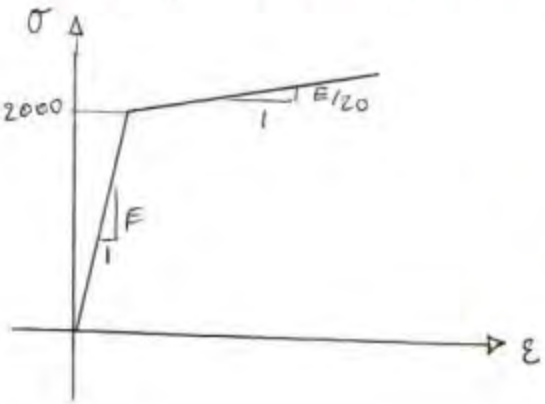
$$\Delta l_{BC} = \frac{Pl}{EA} = \frac{2000 \times 200}{2.1\times10^6 \times 10} = 0.019 \text{ cm}$$

$$\Delta Z_A = \Delta l_{SA} = 0.038 \text{ cm}$$

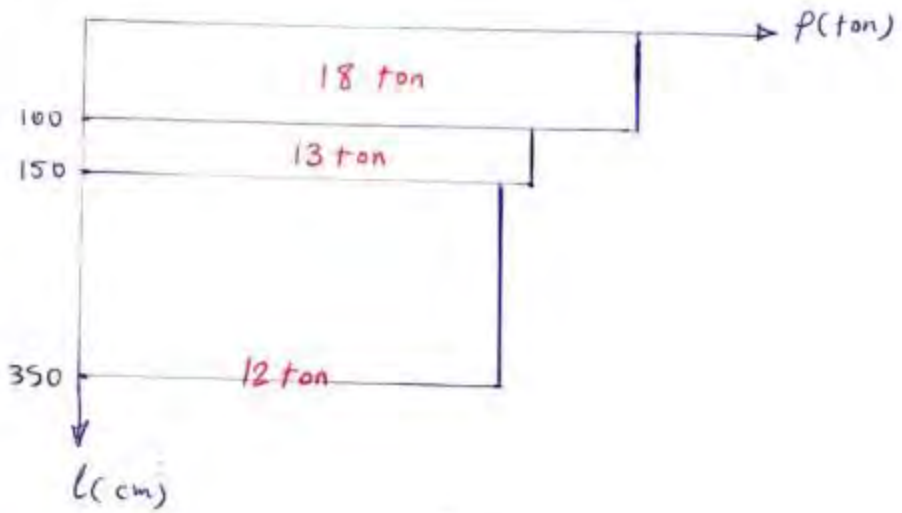
$$\Delta Z_B = \Delta Z_A + \Delta l_{AB} = 0.038 + 0.0143 = 0.0523 \text{ cm}$$

$$\Delta Z_C = \Delta Z_B + \Delta l_{BC} = 0.0523 + 0.019 = 0.0713 \text{ cm}$$

۲ه اگر در مسئله قبل نیروی 2ton به 12ton تبدیل شود و رفتار مصالح مطابق دیاگرام تنش و کرنش زیر باشد. مطلوبست محاسبه تغییر مکان قائم نقاط A و B و C.



حل) ابتدا دیاگرام نیروی داخلی را مطابق قبل بدست می آوریم.



میزان تنش در هر قسمت از میله‌ها محاسبه می‌کنیم

$\sigma_{AS} = \frac{18000}{10} = 1800 \ kg/cm^2 < 2000 \rightarrow$ رابطه تنش و برش خطی

$\sigma_{AB} = \frac{13000}{5} = 2600 \ kg/cm^2 > 2000 \rightarrow$ رابطه تنش و برش غیرخطی

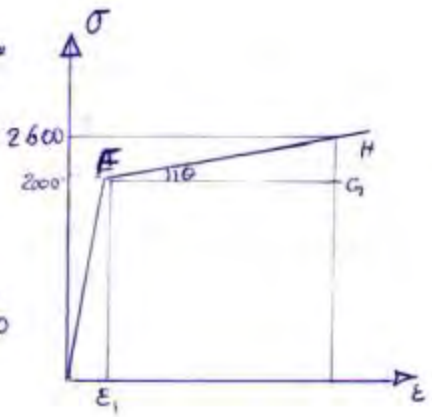
$\sigma_{BC} = \frac{12000}{10} = 1200 \ kg/cm^2 < 2000 \rightarrow$ رابطه تنش و برش خطی

برای قسمت های اول و سوم میله تغییر طول‌ها را از رابطه خطی بدست می‌آوریم.

$\Delta l_{SA} = \frac{Pl}{EA} = \frac{18000 \times 100}{2.1 \times 10^6 \times 10} = 0.0857 \ cm$

$\Delta l_{BC} = \frac{Pl}{EA} = \frac{12000 \times 200}{2.1 \times 10^6 \times 10} = 0.1143 \ cm$

$\varepsilon_1 = \frac{\sigma}{E} = \frac{2000}{2.1 \times 10^6} = 0.00095$ مطابق نمودار تنش و برش



در مثلث FGH طول FG برابر است با:

$tg\theta = \frac{HG}{FG} \Rightarrow FG = HG \cdot tg\theta$

$FG = (2600 - 2000) \cdot \frac{1}{2.1 \times 10^6 / 20}$

$FG = 0.00571$

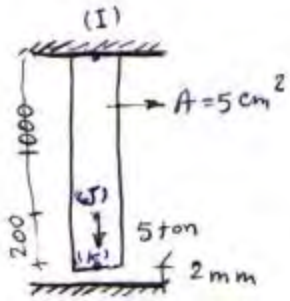
$\varepsilon_y = \varepsilon_1 + FG = 0.00095 + 0.00571 = 0.00666$

$\Delta l_{AB} = \varepsilon \cdot l = 0.00666 \times 50 = 0.333 \ cm$

$\Delta Z_A = \Delta l_{SA} = 0.0857 \ cm$

$\Delta Z_B = \Delta Z_A + \Delta l_{AB} = 0.0857 + 0.333 = 0.4187 \ cm$

$\Delta Z_C = \Delta Z_B + \Delta l_{BC} = 0.4187 + 0.1143 = 0.533 \ cm$



(طول ها بر حسب سانتیمتر می باشند)

۳۰ در شکل مقابل بررسی کنید آیا انتهای میله به زمین می رسد یا نه؟
اگر نمی رسد مقدار نیرو را به نحوی تعیین کنید که انتهای میله به زمین برسد. و می گذرد تحلیل آن چگونه است؟

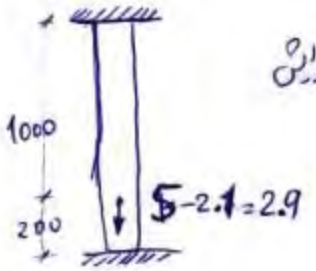
$$\Delta l_{IJ} = \frac{Pl}{EA} = \frac{5000 \times 1000}{2.1\times10^6 \times 5} = 0.476\ cm = 4.76\ mm$$

$$\Delta l_{IJ} = 4.76\ mm > 2\ mm$$

پس میله در اثر این نیرو تغییر طولی می دهد که بیش از فاصله آزاد است و در نتیجه روش حل مسئله اندکی تغییر خواهد کرد.

ابتدا میزان نیرویی که لازم است تا تغییر طول 2mm ایجاد کند را تعیین می کنیم.

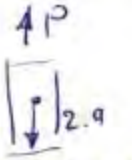
$$\Delta l_{IJ} = \frac{Pl}{EA} = 2\ mm = 0.2\ cm = \frac{P\times1000}{2.1\times10^6\times5} \Rightarrow P = 2100\ Kg = 2.1\ ton$$



پس از تغییر طول 2mm برای نیروی 5-2.1=2.9 هر چقدر که قسمت IJ افزایش طول بیابد قسمت JK کاهش طول خواهد داد.

$$\text{افزایش طول } \Delta l_{IJ} = \frac{P\cdot l}{EA} = \frac{P\times1000}{2.1\times10^6\times5} = \frac{P}{10'500}$$

$$\text{کاهش طول } \Delta l_{JK} = \frac{-(2.9-P)l}{EA} = \frac{-(2.9-P)200}{2.1\times10^6\times5} = \frac{-(2.9-P)}{52'500}$$



$$\Delta l_{IJ} + \Delta l_{JK} = 0$$

$$\frac{P}{10'500} - \frac{2.9-P}{52'500} = 0 \Rightarrow 5P-(2.9-P) = 0$$

$$6P - 2.9 = 0 \Rightarrow P = \frac{2.9}{6} = 0.48\ ton$$

$2.9-P = 2.42\ ton$ ← عکس العمل تکیه گاه پایین

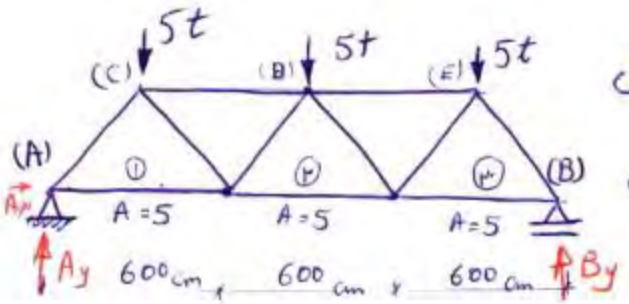
$2.1 + 0.48 = 2.58\ ton$ ← عکس العمل تکیه گاه بالا

5/6

حل مسائل مقاومت مصالح

۴۸

۴. در خرپای مقابل مطلوبست تعیین تغییر طول میله های ① و ② و ③ و نیز تعیین تغییر فاصله دو تکیه گاه A, B. ($E = 2.1 \times 10^6 \ kg/cm^2$)



حل) ابتدا عکس العملهای A و B را به دست می آوریم،

$$\curvearrowleft \Sigma M_A = 0 \Rightarrow 5\times 3 + 5\times(3+6) + 5\times(3+6+6) - B_y \times (3\times 6) = 0$$

$$15 + 45 + 75 = 18 B_y$$

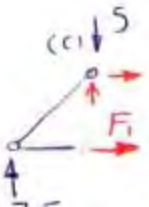
$$\boxed{B_y = 7.5 \ ton}$$

$$\curvearrowright \Sigma M_B = 0 \Rightarrow -5\times 3 - 5\times(3+6) - 5(3+6+6) + A_y(3\times 6) = 0$$

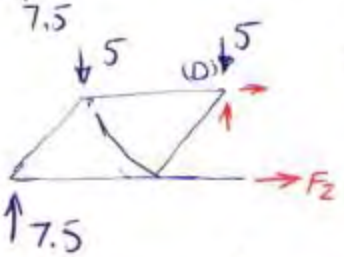
$$\boxed{A_y = 7.5 \ ton}$$

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow \boxed{A_x = 0}$$

برای تعیین نیروی میله های ① و ② و ③ از روش مقاطع استفاده می کنیم

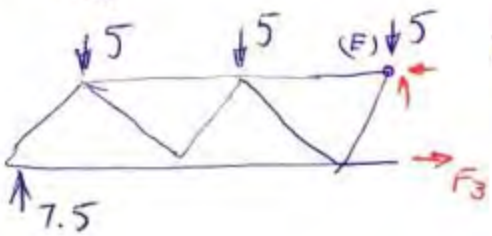


$$\curvearrowright \Sigma M_C = 0 \Rightarrow 7.5\times 3 - 3\times F_1 = 0 \Rightarrow \boxed{F_1 = 7.5 \ ton}$$ کشش



$$\curvearrowright \Sigma M_D = 0 \Rightarrow 7.5\times(3+6) - 5\times 6 - F_2 \times 3 = 0$$

$$3F_2 = 37.5 \Rightarrow \boxed{F_2 = 12.5 \ ton}$$ کشش



$$\curvearrowright \Sigma M_E = 0 \Rightarrow 7.5\times(3+2\times 6) - 5\times 6 - 5\times(2\times 6) - F_3 \times 3 = 0$$

$$3F_3 = 22.5$$

$$\boxed{F_3 = 7.5}$$ کشش

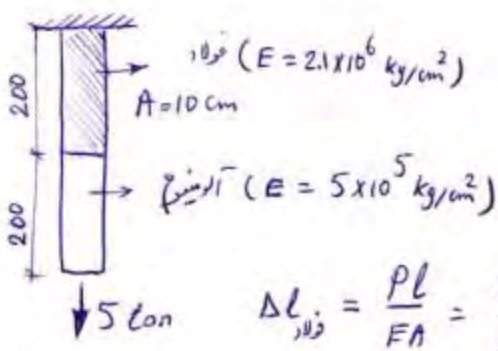
$$\Delta l_1 = \frac{Pl}{EA} = \frac{7.5 \times 1000 \times 600}{2.1 \times 10^6 \times 5} = 0.43 \text{ cm}$$ ازدیاد طول

$$\Delta l_2 = \frac{Pl}{EA} = \frac{12.5 \times 1000 \times 600}{2.1 \times 10^6 \times 5} = 0.71 \text{ cm}$$ ازدیاد طول

$$\Delta l_3 = \frac{Pl}{EA} = \frac{7.5 \times 1000 \times 600}{2.1 \times 10^6 \times 5} = 0.43 \text{ cm}$$ ازدیاد طول

$$\Delta_{AB} = 0.43 + 0.71 + 0.43 = 1.57 \text{ cm}$$ ازدیاد فاصله A, B

۵. مطلوبست میزان افزایش طول میله شکل مقابل



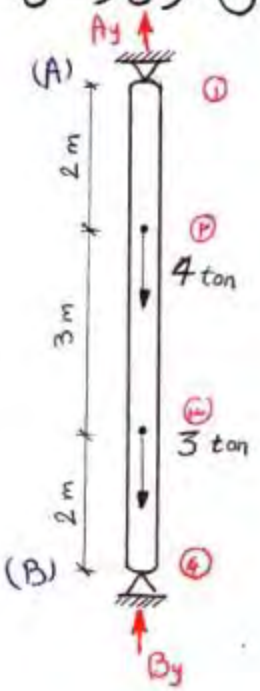
حل داریم:

$$\Delta l_{\text{فولاد}} = \frac{Pl}{EA} = \frac{5000 \times 200}{2.1 \times 10^6 \times 10} = 0.048 \text{ cm}$$

$$\Delta l_{\text{آلومینیوم}} = \frac{Pl}{EA} = \frac{5000 \times 200}{5 \times 10^5 \times 10} = 0.2 \text{ cm}$$

$$\Delta l = \Delta l_{\text{فولاد}} + \Delta l_{\text{آلومینیوم}} = 0.048 + 0.2 = \underline{0.248} \text{ cm}$$

۱ه در سازه مقابل مطلوبست تعیین عکس‌العملهای تکیه‌گاهی به دو روش نرمی و سختی.



حل) الف) با استفاده از روش نرمی،

ابتدا، تکیه‌گاه پائین را حذف می‌کنیم و تغییر طول کل سازه را می‌یابیم

$$\Delta l_{34} = \frac{Pl}{EA} = \frac{0 \times l}{EA} = 0$$

$$\Delta l_{23} = \frac{Pl}{EA} = \frac{3000 \times 300}{EA} = \frac{900'000}{EA}$$

$$\Delta l_{12} = \frac{Pl}{EA} = \frac{7000 \times 200}{EA} = \frac{1'400'000}{EA}$$

$$\Delta_4 = \Delta l_{12} + \Delta l_{23} + \Delta l_{34} = \frac{1'400'000}{EA} + \frac{900'000}{EA} + 0 = \frac{2'300'000}{EA}$$

حال در صبه بدون بارهای خارجی بار واحد در محل نقطه 4 اعمال می‌کنیم.

$$\Delta l_{14} = \frac{Pl}{EA} = \frac{1 \times (200+300+200)}{EA} = \frac{700}{EA}$$

$$X = B_y = \frac{\Delta 4}{\Delta_{14}} = \frac{\frac{2'300'000}{EA}}{\frac{700}{EA}} = \boxed{3285.71 \text{ kg}}$$

با تعیین میزان عکس‌العمل B سازه به یک سازه معین تبدیل می‌شود و با استفاده از روابط تعادل داریم.

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow A_y - 4000 - 3000 + 3285.71 = 0 \Rightarrow \boxed{A_y = 3'714.3 \text{ kg}}$$

ب) با استفاده از روش سختی:

تغییر مکان هرکدام از نقاط ① الی ④ را با U_1 الی U_4 نامگذاری می‌کنیم.

U_1 و U_4 چون تکیه‌گاه هستند، لذا مقدارشان صفر است.

$$\Delta l_{12} = U_2 = \frac{P_{12} l_{12}}{EA} = \frac{P_{12} \cdot 200}{EA}$$

$$\Delta l_{23} = U_3 - U_2 = \frac{P_{23} l_{23}}{EA} = \frac{P_{23} \cdot 300}{EA}$$

$$\Delta l_{34} = U_3 = \frac{P_{34} l_{34}}{EA} = \frac{P_{34} \cdot 200}{EA}$$

$P_{12} = A_y$ آمر مقطعی در حد فاصل 1 و 2 برابر A_y آنگاه

$P_{34} = B_y$ آمر مقطعی در حد فاصل 3 و 4 برابر B_y آنگاه

$P_{23} = F$ آمر مقطعی در حد فاصل 2 و 3 برابر F آنگاه

$$U_2 = \frac{A_y \, 200}{EA}$$

$$U_3 = \frac{B_y \cdot 200}{EA}$$

$$U_3 - U_2 = \frac{B_y \, 200}{EA} - \frac{A_y 200}{EA} = \frac{F \cdot 300}{EA} \Rightarrow \boxed{2B_y - 2A_y = 3F} \quad (1)$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow A_y - 4000 - 300 + B_y = 0 \quad (2)$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow A_y - 4000 - F = 0 \quad (3)$$

$$(1), (3) \Rightarrow A_y - 4000 - \frac{1}{3}(2B_y - 2A_y) = 0 \Rightarrow \boxed{A_y + \frac{2}{3}A_y - \frac{2}{3}B_y - 4000 = 0} \quad (4)$$

$$(4), (2) \Rightarrow \begin{cases} A_y + B_y = 7000 \\ \frac{5}{3}A_y - \frac{2}{3}B_y = 4000 \end{cases} \Rightarrow B_y = 7000 - A_y \quad (5)$$

$$(5) \rightarrow \frac{5}{3}A_y - \frac{2}{3}(7000 - A_y) = 4000$$

$$\frac{5}{3}A_y + \frac{2}{3}A_y = 4000 + \frac{14000}{3}$$

$$\frac{7}{3}A_y = 4000 + \frac{14000}{3} = \frac{26000}{3}$$

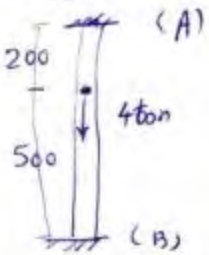
$$A_y = \frac{26000}{7} = 3'714.3 \text{ kg}$$

⑤

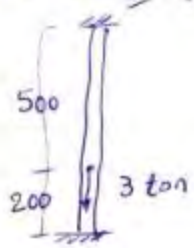
$$B_y = 7000 - \frac{26000}{7} = \frac{23000}{7} = 3'285.7 \text{ kg}$$

ج) می توان مسئله را با استفاده از اصل جمع آثار حل کرد. یعنی یک بار فرض کرد که نیروی 4 ton برپایه ها اعمال نشده و بار دیگر بار 3ton

(الف)



(ب)



$$F_A = \frac{500}{500+200} \times 4000 = 2'857.1 \qquad F_A = \frac{200}{500+200} \times 3000 = 857.1$$

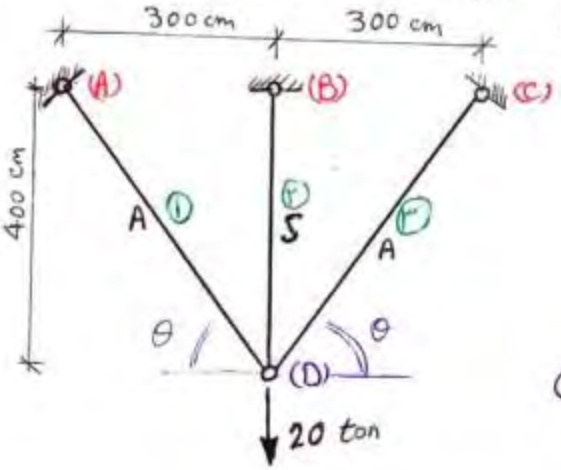
$$F_B = \frac{200}{500+200} \times 4000 = 1'142.9 \qquad F_B = \frac{500}{500+200} \times 3000 = 2142.9$$

حال عکس العمل هرکدام از تکیه گاهها برابر با عکس العمل مجموع عکس العملهای حالت (الف) و (ب) خواهد بود

$$F_A = 2'857.1 + 857.1 = 3'714.2 \text{ kg}$$

$$F_B = 1'142.9 + 2142.9 = 3285.8 \text{ kg}$$

۲. مطلوبست تعیین عکس‌العمل تکیه‌گاهها و نیز نیروی میله‌های سازه ذیل
(مساحت میله‌های مایل A و مساحت میله وسط S می‌باشد)



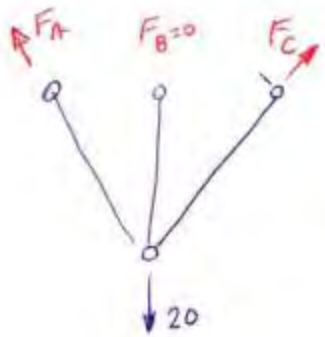
الف) به روش نرمی.

ب) به روش سختی.

حل ۲ الف) به روش نرمی

ابتدا تکیه‌گاه‌ها را از چپ به راست نام‌گذاری کرده‌ایم C و B ،A
و میله‌ها را از چپ به راست ①، ② و ③

چون ۱ سازه مقابل یک درجه نامعین است لذا می‌بایست یک مجهول را حذف کنیم، برای این منظور تکیه‌گاه B را حذف می‌کنیم و تغییر مکان نقطه (D) را بدست می‌آوریم.



$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow -F_A \cos\theta + F_C \cos\theta = 0 \Rightarrow \boxed{F_A = F_C}$$

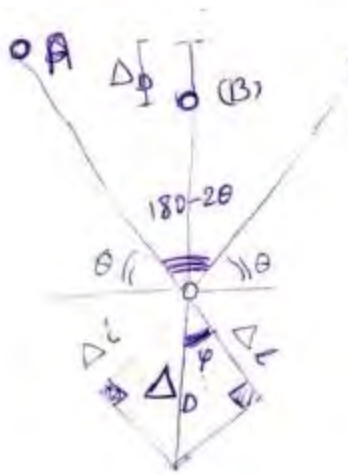
$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_A \cdot \sin\theta + F_C \sin\theta - 20 = 0 \Rightarrow 2F_A \sin\theta = 20$$

$$F_A = F_C = \frac{10}{\sin\theta} = \boxed{12.5 \text{ ton}}$$

$$\sin\theta = \frac{4}{5}$$

$$\Delta l_1 = \Delta l_3 = \frac{Pl}{EA} = \frac{12500 \times 500}{EA} = \frac{6'250'000}{EA}$$

ازدیاد طول میله‌های ① و ③



مطابق شکل مقابل میله‌ها به اندازه Δl ازدیاد طول می‌دهند.
از انتهای هر میله خط عمود بر میله را بجای کمان ترسیم کرده و میله
حاصل شده، طول Δ_D برابر خواهد بود با

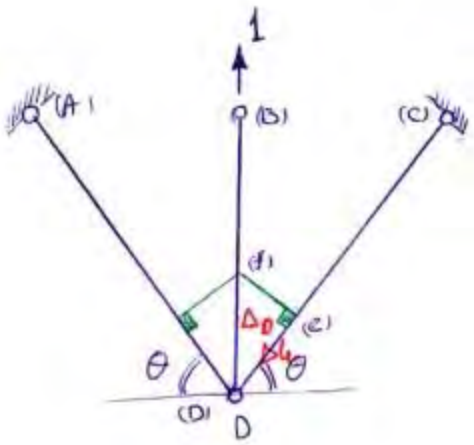
$$\varphi = \frac{1}{2}(180 - 2\theta)$$

$$\cos(90-\theta) = \frac{\Delta l}{\Delta_D} =$$

$$\Delta_D = \frac{\Delta l}{\cos(90-\theta) = \sin\theta} = \frac{6'250'000/EA}{4/5} = \frac{7'812'500}{EA}$$

5/9 مدرس: شاهی — حل مسائل مقاومت مصالح — سری (2)

در نتیجه تکیه‌گاه B به اندازه Δ_D به پایین خواهد آمد.



حال در راستای عمل تکیه‌گاه B نیروی واحد قرار می‌دهیم.

در گره D تعادل نیروها را بررسی می‌کنیم.

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_A = F_C$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow 1 + \sin\theta \cdot F_A + F_C \cdot \sin\theta = 0$$

$$F_A = -\frac{1}{2\sin\theta} = -\frac{1}{\frac{8}{5}} = -\frac{5}{8}$$

$$\Delta l_1 = \Delta l_3 = \frac{Pl}{EA} = \frac{5/8 \times 500}{EA} = \frac{2500}{8} \times \frac{1}{EA}$$

$$\Delta l_2 = \frac{Pl}{EA} = \frac{1 \times 400}{ES} = \frac{400}{ES}$$

Δ Def $\rightarrow$ Cos

$$\cos(90-\theta) = \frac{\Delta l_1}{\Delta_0} \Rightarrow \Delta_0 = \frac{\Delta l_1}{\cos(90-\theta) = \sin\theta} = \frac{\Delta l}{\frac{4}{5}} = \frac{5}{4}\Delta l$$

$$\Delta_0 = \frac{5}{4} \times \frac{2500}{8EA} = \frac{3125}{8EA}$$

$$\Delta_1 = \Delta l_2 + \Delta_0 = \frac{400}{ES} + \frac{3125}{8EA} = \frac{3200A + 3125S}{8EAS}$$

$$X = \frac{\Delta_0}{\Delta_1} = \frac{\frac{7'812'500}{EA}}{\frac{3200A + 3125S}{8EAS}} = \frac{7'812'500\,(8EAS)}{(3200A + 3125S)EA} = \frac{62'500'000S}{3200A + 3125S}$$

از رابطه بالا مشخص است هرچقدر سطح مقطع میله وسطی بیشتر شود مقدار X بیشتر می‌شود و در حالتی که S به بی‌نهایت میل می‌کند مقدار $X = 20'000$ می‌شود.

یعنی اگر میله وسط صلب باشد همه نیرو توسط میله (2) وسطی تحمل خواهد شد.

اگر در حل اشتباهاً میله وسطی را حذف می‌کردیم (یعنی میله را صلب فرض می‌کردیم) و $X = 20'000$ می‌شد.

6/9 مدرس: شهابی — حل مسائل مقاومت مصالح — سری (2)

اگر مساحت میله وسطی با سایر میله‌ها برابر باشد در آن صورت خواهیم داشت:

$$A=S \rightarrow x=\frac{62'500'000\,A}{(3200+3125)A}=9881.4\ kg$$

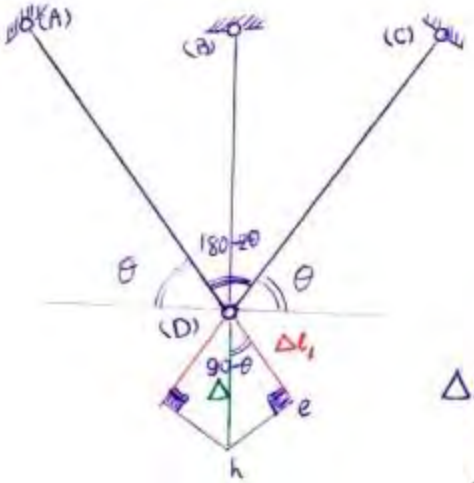
حال اگر نیروی میله 2 مشخص باشد در گره (D) تعادل را بررسی کنیم داریم:

$$\sum F_y=0 \qquad F_A\cdot\sin\theta+F_C\cdot\sin\theta+9881.4-20'000=0$$

$$2F_A\cdot\sin\theta=10'118.6$$

$$F_A=F_C=\frac{10'118.6}{2\times\frac{4}{5}}=6'324.1\ kg$$

ب) روش سختی:



در گره (D) تعادل را بررسی می‌کنیم.

$$\sum F_x=0 \Rightarrow -F_A\cdot\cos\theta+F_C\cdot\cos\theta=0 \Rightarrow F_A=F_C$$

$$\triangle ehD \Rightarrow \cos(90-\theta)=\frac{\Delta l_1}{\Delta} \Rightarrow \Delta l_1=\Delta\cos(90-\theta)$$

$$\Delta l_1=\Delta\sin\theta=\frac{4}{5}\Delta$$

$$\Delta l_2=\frac{Pl}{ES} \Rightarrow F_B=\frac{ES\Delta}{400}$$

$$\Delta l_1=\frac{Pl}{EA} \Rightarrow F_A=\frac{EA\Delta l_1}{500}=\frac{EA\Delta}{625}$$

$$\sum F_y=0 \Rightarrow F_A\cdot\sin\theta+F_B+F_C\sin\theta-20'000=0 \Rightarrow 2F_A\sin\theta+F_B=20'000$$

$$2\times\frac{EA\Delta}{625}\cdot\frac{4}{5}+\frac{ES\Delta}{400}=20000 \Rightarrow \left(\frac{8EA}{3'125}+\frac{ES}{400}\right)\Delta=20'000$$

$$\left(\frac{640EA+625ES}{250000}\right)\Delta=20'000 \Rightarrow \Delta=\frac{5\times10^9}{640EA+625ES}$$

7/9 مدرس: شاهی
۵۶

حل مسائل مقاومت مصالح سری (۴)

اگر سطح مقطع میله وسط زیاد شود $\Delta \leftarrow 0$ میل می‌کند.

اگر فرض کنیم $A=S$ خواهیم داشت.

$$\Delta = \frac{5\times10^{9}}{EA1265}$$

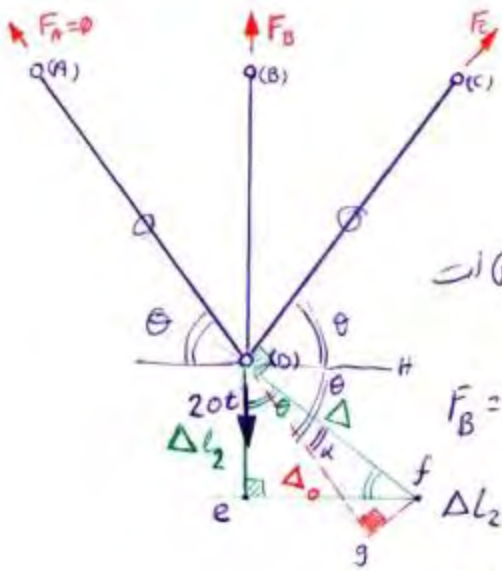
$$F_B = \frac{ES}{400}\Delta = \frac{EA}{400}\times\frac{5\times10^{9}}{EA\,1265} = 9881.4 \text{ kg}$$

$$F_A = \frac{EA}{625}\Delta = \frac{EA}{625}\times\frac{5\times10^{9}}{EA\,1265} = 6324.1 \text{ kg}$$

ج) روش نرمی (با حذف عکس‌العمل F_A)

چون میله ① خنثی است $F_A=0$ فرض کردیم)

در سیستم دو میله‌ای چون نیروی خارجی هم امتداد میله ② است لذا میله سوم نیز خنثی است.



$F_B = 20$ ton $\quad F_C = 0$

$$\Delta l_2 = \frac{Pl}{EA} = \frac{20'000\times400}{2.1\times10^{6}\times4} = 0.95 \text{ cm}$$

$$\Delta l_3 = 0$$

$\angle HDC = \angle fDe$ دو ضلع زاویه‌ها عمود بر هم هستند.

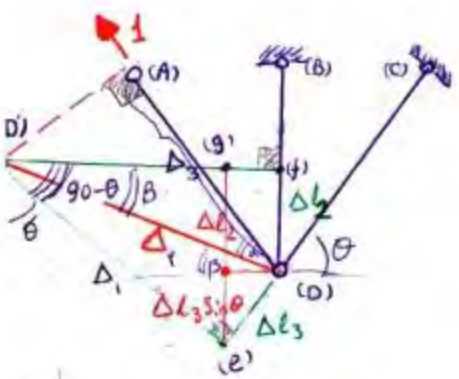
$$\triangle_{eDf} \rightarrow \cos\theta = \frac{\Delta l_2}{\Delta} \Rightarrow \Delta = \frac{\Delta l_2}{\cos\theta} = \frac{0.95}{\frac{3}{5}} = 1.58 \text{ cm}$$

$$\theta + (\theta - \alpha) = 90 \Rightarrow \alpha = 2\theta - 90^{\circ}$$

$$\triangle_{fgD} \rightarrow \cos\alpha = \frac{\Delta_0}{\Delta} \Rightarrow \Delta_0 = \Delta\cdot\cos\alpha = \Delta\cdot\cos(2\theta-90) = \Delta\cdot\cos(90-2\theta)$$

$$\Delta_0 = \Delta\cdot\sin2\theta = \Delta(2\sin\theta\cdot\cos\theta)$$

$$\Delta_0 = 2\Delta\left(\frac{4}{5}\times\frac{3}{5}\right) = \frac{24}{25}\Delta = 1.5168 \quad cm$$



در حالت دوم در محل گره A نیروی واحد (1kg) وارد می‌کنیم و تغییر طول‌ها را بررسی می‌کنیم.

