

به ناوی خودای زانا و دلوفان

پرووبه ر له ئەندازهی هایپه ربۆلیک

نوسەر: محفوظ رۆسته مزاده

پرووبه ر یه کێک له چه مکه بنه پره تیه کانی بناغه ی ئەندازه یه. به بۆنه ی ئەوه و که له ئەندازه ی ئیقلیدی چوارگۆشه هه یه، ده توانین پرووبه ر و یه که ی پرووبه ر به ئاسانی پیناسه بکهین، واته یه که ی پرووبه ر به پرووبه ر ی چوارگۆشه یه ک به لای یه ک پیناسه ده کهین و ده توانین پرووبه ر ی هه ر وینه یه ک هه ژمار بکهین. به لām له ئەندازه ی هایپه ربۆلیک کۆی پینانه ی گۆشه کانی ناوه وه ی سیگۆشه له 180 که متره، که واته چوارگۆشه مان نیه. بۆیه ئەبێ پرووبه ر به شیوه یه کی تر پیناسه بکریت. به تیبینی ده توانین بلیین مه به ست له پرووبه ر ژماره یه کی موجه (پۆزه تیفه) که به هه ر سیگۆشه یه ک ته ر خانی ده کهین و ئەم تایه تمه ندیا نه ی هه یه:

یه که م- مانه وه ی جووت بوون. واته سیگۆشه جووته کان پرووبه ر ی یه کسانیان هه یه. دووه م- کۆکردنه وه. واته ئەگه ر سیگۆشه یکه مان به دوو دانه سیگۆشه شسته ل کرد، کۆی پرووبه ر ی ئەم دوو سیگۆشه بکاته پرووبه ر ی سیگۆشه یه که مه که.

له ئەندازه ی هایپه ربۆلیک چهند بۆچوونی جیاواز بۆ پیناسه کردنی پرووبه ر هه یه. یه کێک له وانه به کاره یێنانی که می سیگۆشه یه. چه مکی که می له ئەندازه ی هایپه ربۆلیک بریتیه له:

کۆی گۆشه کانی ناوه وه ی سیگۆشه- π

له به ر ئەوه ی که می ئەو دوو تایه تمه ندیه و تراوه ی سه ره وه ی هه یه، زۆربه ی نوسه ره کانی ئەندازه ی هایپه ربۆلیک بۆ پرووبه ر، چه مکی که مییان به کار هیناوه. به لām زۆربه ی ئەم بۆچوونه ر پیناسه کی شیکاری ته واویان نیه بۆ پرووبه ر. یه کێک له بۆچوونه کانیه تر بریتیه له ریبازی شیکاری له سه ر بنه مای چوارچیه ی گشتی پرووبه ر له ئەندازه ی ریمان. «هانفرید لینتس» له په رتووکێ «ئەندازه ی هایپه ربۆلیک» پرووبه ر ی ناوچه ی D له مۆدیلی پوانکاره ی ئەندازه ی هایپه ربۆلیک به ته واوکاری $\int_D \sqrt{EG - F^2} dudv$ پیناسه ده کات که u و v پۆتانی جه مسه ری هایپه ربۆلیکن و E، F و G به ها بنه پره تیه کانی به رامبه ریه. ئەم پیناسه یه ده سه لمیێتی که پرووبه ر بریتیه له که می [1].

بیردۆز: له ئەندازه ی هایپه ربۆلیک ژماره یه کی نه گۆر وه کوو k هه یه که بۆ هه ر سیگۆشه یه کی ΔABC به که می δ و پرووبه ر ی S

$$S = \frac{\pi}{180} k^2 \times \delta$$

سه لماندنی ئەم بیردۆزه له [2] هاتوه. ئەم بیردۆزه ده لیت که پرووبه ر ی هه ر سیگۆشه یه ک هاورپۆزه یه له گه ل که می و ئەم رپۆزه یه بریتیه له نه گۆری $\frac{\pi}{180} k^2$. ئەم به ها نه گۆره به ستراوه به یه که ی

پېوانه، واته به سېگوشه يه ک که پروبهري يه کسانه له گهل يه ک. له ئەندازهي ئيقليدي پروبهري ده تواني هەر ژماره يه کي موجه بېت، به لام له ئەندازهي هايپه ربوليک بو پروبهري هه مووي سېگوشه کان زورينه يه کي سنووردار هه يه. بو نمونه له موديلي بيلترامي - کلايني ئەندازهي هايپه ربوليک، پروبهري هېچ سېگوشه يه ک ناتواني زياتر له π بېت و به گشتي ده توانين ئەم بيردوزه بليين:

بيردۆز: له ئەندازهي هايپه ربوليک زورترين بهاي پروبهري يه کسانه له گهل πk^2 .

ئابراهام ئوونگار له [4] پروبهري له ئەندازهي هايپه ربوليک به جايرو- پروبهري ناو ده بات و به هاو کيشه ي $2 \tan \frac{\delta}{2}$ پيناسه ي ده کا، که δ که ميه. به لام ئەم پيناسه يه يه کيک له تايه تمه نديه بنه مايه کاني پروبهري، واته کو کردني پروبهريه کاني نيه. واته ئە گهر سېگوشه ي $\Delta(A, B, C)$ به دوو سېگوشه ي $\Delta(C, B, X)$ و $\Delta(A, X, C)$ شيته ل بکھين، کو ي پروبهريه کاني ئەم دوو سېگوشه يه يه کسان نيه له گهل پروبهري $\Delta(A, B, C)$.