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow -1.\cos\theta + F_C.\cos\theta = 0 \Rightarrow \boxed{F_C = 1}$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow 1.\sin\theta + F_B + 1.\sin\theta = 0 \Rightarrow \boxed{F_B = -2\sin\theta = -\frac{8}{5}}$$

$$\Delta l_3 = \frac{Pl}{EA} = \frac{1\times 500}{EA} = 5.95\times10^{-5}\ cm$$

$$\Delta l_2 = \frac{Pl}{EA} = \frac{8/5\times 400}{EA} = 7.62\times10^{-5}\ cm$$

$$\Delta l_1 = \frac{Pl}{EA} = \frac{1\times 500}{EA} = 5.95\times10^{-5}\ cm$$

$\Delta D'ge \Rightarrow \sin(90-\theta) = \cos\theta = \dfrac{\Delta l_3.\sin\theta + \Delta l_2}{\Delta_1} = \dfrac{3}{5}$

$$\Delta_1 = \frac{5}{3}\left(\Delta l_3.\frac{4}{5} + \Delta l_2\right) = \frac{5}{3}\left(5.95\times10^{-5}\times\frac{4}{5} + 7.62\times10^{-5}\right) = 20.63\times10^{-5}$$

$\Delta D'eD \Rightarrow \Delta_2 = \sqrt{\Delta l_3^2 + \Delta_1^2} = \sqrt{(5.95\times10^{-5})^2 + (20.63\times10^{-5})^2} = 2.15\times10^{-4}$

$\Delta D'fD \Rightarrow \sin\beta = \dfrac{\Delta l_2}{\Delta_2} = \dfrac{7.62\times10^{-5}}{2.15\times10^{-4}} = 0.35485 \rightarrow \beta = 20.78^\circ$

$$\alpha = \theta - \beta = 53.13 - 20.78 = 32.35^\circ$$

$\Delta D'DA \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{\Delta_3}{\Delta_2} \Rightarrow \Delta_3 = \Delta_2\cos\alpha = 2.15\times10^{-4}\times\cos 32.35 = 1.82\times10^{-4}$

$$\Delta_T = \Delta_3 + \Delta l_1 = 1.82\times10^{-4} + 5.95\times10^{-5} = \boxed{2.415\times10^{-4}}$$

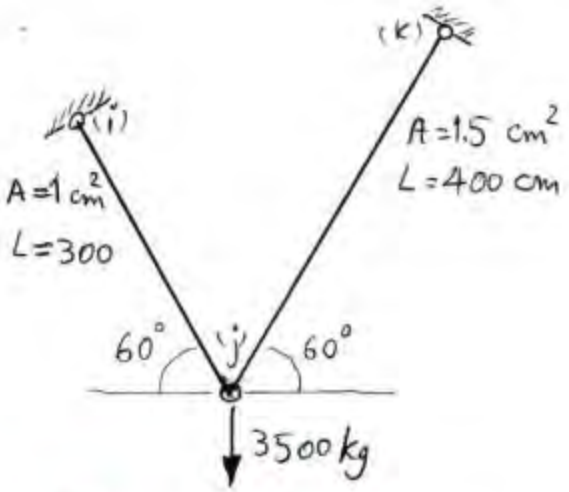
حل مسائل مقاومت مصالح سری (۴) مدرس: شاهی ۹/۹ ۵۸

عکس العمل تکیه گاه A $X = \frac{\Delta_0}{\Delta_T} = \frac{1.5168}{2.415 \times 10^{-4}} = 6280.7 \text{ kg}$

عکس العمل تکیه گاه B $F'_B = F^0_B + X \cdot F_B = 20'000 + 6280.7 \times -\frac{8}{5} = 9'950.9 \text{ kg}$

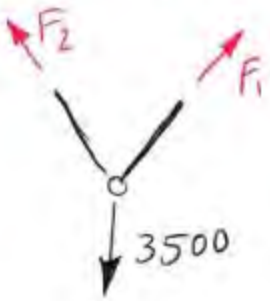
عکس العمل تکیه گاه C $F'_C = F^0_C + X F_C = 0 + 6280.7 \times 1 = 6280.7 \text{ kg}$

البته اعداد بدست آمده در این روش نسبت به روش قبلی اندکی متفاوت می باشد که ناشی از خطاهای گرد کردن اعداد می باشد در صورتیکه تعداد ارقام بعد اعشار بیشتری در محاسبات استفاده می شد این اعداد تفاوت کمتری با هم داشتند.



در شکل مقابل مطلوبست تعیین میزان جابجائی نقطهٔ B در صورتیکه بدانیم رابطه بین تنش و کرنش خطی است.

$(E = 2 \times 10^6 \ kg/cm^2)$



$$\overset{+}{\rightarrow} \sum F_x = 0 \Rightarrow F_1 \cos 60 - F_2 \cos 60 = 0$$

$$\boxed{F_1 = F_2}$$

$$\overset{+}{\uparrow} \sum F_y = 0 \Rightarrow F_2 \sin 60^\circ + F_1 \sin 60^\circ - 3500 = 0$$

$$\underset{\text{با هم برابرند}}{F_1 = F_2} \Rightarrow F_1 \sin 60^\circ + F_1 \sin 60^\circ = 3500$$

$$2 \sin 60^\circ F_1 = 3500$$

$$F_1 = \frac{3500}{2 \sin 60^\circ} = \frac{3500}{2 \frac{\sqrt{3}}{2}} = 2020.73 \ kg$$

$$\Delta L_1 = \frac{PL}{EA} = \frac{2020.73 \times 400}{2 \times 10^6 \times 1.5} = 0.269 \ cm$$

$$\Delta L_2 = \frac{PL}{EA} = \frac{2020.73 \times 300}{2 \times 10^6 \times 1.0} = 0.303 \ cm$$

$\alpha+\beta = 180-60-60 = 60$

$$\cos\alpha = \frac{\Delta L_2}{\Delta} = \frac{0.303}{\Delta}$$

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\left(\frac{0.303}{\Delta}\right)^2} = \frac{\sqrt{\Delta^2-(0.303)^2}}{\Delta}$$

$$\cos\beta = \frac{\Delta L_1}{\Delta} = \frac{0.269}{\Delta}$$

$$\sin\beta = \sqrt{1-\cos^2\beta} = \sqrt{1-\left(\frac{0.269}{\Delta}\right)^2} = \frac{\sqrt{\Delta^2-(0.269)^2}}{\Delta}$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\alpha$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{\Delta^2-(0.303)^2}}{\Delta} \times \frac{0.269}{\Delta} + \frac{0.303}{\Delta} \times \frac{\sqrt{\Delta^2-(0.269)^2}}{\Delta}$$

طرفین در Δ^2 ضرب می‌کنیم

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\Delta^2 = 0.269\sqrt{\Delta^2-(0.303)^2} + 0.303\sqrt{\Delta^2-(0.269)^2}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\Delta^2 - 0.269\sqrt{\Delta^2-(0.303)^2} - 0.303\sqrt{\Delta^2-(0.269)^2} = 0$$

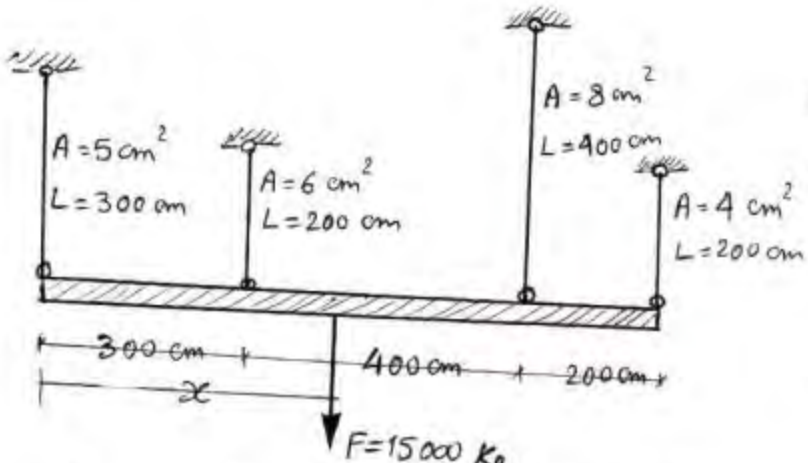
از حل معادله فوق مقدار Δ حاصل می‌شود.

$$\Delta = 0.332$$

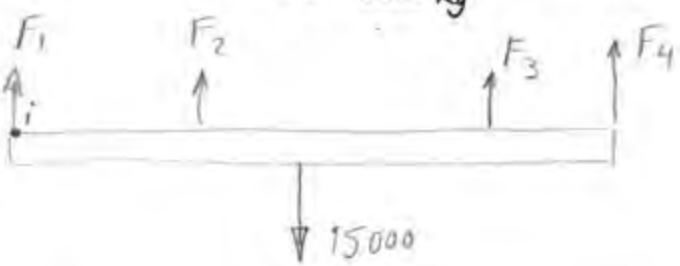
$$\cos\alpha = \frac{0.303}{0.332} = 0.912651 \Rightarrow \alpha = 24.13^\circ$$

$\Delta_{jy} = \Delta \sin(60+24.13) = 0.332 \sin(84.13) = 0.330$ cm

$\Delta_{jx} = \Delta \cos(60+24.13) = 0.332 \cos(84.13) = 0.034$ cm



در شکل مقابل مطلوبست تعیین
ای
x به نحوی که میله صلب به صورت
قائم تغییر مکان دهد.
(ب) اگر $x=300^{cm}$ باشد نیروی
میله ها را تعیین کنید.



برای آنکه جسم صلب در حال تعادل
باقی بماند باید

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_1+F_2+F_3+F_4-15000=0$$

$$+\circlearrowleft \sum M_1 = 0 \Rightarrow -300F_2+15000x-(300+400)F_3-(300+400+200)F_4=0$$

$$\begin{cases} F_1+F_2+F_3+F_4=15000 \\ 300F_2+700F_3+900F_4=15000x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_1+F_2+F_3+F_4=15000 \\ 3F_2+7F_3+9F_4=150x \end{cases}$$

$$\Delta L=\frac{PL}{EA} \quad \text{یا} \quad P=\frac{\Delta LEA}{L} \quad ; \quad \Delta L_1=\Delta L_2=\Delta L_3=\Delta L_4=\Delta \Rightarrow$$

$$F_1=\frac{\Delta E\cdot 5}{300}=\frac{\Delta E}{60}$$

$$F_2=\frac{\Delta E\,6}{200}=\frac{6\Delta E}{200}$$

$$F_3=\frac{\Delta E\times 8}{400}=\frac{\Delta E}{50}$$

$$F_4=\frac{\Delta E\times 4}{200}=\frac{\Delta E}{50}$$

$$\frac{\Delta E}{60} + \frac{6\Delta E}{200} + \frac{\Delta E}{50} + \frac{\Delta E}{50} = 15'000$$

$$\Delta E \left(\frac{1}{60} + \frac{6}{200} + \frac{1}{50} + \frac{1}{50}\right) = 15'000$$

$$\Delta E = 173'076.9 \quad \text{یا} \quad \boxed{\Delta = \frac{173'076.9}{E}}$$

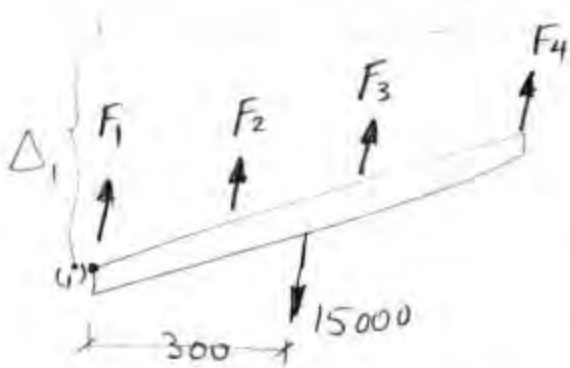
$$3\left(\frac{6\Delta E}{200}\right) + 7\left(\frac{\Delta E}{50}\right) + 9\left(\frac{\Delta E}{50}\right) = 150x$$

$$\Delta E \left(\frac{36}{200} + \frac{7}{50} + \frac{9}{50}\right) = 150x$$

$$\frac{1}{2}$$

$$\frac{\Delta E}{2} = 150x \Rightarrow x = \frac{\Delta E}{2 \times 150} = \frac{173'076.9}{300} = \underline{\underline{576.9\,cm}}$$

ب) اگر فرض کنیم که جسم صلب بصورت شیب‌دار درآمده باشد



و تغییر طول دو میله‌ها به شکل $\Delta = \Delta_1 - \alpha x$ باشد که در آن Δ_1 و α مجهول و x فاصله میله‌ها از میله شماره 1 هستند. در آن صورت معادلات تعادل به شکل زیر نوشته می‌شوند:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \begin{cases} F_1 + F_2 + F_3 + F_4 = 15'000 \\ +\circlearrowleft \sum M_1 = 0 \Rightarrow +300F_2 + 700F_3 + 900F_4 - 15'000 \times 300 = 0 \end{cases}$$

تغییر طول میله‌ها

$$F = \frac{\Delta E A}{L}$$

Δ_1

$$F_1 = \frac{5E\Delta_1}{300} \Rightarrow F_1 = \frac{E}{60}\Delta_1$$

$\Delta_1 - 300\alpha$

$$F_2 = \frac{6E(\Delta_1 - 300\alpha)}{200} \Rightarrow F_2 = \frac{6E}{200}\Delta_1 - 9\alpha E$$

$\Delta_1 - 700\alpha$

$$F_3 = \frac{8E(\Delta_1 - 700\alpha)}{400} \Rightarrow F_3 = \frac{E}{50}\Delta_1 - 14\alpha E$$

$\Delta_1 - 900\alpha$

$$F_4 = \frac{4E(\Delta_1 - 900\alpha)}{200} \Rightarrow F_4 = \frac{E}{50}\Delta_1 - 18\alpha E$$

با جای‌گذاری مقادیر F_1، F_2، F_3 و F_4 در معادلات تعادل، معادلات برحسب α و Δ_1 شده و تبدیل به دو معادله دو مجهولی می‌شود.

$$\begin{cases} \frac{E}{60}\Delta_1 + \left(\frac{6E}{200}\Delta_1 - 9\alpha E\right) + \left(\frac{E}{50}\Delta_1 - 14\alpha E\right) + \left(\frac{E}{50}\Delta_1 - 18\alpha E\right) = 15000 \\ +300\left(\frac{6E}{200}\Delta_1 - 9\alpha E\right) + 700\left(\frac{E}{50}\Delta_1 - 14\alpha E\right) + 900\left(\frac{E}{50}\Delta_1 - 18\alpha E\right) - 4.5\times10^6 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta_1 E\left(\frac{1}{60} + \frac{6}{200} + \frac{1}{50} + \frac{1}{50}\right) - \alpha E\left(9 + 14 + 18\right) = 15000 \\ \Delta_1 E\left(+9 + 14 + 18\right) - \alpha E\left(2700 + 9800 + 16200\right) = +4.5\times10^6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1)\ \Delta_1 E\ \frac{13}{150} - 41\alpha E = 15000 \\ (2)\ -41\Delta_1 E - 28700\alpha E = 4.5\times10^6 \end{cases}$$

از حل دستگاه معادلات فوق برحسب $\Delta_1 E$ و αE جواب‌ها حاصل می‌شود.

$$①\rightarrow 41\alpha E = \Delta_1 E\,\frac{13}{150} - 15'000 \quad \Rightarrow \alpha E = \Delta_1 E\,\frac{13}{6'150} - \frac{15'000}{41}$$

$$②\rightarrow 41\Delta_1 E - 28'700\left(\Delta_1 E\,\frac{13}{6'150} - \frac{15'000}{41}\right) = 4.5\times10^{6}$$

$$41\Delta_1 E - \frac{182}{3}\Delta_1 E - 10.5\times10^{6} = 4.5\times10^{6}$$

$$\Delta_1 E\left(41 - \frac{182}{3}\right) = 4.5\times10^{6} - 10.5\times10^{6}$$

$$\Delta_1 E\left(-\frac{59}{3}\right) = -6\times10^{6}$$

$$\Delta_1 E = \frac{-6\times10^{6}}{-\frac{59}{3}} = \frac{18}{59}\times10^{6} = \underline{305'084.7}$$

$$\Delta_1 = \frac{305'084.7}{E} \quad ③$$

$$\alpha E = \frac{13}{6'150}\Delta_1 E - \frac{15'000}{41} = \frac{13}{6'150}\times 305'084.7 - \frac{15'000}{41}$$

$$\alpha E = 279.0$$

$$\alpha = \frac{279.}{E} \quad ④$$

با جایگذاری ③ و ④ در روابط نیروی میله‌ها، نیروی میله‌ها بدست می‌آید

$$F_1 = \frac{\Delta_1 E}{60} = \frac{\frac{305'084.7}{E}\times E}{60} = 5'084.7 \text{ kg}$$

$$F_2 = \frac{6}{200}E\Delta_1 - 9\alpha E = \frac{6}{200}(305084.7) - 9(279) = 6641.5 \text{ kg}$$

$$F_3 = \frac{E\Delta_1}{50} - 14\alpha E = \frac{305'084.7}{50} - 14(279) = 2'195.7 \ kg$$

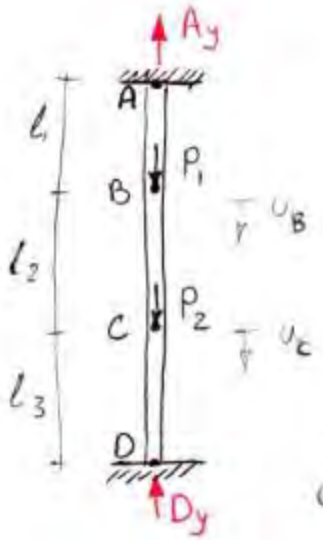
$$F_4 = \frac{E\Delta_1}{50} - 18\alpha E = \frac{305'084.7}{50} - 18(279) = 1'079.7 \ kg$$

$$F_1 + F_2 + F_3 + F_4 = 5'084.7 + 6'641.5 + 2'195.7 + 1'079.7$$

$$= 15'001.6 \ kg$$

روابط تعادل برقرار است اختلاف 1.6kg در نتایج مربوط به گرد کردن اعداد می‌باشد

مطلوبست تعیین نیروی میله‌های شکل مقابل



حل: اگر نقاط B و C به ترتیب برابر U_B و U_C به پایین حرکت کنند لذا

① $\Delta L_1 = U_B$

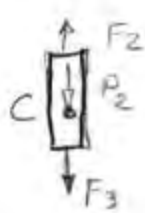
② $\Delta L_2 = U_C - U_B$

③ $\Delta L_3 = -U_C$

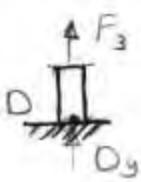
①, ③, ② $\Rightarrow$ $\boxed{\Delta L_2 = \Delta L_3 - \Delta L_1}$ (a)

$A_y - F_1 = 0 \Rightarrow \boxed{A_y = F_1}$ (b)

$F_1 - F_2 - P_1 = 0 \Rightarrow \boxed{F_1 - F_2 = P_1}$ (c)



$F_2 - F_3 - P_2 = 0 \Rightarrow \boxed{F_2 - F_3 = P_2}$ (d)



$F_3 + D_y = 0 \Rightarrow \boxed{F_3 = -D_y}$ (e)

برای کل میله

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow A_y + D_y - P_1 - P_2 = 0$ $\boxed{A_y + D_y = P_1 + P_2}$ (f)

(b), (e), (f) $\rightarrow$ $\boxed{F_1 - F_3 = P_1 + P_2}$ (I)

(c) $\rightarrow$ $\boxed{F_1 - F_2 = P_1}$ (II)

چون رابطه (d) مستقل از دو رابطه بالاست لذا می‌توان آن را به عنوان معادله سوم استفاده کرد و از رابطه (a) برای این منظور استفاده می‌کنیم ($\Delta L = \frac{PL}{EA}$)

$$\Delta L_2 = \Delta L_3 - \Delta L_1$$

$$\frac{F_2 L_2}{EA} = -\frac{F_3 L_3}{EA} - \frac{F_1 L_1}{EA} \Rightarrow F_2 L_2 = -F_3 L_3 - F_1 L_1$$

$$\boxed{F_2 = -\frac{L_3}{L_2} F_3 - \frac{L_1}{L_2} F_1}$$ (III)

(II), (III) $\rightarrow$ $F_1 - \left(-\frac{L_3}{L_2} F_3 - \frac{L_1}{L_2} F_1\right) = P_1$

طرفین در L_2 ضرب

$$\Rightarrow F_1 L_2 + L_3 F_3 + L_1 F_1 = P_1 L_2 \Rightarrow F_1(L_2 + L_1) + L_3 F_3 = P_1 L_2$$

(I) $\rightarrow$ $F_3 = F_1 - P_1 - P_2$ (V)

(IV), (V) $\Rightarrow$ $F_1(L_1 + L_2) + L_3(F_1 - P_1 - P_2) = P_1 L_2$

$$F_1(L_1 + L_2 + L_3) - L_3 P_1 - L_3 P_2 = P_1 L_2$$

$$F_1 = \frac{P_1 L_2 + P_1 L_3 + P_2 L_3}{L_1 + L_2 + L_3} = \boxed{\frac{P_1(L_2 + L_3) + P_2 L_3}{L_1 + L_2 + L_3}}$$

(c) → $F_3 = F_1 - P_1 - P_2 = \dfrac{P_1(L_2+L_3) + P_2 L_3 - P_1(L_1+L_2+L_3) - P_2(L_1+L_2+L_3)}{L_1+L_2+L_3}$

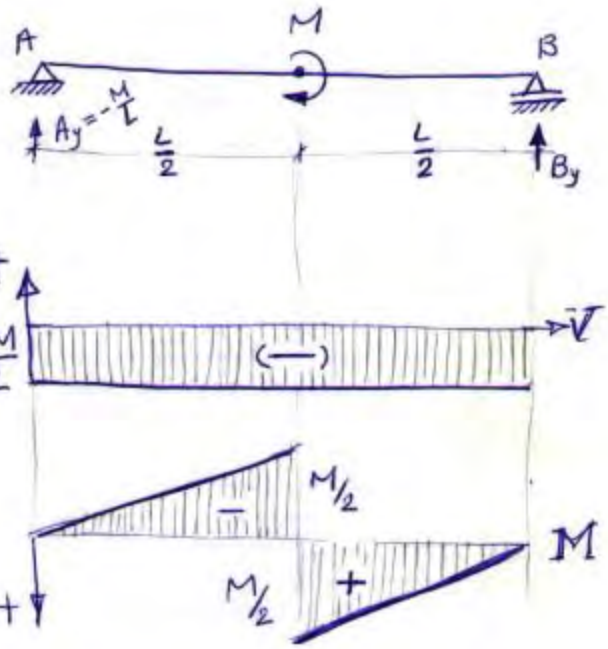
$$F_3 = \frac{P_1(L_2+L_3-L_1-L_2-L_3) + P_2(L_3-L_1-L_2-L_3)}{L_1+L_2+L_3}$$

$$\boxed{F_3 = \frac{-PL_1 - P_2(L_1+L_2)}{L_1+L_2+L_3}}$$

(d) → $F_2 = P_2 + F_3 = P_2 + \dfrac{-P_1L_1 - P_2(L_1+L_2)}{L_1+L_2+L_3} = \dfrac{P_2(L_1+L_2+L_3) - P_1L_1 - P_2(L_1+L_2)}{L_1+L_2+L_3}$

$$F_2 = \frac{P_2(L_1+L_2+L_3-L_1-L_2) - P_1L_1}{L_1+L_2+L_3} = \boxed{\frac{P_2L_3 - P_1L_1}{L_1+L_2+L_3}}$$

۱- دیاگرام برش و خمش تیر رسم کنید

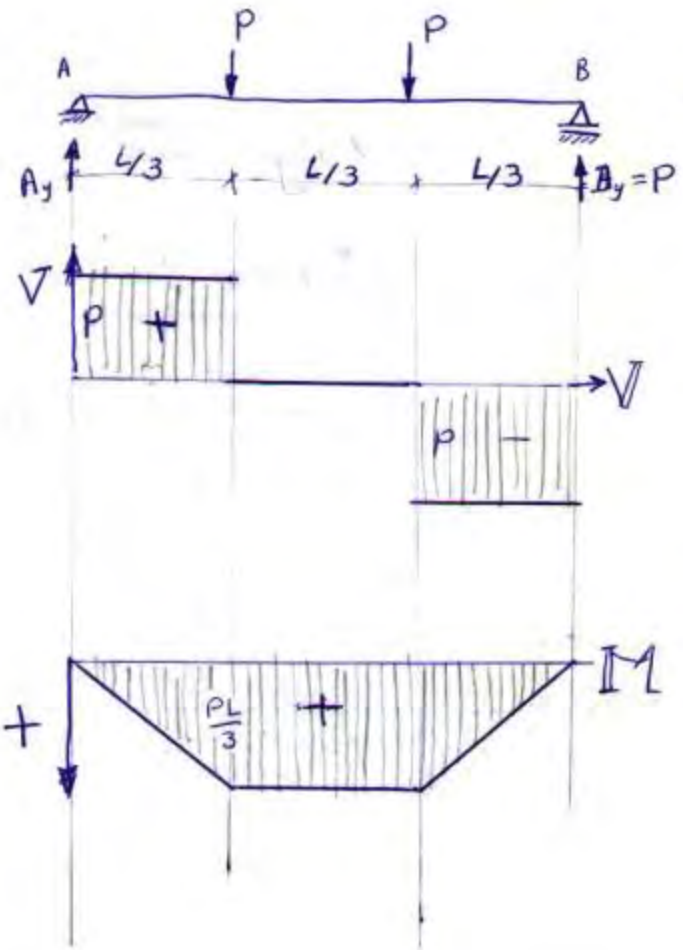


$\circlearrowleft +\sum M_A=0$

$B_y \times L - M = 0 \Rightarrow B_y = M/L$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow A_y + \frac{M}{L} = 0 \Rightarrow A_y = -\frac{M}{L}$

۲- دیاگرام برش و خمش تیر مقابل را رسم نمایید



$\circlearrowleft \Sigma M_A=0 \Rightarrow -P\frac{L}{3} - P\frac{2L}{3} + B_y \cdot L = 0$

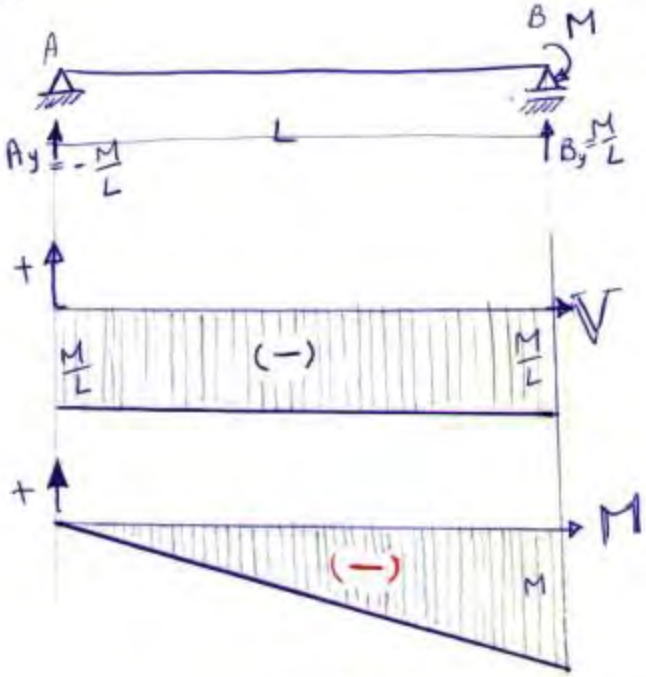
$L\,B_y = \frac{3L}{3} \cdot P$

$B_y = P$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow A_y - P - P + P = 0$

$A_y = P$

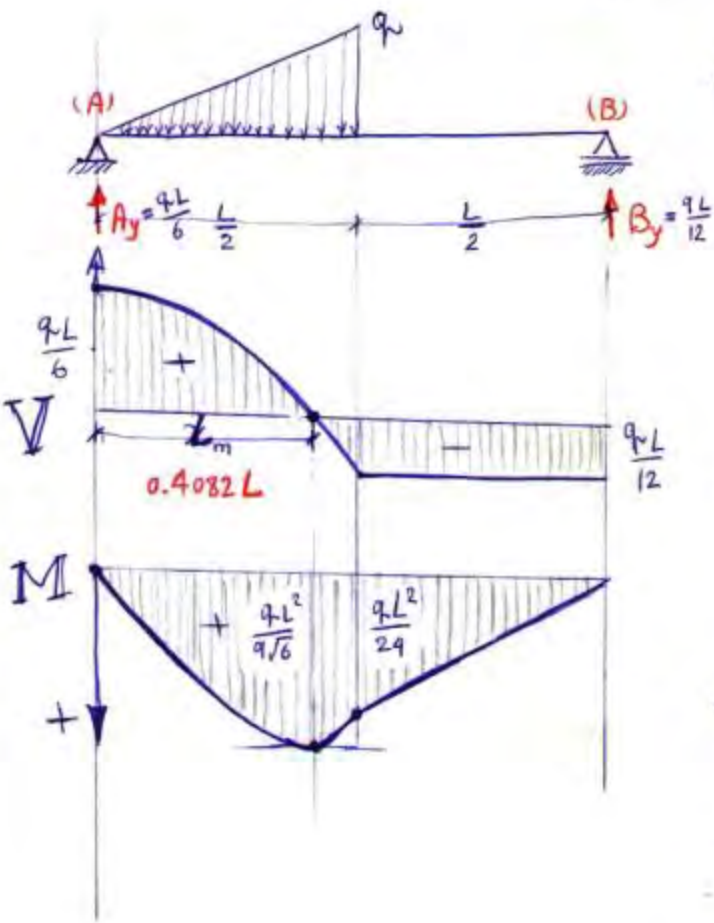
۳. دیاگرام برش و خمش تیر مقابل را رسم نمایید.



$\curvearrowleft \Sigma M_A = 0 \Rightarrow B_y \cdot L - M = 0 \Rightarrow B_y = \frac{M}{L}$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow A_y + \frac{M}{L} = 0 \Rightarrow A_y = -\frac{M}{L}$

۴. دیاگرام تیرهای برش و خمش تیر را رسم نمایید.



$\curvearrowleft \Sigma M_A = 0 \Rightarrow \left(-q \cdot \frac{L}{2} \cdot \frac{L}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{L}{2}\right) + B_y \cdot L = 0$

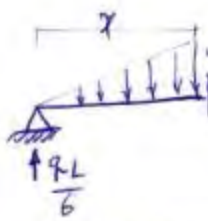
$B_y \cdot L = \frac{qL^2}{12} \Rightarrow B_y = \frac{qL}{12}$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow -\frac{qL}{4} + A_y + \frac{qL}{12} = 0$

$A_y = \frac{qL}{4} - \frac{qL}{12} = \frac{qL}{6}$

برای رسم دیاگرام لنگر از دو روش می‌توان استفاده کرد

الف) بدست آوردن معادله برش



$\frac{L}{2} \quad \frac{q}{x}$

$q(x) = \frac{q \cdot x}{L/2} = \frac{2qx}{L}$

$V = \frac{qL}{6} - \frac{2x}{L} q \times \frac{x}{2} = \frac{qL}{6} - \frac{qx^2}{L}$

برای اینکه L_m را پیدا کنیم می‌بایست $V = 0$ قرار دهیم

$V = 0 \Rightarrow \frac{qL}{6} - \frac{x^2 q}{L} = 0 \Rightarrow \frac{L}{6} = \frac{x^2}{L}$

$x^2 = \frac{L^2}{6} \Rightarrow x = \frac{L}{\sqrt{6}} = L_m$

$M_m = \int_0^{L_m} V dx = \left(\frac{qL}{6}x - \frac{qx^3}{3L}\right)\Big|_0^{L/\sqrt{6}} = \frac{qL^2}{6\sqrt{6}} - \frac{qL^3}{108\sqrt{6}L}$

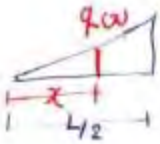
$M_m = \frac{qL^2}{6\sqrt{6}} - \frac{qL^2}{18\sqrt{6}} = \frac{3qL^2 - qL^2}{18\sqrt{6}} = \frac{2qL^2}{18\sqrt{6}} = \frac{qL^2}{9\sqrt{6}}$

$M_m = 0.0454\, qL^2$

3/8 V.

$$M_{L/2}=\int_0^{L/2} V\,dx=\left(\frac{qL}{6}x-\frac{qx^3}{3L}\right)\Big|_0^{L/2}=\frac{qL^2}{12}-\frac{qL^3}{3\times 8L}=$$

$$M_{L/2}=\frac{qL^2}{12}-\frac{qL^2}{24}=\frac{qL^2}{24}$$



$$\frac{q}{L/2}=\frac{q(x)}{x}\Rightarrow q(x)=\frac{2xq}{L}$$

$$M_{L/2}=0.0416\,qL^2$$

ب) برای بدست آوردن معادله برشی با استفاده از انتگرال ازیاب.

$$V=\int q\,dx=\int -\frac{2xq}{L}dx=-\frac{2q}{L}\int x\,dx=-\frac{2q}{L}\frac{x^2}{2}+C_1$$

$$\begin{cases} x=0 \\ V=A_y=\frac{qL}{6}\end{cases}\Rightarrow C_1=\frac{qL}{6}\Rightarrow V=-\frac{qx^2}{L}+\frac{qL}{6}$$

$$V=0\Rightarrow -\frac{qx^2}{L}+\frac{qL}{6}=0\quad \frac{qx^2}{L}=\frac{qL}{6}\Rightarrow x^2=\frac{L^2}{6}\quad x=\frac{L}{\sqrt{6}}$$

برای بدست آوردن معادله گشتاور میتوان از روش انتگرال استفاده کرد

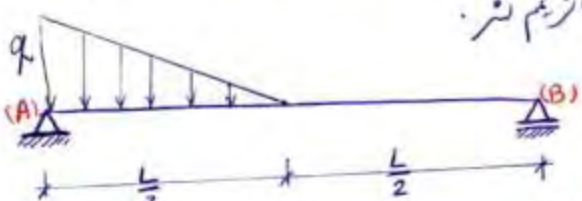
$$M=\int V\,dx=\int\left(-\frac{qx^2}{L}+\frac{qL}{6}\right)dx=-\frac{q}{L}\frac{x^3}{3}+\frac{qL}{6}x+C_2$$

$$\begin{cases} x=0 \\ M=0\end{cases}\Rightarrow -\frac{q}{L}\frac{(0)^3}{3}+\frac{qL}{6}(0)+C_2=0\Rightarrow C_2=0\Rightarrow M=-\frac{qx^3}{3L}+\frac{qLx}{6}$$

$$x=L_m=\frac{L}{\sqrt{6}}\Rightarrow M_{L_m}=\frac{-qL^3}{3(\sqrt{6})^3L}+\frac{qL\cdot L}{6\sqrt{6}}=\frac{-qL^2}{3\times 6\sqrt{6}}+\frac{qL^2}{6\sqrt{6}}=\frac{-qL^2+3qL^2}{18\sqrt{6}}=\frac{2qL^2}{18\sqrt{6}}=\frac{qL^2}{9\sqrt{6}}=0.0454qL^2$$

$$x=\frac{L}{2}\Rightarrow M_{L/2}=-\frac{qL^3}{3\times 8L}+\frac{qL^2}{6\times 2}=\frac{-qL^2}{24}+\frac{qL^2}{12}=\frac{-qL^2+2qL^2}{24}=\frac{qL^2}{24}=0.0417\,qL^2$$

۵. مطلوبست ترسیم دیاگرام نیروی برشی و خمشی تیر مقابل و تعیین مکزیمم گشتاور.



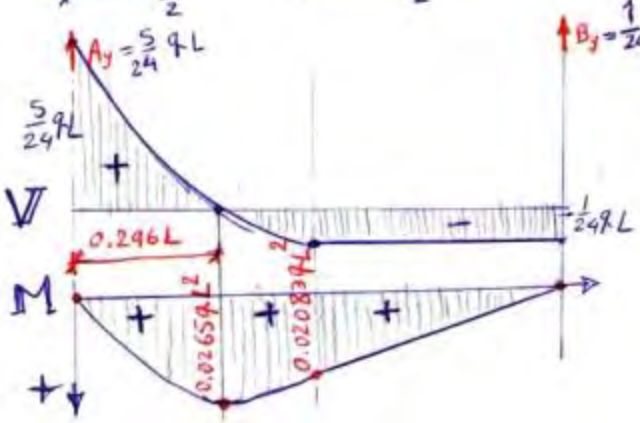
$$+\circlearrowleft\sum M_B=0\Rightarrow -\frac{q}{2}L\frac{L}{2}\left(\frac{L}{2}+\frac{2}{3}\frac{L}{2}\right)+A_y\cdot L=0$$

$$A_y\cdot L=\frac{qL}{4}\left(\frac{3L+2L}{6}\right)=\frac{qL}{4}\left(\frac{5}{6}L\right)=\frac{5qL^2}{24}$$

$$A_y=\frac{5qL}{24}$$

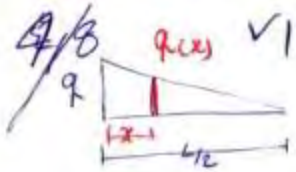
$$\sum F_y=0\Rightarrow -\frac{q}{2}\cdot\frac{L}{2}+B_y+\frac{5qL}{24}=0$$

$$B_y=\frac{qL}{4}-\frac{5qL}{24}=\frac{qL}{24}$$

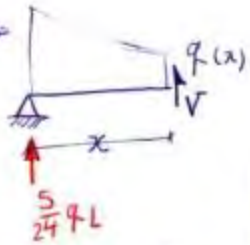


برای ترسیم منحنی برش می توان از روش مقطع استفاده کرد.

4/8 ✓1



$$\frac{q(x)}{L/2-x}=\frac{q}{L/2} \Rightarrow q(x)=q\,\frac{\frac{L}{2}-x}{\frac{L}{2}}=q\,\frac{L-2x}{L}$$



$$V=\frac{5}{24}q\cdot L-\frac{q+q\frac{L-2x}{L}}{2}\times x=\frac{5}{24}qL-q\,\frac{\frac{L+L-2x}{L}}{2}=\frac{5}{24}qL-q\,\frac{2L-2x}{2L}x$$

$$\boxed{V=q\left(\frac{5L}{24}-\frac{L-x}{L}x\right)=q\left(\frac{5L}{24}-x+\frac{x^2}{L}\right)}$$

برای گشتاور ماکزیمم $V=0 \rightarrow q\left(\frac{5L}{24}-\frac{L-x}{L}x\right)=0 \Rightarrow \frac{5L}{24}-\frac{xL-x^2}{L}=0 \Rightarrow$ طرفین L

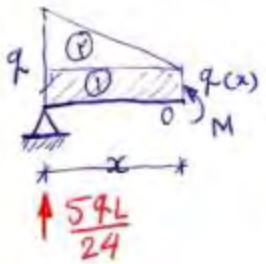
$$\frac{5L^2}{24}-xL+x^2=0$$

$$\Delta=(-L)^2-4(1)\left(\frac{5L^2}{24}\right)=L^2-\frac{5L^2}{6}=\frac{L^2}{6}$$

$$x_m=\frac{-(-L)\pm\sqrt{\Delta}}{2(1)}=\frac{L\pm\frac{L}{\sqrt{6}}}{2}=\frac{L}{2}\pm\frac{L}{2\sqrt{6}}=\begin{cases}\frac{\sqrt{6}-1}{2\sqrt{6}}L=0.296L & \text{محل گشتاور ماکزیمم}\\ \frac{\sqrt{6}+1}{2\sqrt{6}}L & \text{غیر قابل قبول}\end{cases}$$

علامت مثبت بیرون از $x<\frac{L}{2}$ است

برای معادله لنگر می‌توان هم از V انتگرال گرفت و هم با استفاده از جسم آزاد بدست آورد. در مثال قبل از V انتگرال گرفتیم در این مثال از جسم آزاد استفاده می‌کنیم



$$+\circlearrowleft\sum M_0=0 \Rightarrow q(x)\cdot x\cdot\frac{x}{2}+\frac{q-q(x)}{2}\times x\times\frac{2}{3}x-\frac{5qL}{24}x+M=0$$

$$M=-q(x)\frac{x^2}{2}-\frac{q-q(x)}{3}x^2+\frac{5qL}{24}x=x^2\left(\frac{-3q(x)-2q+2q(x)}{6}\right)+\frac{5qL}{24}x$$

$$M=\frac{x^2}{6}\left(-2q-q(x)\right)+\frac{5qL}{24}x=\frac{x^2}{6}\left(-2q-q\frac{L-2x}{L}\right)+\frac{5qL}{24}x$$

$$M=\frac{x^2q}{6}\left(-2-1+\frac{2x}{L}\right)+\frac{5qL}{24}x=q\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3L}+\frac{5L}{24}x\right)$$

$$\boxed{M=q\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3L}+\frac{5L}{24}x\right)}$$

$$x=\frac{\sqrt{6}-1}{2\sqrt{6}}L \Rightarrow M_m=q\left(\frac{6-2\sqrt{6}+1}{24\times2}L^2+\frac{6\sqrt{6}-3\times6\times1+3\sqrt{6}-1}{3\times8\times6\sqrt{6}}\frac{L^3}{L}+\frac{5L}{24}\frac{\sqrt{6}-1}{2\sqrt{6}}L\right)$$

$$M_m=qL^2\left(\frac{-21\sqrt{6}+36+9\sqrt{6}-19+15\sqrt{6}-15}{144\sqrt{6}}\right)=qL^2\left(\frac{3\sqrt{6}+2}{144\sqrt{6}}\right)=0.0265\,qL^2$$

$$x=\frac{L}{2} \Rightarrow M_{L/2}=q\left(-\frac{L^2}{4\times2}+\frac{L^3}{3\times8L}+\frac{5L^2}{24\times2}\right)=qL^2\left(-\frac{1}{8}+\frac{1}{24}+\frac{5}{48}\right)=\frac{qL^2}{48}=0.0283\,qL^2$$

5/8 ۷۲ برای بدست آوردن M می‌توان از انتگرال گیری استفاده کرد. در اینجا این روش را نیز نشان می‌دهیم.

$$M=\int V dx=\int q\left(\frac{5L}{24}-x+\frac{x^2}{L}\right)dx=q\left(\frac{5L}{24}x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3L}\right)+C$$

$$x=0 \Rightarrow M=0 \Rightarrow q\left(\frac{5L}{24}(0)-\frac{(0)^2}{2}+\frac{(0)^3}{3L}\right)+C=0 \Rightarrow C=0$$

$$\boxed{M=q\left(\frac{x^3}{3L}-\frac{x^2}{2}+\frac{5L}{24}x\right)}$$

برای بدست آوردن میزان لنگر در وسط دهانه و نیز در نقطه ماکزیمم می‌توان با جایگذاری مقدار را در کیلی آن و ساده سازی آن را حل کرد و نیز می‌توان با جایگذاری مقدار تقریبی اعشاری آن محاسبه کرد برای نشان دادن این روش در این قسمت با جایگذاری اعشاری بعدی در حل و بدست آوردن مقادیر لنگرها می‌کنیم.

$$x=\frac{\sqrt{6}-1}{2\sqrt{6}}L=0.296L$$

$$M_m=q\left(\frac{(0.296L)^3}{3L}-\frac{(0.296L)^2}{2}+\frac{5L}{24}(0.296L)\right)=qL^2(0.00864-0.04381+0.06167)$$

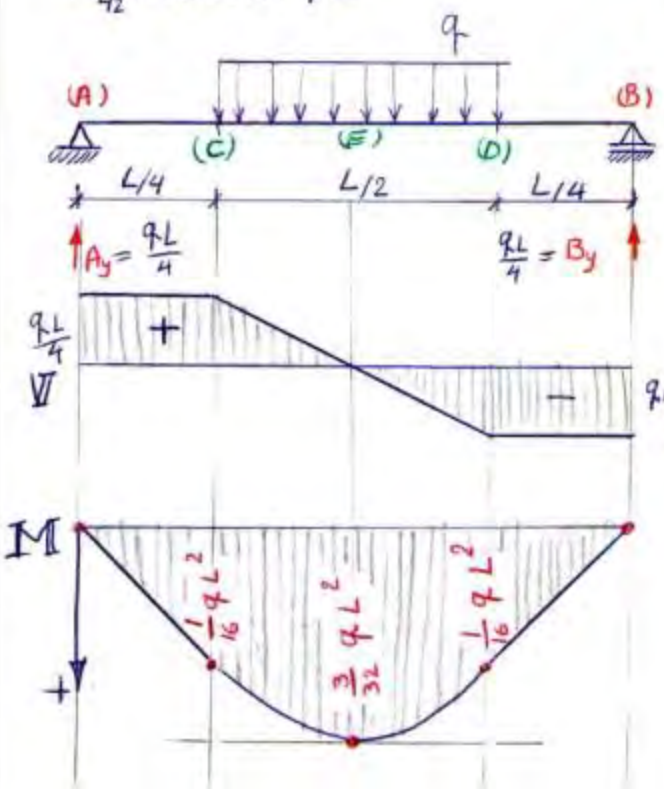
$$M_m=0.02650\,qL^2$$

$$x=\frac{L}{2}=0.5L$$

$$M_{L/2}=q\left(\frac{(0.5L)^3}{3L}-\frac{(0.5L)^2}{2}+\frac{5L}{24}(0.5L)\right)=qL^2(0.04167-0.12500+0.10417)$$

$$M_{L/2}=0.02083\,qL^2$$

ع. مطلوبیت تریم دیاگرام برش و خمش تیر متقابل و تعیین لنگر ماکزیمم



$$\curvearrowleft \Sigma M_A=0 \Rightarrow -q\cdot\frac{L}{2}\left(\frac{L}{4}+\frac{L}{2}\times\frac{1}{2}\right)+B_y\cdot L=0$$

$$B_y\cdot L=\frac{qL}{2}\left(\frac{2L}{4}\right) \Rightarrow B_y=\frac{qL}{4}$$

$$\Sigma F_y=0 \Rightarrow -\frac{q\cdot L}{2}+\frac{qL}{4}+A_y \Rightarrow A_y=\frac{qL}{4}$$

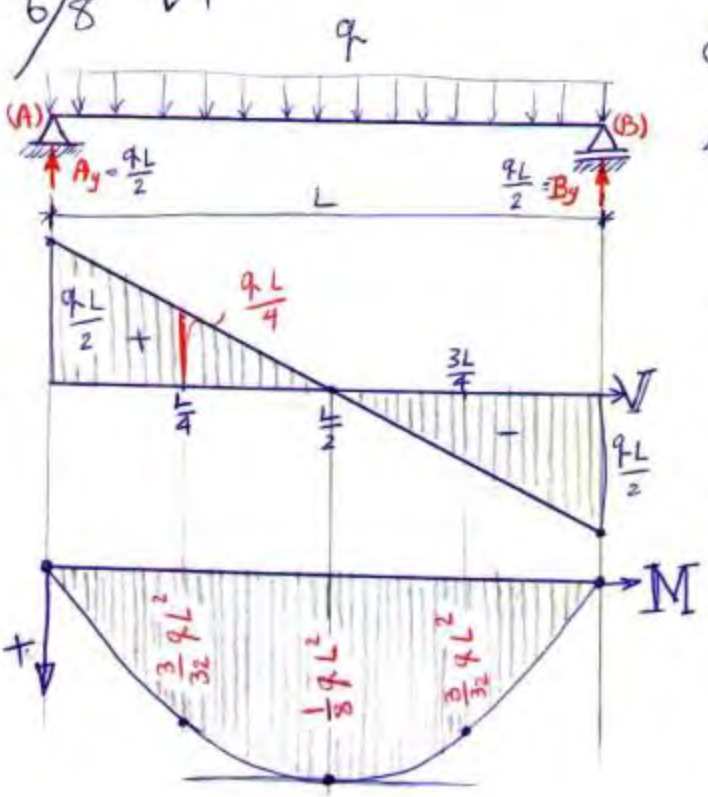
$$M_A=0$$

$$M_B=M_C=\frac{qL}{4}\times\frac{L}{4}=\frac{qL^2}{16}$$

$$M_E=\frac{qL}{4}\times\frac{L}{4}+\frac{1}{2}\frac{qL}{4}\times\frac{L}{4}=\frac{qL^2}{16}+\frac{qL^2}{32}=\frac{3}{32}qL^2$$

6/8 ۷۳

۷. مطلوبست ترسیم دیاگرام نیروی برشی و لنگر خمشی تیر مقابل



$\curvearrowleft \sum M_A = 0 \quad -q \cdot L \times \frac{L}{2} + B_y \cdot L \Rightarrow B_y = \frac{qL}{2}$

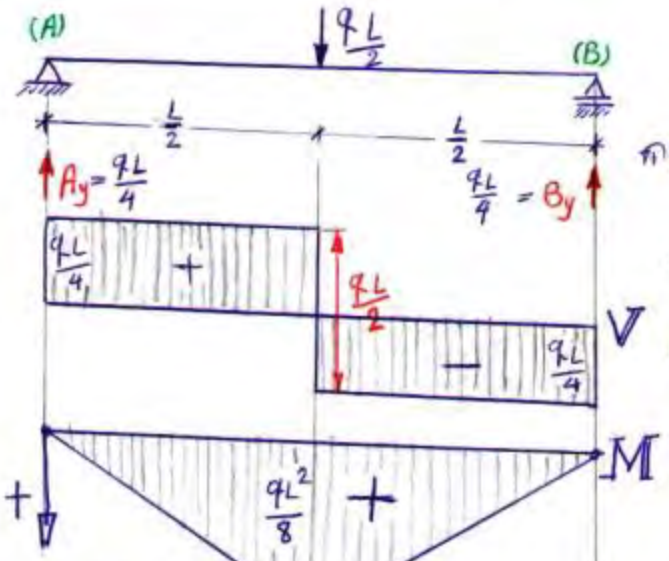
$\Sigma F_y = 0 \quad -q \cdot L + A_y + \frac{qL}{2} = 0 \Rightarrow A_y = \frac{qL}{2}$

$V = 0 \Rightarrow x = \frac{L}{2}$

$M_{L/2} = M_{max} = \frac{qL}{2} \times \frac{L}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{qL^2}{8} = 0.125qL^2$

$M_{L/4} = M_{B/4L} = \left(\frac{qL}{2} + \frac{qL}{4}\right)\frac{1}{2} \times \frac{L}{4} = \frac{3}{32}qL^2 = 0.09375qL^2$

۸. مطلوبست ترسیم دیاگرام نیروی برشی و لنگر خمشی تیر مقابل

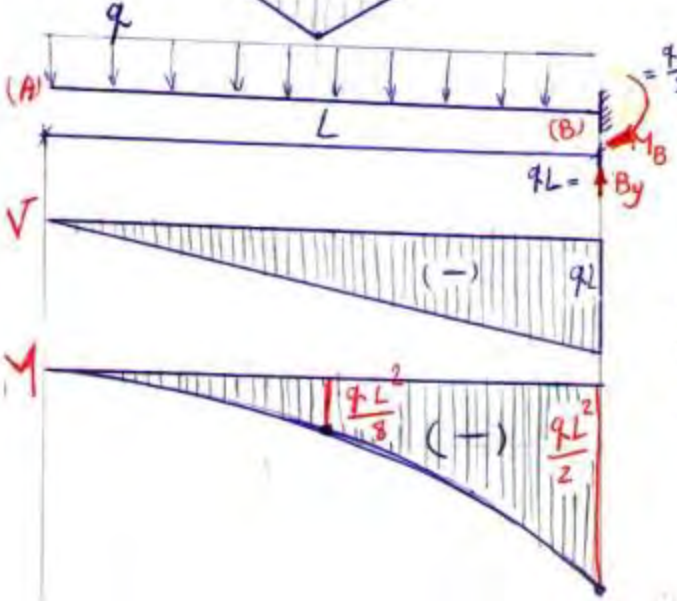


$\curvearrowleft \sum M_A = 0 \quad -\frac{qL}{2} \times \frac{L}{2} + B_y \cdot L = 0 \Rightarrow B_y = \frac{qL}{4}$

$\Sigma F_y = 0 \quad -\frac{qL}{2} + \frac{qL}{4} + A_y = 0 \Rightarrow A_y = \frac{qL}{4}$

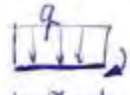
$M_{max} = \frac{qL}{4} \times \frac{L}{2} = \frac{qL^2}{8}$

۹. مطلوبست ترسیم دیاگرام برش و لنگر تیر مقابل



$\curvearrowleft \sum M_B = 0 \Rightarrow qL \times \frac{L}{2} - M_B = 0 \Rightarrow M_B = \frac{qL^2}{2}$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow -qL + B_y = 0 \Rightarrow B_y = qL$

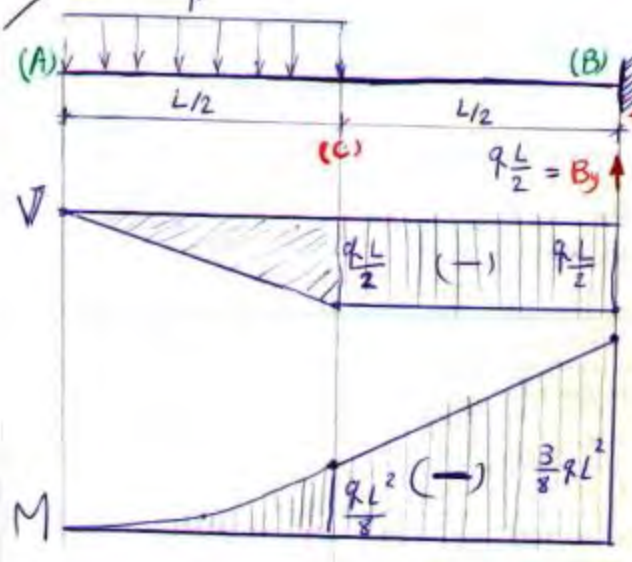


$M = \frac{qx^2}{2}$

$M_{L/2} = \frac{q}{2}\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{qL^2}{8}$

7/8 ۷۴

۱۰- مطلوبست ترسیم دیاگرام برشی و لنگر خمشی تیر مقابل



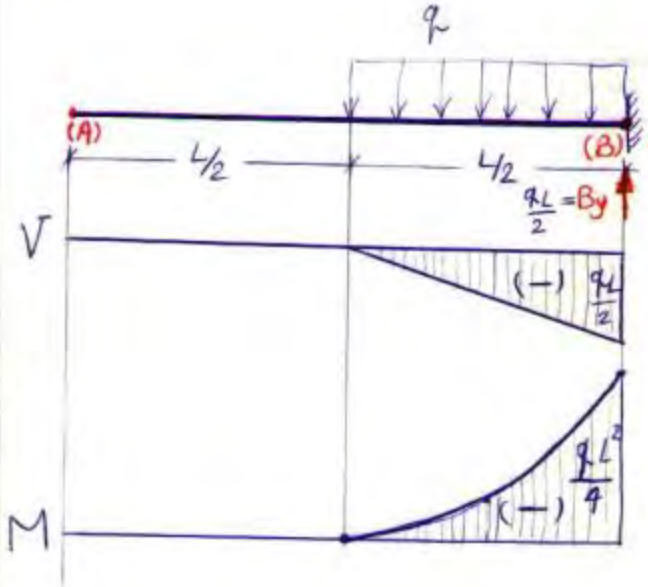
$\curvearrowleft \Sigma M_B = 0 \Rightarrow \frac{qL}{2}\left(\frac{L}{2}+\frac{L}{4}\right) - M_B = 0$

$M_B = \frac{3}{8}qL^2$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow -q \times \frac{L}{2} + B_y = 0 \Rightarrow B_y = \frac{qL}{2}$

$M_C = \frac{qL}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{L}{2} = \frac{qL^2}{8}$

۱۱- مطلوبست ترسیم دیاگرام برشی و خمشی تیر مقابل

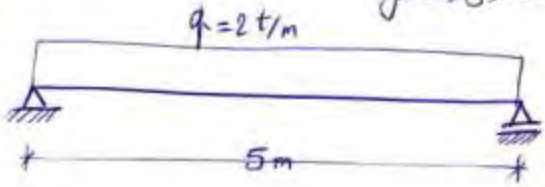


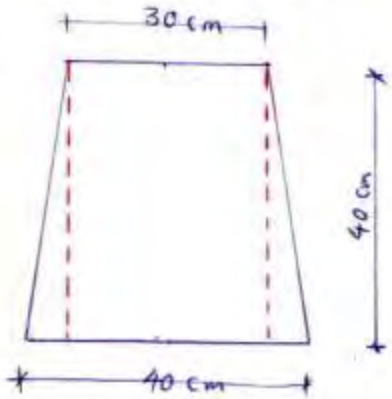
$\curvearrowleft \Sigma M_B = 0 \Rightarrow \frac{qL}{2} \times \frac{L}{2} - M_B \Rightarrow M_B = \frac{qL^2}{4}$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow -\frac{qL}{2} + B_y = 0 \Rightarrow B_y = \frac{qL}{2}$

8/8 ۷۵

۱۲- در تیر مقابل با مقطع مطابق شکل مطلوبست تعیین میزان تنش فشاری و کششی



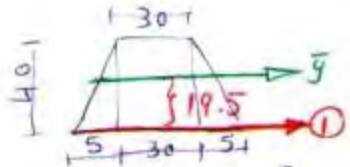


حل): ۱- گشتاور ماکزیمم تیر برابر است با:

$$M_{max} = \frac{qL^2}{8} = \frac{2\times 5^2}{8} = \frac{50}{8}\ t.m$$

۲- مشخصات سطح مقطع را بدست می‌آوریم، شکل را به شکلهای ساده تجزیه کرده و مرکز سطح آن را بدست می‌آوریم

$$\bar{y} = \frac{2\times 40\times 5/2\times \frac{40}{3} + 30\times 40\times \frac{40}{2}}{2\times 40\times 5/2 + 40\times 30} = 19.0476\ cm$$



$$I_1 = 2\left(\frac{5\times 40^3}{12}\right) + \frac{30\times 40^3}{3} = 693'333.3\ cm^4$$

$$I_{\bar{y}} = I_1 - A\bar{y}^2 = 693'333.3 - \left(\frac{30+40}{2}\right)\times 40\times 19.0476^2 = 185'397.8\ cm^4 \cong \boxed{185'398.0\ cm^4}$$

روش اول تعیین ممان اینرسی

روش دوم برای تعیین ممان اینرسی

$$I_{\bar{y}} = 2\left[\left(\frac{5\times 40^3}{36}\right) + \left(\frac{40}{3} - 19.05\right)^2 \times \frac{40\times 5}{2}\right] + \frac{30\times 40^3}{12} + (40\times 30)\left(\frac{40}{2} - 19.05\right)^2$$

(5.7143 ; 0.9524)

$$I_{\bar{y}} = 24'308.42 + 161'088.48 = 185'396.7 \cong \boxed{185'397.0\ cm^4}$$

$$\sigma_c = \frac{\frac{50}{8}\times 10^5 \times (40 - 19.0476)}{185'398.0} = 70.6332\ kg/cm^2 = \boxed{70.63\ kg/cm^2}$$

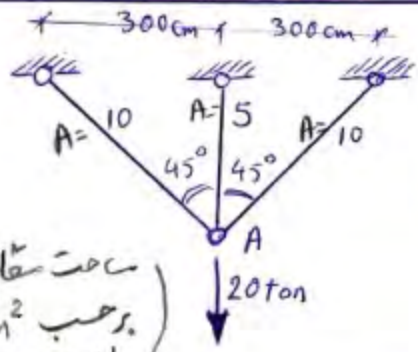
$$\sigma_T = \frac{\frac{50}{8}\times 10^5 \times 19.0476}{185'398.0} = 64.2119\ kg/cm^2 = \boxed{64.21\ kg/cm}$$

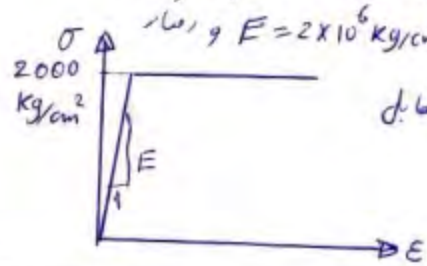
۸۳

آزمون پایان ترم مقاومت مصالح — انستیتو عمران - آموزشکده فنی شهید مهاجر — وقت ۲:۳۰

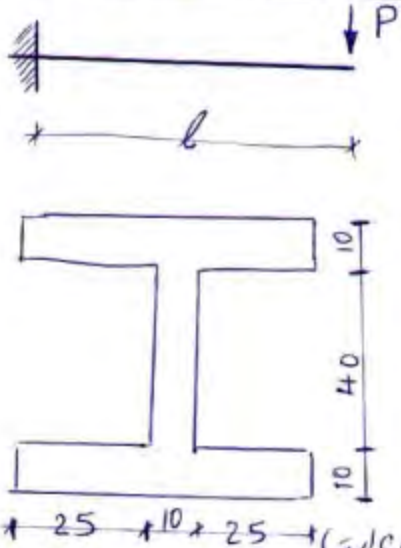
اعلام نتایج ۸۹/۶/۱۳ (ساعت ۱۰ الی ۱۲) — تاریخ: ۸۹/۵/۳۱

۱- در شکل روبرو مطلوبست تعیین تغییر مکان قائم نقطه (A) و نیروی میله ها. مدول ارتجاعی و رفتار میله ها مطابق منحنی تنش - کرنش مقابل است (۵ نمره)

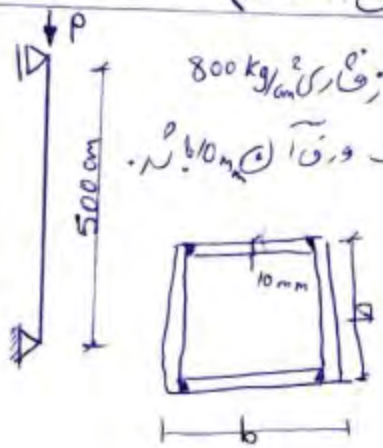




۲- در تیر مقابل اولاً معادلات خیز و شیب تیر را بدست آورید. ثانیاً: پس از آن در صورتیکه مقطع تیر مطابق شکل با شد و $P=5^{ton}$ و $\ell=5m$ و $E=2\times10^5 Kg/cm^2$ با شد، مطلوبست تعیین تنش حداکثر فشاری و کششی در تیر. ثالثاً: اگر تنش مجاز در مصالح برابر $80\ kg/mm^2$ با شد حداکثر نیروی P را تعیین کنید. ابعاً: میزان حداکثر تنش برشی ایجاد شده در تیر را تعیین کنید. (۷ نمره)



۳- در ستون مقابل با $P=75^{ton}$ می باشد در صورتیکه تنش مجاز فشاری $800\ kg/cm^2$ با شد، مطلوبست ابعاد ستون به نحوی که مقطع آن مربع و صلب ترین ورق آن 10_{mm} با شد. (۳ نمره)

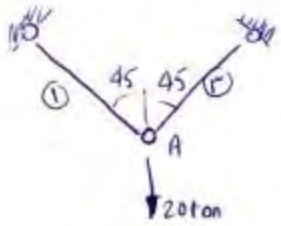


$\frac{kl}{r}$	F_a
114	810
115	796

استفاده از جزوه، کتاب و یادداشت شخصی ممنوع است

موفق باشید
شاهی

۱- چون سازه نامعین است از روش نیروها استفاده کرده و میله وسطی را حذف می‌کنیم (۱)



$\Sigma F_x = 0 \quad F_1 \cos 45 - F_3 \cos 45 \Rightarrow F_1 = F_3$

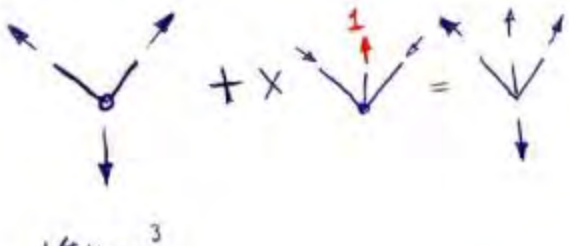
$\Sigma F_y = 0 \quad 2F_1 \sin 45 - 20 = 0 \Rightarrow F_1 = \frac{10}{\cos 45^\circ} = \frac{10}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 14.14 \text{ ton}$

$\delta_1 = \delta_3 = \frac{PL}{EA} = \frac{14.14 \times 10^3 \times 3 \times 50\sqrt{2}}{2 \times 10^6 \times 10} = 0.3 \text{ cm}$