به لام ئيمه له [3, 5, 6] پروبهريمان به به کاره يتناني که مي پيناسه کردوه و له موديلي بيلترامي - کلايني ئەندازهي هايپه ربوليک، به م شيوه پروبهري سېگوشه پيناسه ده که ين: ئە گهر $\Delta(A, B, C)$ سېگوشه يه ک له موديلي گو ي بيلترامي - کلايني ئەندازهي هايپه ربوليک به نيوه تيره ي s و که مي δ بېت، پروبهري $\Delta(A, B, C)$ بريتيه له

$$S := s^2 \delta.$$

به تايهت له موديلي ته ختي بيلترامي - کلايني ئەندازهي هايپه ربوليک (کاتيک $s = 1$)، پروبهري يه کسانه له گهل که مي.

به م رييازه پروبهري ده تواني وه کوو ئەندازهي ئيقليدي به دريژي لاکاني و پيوانه ي گوشه کاني پيناسه بکريت. بو نمونه ئە گهر دريژي لاکاني به رامبهري به گوشه کاني A, B, C به a, b, c و به رزي C تا لاي AB به h_a نيشان بدهين، پروبهري بريتيه له

$$S = s^2 \delta = 2s^2 \tan^{-1} \frac{\gamma_a a \gamma_{h_a} h_a}{s^2(1 + \gamma_a + \gamma_b + \gamma_c)}$$

که $\gamma_a = \frac{1}{\sqrt{1 - a^2/s^2}}$. ئينجا کاتي s به رهو ناکوتايي ده روا

$$\lim_{s \rightarrow \infty} s^2 \delta = \lim_{s \rightarrow \infty} 2s^2 \left(\frac{\gamma_a a \gamma_{h_a} h_a}{s^2(1 + \gamma_a + \gamma_b + \gamma_c)} \right) \tan^{-1} \left(\frac{\gamma_a a \gamma_{h_a} h_a}{s^2(1 + \gamma_a + \gamma_b + \gamma_c)} \right) = \frac{1}{2} a h_a$$

هه روا که سه لماندمان، کاتي $s \rightarrow \infty$ ، ريساي به دهست هيتراوي پروبهري له ئەندازهي هايپه ربوليک دروست ده بېته ريساي پروبهري له ئەندازهي ئيقليدي. سوودي پيناسه کردني پروبهري به که مي ئەوه يه که تايه تمه ندي کو کردني پروبهريمان هه يه و له بوچوونه که ي ئابراهام ئوونگار ته واوتره. هه ر به م تايه تمه نديه ده توانين پروبهري و چيوه ي بازنه له ئەندازهي هايپه ربوليکي بيلترامي - کلاين به دهست

بهینین. واته بۆ بازنه یه ک به نیوه تیره ی γ چیۆه ده کات $2\pi\gamma$ و پرووبه ری بریتیه له $\pi\gamma^2 \frac{2\gamma^2}{1+\gamma}$ که $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\gamma^2}}$.
 نه گهر $0 \rightarrow \gamma \rightarrow 1$ ئینجا γ و ریسا کانی چیۆه و پرووبه ری بازنه له نه اندازه ی هایپه ربۆلیک دروست ده بیته ریسا ی چیۆه و پرووبه ره له نه اندازه ی ئیقلیدی. واته له جیهانی هایپه ربۆلیک و ئیقلیدی کاتیک نیوه تیره زۆر بچووکه، ریسا ی چیۆه و پرووبه ره بۆ بازنه یه کسانه.

سه رچاوه کان

- [1] LENZ, H., *Nichteuklidische Geometrie*, B.I Hochschultaschenbücher, Mannheim, 1967.
- [2] MOISE, .E. E., *Elementry Geomtry from an Advanced Standpoint*, Reading, Mass.:Addison-Wesley, 1996.
- [3] ROSTAMZADEH, M. AND TAHERIAN, S.-GH., "Defect and Area in Beltrami-Klein Model of Hyperbolic Geometry", *Results Math.*, **63**(1-2)(2013), 229-239.
- [4] UNGA, R A. A., "Einstein's velocity addition law and its hyperbolic geometry", *Comput. Math. Appl.*, **53**(2007), 1228-1250.
- [5] رۆسته مزاده، محفوظ، مۆدیلی بیلترامی - کلاینی ههنده سه ی هایپه ربۆلیک له گه لّ جیهه جیکردنه کانی له بیردۆزی ریژه یی تایبه تی ئاینشتاین، دکتۆرنامه، زانکۆی ته کنۆلۆژی ئیسفه هان، 2014.
- [6] تاهیریان، سهید قههرمان، "پرووبه ره و کهمی له مۆدیلی بیلترامی - کلاین"، کهلتور و بیرى بیرکاری، سالی 31، ژماره ی 52، تاران، بهاری (2013).

ووشه نامه

English	فارسی	کوردی
Euclid	اقلیدس	ئیقلید
geometry	هندسه	ئه‌ندازه
circle	دایره	بازنه
theorem/theory	قضیه	بیردۆز
measure	اندازه‌گیری	پییوانه
integral	انتگرال	ته‌واوکار
congruence	همنهشتی	جووت بوون
circumference	محیط	چیوه
square	مربع	چوارگۆشه
ratio	نسبت	رئیره
formula	فرمول	رئسا
Area	مساحت	رووبهر
triangle	مثلث	سیگۆشه
proof	اثبات	سه‌لماندن
defect	کاستی	که‌می
angle	زاویه	گۆشه
side	ضلع	لا
positive	مثبت	موجه‌ب
Beltrami - Klein model	مدل بلترامی - کلاین	مۆدیلی بیلترامی - کلاین
Poincare' model	مدل پوانکاره	مۆدیلی پوانکاره
constant	ثابت	نه‌گۆر
radius	شعاع	نیوه‌تیره
hyperbolic	هذلولوی	هایپه‌ربۆلیک
unit	واحد	یه‌که