$\delta_A = \frac{\delta_1}{\cos 45^\circ} = 0.42 \text{ cm}$ (۱)

$\Sigma F_y = 0 \quad -2F_{21}\cos 45 + 1 = 0 \Rightarrow F_{21} = \frac{1}{2\cos 45} = 0.707 \text{ kg}$

$\delta_{21} = \frac{PL}{EA} = \frac{0.707 \times 300}{2 \times 10^6 \times 5} = 2.12 \times 10^{-5} \text{ cm}$ (۲)



$X = \frac{\delta_A}{\delta_{21}} = \frac{0.42}{2.12 \times 10^{-5}} = 19'799 \text{ kg}$

$F_{21} = 19'799 \text{ kg/cm}^2$

$\sigma_2 = \frac{19'799}{5} = 3'959.8 \text{ kg} > 2000$ (۱)

بنابراین حرکت x و نیروی میله ② عبارت خواهد بود از

$\sigma = 2000 \Rightarrow F_2 = 2000 \times 5 = 10'000 \Rightarrow x = 10'000$

$F_1 = F_3 = 14'140 - X\,0.707 = 14'140 - 10'000 \times 0.707 = 7'070 \text{ kg}$

$\delta_A = 0.42 - X \cdot 2.12 \times 10^{-5} = 0.208 \text{ cm}$

(۱)

۲. ابتدا عکس العمل ها را بدست می آوریم:

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow A_y = P$

$\Sigma M_A = 0 \quad M_A = P.\ell$

(۱)

$M = (L-x)P$

$EI\theta = \int M\,dx = \int (L-x)P\,dx = P(Lx - \frac{x^2}{2}) + C_1$

$EIy = \int \theta\,dx = P(\frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{6}) + C_1 x + C_2$

$\begin{cases} x=0 \\ \theta=0 \end{cases} \Rightarrow C_1 = 0$

$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow C_2 = 0$

(۱)

$$EI\theta = P(Lx - \frac{x^2}{2})$$
$$EIy = P(\frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{6})$$

(۱)

ثانیاً: چون مقاطع مستطیلات روانار خنثی در وسط محور قائم قرار دارد

$I = \frac{1}{12}(60 \times 60^3 - (25 \times 2) \times 40^3)$ (۰/۵)

$I = 813'333\ cm^4$

$M_{max} = P.L = 5 \times 5 = 25\ t.m$

$\sigma_{c,c} = \frac{My}{I} = \frac{25 \times 10^5 \times 30}{813'333} = 92.21\ kg.cm$ (۱)

$80 = \frac{M \times 30}{813'333} \Rightarrow M = 2'168'888\ kg.cm = 21.69\ t.m$

$\sigma_{ق} = 80\ kg$ ق

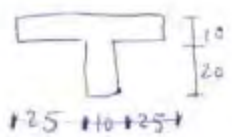
(۱)

$M = PL \rightarrow P = \frac{M}{L} = \frac{21.69}{5} = 4.34\ ton$

$V_{max} = P = 5\ ton = 5000\ kg$ (۱)

$\tau = \frac{V.Q}{Ie} = \frac{5000 \times 17'000}{813'333 \times 10} = 10.45\ kg/cm^2$

راه دوم:



$\bar{y} = \frac{10 \times 60 \times 25 + 20 \times 10 \times 10}{10 \times 60 + 20 \times 10} = 21.25$

(۰/۵) $Q = 17 \times (600 + 200) = 17'000\ cm^3$

۸۵

$$\sigma = \frac{P}{A} \Rightarrow A = \frac{P}{\sigma} = \frac{75'000}{800} = 93.75 \ cm^2$$ -۴

$$A = 4b \times 1 = 4b \Rightarrow \boxed{b = 23.43 \ cm}$$ (۱) از مقاومت مصالح

$$F_a = 800 \Rightarrow \frac{kl}{r} = 114.5 \Rightarrow \frac{1 \times 500}{r} = 114.5 \Rightarrow r = \underline{4.37} \ cm$$ (۰/۵)

$$r = \sqrt{\frac{I}{A}}$$

$$I = \frac{2 \times b^3}{12} + b \times 1 \left(\frac{b}{2}\right)^2 \times 2 = \frac{b^3}{6} + \frac{b^3}{2}$$

$$r = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{b^3/6 + b^3/2}{4b}} = b\sqrt{\frac{\frac{1+3}{6}}{4}} = b\sqrt{\frac{4}{24}} = \frac{b}{\sqrt{6}}$$

$$r = 4.37 \Rightarrow \boxed{b = 10.69}$$ (۱)

$$b = \max(23.43, 10.69) = 23.43$$ (۰/۵)

۸۶

شماره صندلی:

آموزشکده فنی شهید مهاجر اصفهان

اداره امور آموزشی

سئوالات امتحان درس : مقاومت مصالح

رشته : عمران نام مدرس : شاهی

تاریخ امتحان: ۸۹/۱۰/۲ مدت امتحان: ۹۰ دقیقه

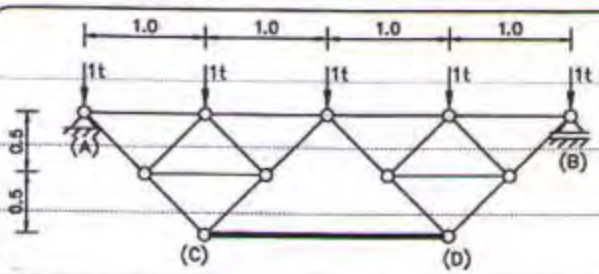
نام و نام خانوادگی :

شماره دانشجوئی :

تاریخ اعلام نمرات برای دانشجویان :

شماره ۱ بارم ۳

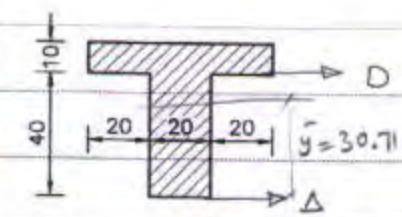
۱.در خرپای مقابل مشخصات میله CD $E=2x10^6 kg/cm^2$ و $A=8\ cm^2$ و $\alpha=1.2x10^6$ میباشد، مطلوبست:



الف-تغییر فاصله مابین گره‌های C و D در اثر بارگذاری نشان داده شده.

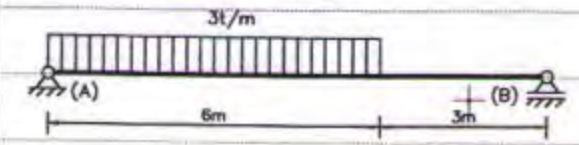
ب- در صورتیکه در حالت الف میله به اندازه 100C گرم شود فاصله مابین گره‌های C و D چقدر خواهد شد.

۵ ۲-در تیر مقابل مطلوبست ابعاد مقطع به سانتیمتر نشان داده شده است.



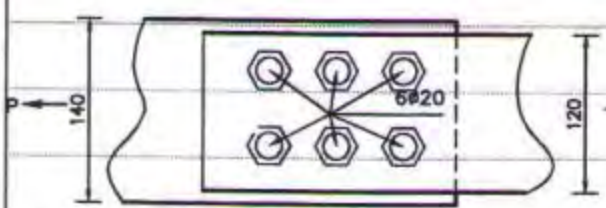
الف-ترسیم دیاگرام برش و خمش و تعیین حداکثرلنگر خمشی.

ب- تعیین حداکثر تنش فشاری و کششی.



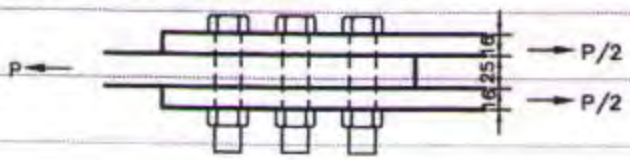
ج-تعیین محل و خیز حداکثر

۳ ۳- در اتصال مقابل با فرض Fv=960 kg/cm2 (تنش مجاز برشی پیچ ها) و $Ft=1000\ kg/cm^2$ (تنش مجاز تسمه‌ها) باشد. مطلوبست :



الف-تعیین حداکثر نیروئی که پیچ‌ها تحمل میکنند.

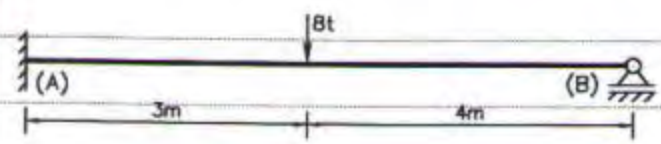
ب- تعیین حداکثر نیروئی که تسمه‌های 16mm تحمل میکنند.



ج- تعیین حداکثر نیروئی که تسمه‌های 25mm تحمل میکنند.

د- تعیین حداکثر نیروئی که کل اتصال تحمل میکند.

۴ ۴-در تیر نامعین زیر مطلوبست:



الف- تعیین عکس العمل تیرها

ب-ترسیم دیاگرام نیروهای برشی و خمشی.

امضاء مدرس

۱/۸۷

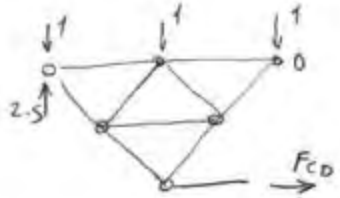
۱- برای تعیین نیروی عکس‌العمل داریم

$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \Rightarrow 1\times1 + 1\times(2) + 1\times3 + 1\times4 - B_y\cdot4 = 0$$

$$4B_y = 10 \Rightarrow B_y = 2.5 \text{ ton}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -5 + 2.5 + A_y = 0 \Rightarrow A_y = 2.5 \text{ ton}$$

(۰/۵)



برای محاسبه نیروی میله CD داریم:

$$+\circlearrowleft \sum M_O = 0 \Rightarrow -1\times1 + (2.5-1)\times2 - F_{CD}\times1 = 0$$

$$F_{CD} = 2 \text{ ton}$$ (۰/۵)

$$\Delta L_{CD} = \frac{PL}{EA} = \frac{2000\times200}{2\times10^6\times8} = 0.025 \text{ cm}$$ (۱)

$$\Delta L_{CD} = \alpha \Delta T L = 1.2\times10^{-6}\times100\times200 = 0.024 \text{ cm}$$ (۰/۵)

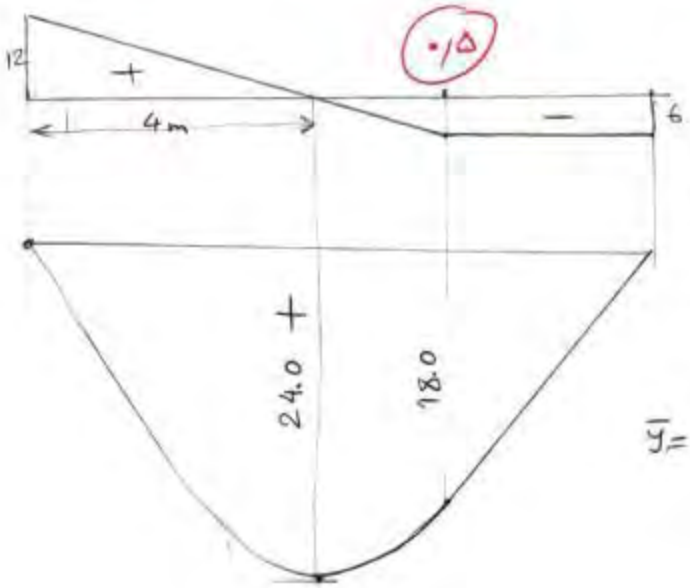
$$\Delta L_T = 0.025 + 0.024 = 0.049 \text{ cm}$$ (۰/۵)

۲-

$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \Rightarrow 3\times6\times\frac{6}{2} - 9\times B_y = 0 \Rightarrow 9B_y = 54 \Rightarrow B_y = 6 \text{ ton}$$ (۰/۵)

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -3\times6 + 6 + A_y = 0 \Rightarrow A_y = 12 \text{ ton}$$

(۰/۵)



$$\frac{x}{12} = \frac{6}{12+6} \quad x = \frac{12\times6}{18} = 4 \text{ m}$$

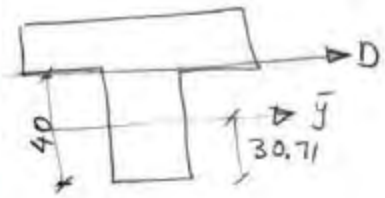
$$M_{max} = \frac{12\times4}{2} = 24 \text{ ton}$$ (۰/۵)

$$M_1 = 24 - (6-4)\times6/2 = 18$$

$$\bar{y} = \frac{20\times40\times\frac{40}{2} + 10\times60\times(40+\frac{10}{2})}{20\times40 + 10\times60} = 30.71 \text{ cm}$$

(۰/۵)

$A = 20\times40 + 60\times10 = 1400$



$I_D = \frac{1}{3}\times20\times40^3 + \frac{1}{3}\times60\times10^3 = 446'667 \ cm^4$ (1)

$I_{\bar{y}} + A\cdot(40-30.71)^2 = I_D \Rightarrow I_{\bar{y}} = I_D - (40-30.71)^2\cdot(1400) = 325'840.9 \ cm^4$

$\sigma = \frac{My}{I} = \frac{24\times10^5\times(30.71)}{325'840.9} = 226.2 \ Kg/cm^2$ (0.5)

$\sigma = \frac{My}{I} = \frac{24\times10^5(50-30.71)}{325'840.9} = 142.08 \ Kg/cm^2$ (0.5)

$v' = 0 \Rightarrow v_{max}$

$v' = \frac{3}{24\times9EI}(6^4 - 4\times6^3\times4 + 6\times6^2\times9^2 + 6\times6^2\times x^2 - 12\times6\times9\times x^2 + 4\times9x^3)$

$v' = \frac{1}{72EI}(11'232 - 612x^2 + 36x^3) \quad 0 \le x \le 6$

$\frac{x}{5}$	$\frac{v'}{+}$
5.5	−
5.25	−
5.125	+
5.187	−
5.15	−
5.14	−
5.13	−
5.1275	−
5.126	

(0.5)

$v_{max} = \frac{3x}{24\times9EI}(6^4 - 4\times6^3\times9 + 4\times6^2\times9^2 + 2\times6^2\times x^2 - 4\times6\times9\times x^2 + 9x^3)$

$x = 5.126$

$v_{max} = \frac{x}{72EI}(5184 - 144x^2 + 9x^3)$ (0.5)

$v_{max} = \frac{7868}{72EI}$

۳/ ۸۹

۳- الف) نیروی محوری ستون

$$F = 2\times 6 \times \frac{2^2\pi}{4} \times 960 = 36'191 \ kg$$ (۱)

ب) نیروی یک تسمه

$$P_{/2} = (12-2\times 2)(1.6)\times 1000 = 12'800 \ kg$$ (۰/۷۵)

ج)

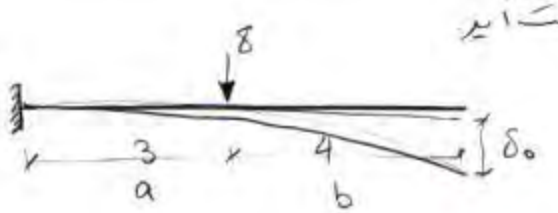
$$P = (14-2\times 2)\times 2.5 \times 1000 = 25'000 \ kg$$ (۰/۷۵)

د)

$$P_{\text{اتصال}} = min\left(F, P_{\text{تسمه}}, P_{\text{تسمه}}\right) = (36'191, 25'600, 25'000)$$ (۰/۵)

$$P_{\text{اتصال}} = \boxed{25'000}$$

۴- برای حل ابتدا تکیه‌گاه B را حذف می‌کنیم تا سازه معین پدید آید



$$\delta_0 = \frac{Pa^2}{6EI}(3x-a) = \frac{B_{13}^2}{6EI}(3\times 7-3)$$

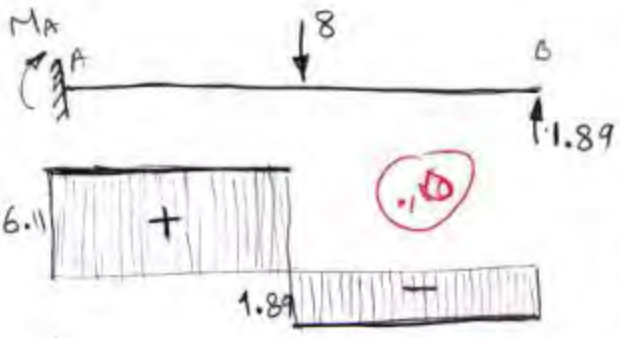
$x=7$

$$\delta_0 = \frac{216}{EI}$$ (۱)

$$\delta_1 = \frac{Px^2}{6EI}(3L-x) = \frac{1\times 7^2}{6EI}(3\times 7-7)$$

$x=7$

$$\delta_1 = \frac{114.33}{EI}$$ (۱)



$$X = \frac{\delta_0}{\delta_1} = \frac{216/EI}{114.33/EI} = 1.89 \ ton$$ (۰/۵)

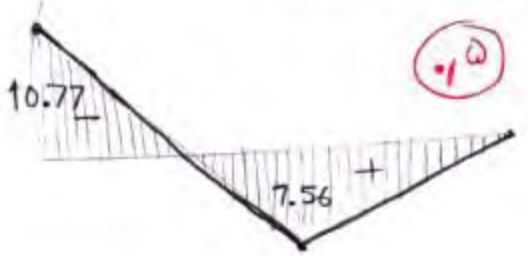
(۰/۵)

$$\vec{\Sigma} F_x = 0 \Rightarrow \boxed{A_x = 0}$$

$$\uparrow \Sigma F_y = 0 \quad A_y + 1.89 - 8 = 0 \Rightarrow \boxed{A_y = 6.11}$$

$$\circlearrowleft \Sigma M_A = 0 \Rightarrow 8\times 3 - 1.89\times 7 + M_A = 0$$ (۰/۵)

$$\boxed{M_A = -10.77}$$

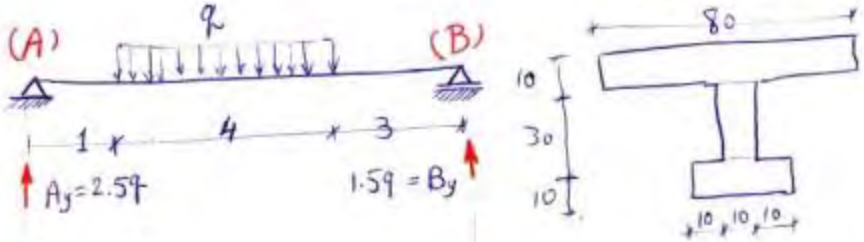


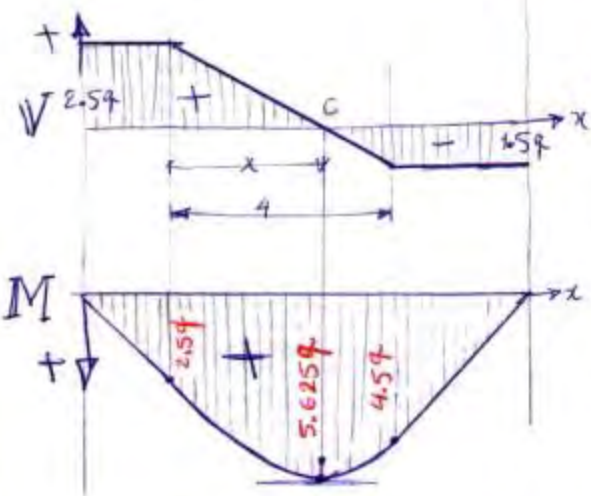
(۰/۵)

$$M_1 = -10.77 + 6.11\times 3 = \boxed{7.56}$$

۱۷/۶

۱. در شکل مقابل با فرض اینکه تنش مجاز کششی $\sigma_{T_a} = 40 kg/cm^2$ باشد، میزان حداکثر q را تعیین کنید.





$\circlearrowleft \Sigma M_A = 0 \Rightarrow \left[-4q \times (1+\frac{4}{2})\right] + B_y(1+4+3) = 0$

$B_y = 1.5q$

$\Sigma F_y = 0 \rightarrow 4q + 1.5q + A_y = 0 \Rightarrow A_y = 2.5q$

$\frac{x}{4} = \frac{2.5q}{(2.5+1.5)q} \Rightarrow x = 2.5\ m$

$M_c = M_{max} = 2.5q \times 1 + 2.5 \times 2.5q/2 = 5.625q$

$$\bar{y} = \frac{(30\times10\times5) + 30\times10\times(\frac{30}{2}+10) + 80\times10\times(30+10+\frac{10}{2})}{30\times10 + 30\times10 + 80\times10} = 32.14\ cm$$

$$I_x = \left[\frac{30\times10^3}{12} + (30\times10\times\underbrace{(32.14-\tfrac{10}{2})}_{27.14}^2)\right] + \left[\frac{10\times30^3}{12} + (30\times10\times\underbrace{(32.14-[15+10])}_{7.14}^2)\right] + \left[\frac{80\times10^3}{12} + (80\times10\times\underbrace{(45-32.14)}_{12.86}^2)\right]$$

$I = 400'238.1\ cm^4$

$\sigma = \frac{M\cdot c}{I} \rightarrow M = \frac{\sigma \cdot I}{c} = \frac{40\times400'238.1}{32.14} = 498'118.4\ kg.cm \equiv 4.981\ t.m$

کشش $c = 32.14$

فشار $c = 50 - 32.14 = 17.86$

$M = 5.625q = 4.981 \Rightarrow q = 0.8855\ t/m \equiv 885.5\ kg/m$

ب) با فرض اینکه تنش فشاری ماکزیمم $150 kg/cm^2$ باشد مطلوب تعیین نیروی محوری P

$\sigma = \frac{P}{A} \pm \frac{My}{I}$ $\quad 150 = \frac{P}{1400} \pm \frac{My}{I} = \frac{P}{1400} \pm \frac{498'118.4\times(17.86 \text{ یا } 32.14)}{400'238.1}$

$150 = \frac{P}{1400} \pm \begin{matrix} 22.22 & \text{فشار} \\ 40.0 & \text{کشش} \end{matrix}$ $\quad \frac{P}{1400} = 150 - 22.22$

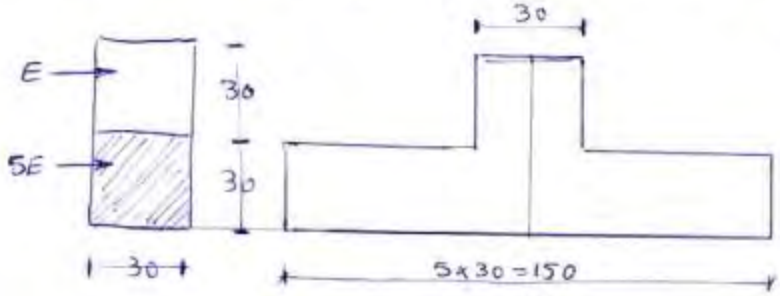
$P = 178'892\ kg$

2/6

ج - در مسئله روبرو مقطع تیر مطابق شکل مقابل با شد، مطلوبیت تعیین تنش حداکثر و حداقل در بخش

حل: بار وارد: معادل الاستیسیته 5E معادل آن

مقطع قرارداده شد



$$\bar{y} = \frac{150\times30\times\frac{30}{2} + 30\times30\times(30+\frac{30}{2})}{150\times30 + 30\times30} = 20 \text{ cm}$$

$$I_x = \left[\frac{150\times30^3}{12} + (150\times30\times(20-15)^2)\right] + \left[\frac{30^4}{12} + (30\times30(45-20)^2\right] = 1'080'000 \text{ cm}^4$$

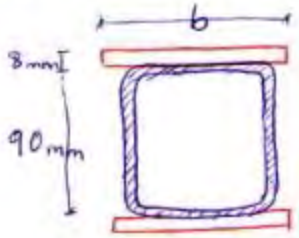
$$\sigma_c = \frac{P}{A} \pm \frac{My}{I} = \frac{178\,892}{5\,400} \pm \frac{498118\times(60-20)\,(20)}{1'080'000}$$ فشاری کششی

$$\sigma = 33.13 \pm \begin{matrix}18.45\\9.22\end{matrix} \Rightarrow \sigma = \begin{matrix}51.58 \text{ kg/cm}^2\\23.91 \text{ kg/cm}^2\end{matrix}$$ فشاری کششی در مقطع کششی

در مقطع اصلی

$\sigma =$ 51.58 kg/cm² فشاری
119.55 kg/cm² کششی

۲- در تیر بتون مقابل با توجه به اینکه تیم رخهای موجود در بازار محدودیت وجود دارد مطلوبیت تقویت نیمرخ های قوطی 90-5.6 با استفاده از جوش دو ورق با ضخامت 8mm در بالا و پائین مقطع آن



$\sigma_{اس} = 1400 \text{ kg/cm}^2$

$A = 18.6 \text{ cm}^2$

$W = S = 49 \text{ cm}^3$

$$M_{max} = \frac{qL^2}{8} = \frac{1\times3^2}{8} = 1.125 \text{ t.m} = 1'125'000 \text{ kg.cm}$$

$$A = 18.6 + 2b(0.8) = 18.6 + 1.6b$$

$$I = 49\times4.5 + 2b\times0.8\times(4.5+0.4)^2 = 220.5 + 38.42b$$

3/6 ۷۸

$$\sigma = \frac{P}{A} \pm \frac{My}{I} = \frac{5000}{18.6+1.6b} \pm \frac{112500 \times (4.5+0.8)}{22a5+38.42b}$$

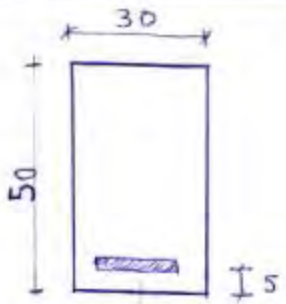
$$1400 = \frac{5000}{18.6+1.6b} \pm \frac{5962\,50}{22a5+38.42b}$$

b(cm)	σ
7.0	1386
6.5	1440
6.8	1404
6.9	1396.6

۳ـ در شکل مقابل مطلوب

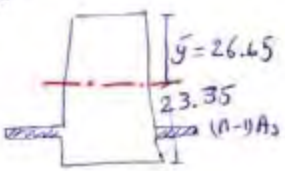
الف) مکان احتمالی مقطع ترک خورده و ترک خورده

ب) در صورتیکه مقطع تحت تأثیر لنگر 10 t.m باشد تنش ماکزیمم در بتن و فولاد را تعیین کنید.



$$\frac{E_s}{E_c} = n = 10$$

حل)



$$\bar{y} = \frac{50\times30\times\frac{50}{2} + (10-1)15\times45}{50\times30+(10-1)15} = 26.65\ cm$$

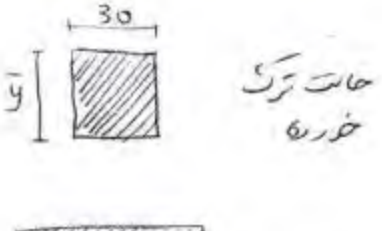
$$I = \frac{30\times50^3}{12} + 50\times30\times\left(\frac{50}{2}-23.35\right)^2 + (9\times15)(23.35-5)^2 = 362'041.3\ cm^4$$

$$\sigma_c = \frac{Mc_1}{I} = \frac{10\times10^5\times26.65}{362'041.3} = 73.61\ \ kg/cm^2$$

$$\sigma_t = \frac{Mc_2}{I} = \frac{10\times10^5\times23.35}{362'041.3} = 64.50\ \ kg/cm^2$$ تنش کششی در روی تیر تار کشش بتن

$$\sigma_s = \frac{Mc}{I} = \frac{10\times10^5\times(23.35-5)}{362'041.3}\times\frac{n}{10} = 506.85\ \ kg/cm^2$$ تنش کششی در آرماتورها

4/6 ۷۹



$$\bar{y} = \frac{30x\bar{y} \times \frac{\bar{y}}{2} + 10x15x45}{30x\bar{y} + 10x15}$$

$$30y^2 + 150y = 15y^2 + 6750$$

$$15y^2 + 150y - 6750 = 0$$

$$\Delta = 150^2 - 4x15x(-6750) = 427'500$$

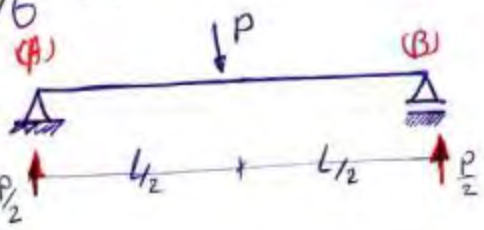
$$y = \frac{-150 \pm \sqrt{\Delta}}{2x15} = \begin{cases} 16.79 & \text{قابل قبول} \\ -26.79 & \text{غیرقابل قبول} \end{cases}$$

$$I = \frac{30x16.79^3}{3} + 10x15x(45-16.79)^2 = 166'702.3 \quad cm^4$$

$$\sigma_c = \frac{M.y}{I} = \frac{10x10^5 x 16.79}{166'702.3} = 100.72 \quad kg/cm^2$$

$$\sigma_s = n.\frac{My}{I} = 10 x \frac{10x10^5(45-16.79)}{166'702.3} = 1'692.24 \quad kg/cm^2$$

5/6 ∧.



$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow A_y = \frac{P}{2}$

$\Sigma F_y = 0 \quad B_y = \frac{P}{2}$

	$0 \le x \le L/2$	$\frac{L}{2} \le x \le L$
M	$\frac{P}{2}x$	$\frac{P}{2}(L-x)$
$EI\theta = Ey'$	$\frac{Px^2}{4} + C_1$	$\frac{P}{2}(Lx - \frac{x^2}{2}) + C_2$
EIy	$\frac{Px^3}{12} + C_1x + C_3$	$\frac{P}{2}(\frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{6}) + C_2x + C_4$

$x=0, y=0 \Rightarrow C_3 = 0$

$x = L/2, \theta_1 = \theta_2 \Rightarrow \frac{PL^2}{16} + C_1 = \frac{P}{2}(\frac{L^2}{2} - \frac{L^2}{8}) + C_2$

$\frac{PL^2}{16} + C_1 = \frac{3PL^2}{16} + C_2$

$$\boxed{C_1 - C_2 = \frac{PL^2}{8}} \quad (a)$$

$x = L/2, y_1 = y_2 \Rightarrow \frac{PL^3}{96} + \frac{C_1 L}{2} + C_3 = \frac{P}{2}(\frac{L^3}{8} - \frac{L^3}{48}) + \frac{C_2 L}{2} + C_4$

$\frac{PL^3}{96} + \frac{C_1 L}{2} + C_3 = \frac{5}{96}PL^3 + \frac{C_2 L}{2} + C_4$

$$\boxed{(C_1 - C_2)\frac{L}{2} = \frac{4}{96}PL^3 + C_4} \quad (b)$$

$(a)(b) \Rightarrow (\frac{PL^2}{8})\frac{L}{2} = \frac{4PL^3}{96} + C_4 \Rightarrow \boxed{C_4 = \frac{PL^3}{16} - \frac{6PL^3}{96} = \frac{PL^3}{48}}$

$x = L, y = 0 \Rightarrow \frac{P}{2}(\frac{L^3}{2} - \frac{L^3}{6}) + C_2 L + C_4 = 0 \Rightarrow \frac{PL^3}{2}(\frac{3-1}{6}) + \frac{PL^3}{48} + C_2 L = 0$

$$\boxed{C_2 = -\frac{3PL^2}{16}} \quad (c)$$

$(c)(a) \rightarrow C_1 = \frac{PL^2}{8} + C_2 = -\frac{PL^2}{16}$

6/6 ^1

$EI\theta = EIy' = \frac{Px^2}{4} + \frac{Pl^2}{16}$ $\qquad \frac{P}{2}(lx - \frac{x^2}{2}) + \frac{3Pl^2}{16}$

$EIy = \frac{Px^3}{12} + \frac{Pl^2}{16}x$ $\qquad \frac{P}{2}(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6}) - \frac{3Pl^2}{16}x + \frac{Pl^3}{48}$

$\theta = 0 \Rightarrow \frac{Px^2}{4} - \frac{Pl^2}{16} = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{L^2}{4}$ $\boxed{x = \frac{L}{2}}$ محل خیز ماکزیمم

$x = L_2 \Rightarrow y = \frac{PL^3}{48} - \frac{Pl^2}{16} \times \frac{L}{2} = -\frac{PL^3}{48}$

نام و نام خانوادگی :

شماره دانشجویی :

نام درس : **مقاومت مصالح**

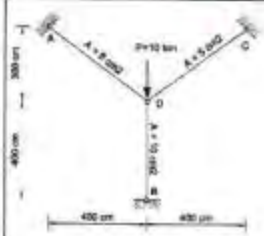
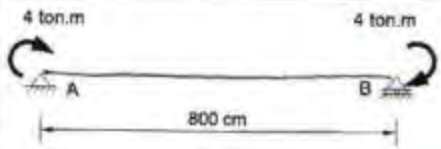
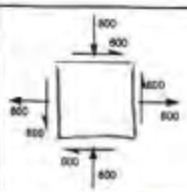
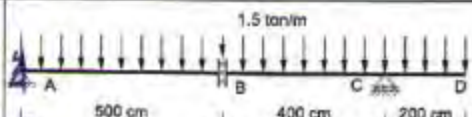
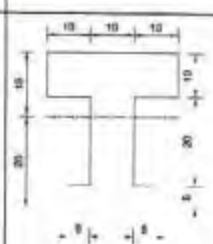
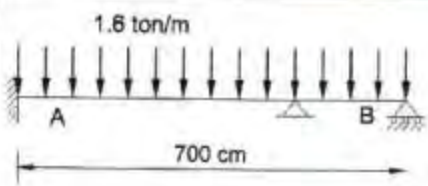
رشته و مقطع : **کارشناسی مهندسی عمران**

نام استاد : **مهندس شاهی**

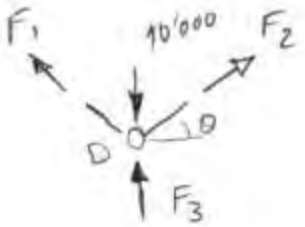
نیمسال : **تابستان** سال تحصیلی: **۹۲-۹۱**

تاریخ امتحان : **۹۲/۰۶/۰۲** مدت پاسخگویی : **۱۲۰ دقیقه**

استفاده از جزوه، کتاب، یاداشتهای شخصی و ماشین حساب آزاد بوده ولی تبادل آن به هر عنوان ممنوع می‌باشد.

ردیف	شرح	بارم
۱	در شکل مقابل الف) تغییر شکل نقطه D را بدست آورده ب) میزان نیروی ایجاد شده در هر میله را تعیین کنید. ($E=2.0*10^6\ kgf/cm^2$) 	۲/۰ ۲/۰
۲	در تیر مقابل مطلوبست الف- بدست آوردن معادله خیز با استفاده از انتیگرال گیری ب- تعیین خیز در نقطه ای به فاصله ۲ متر از تکیه گاه A در صورتیکه $EI=7500\ ton/m^2$ باشد. 	۲/۰ ۱/۰
۳	در شکل مقابل اگر تنشها برحسب kgf/cm^2 باشد، مطلوبست: الف) تعیین تنشهای اصلی ب) تعیین کرنش در صورتیکه $E=2.0*10^6\ kgf/cm^2$ و $\nu=0.3$ باشد. 	۲/۰ ۲/۰
۴	در شکل مقابل، مطلوبست: الف-تعیین عکس العمل‌ها ب- ترسیم دیاگرام نیروی برشی و لنگر خمشی 	۲/۰ ۲/۰
۵	اگر در مقطع مقابل $I_x=74'895.83\ cm^4$ و محل تار خنثی در شکل نمایش داده شده باشد. و تنش مجاز خمشی برابر $400\ kgf/cm^2$ و تنش جاری شدن $650\ kgf/cm^2$ باشد مطلوبست محاسبه نسبت $M_p/M_e(max)$ 	۲/۰
۶	تیر نامعین مقابل را حل کنید و عکس العمل‌های آنرا بدست آورید. دیاگرام نیروی برشی و لنگر خمشی را ترسیم کنید. 	۲/۰ ۱/۰

$$\sin\theta = \frac{3}{5} = 0.6 \qquad \cos\theta = \frac{4}{5} = 0.8$$



1.

$$\sum F_x = 0$$

$$-F_1\cos\theta + F_2\cos\theta = 0 \Rightarrow \boxed{F_1 = F_2}$$

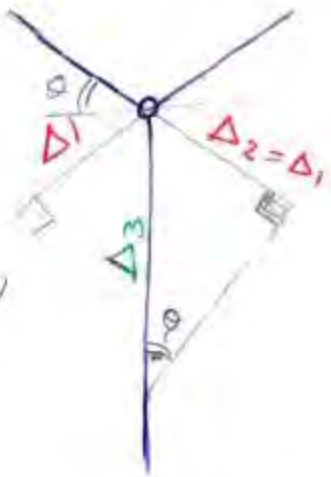
$$\sum F_y = 0 \qquad F_1\sin\theta + F_2\sin\theta + F_3 - 10'000 = 0$$

$$F_1 \times 0.6 + F_1 \times 0.6 + F_3 - 10'000 = 0$$

$$\boxed{1.2F_1 + F_3 = 10'000} \quad (I)$$

$$\Delta_1 = \Delta_2 = \frac{F_1 L}{EA} = \frac{F_1 \times 500}{E \times 5} = \frac{100F_1}{E}$$

$$\Delta_3 = \frac{F_3 L}{EA} = \frac{F_3 \times 400}{E \times 10} = \frac{40F_3}{E}$$



$$\sin\theta = \frac{\Delta_1}{\Delta_3} \Rightarrow \Delta_1 = \sin\theta \cdot \Delta_3$$

$$\frac{100F_1}{E} = 0.6 \cdot \frac{40F_3}{E} \Rightarrow \boxed{100F_1 = 24F_3} \quad (II)$$

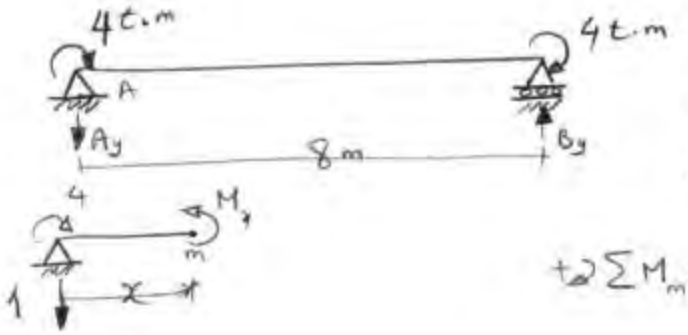
$$(II) \Rightarrow F_1 = 0.24F_3$$

$$(I) \Rightarrow 1.2(0.24F_3) + F_3 = 10'000 \Rightarrow 1.288F_3 = 10'000 \Rightarrow \boxed{F_3 = 7'763.98\ kg}$$

$$F_1 = F_2 = 0.24F_3 = 0.24 \times 7'763.9 = \boxed{1'863.34\ kg}$$

$$\Delta_3 = \frac{40 \times 7'763.98}{2 \times 10^6} = \boxed{0.155\ cm}$$

تغير مكان قائم نقطة D



-٢

$\curvearrowleft \sum M_B = 0$

$4+4-A_y \cdot 8 = 0 \Rightarrow A_y = \frac{8}{8} = 1$

$\curvearrowleft \sum M_m = 0 \Rightarrow 4 - M_x - 1 \cdot x = 0$

$$\boxed{M_x = 4 - x}$$

$$EIy'' = M = 4 - x$$

$$EIy' = \int (4-x)dx = 4x - \frac{x^2}{2} + C$$

$$EIy = \frac{4x^2}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{x^3}{3} + Cx + D$$

$$EIy = 2x^2 - \frac{x^3}{6} + Cx + D$$

$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow 0 = 0 - 0 + 0 + D \Rightarrow D = 0$

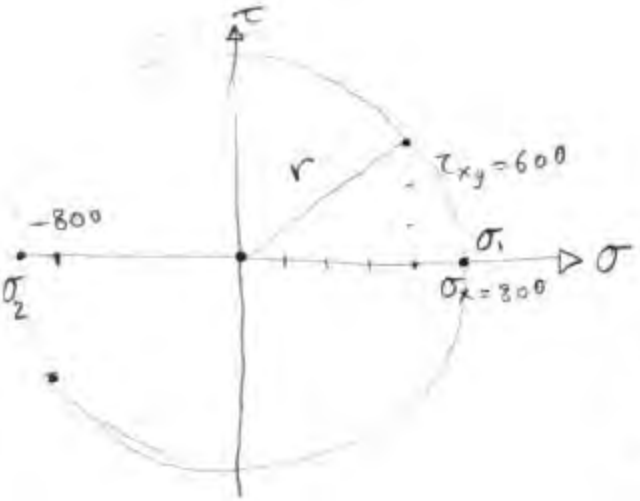
$\begin{cases} x = 8 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow 0 = 2 \times 8^2 - \frac{8^3}{6} + C8 \Rightarrow \boxed{C = \frac{-16}{3}}$

$$EIy = -\frac{x^3}{6} + 2x^2 - \frac{16}{3}x$$

$$y = \frac{1}{EI}\left(-\frac{x^3}{6} - 2x^2 - \frac{16}{3}x\right)$$

$$y(2) = \frac{1}{7500}\left(-\frac{2^3}{6} - 2 \times 2^2 - \frac{16}{3} \times 2\right) = -\frac{4}{7500} = -5 \times 10^{-4}\ m$$

$$= \boxed{-0.53\ mm}$$



٣- الف)

$$\frac{\sigma_x}{2} = \frac{800-800}{2} = 0$$

$$r = \sqrt{800^2+600^2} = 1000$$

$$\sigma_1 = 0+1000 = 1000 \ kgf/cm^2$$

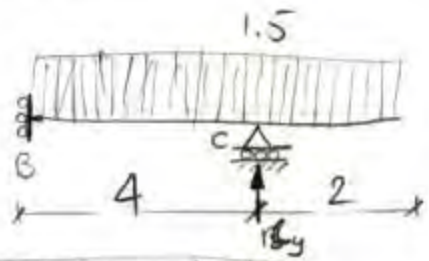
$$\sigma_2 = 0-1000 = -1000 \ kgf/cm^2$$

ب)

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \upsilon\frac{\sigma_y}{E} - \upsilon\frac{\sigma_z}{E} = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \upsilon(\sigma_y+\sigma_z)\right]$$

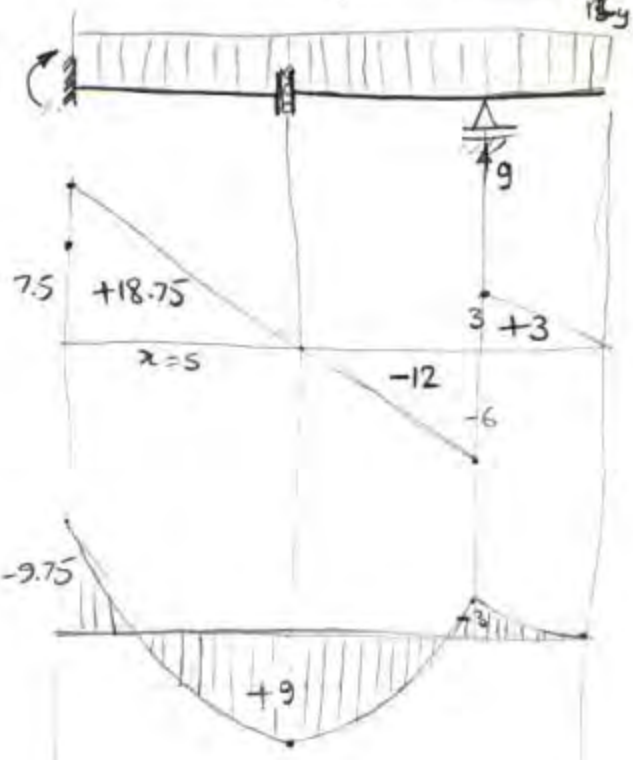
$$\varepsilon_x = \frac{1}{2\times10^6}\left[800-0.3(-800+0)\right] = \frac{1040}{2\times10^6} = 0.00052$$

٤-



$$\sum F_y = -1.5(4+2)+B_y = 0$$

$$\boxed{B_y = 9}$$



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \boxed{A_x = 0}$$

$$\sum F_y = 0 \quad -1.5(5+4+2)+A_y+9 = 0$$

$$\boxed{A_y = 7.5}$$

$$\circlearrowleft \sum M_A = 0 \Rightarrow 11\times1.5\times\frac{11}{2} - 9\times9 + M_A = 0$$

$$\boxed{M_A = -9.75}$$

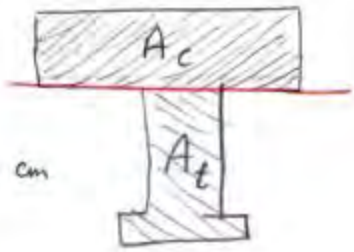
$$\frac{x}{9} = \frac{7.5}{13.5} \qquad \boxed{x = 5}$$

$$M_{e(max)} = \frac{\sigma . I}{y} = \frac{400 \times 74'895.83}{20} = 1.498 \times 10^{6}\ kg.cm = 14.98\ t.m$$

$$A = 30\times10 + 20\times10 + 5\times20 = 600 \quad \Rightarrow A_T = A_C = \frac{600}{2} = 300$$

$$\bar{y}_c = \frac{10}{2} = 5\ cm$$

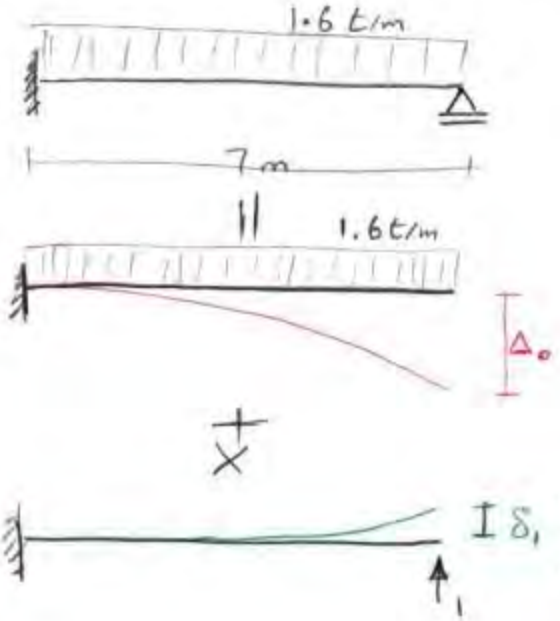
$$\bar{y}_t = \frac{20\times10\times10/2 + 5\times20\times(20+\frac{5}{2})}{300} = 10.83\ cm$$



$$d = \bar{y}_c + \bar{y}_t = 5 + 10.83 = 15.83\ cm$$

$$M_p = A_t \cdot \sigma_y \cdot d = 300\times650\times15.83 = 3.087\times10^{6}\ kg.cm = 30.87\ t.m$$

$$\frac{M_p}{M_{e(max)}} = \frac{30.87}{14.98} = 2.06$$



.9

$$y = \frac{qx^2}{24EI}(6L^2 - 4Lx + x^2)$$

$x = L$

$$y = \frac{qL^2}{24EI}(6L^2 - 4L^2 + L^2) = \frac{qL^2}{24EI}(3L^2)$$

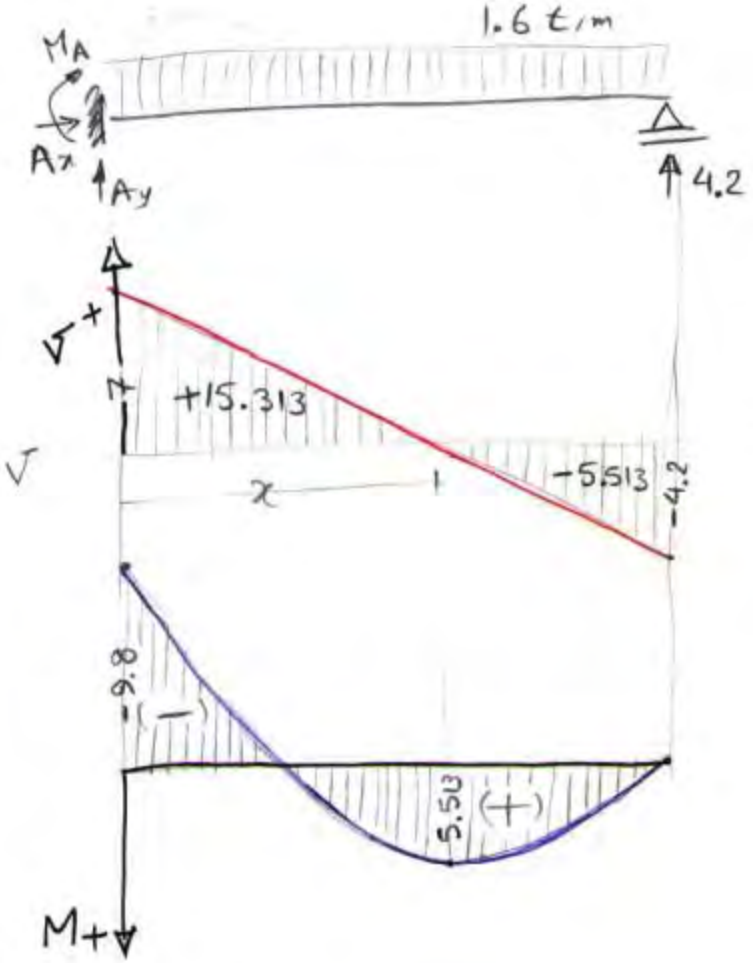
$$\Delta_o = \frac{3qL^4}{24EI} = \frac{qL^4}{8EI}$$

$x = L$

$$\delta_1 = y = \frac{Px^2}{6EI}(3L - x) = \frac{1\times L^2}{6EI}(3L - L) = \frac{L^3}{3EI}$$

$$X = B_y = \frac{\Delta_o}{\delta} = \frac{qL^4/8EI}{L^3/3EI} = \frac{qL^4\times3EI}{L^3\times8EI} = \frac{3}{8}qL$$

$$B_y = \frac{3}{8}\times1.6\times7 = 4.2\ ton$$



$\sum F_x = 0 \Rightarrow \boxed{A_x = 0}$ ton

$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + 4.2 - 1.6 \times 7 = 0$

$\boxed{A_y = 7}$ ton

$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \Rightarrow M_A + 1.6 \times \frac{7^2}{2} - 4.2 \times 7 = 0$

$\boxed{M_A = -9.8 \text{ t·m}}$

$\frac{x}{7} = \frac{7}{(7+4.2)} \Rightarrow x = 4.375$

12/ ۱۰۱

حال از معادله لنگر دو مرتبه انتگرال می‌گیریم تا معادله خیز را پیدا کنیم.

$$EI y_1'' = M_1 = -\frac{3}{2}x^2 - 24x - 96$$

$$EI y_1' = -\frac{3}{2}\frac{x^3}{3} - 24\frac{x^2}{2} - 96x + E$$

ساده‌سازی

$$EI y_1' = -\frac{x^3}{2} - 12x^2 - 96x + E$$

$$EI y_1 = -\frac{1}{2}\frac{x^4}{4} - 12\frac{x^3}{3} - 96\frac{x^2}{2} + Ex + G$$

$$EI y_1 = -\frac{x^4}{8} - 4x^3 - 48x^2 + Ex + G$$

$$EI y_2'' = M_2 = -\frac{3}{2}x^2 + 24x - 96$$

$$EI y_2' = -\frac{3}{2}\frac{x^3}{3} + 24\frac{x^2}{2} - 96x + F$$

$$EI y_2' = -\frac{x^3}{2} + 12x^2 - 96x + F$$

$$EI y_2 = -\frac{x^4}{2\times 4} + 12\frac{x^3}{3} - 96\frac{x^2}{2} + Fx + H$$

$$EI y_2 = -\frac{x^4}{8} + 4x^3 - 48x^2 + Fx + H$$

شرط مرزی

$$\begin{cases} x = 0 \\ y_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow G = 0$$

شرط مرزی

$$\begin{cases} x = 0 \\ y_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow H = 0$$

شرط مرزی

$$\begin{cases} x = -8 \\ y_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow -\frac{(-8)^4}{8} - 4(-8)^3 - 48(-8)^2 + E(-8) = 0$$

$$8E = -1536 \qquad E = -192$$

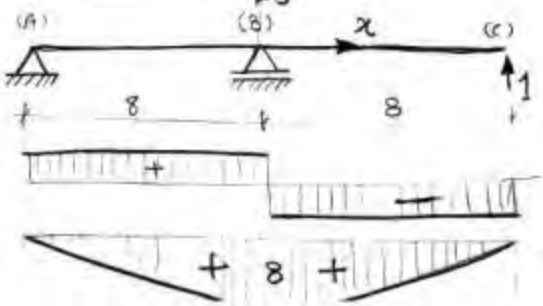
$$\begin{cases} x = 0 \\ y_1' = y_2' \end{cases} \qquad E = F \Rightarrow F = -192$$

$$EI y_2 = -\frac{x^4}{8} + 4x^3 - 48x^2 - 192x$$

$$EI\,\delta_0 = EI y_0\Big|_{x=8} = -\frac{8^4}{8} + 4(8)^3 - 48(8)^2 - 192\times 8 = -3072$$

$$\delta_0 = \frac{-3072}{EI}$$

حال در راستای مجهول در نقطه (C) (حذف تکیه‌گاه C) نیروی واحد اعمال می‌کنیم و تغییر شکل در نقطه C را محاسبه می‌کنیم



$$+\circlearrowleft \Sigma M_B = 0 \Rightarrow -1\times 8 + A_y \times 8 = 0 \Rightarrow A_y = 1$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0 \Rightarrow 1 + B_y + 1 = 0 \Rightarrow B_y = -2$$

13/ ۱۰۲

معادله گشتاور قسمت چپ و راست برابر زیرا است

$M_1 = 8 + x$ $\qquad$ $M_2 = 8 - x$

$EI\,y_1'' = 8 + x$ $\qquad$ $EI\,y_2'' = 8 - x$

$EI\,y_1' = 8x + \frac{x^2}{2} + C$ $\qquad$ $EI\,y_2' = 8x - \frac{x^2}{2} + D$

$EI\,y_1 = 4x^2 + \frac{x^3}{6} + Cx + E$ $\qquad$ $EI\,y_2 = 4x^2 - \frac{x^3}{6} + Dx + F$

تکیه گاه

$\begin{cases} x = 0 \\ y_1 = y_2 = 0 \end{cases}$ $\quad E = F = 0$

تکیه گاه

$\begin{cases} x = -8 \\ y_1 = 0 \end{cases}$ $\quad 4(-8)^2 + \frac{(-8)^3}{6} + 8C = 0 \Rightarrow C = \frac{64}{3} = \boxed{21.33}$

$\begin{cases} x = 0 \\ y_1' = y_2' \end{cases} \Rightarrow C = D \Rightarrow \boxed{D = 21.33}$

$EI\,y_2 = 4x^2 - \frac{x^3}{6} + 21.33\,x$

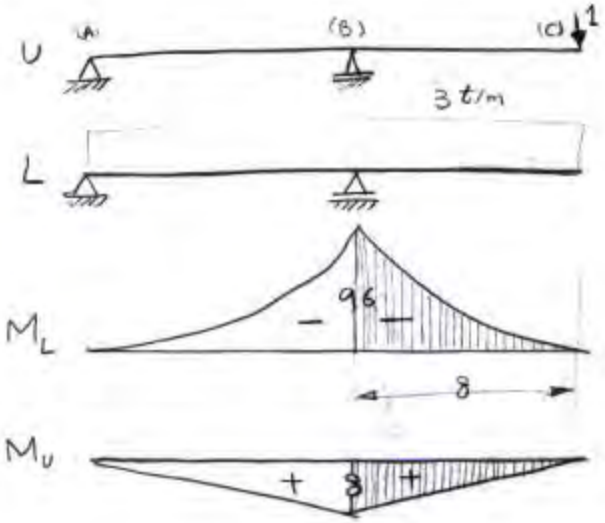
$EI\,\delta_1 = EI\,y_2\Big|_{x=8} = 4 \times 8^2 - \frac{8^3}{6} + 21.33 \times 8 = 341.307 \Rightarrow \boxed{\delta_1 = \frac{341.307}{EI}}$

$X = -\frac{\delta_0}{\delta_1} = \frac{\frac{3072}{EI}}{\frac{341.307}{EI}} = \frac{3072}{341.307} = \boxed{9.0 \text{ ton}}$

عکس العمل تیر اصلی در تکیه گاه C

۱۰۳

14/



روش دوم برای محاسبه تغییر شکل با استفاده از بار واحد

ابتدا دیاگرام لنگر ناشی از نیروهای خارجی را ترسیم و M_L می‌نامیم و سپس در محلی که می‌خواهیم تغییر مکان را محاسبه کنیم بار واحد اعمال و دیاگرام لنگر را M_U می‌نامیم (مطابق شکل)

$$\delta_0 = \int \frac{M_U M_L}{EI} dl$$

برای محاسبه انتگرال فوق می‌توان روابط M_U و M_L را نوشته و محاسبه کرد ولی با استفاده از جداول انتگرال گیری ضریب محاسبه انتگرال ضرب حاصلضرب خروجی در شکل را محاسبه کنید (سطح نقاط شکل‌ها)

$$\delta_0 = \frac{2}{EI}\left(\frac{1}{4}\times(-96)\times 8\times 8\right) = \boxed{\frac{-3072}{EI}}$$

$$\delta_1 = \int \frac{M_U M_U}{EI} dl = \frac{2}{EI}\left(\frac{1}{3}\times 8\times 8\times 8\right) = \boxed{\frac{\frac{1024}{3}}{EI}}$$

$$X = \frac{-\delta_0}{\delta_1} = \frac{\frac{3072}{EI}}{\frac{1024/3}{EI}} = \frac{3072}{1024/3} = \boxed{9.0 \quad ton}$$

1.4

$$\begin{cases} x = 0 \\ y_1 = y_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow E = F = 0$$

$$\begin{cases} x = -8 \\ y_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{8}{2}(-8)^2 + \frac{(-8)^3}{6} + 8C = 0 \Rightarrow \boxed{C = 21.33}$$

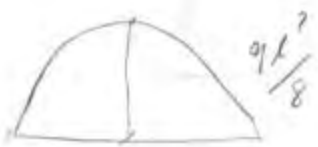
$$\begin{cases} x = 0 \\ y_1' = y_2' \end{cases} \Rightarrow C = D \rightarrow \boxed{D = 21.33}$$

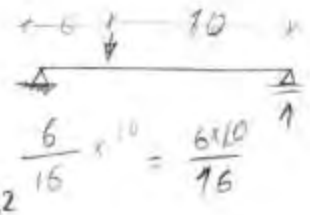
$$\boxed{y_2 = 4x^2 - \frac{x^3}{6} + 21.33x}$$

$x = 8$

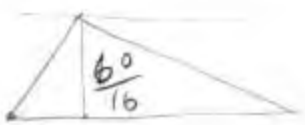
$$EI\, y_2 \equiv \delta_1 = 4(8)^2 - \frac{8^3}{6} + 21.33(8) = 341.307 \Rightarrow \delta_1 = \frac{341.307}{EJ}$$

$$X = \frac{\delta_0}{\delta_1} = \frac{5120/EI}{341.307/EI} = 15$$



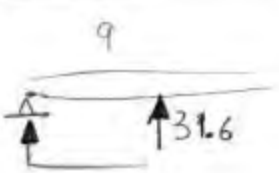


$$\frac{6}{16} \times 10 = \frac{6 \times 10}{16}$$



$$\frac{L}{3}\left(1 + \frac{ab}{L^2}\right)\frac{60}{16} \times \frac{qL^2}{8}$$

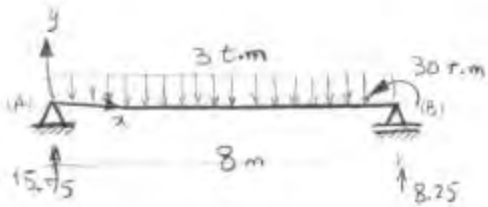
$$\frac{16}{3}\left(1 + \frac{6 \times 10}{16^2}\right)\frac{60}{16} \times \frac{3 \times 16^2}{8} = \underline{2370}$$



912.15

۴/ ۹۲

- معلوبت نقص حداکثر خیز تیر مقابل:

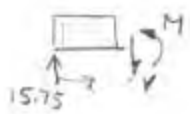


$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \Rightarrow 3\times 8\times \frac{8}{2} - 30 - B_y 8 = 0$

$\boxed{B_y = 8.25}$

$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow -3\times 8 + 8.25 + A_y = 0$

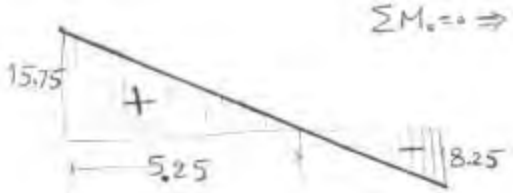
$\boxed{A_y = 15.75}$



$\sum F_y = 0 \Rightarrow 15.75 - 3x - V = 0 \quad \boxed{V = 15.75 - 3x}$

$\sum M_o = 0 \Rightarrow 15.75x - 3\frac{x^2}{2} - M = 0 \Rightarrow \boxed{M = -\frac{3}{2}x^2 + 15.75x}$

V



$EI\,y'' = M = -\frac{3}{2}x^2 + 15.75x$

$EI\,y' = -\frac{1}{2}x^3 + 7.875x^2 + C$

$EI\,y = -\frac{1}{8}x^4 + 2.625x^3 + Cx + D$

M

(A) ooch

$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{D = 0}$

ob

$\begin{cases} x = 8 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow -\frac{8^4}{8} + 2.625\times 8^3 + 8C = 0$

$\boxed{C = -104}$

$F(x) = EI\,y' = -\frac{x^4}{2} + 7.875x^2 - 104 = 0$

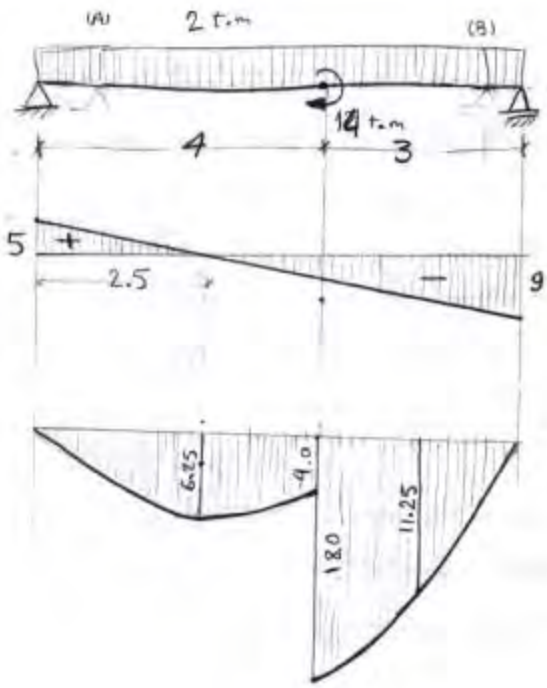
x	F(x)
0	-104
1	-96.625
2	-76.5
3	-46.622
4	-10
5	30.375
6	71.5
7	110.375
8	144

x_L	x_R
4	5
4	4.5
4.25	4.5
4.25	4.375
4.25	4.3125
4.25	4.28
4.25	4.266
4.252	4.255
4.2535	4.255
4.2535	4.25425
4.2535	4.253875

4.254

$\boxed{EI\,y\big|_{x=4.254} = -281.27}$ خیز ماکزیمم

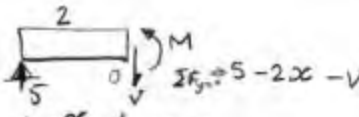
- مطلوبست خیز ماکزیمم در تیر مقابل را تعیین کنید.



$\curvearrowleft \sum M_A = 0 \Rightarrow 2\times 7\times \frac{7}{2} + 14 - 7B_y = 0$

$\boxed{B_y = 9.0}$

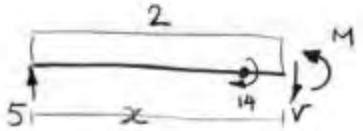
$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow -2\times 7 + 9.0 + A_y = 0 \Rightarrow \boxed{A_y = 5}$



$\sum F_y = 0 \Rightarrow 5 - 2x - V = 0$ $\boxed{V = 5 - 2x}$ $\quad 0 \le x \le 4$

$\curvearrowleft \sum M_0 = 0 \Rightarrow 5x - 2\frac{x^2}{2} - M = 0$

$\boxed{M = 5x - x^2}$ $\quad 0 \le x \le 4$



$4 \le x \le 7$

$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow 5 - 2x - V = 0 \Rightarrow \boxed{V = 5 - 2x}$

$\curvearrowleft \sum M_0 = 0 \Rightarrow 5x - 2\frac{x^2}{2} + 14 - M = 0$ $\boxed{M = 14 + 5x - x^2}$

$EIy_1'' = 5x - x^2$

$EIy_1' = \frac{5}{2}x^2 - \frac{x^3}{3} + C$

$EIy_1 = \frac{5}{6}x^3 - \frac{x^4}{12} + Cx + E$

$EIy_2'' = 14 + 5x - x^2$

$EIy_2' = 14x + \frac{5}{2}x^2 - \frac{x^3}{3} + D$

$EIy_2 = 7x^2 + \frac{5}{6}x^3 - \frac{x^4}{12} + Dx + F$

(A) تکیه‌گاه: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{E = 0}$

$\begin{cases} x = 4 \\ y_1 = y_2 \\ y_1' = y_2' \end{cases}$

$\Rightarrow \frac{5}{6}(4)^3 - \frac{(4)^4}{12} + C(4) = 7(4)^2 + \frac{5}{6}(4)^3 - \frac{(4)^4}{12} + D(4) + F$

$\boxed{4C = 4D + F + 112}$ (۱)

$\Rightarrow \frac{5}{2}(4)^2 - \frac{4^3}{3} + C = 14(4) + \frac{5}{2}(4)^2 - \frac{4^3}{4} + D$

$\boxed{C = 56 + D}$ (۲)

(B) تکیه‌گاه: $\begin{cases} x = 7 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow 7(7)^2 + \frac{5}{6}(7)^3 - \frac{(7)^4}{12} + 7D + F = 0 \Rightarrow \boxed{7D + F + 428.75 = 0}$ (۳)

$\begin{cases} 4C - 4D - F = 112 \\ C - D = 56 \\ 7D + F = -428.75 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4C - 4D - F = 112 \\ 0.25F = 28 \\ 7D + F = -428.75 \end{cases}$ $\begin{cases} C = -21.25 \\ D = -77.25 \\ F = 112 \end{cases}$

a) QF

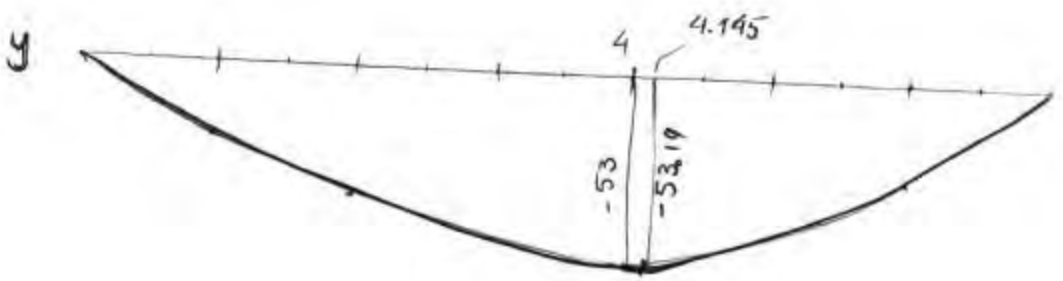
$$EI\,y_1' = \frac{5}{2}x^2 - \frac{x^3}{3} - 21.25 \qquad EI\,y_2' = 14x + \frac{5}{2}x^2 - \frac{x^3}{3} - 77.25$$

$$EI\,y_1 = \frac{5}{6}x^3 - \frac{x^4}{12} - 21.25x \qquad EI\,y_2 = 7x^2 + \frac{5}{6}x^3 - \frac{x^4}{12} - 77.25x + 112$$

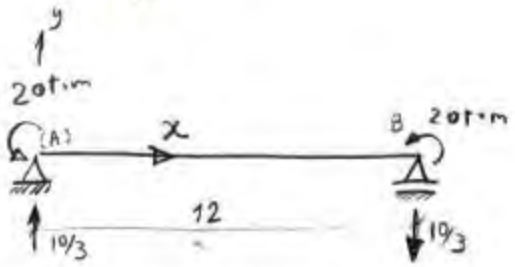
$y_2' = 0$

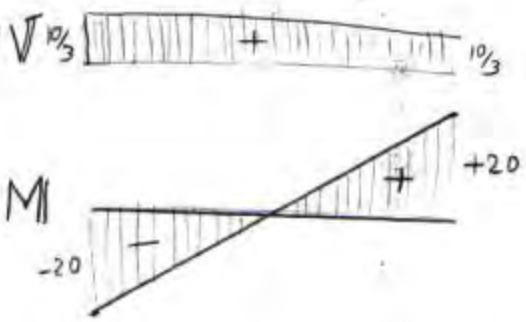
$\boxed{x = 4.145}$

$$EI\,y_1\Big|_{x=2.14} = \boxed{-53.19}$$



۹۵





- مطلوبیت مقدار خیز ماکزیمم در تیر مقابل

برای حل ابتدا می‌بایست معادله گشتاوری را بدست آوریم.

$$+\circlearrowleft \Sigma M_B = 0 \Rightarrow -20-20+12A_y = 0$$

$$\boxed{A_y = \frac{40}{12} = \frac{10}{3}}$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow \boxed{B_y = -\frac{10}{3}}$$

مبدأ مختصات را برنقطه A در نظر می‌گیریم.

$$M(x) = -20 + \frac{10}{3}x$$

$$\int \Big(EIy'' = -20 + \frac{10}{3}x$$

$$\int \Big(EIy' = -20x + \frac{5}{3}x^2 + C$$

$$EIy = -10x^2 + \frac{5}{9}x^3 + Cx + D$$

(A) نقطه

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{D=0}$$

(B) نقطه

$$\begin{cases} x=12 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow EI(0) = -10(12)^2 + \frac{5}{9}(12)^3 + 12C = 0 \Rightarrow \boxed{C=40}$$

معادلات شیب و خیز

$$\boxed{\begin{aligned} EIy' &= \frac{5}{3}x^2 - 20x + 40 \quad \rightarrow \text{شیب} \\ EIy &= \frac{5}{9}x^3 - 10x^2 + 40x \quad \rightarrow \text{خیز} \end{aligned}}$$

برای خیز ماکزیمم می‌بایست شیب صفر شود.

$$\frac{5}{3}x^2 - 20x + 40 = 0$$

$$\Delta = (-20)^2 - 4 \times \frac{5}{3} \times 40 = \frac{400}{3}$$

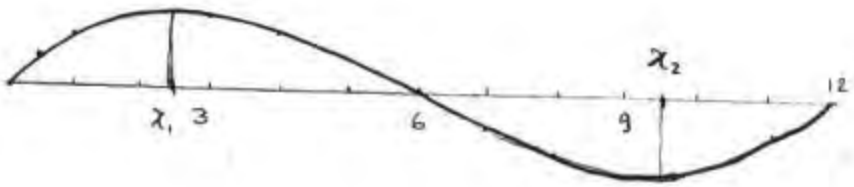
$$x = \frac{-(-20) \pm \sqrt{\Delta}}{2 \times \frac{5}{3}} = \begin{matrix} 2.536 \\ 9.464 \end{matrix}$$

هر دو جواب قابل قبول است.

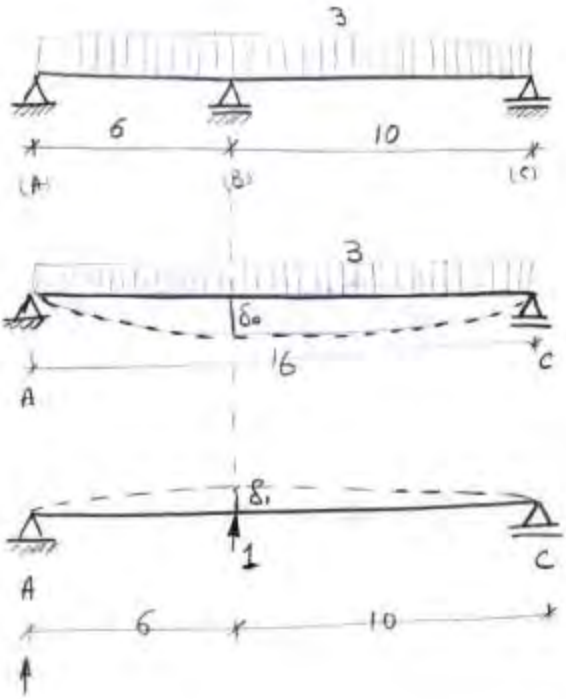
$$EIy_1 = \frac{5}{9}(2.536)^3 - 10(2.536)^2 + 40(2.536) = \boxed{46.188}$$

$$EIy_2 = \frac{5}{9}(9.464)^3 - 10(9.464)^2 + 40(9.464) = \boxed{-46.188}$$

با استفاده از نقطه یابی منوال تغییر شکل تیر به شکل زیر بدست می آید:



- تیر مقابل را با حذف تکیه‌گاه B و وسط حل کنید.



برای حل سازه را با حذف تکیه‌گاه B تبدیل به سازه معین می‌کنیم

$$\delta_0 = v\big|_{x=6} = \frac{qx}{24EI}(L^3 - 2Lx^2 + x^3)$$

$$\delta_0 = \frac{3\times 6}{24EI}(16^3 - 2\times 16\times 6^2 + 6^3) = \boxed{\frac{2370}{EI}}$$

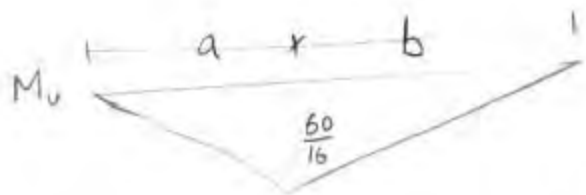
$$\delta_1 = \frac{Pbx}{6LEI}(L^2 - b^2 - x^2) = \frac{1\times 10\times 6}{6\times 16\,EI}(16^2 - 10^2 - 6^2)$$

$$\boxed{\delta_1 = \frac{75}{EI}}$$

$$X = \frac{\frac{2370}{EI}}{\frac{75}{EI}} = \frac{2370}{75} = \boxed{31.6}$$

راه حل دوم: رابطه بار واحد

$$\frac{ql^2}{8} = \frac{3\times 16^2}{8} = 96$$



$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -1\times 6 + C_y\cdot 16 = 0 \qquad C_y = \frac{6}{16}$$

$$M_1 = C_y \times 10 = \frac{60}{16}$$

$$\delta_0 = \int \frac{M_L M_U}{EI}\,dl = \frac{L}{3EI}\left(1 + \frac{ab}{L^2}\right) M_1 M_2$$

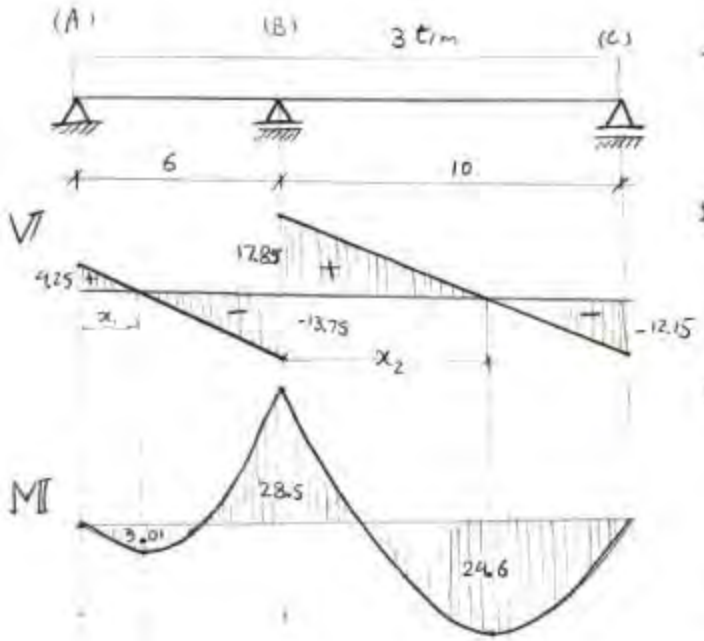
$$\delta_0 = \frac{16}{3EI}\left(1 + \frac{6\times 10}{16^2}\right) 96\times\frac{60}{16} = \boxed{\frac{2370}{EI}}$$

$$\delta_1 = \int \frac{M_U M_U}{EI}\,dl = \frac{1}{EI}\left(\frac{6}{3}\times\frac{60}{16}\times\frac{60}{16} + \frac{10}{3}\times\frac{60}{16}\times\frac{60}{16}\right)$$

$$\boxed{\delta_1 = \frac{75}{EI}}$$

$$X = \frac{\delta_0}{\delta} = \frac{2370/EI}{75/EI} = \boxed{31.6}$$

۹/ ۹۸



- در ساده نامعین صفحه قبل دیاگرام برش و لنگر را رسم کنید.

ابتدا تیر نامعین را به

$B_y = 31.6$ تبدیل می‌کنیم

$\circlearrowleft \Sigma M_A = 0 \Rightarrow 3\times16\times8 - 31.6\times6 - C_y\cdot16 = 0$

$$C_y = \frac{194.4}{16} = \boxed{12.15}$$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow A_y - 3\times16 + 31.6 + 12.15 = 0$

$$A_y = \boxed{4.25}$$

$$\frac{x_1}{4.25} = \frac{6}{4.25+13.75} \Rightarrow x_1 = \frac{17}{12} = 1.41667$$

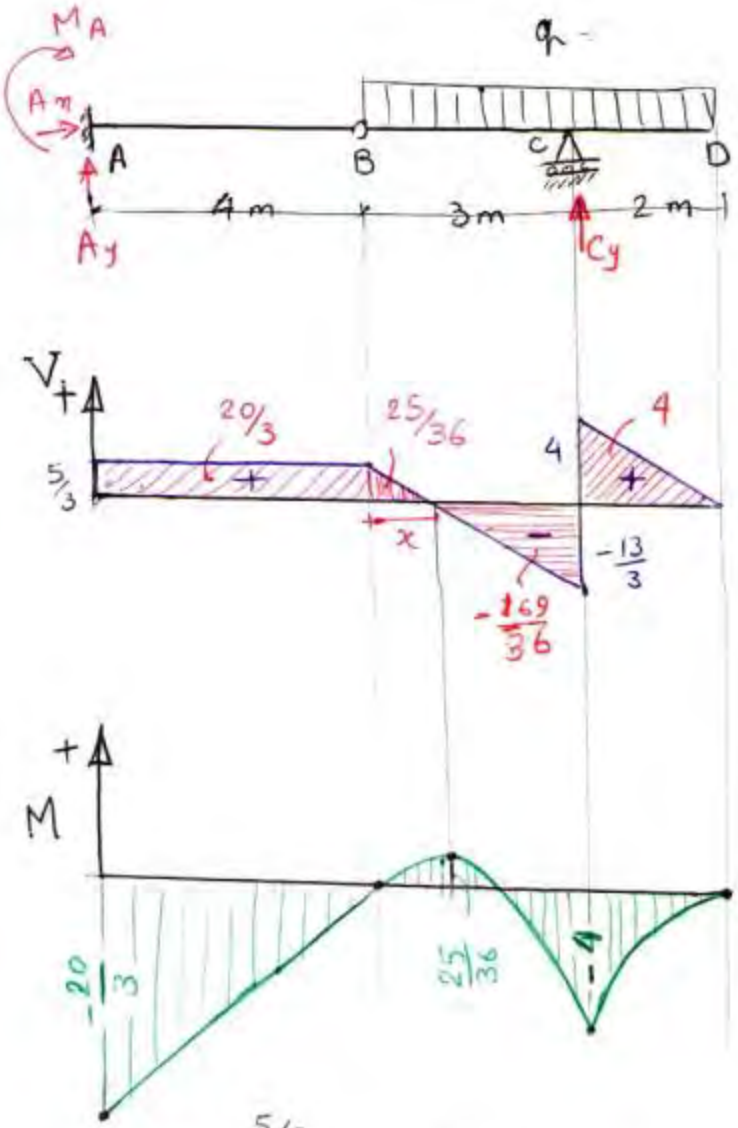
$$\frac{x_2}{17.85} = \frac{10}{30} \Rightarrow x_2 = \frac{119}{20} = 5.95$$

$$M_1 = \frac{4.25\times\frac{17}{2}}{2} = 3.01 \quad t.m$$

$$M_2 = 3.01 - \frac{13.75(6-1.41667)}{2} = -28.5 \ ton.m$$

$$M_3 = -28.5 + \frac{17.85\times5.95}{2} = 24.6 \quad t.m$$

$$M_4 = 24.6 - \frac{12.15(10-5.95)}{2} = 0$$

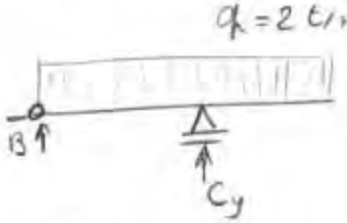


$$\frac{x}{3} = \frac{5/3}{6} \Rightarrow x = \frac{5}{6}$$

در شکل مقابل اگر $q=2\,t/m$ باشد الف) محل و مقدار لنگر ماکزیمم را بدست آورید.

ب) مقدار q را برای آنکه مقدار لنگر ماکزیمم برابر $15\,t.m$ شود را تعیین کنید.

حل: از محل مفصل مقطع زده و سمت راست را آزاد در نظر گرفته و برای این قسمت معادله لنگر حول B می‌نویسیم



$$+\circlearrowright \sum M_B = 0$$

$$2\times(3+2)\left(\frac{3+2}{2}\right) - 3C_y = 0$$

$$\boxed{C_y = \frac{25}{3}}$$

حال برای کل سازه

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \boxed{A_x = 0}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + C_y - 2\times(3+2) = 0 \Rightarrow A_y = 10 - \frac{25}{3} = \boxed{\frac{5}{3}}$$

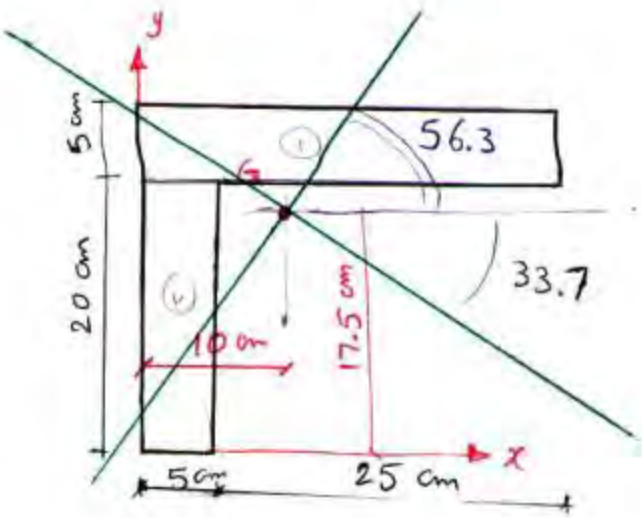
$$+\circlearrowright \sum M_A = 0 \Rightarrow M_A - (4+3)C_y + 2(3+2)\left(4+\frac{3+2}{2}\right) = 0$$

$$\boxed{M_A = -\frac{20}{3}}$$

ب) برای حل این مسئله به دو روش می‌توان عمل کرد. اول این مسئله را برحسب q حل کنیم و سپس مقدار M که برحسب q است را برابر 15 قرار داده و از حل آن مقدار q را بدست آوریم

روش دوم، بنا به آن است که مسئله را برای یک 2 t/m حل نموده‌ایم و می‌دانیم که مقادیر تیروها بصورت خطی با q تغییر می‌کند لذا می‌توانیم از تناسب استفاده کنیم

$$\frac{2}{\frac{20}{3}} = \frac{q}{15} \Rightarrow q = \frac{2 \times 15}{20/3} = 4.5 \ t/m$$



مطلوبت در شکل مقابل بدست آوردن
ممان اینرسی می نیم و ماکزیمم مرکزی و ترسیم
محورهای اصلی اینرسی برروی شکل

حل ابتدا محورهای مختصات دلخواهی برروی شکل انتخاب کردیم.

$$\bar{x} = \frac{5\times30\times\frac{30}{2} + 20\times5\times\frac{5}{2}}{5\times30+5\times20} = \frac{2500}{250} = 10$$

$$\bar{y} = \frac{5\times30\times(20+\frac{5}{2}) + 20\times5\left(\frac{20}{2}\right)}{5\times30+5\times20} = \frac{4375}{250} = 17.5$$

$$I_x = \frac{30\times25^3}{3} - \frac{25\times20^3}{3} = \frac{468'750}{3} - \frac{200'00}{3}$$

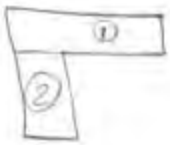
$$I_x = \frac{268'750}{3}\ cm^4$$

$$I_y = \frac{1}{3}5\times30^3 + \frac{1}{3}20\times5^3 = \frac{1}{3}(135'000+2'500)$$

$$= \frac{137'500}{3}\ cm^4$$

$$I_{xG} = I_x - A\bar{y}^2 = \frac{268'750}{3} - 250(17.5)^2 = 13'020.8\ cm^4$$

$$I_{yG} = I_y - A\bar{x}^2 = \frac{137'500}{3} - 250(10)^2 = 20'833\ cm^4$$



$$I_{xyG} = 5\times30\times\left(\frac{30}{2}-10\right)\left(20+\frac{5}{2}-17.5\right) + 5\times20\left(\frac{5}{2}-10\right)\left(\frac{20}{2}-17.5\right)$$

$$I_{xyG} = 3750 + 5625 = 9'375 \ cm^4$$

$$tg2\theta = \frac{2I_{xyG}}{I_{xG} - I_{yG}} = \frac{2\times9'375}{13'020.8 - 20'833} = -2.4$$

$$2\theta = tg^{-1}-2.4 = -67.4 + k\pi$$

$$\theta = -33.7 + \frac{k\pi}{2} \rightarrow \begin{cases} k=0 & \theta_1 = -33.7 \\ k=1 & \theta_2 = 56.3 \end{cases}$$

$$I_{-33.7^\circ} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2}\cos2\theta + 2I_{xy}\sin2\theta$$

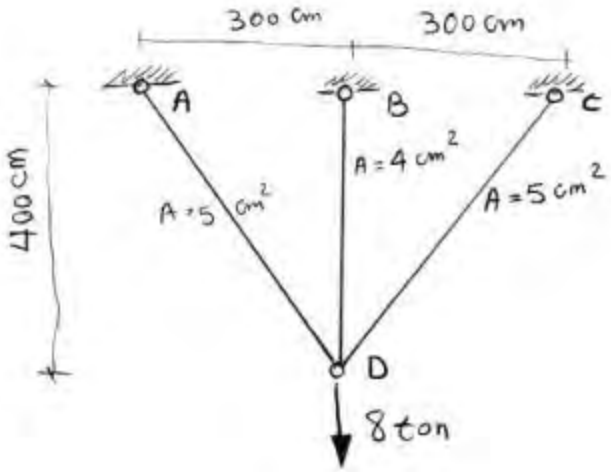
$$= \frac{13'020.8 + 20'833}{2} + \frac{13'020.8 - 20'833}{2}\cos(2(-33.7)) + 9375\sin(2(-33.7))$$

$$= 16'926.9 - 3906.1\times0.384 + 9'375\times(-0.923)$$

$$I_{-33.7^\circ} = \underline{6'773.8} \ cm^4 \quad (minmum)$$

$$I_{56.3} = 16'926.9 - 3'906.1\times(-0.384) + 9'375\,(0.923)$$

$$I_{56.3} = 27'079.97 \ cm^4 \quad (maximum)$$



در شکل مقابل اگر میله‌ها از مصالح با $E=2\times10^6\ kg/cm^2$ ساخته شده باشند مطلوبست تعیین نیروهای محوری میله‌ها.

حل:

طول میله BD ← 400 cm

طول میله‌های CD, AD ← $\sqrt{300^2+400^2}=500\ cm$

آزاد نمودار گره D را بررسی کنیم

$$\sum F_x=0 \Rightarrow -F_1\cos\theta+F_3\cos\theta=0 \Rightarrow \boxed{F_1=F_3} \quad (1)$$

$$\sum F_y=0 \Rightarrow F_1\sin\theta+F_2+F_3\sin\theta-8=0 \quad (2)$$

همانطور که ملاحظه می‌کنید (1) و (2) دو معادله و سه مجهول هستند بنابراین یک معادله کم داریم که از تغییر شکل‌ها بدست می‌آوریم

$$\Delta_3=\Delta_1=\frac{F_1L_1}{EA}=\frac{F_1\times500}{2\times10^6\times5}=5\times10^{-5}F_1$$

$$\Delta_2=\frac{F_3L_3}{EA}=\frac{F_3\times400}{2\times10^6\times4}=5\times10^{-5}F_2$$

$$\Delta_2=\sqrt{\Delta_1^2+\Delta_3^2}=\sqrt{2}\,\Delta_1$$

$$5\times10^{-5}F_2=\sqrt{2}\times5\times10^{-5}F_1$$

$$\boxed{F_2=\sqrt{2}F_1} \quad (3)$$

①, ②, ③ → مجهول ~ معلوم

① $F_1 = F_3$

② $F_2 = \sqrt{2} F_1$

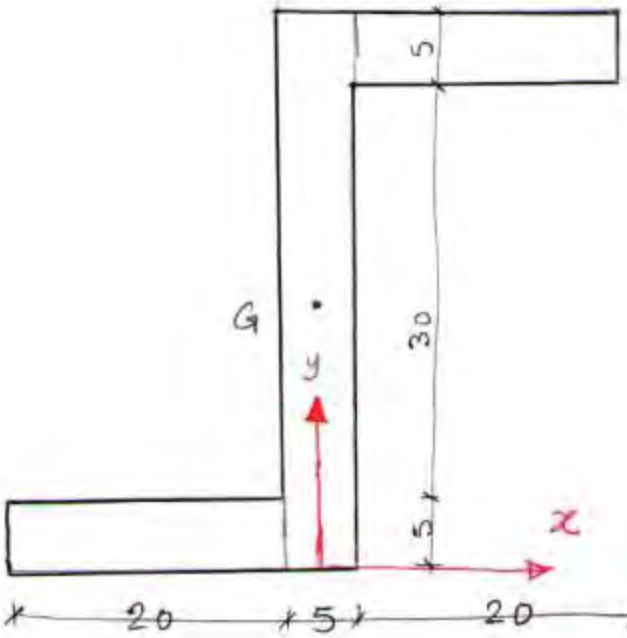
② → $2F_1 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \sqrt{2} F_1 = 8$

$\sqrt{2} F_1 + \sqrt{2} F_1 = 8$

$2\sqrt{2} F_1 = 8 \Rightarrow \boxed{F_1 = \frac{8}{2\sqrt{2}} = 2.83 \text{ ton}}$

$\boxed{F_3 = F_1 = 2.83 \text{ ton}}$

$\boxed{F_2 = \sqrt{2} F_1 = \sqrt{2} \times \frac{8}{2\sqrt{2}} = 4 \text{ ton}}$



در شکل مقابل مطلوبست محاسبه
شعاع دایره مون مرکزی

حل) محورهای مختصاتی مطابق
شکل در نیمه بالایی شکل و در وسط قسمت قائم انتخاب می‌کنیم.

$$\bar{x} = \frac{5\times 20\times(2.5+\frac{20}{2}) + 5\times 40\times 0 - 5\times 20(2.5+\frac{20}{2})}{2(20\times 5)+40\times 5} = \frac{0}{400}$$

$$\bar{y} = \frac{5\times 20\times \frac{5}{2} + 5\times 40\times \frac{40}{2} + 5\times 20\times(35+\frac{5}{2})}{400} = \frac{8'000}{400} = 20$$

$$I_{xG} = \frac{5\times 40^3}{12} + 2\left\{\frac{20\times 5^3}{12} + 20\times 5\,(17.5)^2\right\} = 88'333 \ cm^4$$

$$I_{yG} = \frac{40\times 5^3}{12} + 2\left\{\frac{5\times 20^3}{12} + 20\times 5\,(12.5)^2\right\} = 38'333 \ cm^4$$

$$I_{xyG} = 20\times 5\times(17.5\times 12.5) + 20\times 5\,(-17.5)(-12.5) = 43'750 \ cm^4$$

$$tg2\theta = \frac{2I_{xyG}}{I_{xG}-I_{yG}} = \frac{2\times 43'750}{88'333-38'333} = 1.75$$

$$2\theta = tg^{-1} 1.75 + k\pi$$

$$\theta = 30.13 + \frac{k\pi}{2}$$

$k = 0 \quad \theta_1 = 30.13°$

$k = 1 \quad \theta_2 = 120.13°$

$$I_{\theta_1} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\theta + I_{xy} \sin 2\theta$$

$$I_{\theta_1} = \frac{88'333 + 38'333}{2} + \frac{88'333 - 38'333}{2} \cos 2 \times 30.13 + 43'750 \sin(2 \times 30.13)$$

$$63'333 + 25'000 \cos(2 \times 30.13) + 43'750$$

$$I_{\theta_1} = 113'722 \text{ cm}^4$$

$$I_{\theta_2} = 63'333 + 25'000 \cos(2 \times 120.13°) + 43'750 \sin(2 \times 120.13)$$

$$= 12'943.9 \text{ cm}^4$$

$$r_{min} = \sqrt{\frac{I_{\theta_2}}{A}} = \sqrt{\frac{12'943.9}{400}} = 5.69 \text{ cm}$$

نام و نام خانوادگی :

شماره دانشجویی :

نام درس : **مقاومت مصالح**

رشته و مقطع : **کارشناسی مهندسی عمران**

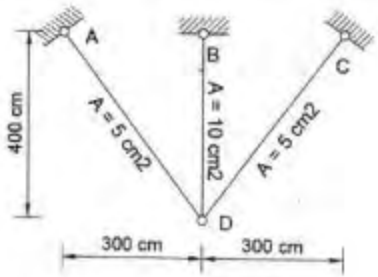
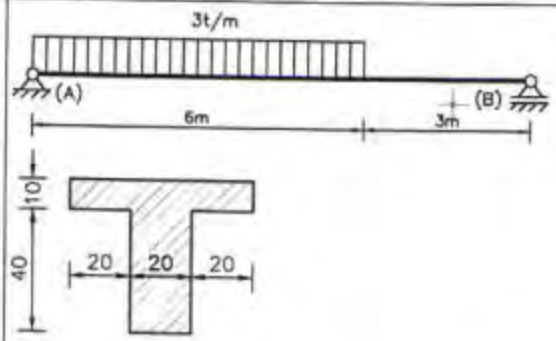
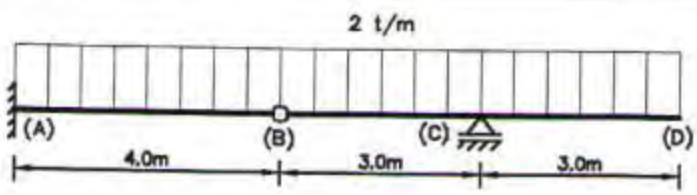
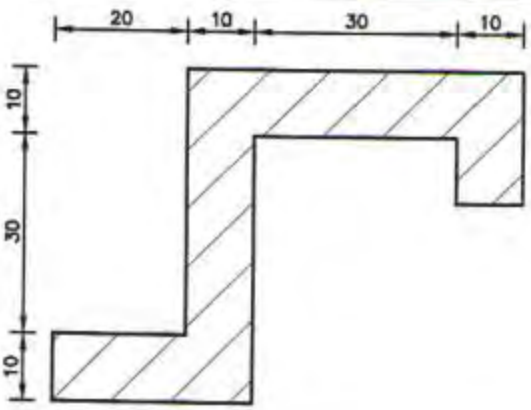
نام استاد : **مهندس شاهی**

نیمسال : **تابستان**

تاریخ امتحان : **۹۳/۰۵/۲۶**

سال تحصیلی: **۹۳-۹۱**

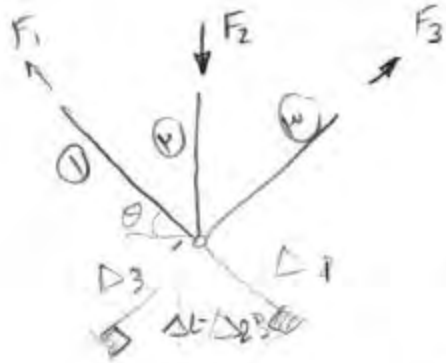
مدت پاسخگویی : **۹۰ دقیقه**

ردیف	شرح	بارم
۱	در شکل مقابل که میله ها در دمای معمولی مونتاژ شده اند،اگر میله BD به اندازه ۳۰۰ درجه سانتیگراد گرم شود. الف) میزان تغییر مکان گره D در دو جهت افقی و قائم چقدر است؟ ب) فشاری و کششی بودن و میزان نیروی ایجاد شده در میله را تعیین کنید. ($E=2.1*10^6$, $\alpha=1.2*10^6$) 	۳/۰ ۳/۰
۲	در تیر مقابل مطلوبست ابعاد مقطع به سانتیمتر نشان داده شده است. الف-ترسیم دیاگرام برش و خمش و تعیین حداکثرلنگر خمشی. ب- تعیین حداکثر تنش فشاری و کششی. 	۲/۰ ۲/۰
۳	تیر مقابل را تحلیل کرده و دیاگرام نیروهای برشی و خمشی را برای آن ترسیم کنید. 	۵/۰
۴	در شکل مقابل، مطلوبست: الف-محاسبه مختصات مرکز سطح ب- محاسبه ممان اینرسی نسبت به مرکز سطح برای محورهای X و Y و گریز از مرکز. ج- محاسبه زاویه محورهای اصلی اینرسی با محور X ها. (اندازه بر حسب سانتیمتر میباشد) 	۱/۰ ۳/۰ ۱/۰

حل سوال ۱:

$\Delta L_0 = \alpha \Delta T . L = {}^{300}\times 1.2\times 10^{-6} \times 400 = 0.144$ cm

تغییر طول آزاد



$\sum F_x = 0 \Rightarrow -F_1 \cos\theta + F_3 \cos\theta = 0$

$\boxed{F_1 = F_3}$

$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_1 \sin\theta + F_3 \sin\theta - F_2 = 0$

$\boxed{2F_1 \sin\theta = F_2}$

$\sin\theta = \frac{400}{500} = 0.8$

$2 \times 0.8 F_1 = F_2 \Rightarrow \boxed{1.6 F_1 = F_2}$ (I)

$\Delta_1 = \Delta_3 = \frac{F_1 L}{EA} = \frac{F_1 \times 500}{2.1\times 10^6 \times 5} = 4.76\times 10^{-5} F_1$

$\Delta_2 = \frac{F_2 L}{EA} = \frac{F_2 \times 400}{2.1\times 10^6 \times 10} = 1.9\times 10^{-5} F_2$

$\Delta L_0 - \Delta_2 = \sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_3^2} = \sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_1^2} = \sqrt{2}\,\Delta_1 = \sqrt{2} \times 4.76\times 10^{-5} F_1 = 6.73\times 10^{-5} F_1$

$\Delta L_0 - \Delta_2 = 0.144 - 1.9\times 10^{-5} F_2 = 6.73\times 10^{-5} F_1$ (II)

(I), (II) $\Rightarrow 0.144 - 1.9\times 10^{-5}(1.6 F_1) = 6.73\times 10^{-5} F_1$

$0.144 = 6.426\times 10^{-5} F_1 \Rightarrow \boxed{F_1 = 2240.9 \text{ kg}}$

$F_2 = 1.6 F_1 = 1.6 \times 2240.9 = \boxed{3585.44 \text{ kg}}$

$\Delta_3 = \Delta_1 = 4.76\times 10^{-5} \times 2240.9 = \boxed{0.107}$ cm

$\Delta_2 = 1.9\times 10^{-5} \times 3585.44 = \boxed{0.068 \text{ cm}}$

حل ۲:

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$

$\circlearrowleft \Sigma M_A = 0 \quad 3 \times \frac{6^2}{2} - B_y \times 9 = 0$

$\boxed{B_y = 6}$

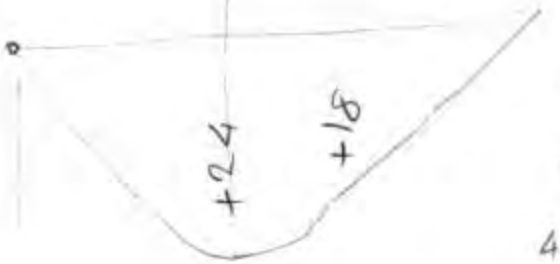
$\uparrow \Sigma F_y = 0$

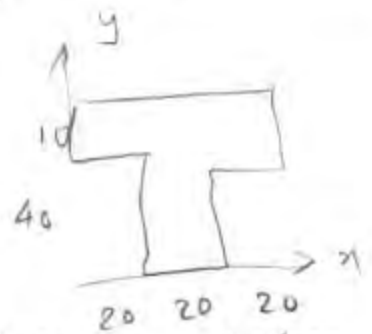
$-3 \times 6 + A_y + B_y = 0$

$A_y = 18 - 6 = \boxed{12}$

$\frac{x}{6} = \frac{12}{18} \Rightarrow x = 4 \text{ m}$

$\boxed{M_{max} = 24}$





$$\bar{y} = \frac{50 \times 60 \times 25 - (20 \times 40 \times 20)2}{50 \times 60 - 2 \times 40 \times 20} = \frac{43'000}{1400} = 30.7 \text{ cm}$$

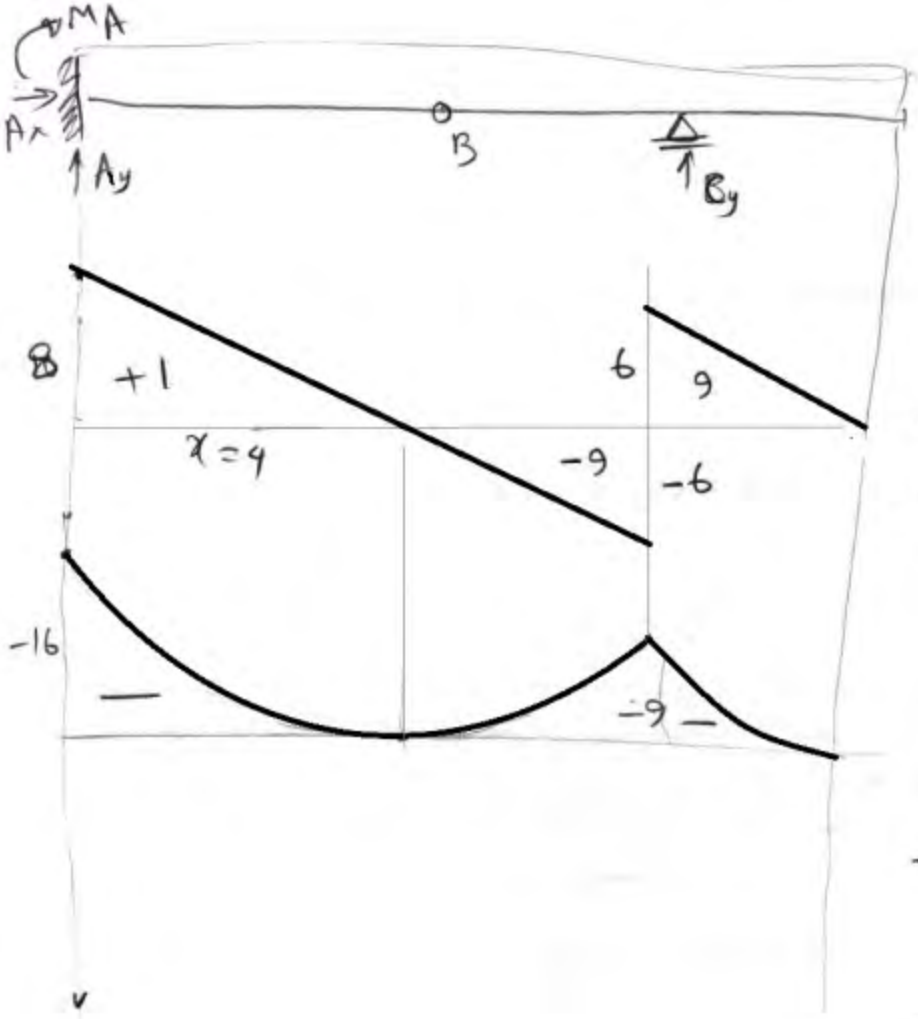
$$I_x = \frac{50 \times 60^3}{3} - 2\,\frac{20 \times 40^3}{3} = 1.647 \times 10^6 \text{ cm}^4$$

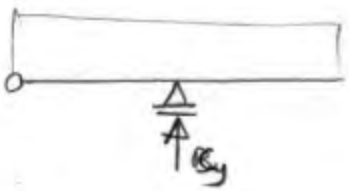
$$I_{xG} = I_x - A d^2 = 1.647 \times 10^6 - 1400 \times (30.7)^2 = 327'180.7 \text{ cm}^4$$

$$\sigma = \frac{My}{I} \qquad \sigma_{6.5} = \frac{24 \times 10^5 \times (50 - 30.7)}{327'180.7} = 141.57 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_{3.2} = \frac{24 \times 10^5 (30.7)}{327'108.7} = 225.20 \text{ kg/cm}^2$$

سوال ۳:





$\curvearrowleft \sum M_B = 0$

$3 \times 6 \times 2 - 3 \times C_y = 0$

$\boxed{C_y = 12}$

$\sum F_x = 0 \Rightarrow \boxed{A_x = 0}$

$\sum F_y = 0 \Rightarrow$

$-(4+3+3)2 + C_y + A_y = 0$

$A_y = 10 \times 2 - 12 = \boxed{8}$

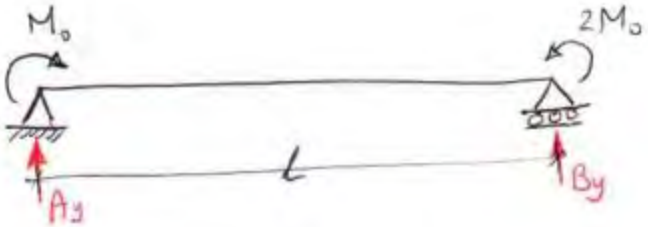
$\curvearrowleft \sum M_A = 0$

$2 \times \frac{10^2}{2} - 12 \times 7 + M_A = 0$

$\boxed{M_A = -16}$

$\frac{x}{7} = \frac{8}{14}$

$x = \frac{7 \times 8}{14} = \boxed{4}$

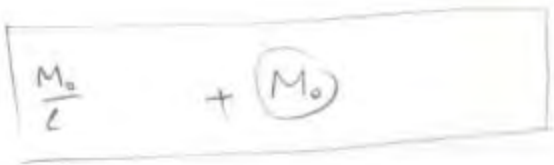


مطلوبست به دست آوردن معادله خیز تیر مقابل
EI در کل طول تیر ثابت است.

$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \Rightarrow M_0 - 2M_0 - LB_y = 0 \Rightarrow \boxed{B_y = -\frac{M_0}{L}}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + B_y = 0 \Rightarrow A_y = -B_y = \boxed{\frac{M_0}{L}}$$

V



M

$$M_x = M_0 + \frac{M_0}{L}x$$
$$= M_0\left(1 + \frac{x}{L}\right)$$

$$EIy'' = M = M_0\left(1 + \frac{x}{L}\right)$$

$$EIy' = M_0\left(x + \frac{x^2}{2L} + C_1\right)$$

$$EIy = M_0\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3\times 2L} + C_1x + C_2\right) = M_0\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6L} + C_1x + C_2\right)$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad 0 = M_0\left(\frac{0^2}{2} + \frac{0}{6L} + C(0) + C_2\right) \Rightarrow \boxed{C_2 = 0}$$

$$\begin{cases} x = L \\ y = 0 \end{cases} \quad 0 = M_0\left(\frac{L^2}{2} + \frac{L^3}{6L} + C_1L\right) \Rightarrow \frac{L^2}{2} + \frac{L^2}{6} = -C_1L$$

$$\frac{2}{3}L^2 = -C_1L$$

$$\boxed{C_1 = -\frac{2}{3}L}$$

$$EIM = M_0\left(\frac{x^3}{6L} + \frac{x^2}{2} - \frac{2}{3}Lx\right)$$

$$y' = 0 \Rightarrow M\left(x + \frac{x^2}{2L} - \frac{2}{3}L\right) = 0 \quad \Rightarrow x + \frac{x^2}{2L} - \frac{2}{3}L = 0$$

$$2xL + x^2 - \frac{4}{3}L^2 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (2L)^2 - 4(1)\left(-\frac{4}{3}\right)L^2$$

$$\Delta = 4L^2 + \frac{16}{3}L^2 = \frac{28}{3}L^2$$

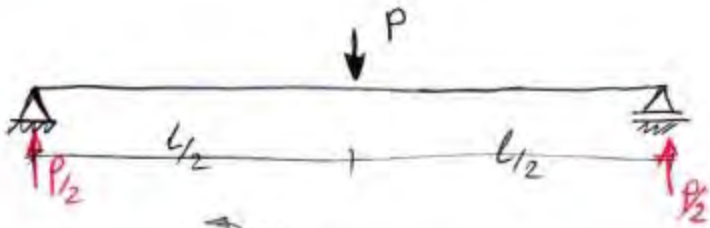
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2L \pm 3.055L}{2}$$

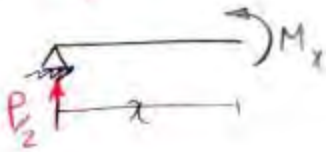
$$\boxed{x = 0.528\,L}$$

محل ماکزیمم

$$y_{max} = \frac{M_0}{EI}\left\{\frac{(0.528L)^3}{6L} + \frac{(0.528L)^2}{2} - \frac{2}{3}L(0.528L)\right\}$$

$$y_{max} = \frac{M_0 L^2}{EI}\left\{-0.049\right\}$$





$$M_x = \frac{P}{2}x \qquad 0 \le x \le L/2$$

$$M_x = \frac{P}{2}x - P\left(x-\frac{L}{2}\right) = \frac{PL}{2} - \frac{Px}{2}$$

$$M_x = \frac{P}{2}(L-x)$$

$0 \le x \le \frac{L}{2}$ — $\frac{L}{2} \le x \le L$

$$EI\,y'' = \frac{Px}{2} \qquad EI\,y'' = \frac{P}{2}(L-x)$$

$$EI\,y' = \frac{Px^2}{2\times 2} + C_1 \qquad EI\,y' = \frac{P}{2}\left(Lx - \frac{x^2}{2}\right) + D_1$$

$$EI\,y = \frac{Px^3}{3\times 4} + C_1 x + C_2 \qquad EI\,y = \frac{P}{2}\left(\frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{3\times 2}\right) + D_1 x + D_2$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{C_2 = 0} \quad (1)$$

$$\begin{cases} x = L/2 \\ y_1' = y_2' \end{cases} \qquad \frac{PL^2}{4\times 4} + C_1 = \frac{P}{2}\left(\frac{L^2}{2} - \frac{L^2}{8}\right) + D_1$$

$$\frac{PL^2}{16} + C_1 = \frac{3PL^2}{16} + D_1 \Rightarrow \boxed{C_1 - D_1 = \frac{PL^2}{8}} \quad (I)$$

$$\begin{cases} x = L \\ y = 0 \end{cases} \qquad \frac{P}{2}\left(\frac{L^3}{2} - \frac{L^3}{6}\right) + D_1 L + D_2 = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{PL^3}{6} + D_1 L + D_2 = 0} \quad (II)$$

$$\begin{cases} x = L/2 \\ y_1 = y_2 \end{cases} \qquad \frac{PL^3}{12\times 8} + C_1\frac{L}{2} = \frac{P}{2}\left(\frac{L^3}{8} - \frac{L^3}{48}\right) + \frac{D_1 L}{2} + D_2$$

$$\frac{pL^3}{96} + C_1\frac{L}{2} = \frac{5pL^3}{96} + D_1\frac{L}{2} + D_2$$

$$\boxed{(C_1 - D_1)\frac{L}{2} = \frac{pL^3}{24} + D_2} \quad (5)$$

(4), (5) $\rightarrow$ $\frac{pL^2}{8}\cdot\frac{L}{2} = \frac{pL^3}{24} + D_2 \Rightarrow \boxed{D_2 = \frac{pL^3}{48}}$ (3)

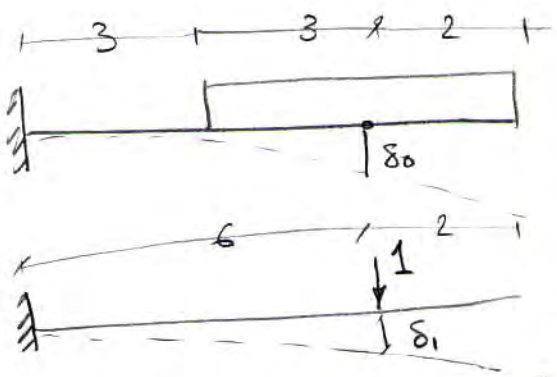
(3), (4) $\rightarrow$ $\frac{pL^3}{6} + D_1 L + \frac{pL^3}{48} = 0 \Rightarrow \boxed{D_1 = -\frac{3pL^2}{16}}$

(4) $C_1 = \frac{pL^2}{8} + D_1 = \frac{pL^2}{8} - \frac{3}{16}pL^2 \Rightarrow \boxed{C_1 = -\frac{pL^2}{16}}$

$$EIy = \frac{px^3}{12} - \frac{pL^2}{16}x \qquad EI = \frac{p}{2}\left(\frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) - \frac{3pL^2}{16} + \frac{pL^3}{48}$$

۳/ ۹۱۴

۴- برای تحلیل تیر فوق می‌بایست تیر را به تیر معین تبدیل کرد لذا تکیه C را حذف می‌کنیم و داریم



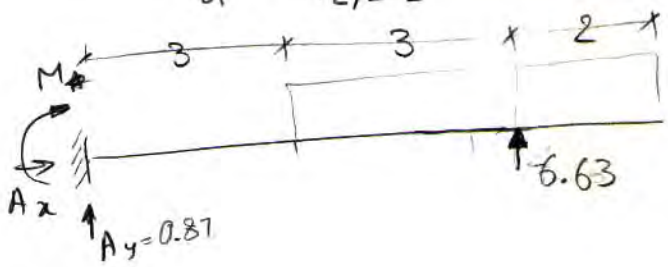
$$\delta_0 = \frac{q}{24EI}(x^4 - 4Lx^3 + 6L^2x^2 - 4a^3x + a^4)$$

$$\delta_0 = \frac{1.5}{24EI}(6^4 + 4\times 8\times 6^3 + 6\times 8^2\times 6^2 - 4\times 3^3\times 6 + 3^4)$$

$$\delta_0 = \frac{477.56}{EI}$$

$$\delta_1 = \frac{Px^2}{6EI}(3a - x) = \frac{1\times 6^2}{6EI}(3\times 6 - 6) = \frac{72}{EI}$$

$$X = \frac{\delta_0}{\delta_1} = \frac{477.56/EI}{72/EI} = 6.63 \text{ ton}$$

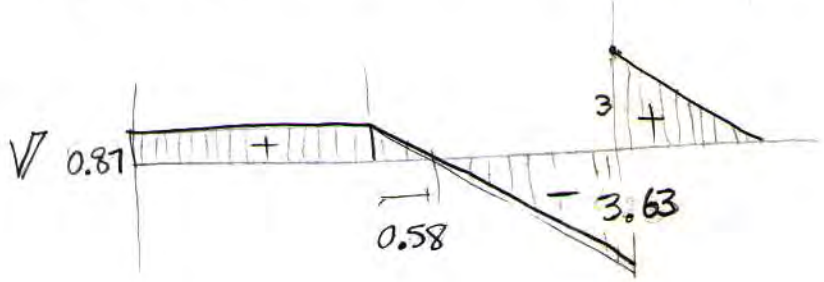


$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow \boxed{A_x = 0}$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow -1.5\times 5 + 6.63 + A_y = 0$

$\boxed{A_y = 0.87}$

$+\circlearrowleft \Sigma M_A = 0 \Rightarrow 1.5\times 5(\frac{5}{2} + 3) - 6.63\times 6 + M = 0 \Rightarrow \boxed{M = -1.47}$



$M_1 = -1.14 + 0.87\times 3 = 1.14$

$\frac{x}{0.87} = \frac{3}{4.5} \Rightarrow \boxed{x = 0.58}$

$M_2 = 1.14 + \frac{0.58\times 0.87}{2} = \boxed{1.39}$

$M_3 = 1.39 - \frac{3.63\times(3 - 0.58)}{2} = \boxed{-3.0}$

$M_4 = -3 + \frac{3\times 2}{2} = 0$

آموزشکده فنی شهید مهاجر

پاسخ مسائل سری اول

مقاومت مصالح

مدرس:

رحیم شاهی

آموزشکده فنی شهید مهاجر اصفهان

شماره صندلی:

اداره امور آموزشی

سئوالات امتحان درس : مقاومت مصالح

رشته : عمران نام مدرس شاهی

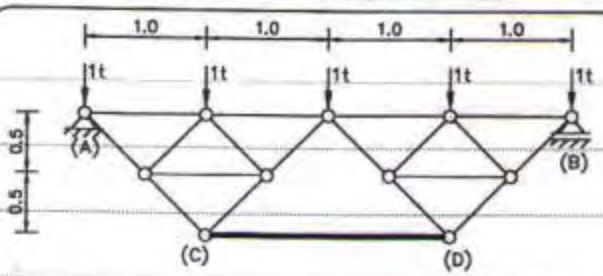
تاریخ امتحان ۸۹/۱۰/۲ مدت امتحان ۹۰ دقیقه

نام و نام خانوادگی :

شماره دانشجوئی :

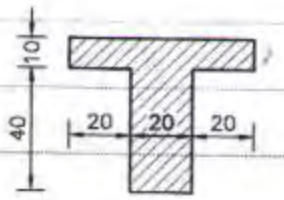
تاریخ اعلام نمرات برای دانشجویان :

شماره ۱. در خرپای مقابل مشخصات میله CD $E=2x10^6 kg/cm^2$ و $A=8\ cm^2$ و $\alpha=1.2x10^6$ میباشد، مطلوبست:



الف-تغییر فاصله مابین گره‌های C و D در اثر بارگذاری نشان داده شده.

ب- در صورتیکه در حالت الف میله به اندازه 100C گرم شود فاصله مابین گره‌های C و D چقدر خواهد شد.

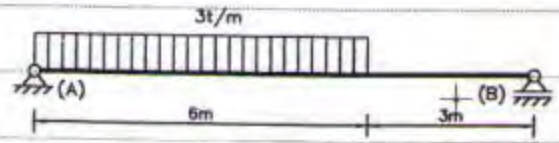


۲-در تیر مقابل مطلوبست ابعاد مقطع به سانتیمتر نشان داده شده است.

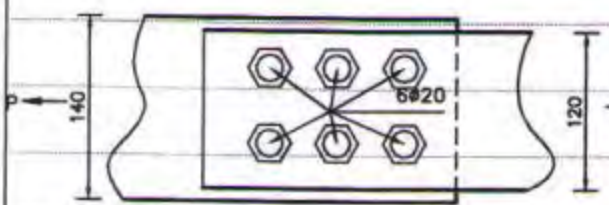
الف-ترسیم دیاگرام برش و خمش و تعیین حداکثرلنگر خمشی.

ب- تعیین حداکثر تنش فشاری و کششی.

ج-تعیین محل و خیز حداکثر

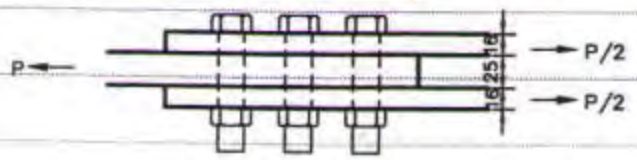


۳- در اتصال مقابل با فرض Fv=960 kg/cm2 (تنش مجاز برشی پیچ ها) و $Ft=1000\ kg/cm^2$ (تنش مجاز تسمه‌ها) باشد. مطلوبست :



الف-تعیین حداکثر نیروئی که پیچ‌ها تحمل میکنند.

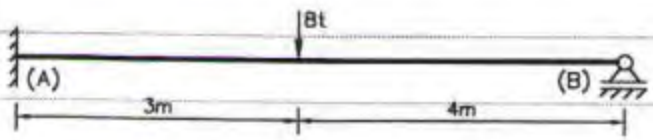
ب- تعیین حداکثر نیروئی که تسمه‌های 16mm تحمل میکنند.



ج- تعیین حداکثر نیروئی که تسمه‌های 25mm تحمل میکنند.

د- تعیین حداکثر نیروئی که کل اتصال تحمل میکند.

۴-در تیر نامعین زیر مطلوبست:



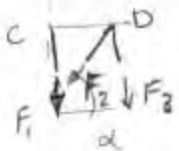
الف- تعیین عکس العمل تیرها

ب-ترسیم دیاگرام نیروهای برشی و خمشی.

امضاء مدرس

2/ ۲۰

-۴



$+\circlearrowleft \sum M_D = 0 \Rightarrow -F_1 \times 3 - 5 \times (4\times 3) + 20 \times 7 \times 3 = 0$

$\boxed{F_1 = 120 \text{ ton}}$

$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \Rightarrow -5\times(3\times 3) + 3\times F_3 + 20\times 8\times 3 = 0$

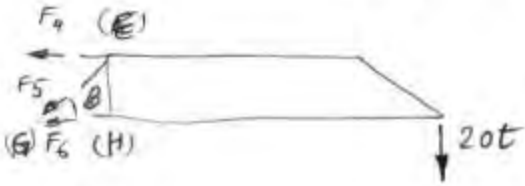
$\sin\alpha = \frac{4}{5}$

$\boxed{F_3 = -\frac{435}{3} = -145}$

$\sum F_y = 0 \Rightarrow -5 - 120 - F_2 \cdot \sin\alpha - (-145) - 20 = 0$

$\boxed{F_2 = 0}$

میله های سری دوم ارتفاعی نیز همانند میله های طبقه اول هستند



$+\circlearrowleft \sum M_E = 0$

$20\times(5\times 3) + F_6 \times 3 = 0 \Rightarrow \boxed{F_6 = -100 \text{ ton}}$

$+\circlearrowleft \sum M_G = 0 \Rightarrow 20(6\times 3) - 3F_4 = 0 \Rightarrow \boxed{F_4 = 120}$

$\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sum F_x = 0 \Rightarrow -(-100) - 120 - F_5 \cdot \cos\theta = 0$

$100 - 120 - F_5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \quad \boxed{F_5 = -28.28}$

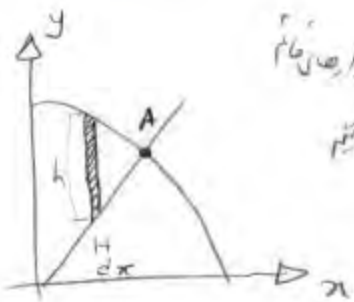
۳. ابتدا x نقطه A را بدست می آوریم

$5 - \frac{x^2}{5} = x \xrightarrow{\text{طرفین ضرب در } 5} 25 - x^2 = 5x$

$-x^2 - 5x + 25 = 0$

$\Delta = (-5)^2 - 4(-1)\times 25 = 125$

$x_A = \frac{5 \pm \sqrt{125}}{2(-1)} = \begin{cases} \boxed{3.09} \\ -8 \end{cases}$ غیرقابل قبول

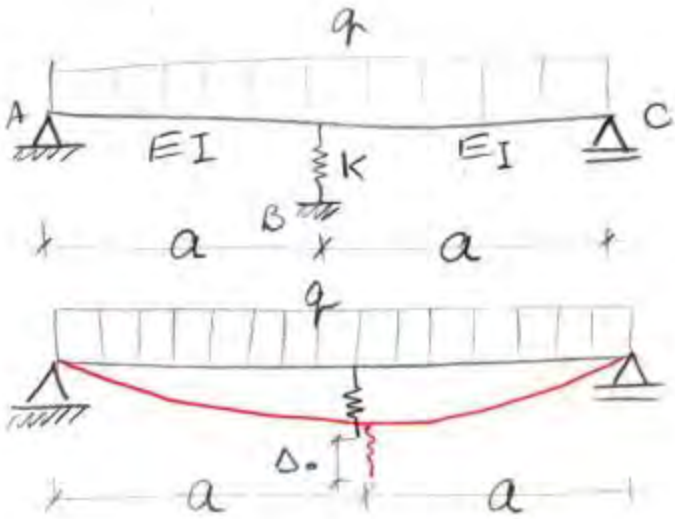


۴. از نوارهای قائم استفاده می کنیم

$h = y_2 - y_1 = 5 - \frac{x^2}{5} - x$

$dA = h\,dx = (5 - \frac{x^2}{5} - x)dx$

$A = \int_0^{3.09} (-\frac{x^2}{5} - x + 5)\,dx = -\frac{x^3}{3\times 5} - \frac{x^2}{2} + 5x \Big|_0^{3.09} = \boxed{8.71}$

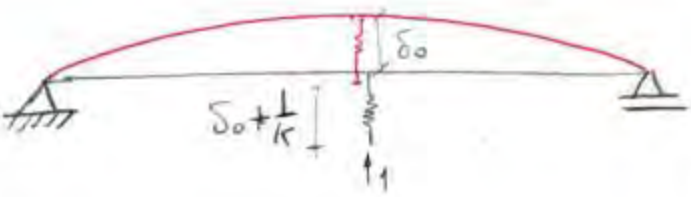


حل یکی از Bo ها را حذف می‌کنیم

$$y = \frac{qx}{24EI}\left[L^3 - 2Lx^2 + x^3\right]$$

$$\begin{cases} x = a \\ L = 2a \end{cases} \quad \Delta_o = \frac{qa}{24EI}\left[(2a)^3 - 2(2a)a^2 + a^3\right]$$

$$\Delta_o = \frac{qa}{24EI}\left[8a^3 - 4a^3 + a^3\right] = \frac{5a^4 q}{24EI}$$



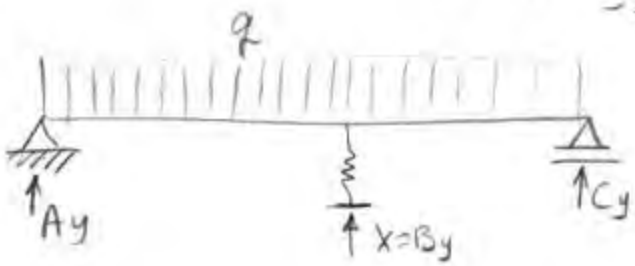
$$y = \frac{Px}{48EI}\left(3L^2 - 4x^2\right)$$

$$\begin{cases} x = a \\ L = 2a \end{cases} \quad \delta_o = \frac{1 \times x}{48EI}\left[3(2a)^2 - 4a^2\right]$$

$$\delta_o = \frac{8a^3}{48EI} = \frac{a^3}{6EI}$$

$$X = B_y = \frac{\Delta_o}{\delta_o + \frac{1}{K}} = \frac{\frac{5a^4}{24EI}}{\frac{a^3}{6EI} + \frac{1}{K}} \rightarrow \times 2EI$$

$$\boxed{X = \frac{5a^4 q}{4a^3 + \frac{24EI}{K}}}$$



$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow \boxed{A_x = 0}$$

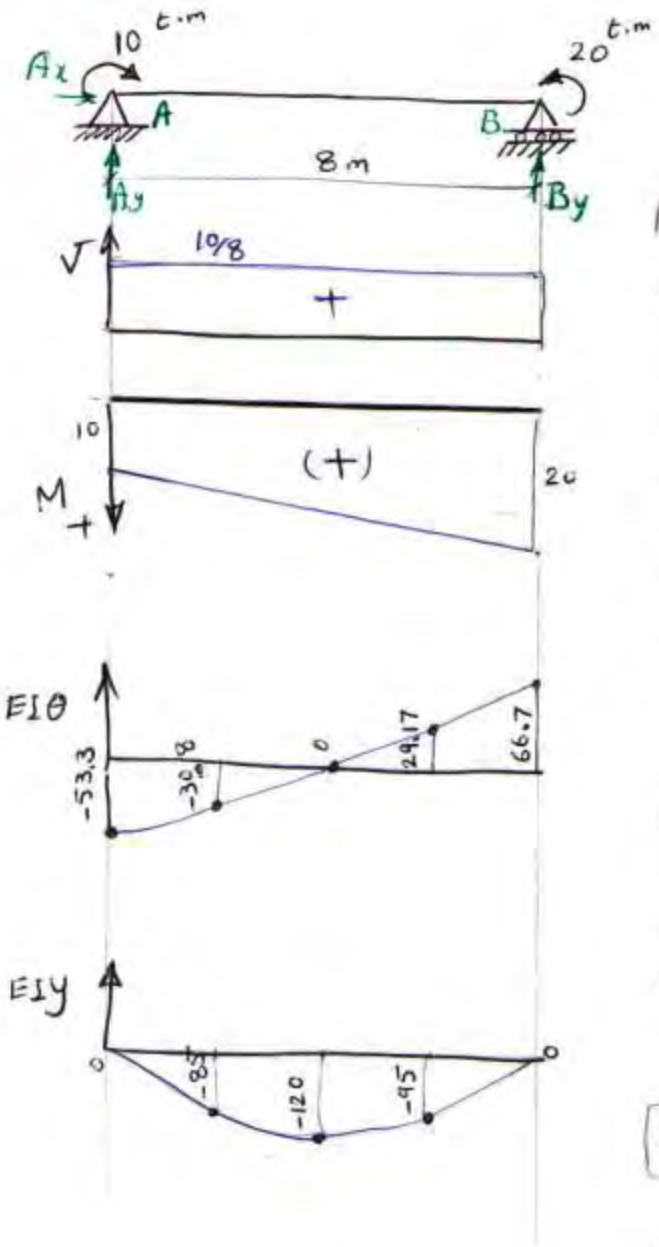
$$\Sigma M_B = 0 \quad q \times 2a \times a + A_y \cdot a - C_y \cdot a = 0$$

$$\boxed{A_y = C_y}$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow A_y + B_y + C_y - 2qa = 0 \Rightarrow 2A_y + B_y = 2qa \Rightarrow A_y = qa - \frac{B_y}{2}$$

$$\boxed{A_y = qa - \frac{1}{2}\frac{5a^4 q}{4a^3 + \frac{24EI}{K}}} = qa\left\{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{5a^3}{4a^3 + \frac{24EI}{K}}\right\}$$

مثال: مطلوب است محاسبه معادله خیز تیر مقابل:



حل: ابتدا عکس العمل های تکیه گاهی را بدست می آوریم

$\pm \sum M_A = 0 \Rightarrow 10 - 20 - B_y \times 8 = 0$

$B_y = -\frac{10}{8}$

$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y - \frac{10}{8}$

$M(x) = 10 + \frac{10}{8}x$

$EI\,y'' = M = 10 + \frac{5}{4}x$

$EI\,y' = 10x + \frac{5}{8}x^2 + C$

$EIy = 5x^2 + \frac{5}{24}x^3 + Cx + D$

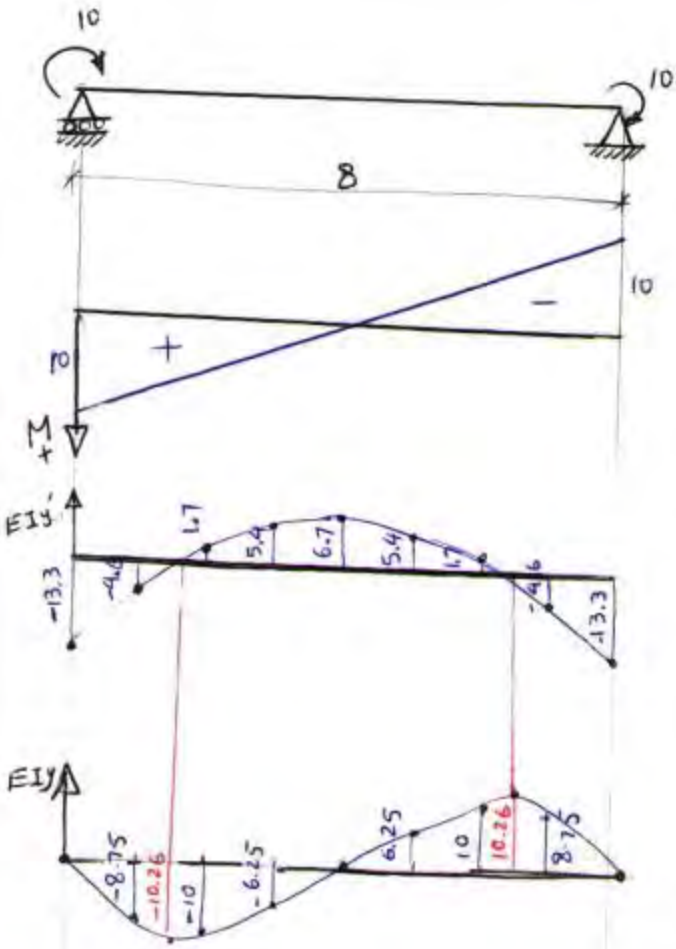
$x = 0$
$y = 0 \Rightarrow \boxed{D = 0}$

$x = 8$
$y = 0 \Rightarrow 5 \times 64 + \frac{5}{24}8^3 + 8C = 0$

$\boxed{C = -\frac{160}{3} = -53.33}$

$\boxed{EI\,y = \frac{5}{24}x^3 + 5x^2 - \frac{160}{3}x}$

$EI\,y' = \frac{5}{8}x^2 + 10x - \frac{160}{3}$



مطلوبست تعیین معادله خیز تیر و شیب و تعیین حداکثر خیز در آن.

$$M = 10 - \frac{20}{8}x = 10 - \frac{5}{2}x$$

$$EIy'' = M$$

$$EIy' = 10x - \frac{5}{4}x^2 + C$$

$$EIy = 5x^2 - \frac{5}{12}x^3 + Cx + D$$

$x = 0,\ y = 0 \Rightarrow \boxed{D = 0}$

$x = 8,\ y = 0 \Rightarrow 5 \times 64 - \frac{5}{12} \times 8^3 + C \times 8 = 0$

$$\boxed{C = -\frac{40}{3}}$$

$$\theta = EIy' = 10x - \frac{5}{4}x^2 - \frac{40}{3}$$

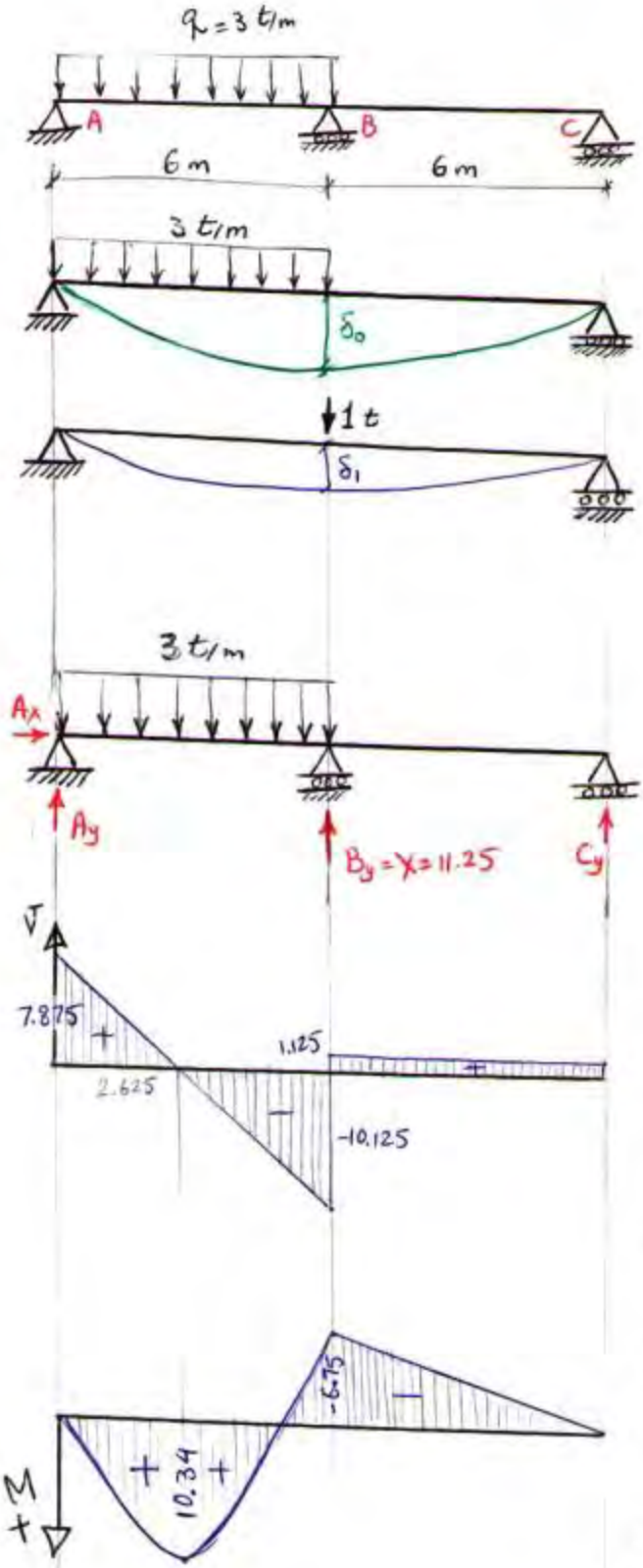
$$EIy = 5x^2 - \frac{5}{12}x^3 - \frac{40}{3}x$$

$$y' = 0 \rightarrow x = \frac{-10 \pm \sqrt{100/3}}{-\frac{5}{2}} = \begin{matrix} 1.69 \\ 6.30 \end{matrix}$$

$x = 1.69 \rightarrow EIy = -10.26$

$x = 6.30 \rightarrow EIy = 10.26$

در شکل مقابل مطلوب است تعیین عکس العمل تکیه گاه ها و ترسیم دیاگرام برش و خمش:



حل:

سازه یک درجه نامعین است، لذا برای حل ابتدا یک تکیه گاه را حذف می کنیم (تکیه گاه B) سپس δ_0 و δ_1 را به ترتیب در اثر بار خارجی و بار واحد بدست می آوریم.

$$v=\delta_0=\frac{qx}{384EI}(9L^3-24Lx^2+16x^3)$$

$x=6$

$L=12$

$$\delta_0=\frac{3\times 6}{384EI}(9\times 12^2-24\times 12\times 6^2+16\times 6^3)$$

$$\delta_0=405/EI$$

$$\delta_1=\frac{Px}{48EI}(3L^2-4x^2)$$

$$\delta_1=\frac{1\times 6}{48EI}(3\times 12^2-4\times 6^2)=\frac{36}{EI}$$

$$X=\frac{\delta_0}{\delta_1}=\frac{405/EI}{36/EI}=11.25 \text{ ton}$$

$\Sigma F_x=0 \Rightarrow \boxed{A_x=0}$

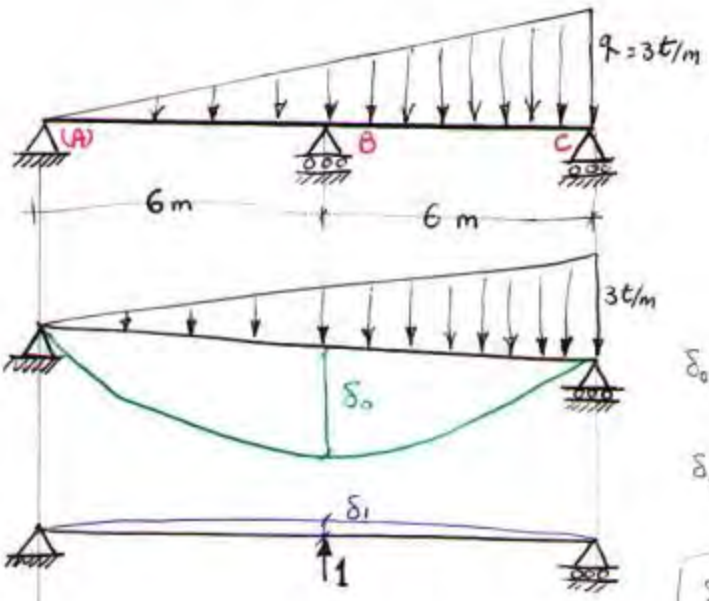
$\curvearrowleft \Sigma M_A=0 \Rightarrow 3\times 6\times\frac{6}{2}-11.25\times 6-12C_y=0$

$$\boxed{C_y=-1.125 \text{ ton}}$$

$\Sigma F_y=0 \Rightarrow -3\times 6+A_y+11.25-1.125=0$

$$\boxed{A_y=7.875 \text{ ton}}$$

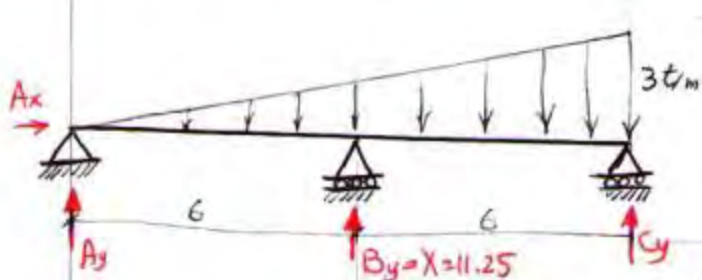
در شکل مقابل مطلوب تعیین عکس العمل ها ی
تکیه گاه ها و رسم دیاگرام برش و خمش



$$\delta_0 = \frac{q_0 x}{360 L EI}(7L^4 - 10L^2x^2 + 3x^4)$$

$$\delta_0 = \frac{3 \times 6}{360 \times 12\, EI}(7 \times 12^4 - 10 \times 12^2 6^2 + 3 \times 6^4)$$

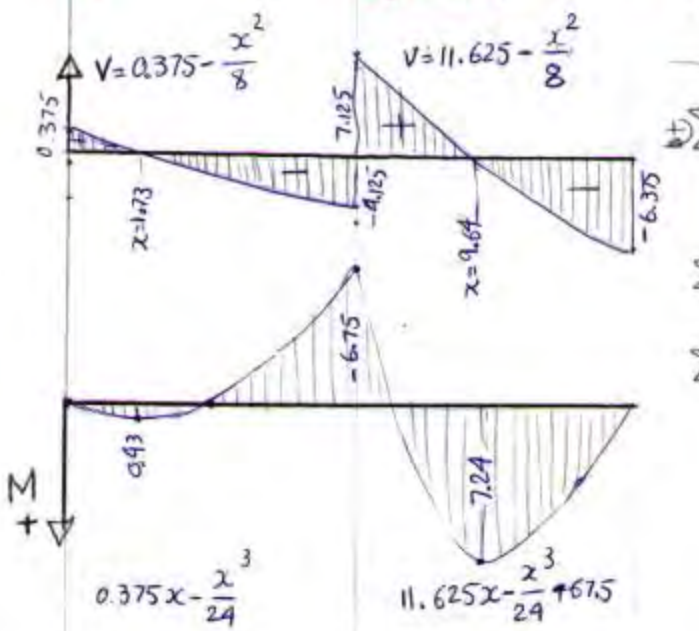
$$\boxed{\delta_0 = \frac{405}{EI}}$$



$$\delta_1 = \frac{Px}{48EI}(3L^2 - 4x^2)$$

$$\delta_1 = \frac{1 \times 6}{48EI}(3 \times 12^2 - 4 \times 6^2) = \boxed{\frac{36}{EI}}$$

$$X = \frac{\delta_0}{\delta_1} = \frac{405/EI}{36/EI} = \boxed{11.25 \text{ ton}}$$



$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \Rightarrow \frac{3 \times 12}{2} \times \frac{2}{3} \times 12 - 11.25 \times 6 - 12 C_y = 0$$

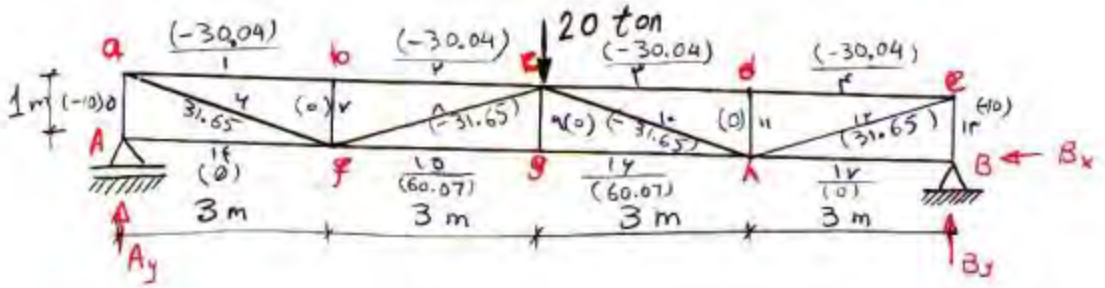
$$\boxed{C_y = 6.375 \text{ ton}}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \boxed{A_x = 0}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y - \frac{3 \times 12}{2} + 11.25 + 6.375 = 0$$

$$\boxed{A_y = +0.375}$$

تمرین: خرپا مقابل را تحلیل کنید.



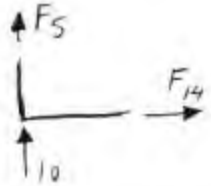
حل) ابتدا گره و اعضا را نام گذاری می‌کنیم و سپس کل المان‌ها و گره‌ها را بدست می‌آوریم

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow B_x = 0$$

$$+\circlearrowleft \Sigma M_B = 0 \Rightarrow A_y(4\times 3) - 20\times(2\times 3) = 0 \Rightarrow A_y = \frac{20\times 6}{12} = 10$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow 10 - 20 + B_y = 0 \Rightarrow \boxed{B_y = 10}$$

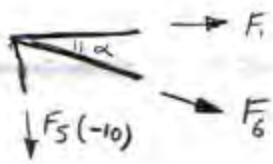
A) حال به روش گره و از گره A شروع به حل می‌کنیم



$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_{14} = 0$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_5 + 10 = 0 \quad \boxed{F_5 = -10}$$

a)



$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_1 + \cos\alpha F_6 = 0$$

$$\boxed{F_1 = -0.949 F_6} \quad (I)$$

$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+3^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}} = 0.316$$

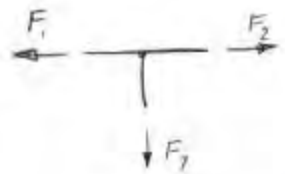
$$\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{1+3^2}} = 0.949$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow -F_5 - \sin\alpha F_6 = 0 \quad -(-10) - 0.316 F_6 = 0$$

$$-0.316 F_6 = -10 \Rightarrow F_6 = \frac{10}{0.316} = 31.65 \text{ ton}$$

Ⓘ → $F_1 = -0.949 \times 31.65 = -30.04$ ton

b)



$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow \boxed{F_7 = 0}$

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow -F_1 + F_2 = 0 \quad \boxed{\Rightarrow F_2 = F_1 = -30.04}$

f)

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow 31.65 \times \sin\alpha + F_8 \sin\alpha = 0$

$\boxed{F_8 = -31.65}$

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow -31.65 \cos\alpha + F_8 \cos\alpha + F_{15} = 0$

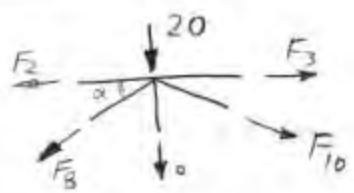
$-31.65 \times 0.949 + (-31.65) \times 0.949 + F_{15} = 0 \Rightarrow -60.07 + F_{15} = 0 \quad \boxed{F_{15} = 60.07}$

g)

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow \boxed{F_9 = 0}$

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow -F_{15} + F_{16} = 0 \Rightarrow \boxed{F_{16} = F_{15} = 60.07}$

C)



$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow -F_8 \sin\alpha - F_{10} \sin\alpha - 20 = 0$

$+10.00$

$-(-31.65) \times 0.316 - 0.316 F_{10} - 20 = 0$

$-0.316 F_{10} = 10 \Rightarrow \boxed{F_{10} = -31.65}$

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow -F_2 - F_8 \cos\alpha + F_{10} \cos\alpha + F_3 = 0$

$-(-30.04) - (-31.65) \times 0.949 + (-31.65) \times 0.949 + F_3 = 0$

$30.04 + F_3 = 0 \Rightarrow \boxed{F_3 = -30.04}$

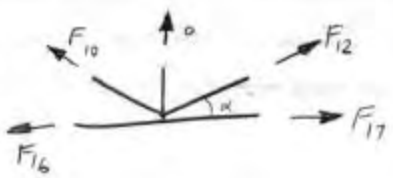
d)

$\sum F_y = 0 \Rightarrow \boxed{F_{11} = 0}$

$\sum F_x = 0 \Rightarrow -F_3 + F_4 = 0 \Rightarrow \boxed{F_4 = F_3 = -30.04}$

---

h)



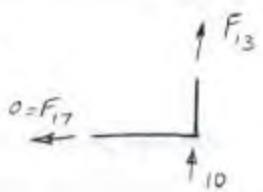
$\sum F_y = 0 \quad + F_{10}\sin\alpha + F_{12}\sin\alpha = 0$

$\boxed{F_{12} = -F_{10} = -(-31.65) = 31.65}$

$\sum F_x = 0 \Rightarrow -F_{16} - \cos\alpha F_{10} + \cos\alpha F_{12} + F_{17} = 0$

$-60.07 - (-31.65) \times 0.949 + 31.65 \times 0.949 + F_{17} = 0 \Rightarrow 0 + F_{17} = 0 \Rightarrow \boxed{F_{17} = 0}$

B)



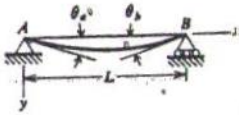
$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_{13} + 10 = 0 \Rightarrow \boxed{F_{13} = -10}$

$\sum F_x = 0 \quad -F_{17} + B_x = 0 \Rightarrow \boxed{0 + 0 = 0}$

۲ـ افت وشیب درتیرهای ساده

افت تیر درجهت محور $= v$

شیب منحنی تغییرشکل تیر $= v' = \dfrac{dv}{dx}$



تغییر مکان در وسط تیر $= \delta_c = v\left(\dfrac{L}{2}\right)$

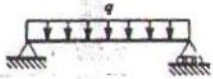
فاصله A تا نقطه مربوط به افت ماگزیمم $= x_1$

مقدار ماگزیمم افت $\delta_{max} = v_{max}$

زاویه درانتهای سمت چپ تیر $\theta_a = v'(0)$

زاویه در انتهای سمت راست تیر $\theta_b = -v'(L)$

1.

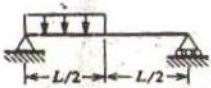


$$v = \frac{qx}{24EI}(L^3 - 2Lx^2 + x^3)$$

$$v' = \frac{q}{24EI}(L^3 - 6Lx^2 + 4x^3)$$

$$\delta_c = \delta_{max} = \frac{5qL^4}{384EI} \qquad \theta_a = \theta_b = \frac{qL^3}{24EI}$$

2.



$$v = \frac{qx}{384EI}(9L^3 - 24Lx^2 + 16x^3) \qquad 0 \le x \le \frac{L}{2}$$

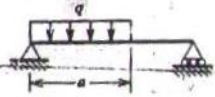
$$v' = \frac{q}{384EI}(9L^3 - 72Lx^2 + 64x^3) \qquad 0 \le x \le \frac{L}{2}$$

$$v = \frac{qL}{384EI}(8x^3 - 24Lx^2 + 17L^2x - L^3) \qquad \frac{L}{2} \le x \le L$$

$$v' = \frac{qL}{384EI}(24x^2 - 48Lx + 17L^2) \qquad \frac{L}{2} \le x \le L$$

$$\delta_c = \frac{5qL^4}{768EI} \qquad \theta_a = \frac{3qL^3}{128EI} \qquad \theta_b = \frac{7qL^3}{384EI}$$

3.



$$v = \frac{qx}{24LEI}(a^4 - 4a^3L + 4a^2L^2 + 2a^2x^2 - 4aLx^2 + Lx^3) \qquad 0 \le x \le a$$

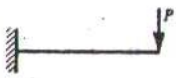
$$v' = \frac{q}{24LEI}(a^4 - 4a^3L + 4a^2L^2 + 6a^2x^2 - 12aLx^2 + 4Lx^3) \qquad 0 \le x \le a$$

$$v = \frac{qa^2}{24LEI}(-a^2L + 4L^2x + a^2x - 6Lx^2 + 2x^3) \qquad a \le x \le L$$

$$v' = \frac{qa^2}{24LEI}(4L^2 + a^2 - 12Lx + 6x^2) \qquad a \le x \le L$$

$$\theta_a = \frac{qa^2}{24LEI}(a^2 - 4aL + 4L^2) \qquad \theta_b = \frac{qa^2}{24LEI}(2L^2 - a^2)$$

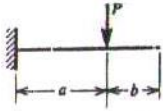
4.



$$v = \frac{Px^2}{6EI}(3L - x) \qquad v' = \frac{Px}{2EI}(2L - x)$$

$$\delta_b = \frac{PL^3}{3EI} \qquad \theta_b = \frac{PL^2}{2EI}$$

5.



$$v = \frac{Px^2}{6EI}(3a - x) \qquad v' = \frac{Px}{2EI}(2a - x) \qquad 0 \le x \le a$$

$$v = \frac{Pa^2}{6EI}(3x - a) \qquad v' = \frac{Pa^2}{2EI} \qquad a \le x \le L$$

At $x = a$: $v = \dfrac{Pa^3}{3EI}$ $\quad v' = \dfrac{Pa^2}{2EI}$

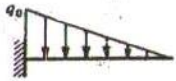
$$\delta_b = \frac{Pa^2}{6EI}(3L - a) \qquad \theta_b = \frac{Pa^2}{2EI}$$

6.

$$v = \frac{M_0 x^2}{2EI} \qquad v' = \frac{M_0 x}{EI}$$

$$\delta_b = \frac{M_0 L^2}{2EI} \qquad \theta_b = \frac{M_0 L}{EI}$$

7.

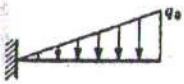


$$v = \frac{q_0 x^2}{120\,LEI}(10L^3 - 10L^2x + 5Lx^2 - x^3)$$

$$v' = \frac{q_0 x}{24LEI}(4L^3 - 6L^2x + 4Lx^2 - x^3)$$

$$\delta_b = \frac{q_0 L^4}{30EI} \qquad \theta_b = \frac{q_0 L^3}{24EI}$$

8.



$$v = \frac{q_0 x^2}{120LEI}(20L^3 - 10L^2x + x^3)$$

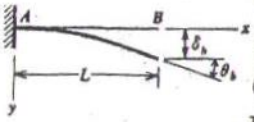
$$v' = \frac{q_0 x}{24LEI}(8L^3 - 6L^2x + x^3)$$

$$\delta_b = \frac{11 q_0 L^4}{120EI} \qquad \theta_b = \frac{q_0 L^3}{8EI}$$

ضمیمه E

افت و شیب منحنی تغییرشکل تیرها

۱ ـ افت وشیب در تیرهای طره‌ای



افت تیر درجهت محور $v =$

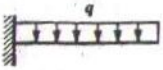
شیب منحنی تغییر شکل تیر $v' = \dfrac{dv}{dx}$

تغییرمکان انتهای سمت راست تیر $\delta_b = v(L) =$

شیب منحنی تغییرشکل درانتهای سمت راست تیر $\theta_b = v'(L) =$

$EI =$ ثابت

1.

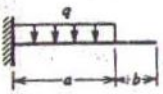


$$v = \frac{q\,x^2}{24EI}(6L^2 - 4Lx + x^2)$$

$$v' = \frac{qx}{6EI}(3L^2 - 3Lx + x^2)$$

$$\delta_b = \frac{qL^4}{8EI} \qquad \theta_b = \frac{qL^3}{6EI}$$

2.



$$v = \frac{qx^2}{24EI}(6a^2 - 4ax + x^2) \qquad 0 \le x \le a$$

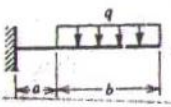
$$v' = \frac{qx}{6EI}(3a^2 - 3ax + x^2) \qquad 0 \le x \le a$$

$$v = \frac{qa^2}{24EI}(4x - a) \qquad v' = \frac{qa^2}{6EI} \qquad a \le x \le L$$

$$\text{At } x = a: \quad v = \frac{qa^3}{8EI} \qquad v' = \frac{qa^2}{6EI}$$

$$\delta_b = \frac{qa^2}{24EI}(4L - a) \qquad \theta_b = \frac{qa^2}{6EI}$$

3.



$$v = \frac{qx^2}{12EI}(3bL + 3ab - 2bx) \qquad 0 \le x \le a$$

$$v' = \frac{qbx}{2EI}(L + a - x) \qquad 0 \le x \le a$$

$$v = \frac{q}{24EI}(x^4 - 4Lx^3 + 6L^2x^2 - 4a^3x + a^4) \qquad a \le x \le L$$

$$v' = \frac{q}{6EI}(x^3 - 3Lx^2 + 3L^2x - a^3) \qquad a \le x \le L$$

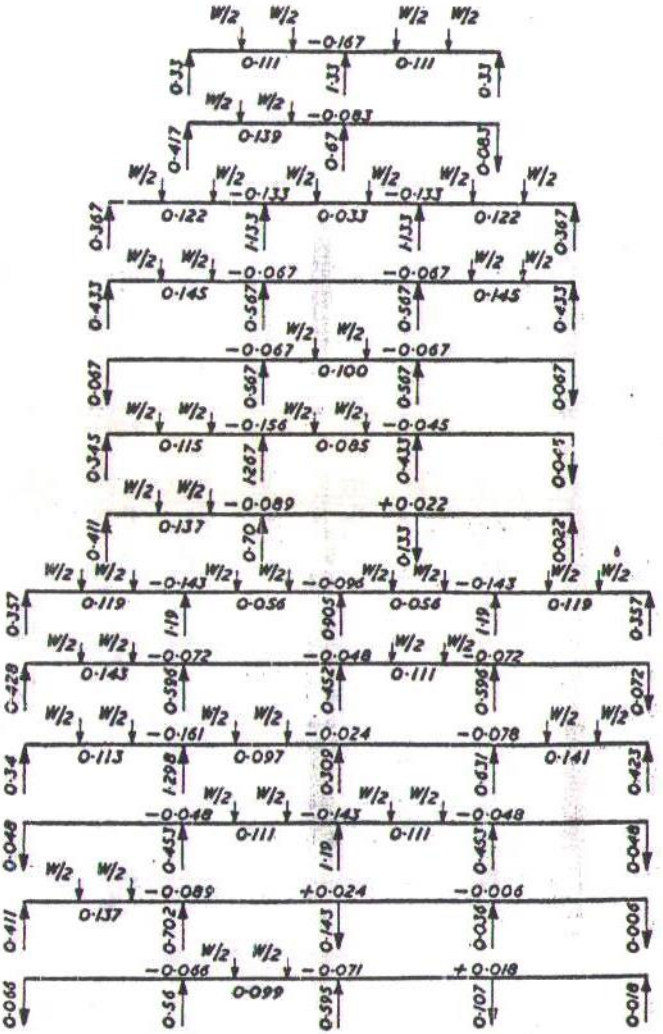
$$\text{At } x = a: \quad v = \frac{qa^2b}{12EI}(3L + a) \qquad v' = \frac{qabL}{2EI}$$

$$\delta_b = \frac{q}{24EI}(3L^4 - 4a^3L + a^4) \qquad \theta_b = \frac{q}{6EI}(L^3 - a^3)$$

تیرهای سرتاسری با دهانه های مساوی— بارهای متمرکزموثردر فاصله $L/3$ ازتکیه گاه ها

$L' \times W \times$ ضریب = لنگر $W \times$ ضریب = عکس‌العمل

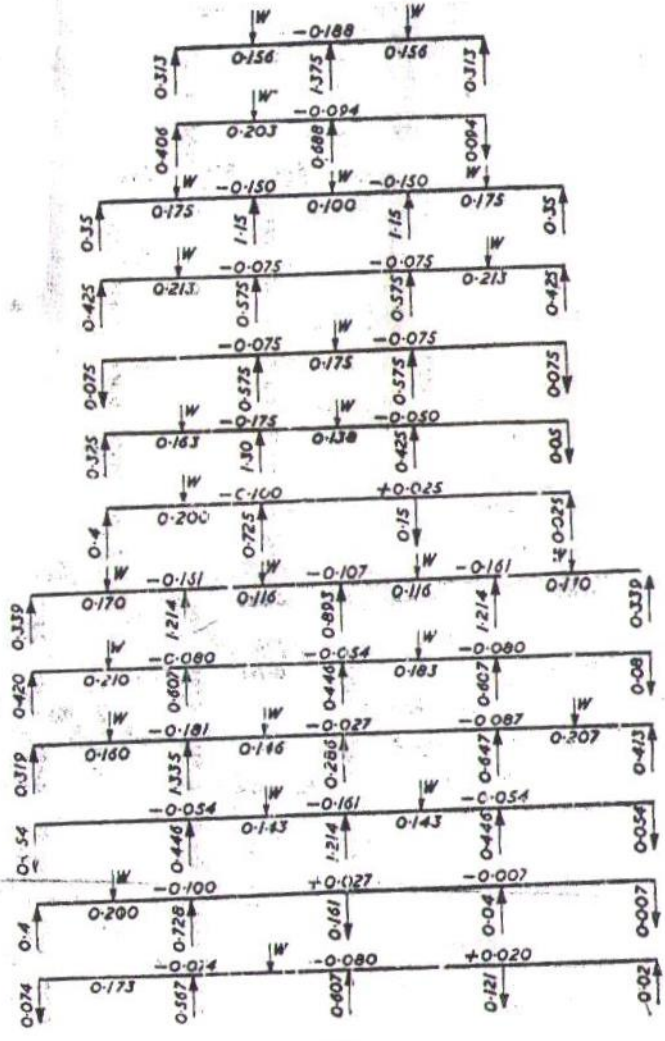
W کل بار موثر برهر دهانه بوده و L نشانگر طول دهانه است.



تیرهای سرتاسری بادهانه‌های مساوی : بارمتمرکز موثر دروسط دهانه

$$\text{لنگر} = \text{ضریب} \times W \times L \qquad \text{عکس‌العمل} = \text{ضریب} \times W$$

W بار موثر برهر دهانه بوده و L نشانگر طول دهانه است.



ضمیمه D تیرهای سرتاسری با دهانه های مساوی بارگسترده یکنواخت

$W \times$ ضریب = عکس‌العمل $\quad$ لنگر = ضریب $\times W \times L$

W کل بارگسترده موثر برهردهانه بوده و L نشانگرطول دهانه است.