به نام او که تنها او حق است و باقی همه جوب!

سومین آزمون آزمایشی

المپیاد نجوم و اخترفیزیک

پرشان جوانرود

حسین محمدی

امیررضا قدیانی

امیرحسین حاجی محمد رضایی

زمان آزمون: ۲۷۰ دقیقه

- در این آزمون ۱۳ صفحه سوال در ۷ برگ (به همراه جلد) به شما تحویل داده شده است. پیش از شروع آزمون از کامل بودن آن اطمینان حاصل کنید.
- آزمون شامل ۷ سوال است.
- استفاده از ماشین حساب مجاز است.
- استفاده از هر گونه یادداشت، اطلس های نجومی و لوازم الکترونیکی ممنوع است.
- پاسخ سوالات را در برگه A۴ **سفید**، تمیز و خوش خط با **خودکار آبی و یا مشکی** بنویسید. استفاده از غلط گیر غیرمجاز است و در صورت استفاده تقلب محسوب می شود.

ثوابت فیزیکی و نجومی

G	ثابت جهانی گرانش	$۶.۶۷ \times ۱۰^{-۱۱}\ m^{۳}kg^{-۱}s^{-۱}$
σ	ثابت استفان بولتزمن	$۵.۶۷ \times ۱۰^{-۸}\ Wm^{-۲}K^{-۴}$
k_B	ثابت بولتزمن	$۱.۳۸ \times ۱۰^{-۲۳}\ JK^{-۱}$
h	ثابت پلانک	$۶.۶۳ \times ۱۰^{-۳۴}\ Js$
C	سرعت نور	$۳.۰۰ \times ۱۰^{۸}\ ms^{-۱}$
pc	پارسک	$۳.۰۹ \times ۱۰^{۱۶}\ m$
AU	واحد نجومی	$۱.۵۰ \times ۱۰^{۱۱}\ m$
ly	سال نوری	$۹.۴۶ \times ۱۰^{۱۵}\ m$
$R_{\odot}$	شعاع خورشید	$۶.۹۹ \times ۱۰^{۸}m$
$M_{\odot}$	جرم خورشید	$۱.۹۹ \times ۱۰^{۳۰}\ kg$
$L_{\odot}$	درخشندگی خورشید	$۳.۸۵ \times ۱۰^{۲۶}\ W$
$M_{bol,\odot}$	قدر مطلق بولومتریک خورشید	$۴.۷۲\ mag$
$m_{\odot}$	قدر ظاهری خورشید	$-۲۶.۸\ mag$
m_p	جرم پروتون	$۱.۶۷ \times ۱۰^{-۲۷}\ kg$
m_e	جرم الکترون	$۹.۱۱ \times ۱۰^{-۳۱}\ kg$
e	بار الکترون	$۱.۶۰ \times ۱۰^{-۱۹}\ C$
$M_{\oplus}$	جرم زمین	$۵.۹۷ \times ۱۰^{۲۴}\ kg$
$R_{\oplus}$	شعاع زمین	$۶.۳۸ \times ۱۰^{۶}\ m$
ϵ	زاویه تمایل محور زمین	۲۳.۵°
ϵ_{pp}	ضریب کارایی همجوشی هیدروژن	۰.۰۰۷
$inch$	اینچ	$۲.۵۴\ cm$
$H.$	پارامتر هابل	$۶۹\ kms^{-۱}Mpc^{-۱}$
r_{LMC}	فاصله ابرماژلانی بزرگ از مرکز کهکشان	$۴۵\ kpc$
M_{LMC}	جرم ابرماژلانی بزرگ	$۱۰^{۱۰}\ M_{sun}$
$R_{milky\ way}$	شعاع راه‌شیری	$۱۵\ kpc$

سوال اول

طبق تحقیقات جدید ، ناسا کشف کرده است که در تاریخ ۲۷ ژوئن سال ۲۰۴۸ شهاب سنگی به زمین برخورد خواهد کرد که موجب مرگ اکثر جانداران کره ی زمین می شود.

الف) اگر بر اثر این برخورد عمق اپتیکی جو مقدارش به $\tau = ۶.۶۴۳$ برسد محاسبه کنید تا چه فاصله سمت الراسی برای بازماندگان قابل مشاهده است.(حد قدری چشم انسان را ۶.۵ در نظر بگیرید همچنین قدر پر نور ترین ستاره آسمان را -۱.۴۶ در نظر بگیرید.)

۶ ناظر A, B, C, D, E, F را در نظر بگیرید،اگر مختصات ناظر A برابر با$(۰ , ۰)$ باشد و مختصات ناظر B برابر با$(۰ , ۲۵ E)$ باشد و مختصات ناظر C برابر با$(۰ , ۲۵ W)$ باشد.

ب) در صورتی که ناظر هایD , E فاصله شان به ترتیب از دو ناظرA , B و $C ، A$ یکسان و برابر با ۲۵ درجه باشند و در نیمکره شمالی باشند،مختصات ناظر D وE را بیابید.

پ) در صورتی که فاصله ناظر F از دو ناظر D وE یکسان و برابر با ۲۵ درجه باشد، مختصات ناظر F را بیابید.

ت) محاسبه کنید پس از چه مدت زمانی ای ناظر C می تواند بخشی از آسمان که در حال حاضر برای سه ناظر D وB وA مشترک است را ببیند.

ث) محاسبه کنید در یک لحظه چه درصدی از آسمان را فقط و فقط سه ناظر A , D , E می بینند.

سوال دوم

موج و شکاف

در این سوال قصد داریم آزمایش دو شکاف یانگ را کمی دقیق تر بررسی کنیم و سپس رویکردی مشابه را برای سه شکاف و چند شکاف اعمال کنیم.

بر اساس اصل برهم نهی امواج، هنگامی که دو موج در فضا همزمان از ناحیه ای از فضا می گذرند، موج برآیند به سادگی از جمع جبری

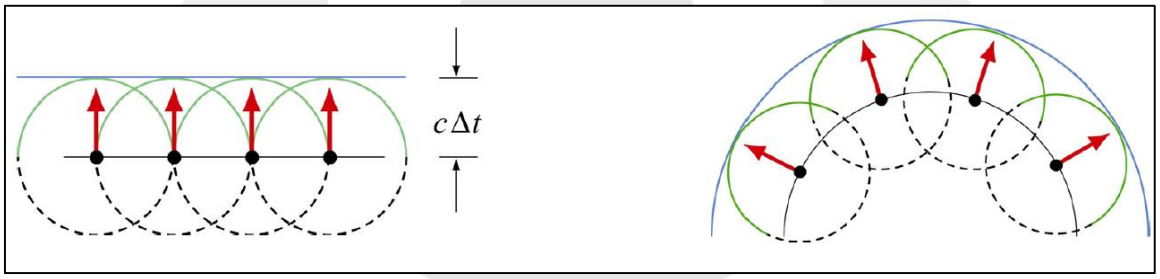
معادله دو موج به دست می آید. اکنون دو موج ψ_1 و ψ_2 را در به صورت زیر نظر بگیرید که دامنه برابر دارند را در نظر بگیرید :

$$\begin{cases}\psi_1 = \psi_0 \sin(kx + \omega t + \phi_1) \\ \psi_2 = \psi_0 \sin(kx + \omega t + \phi_2)\end{cases}$$

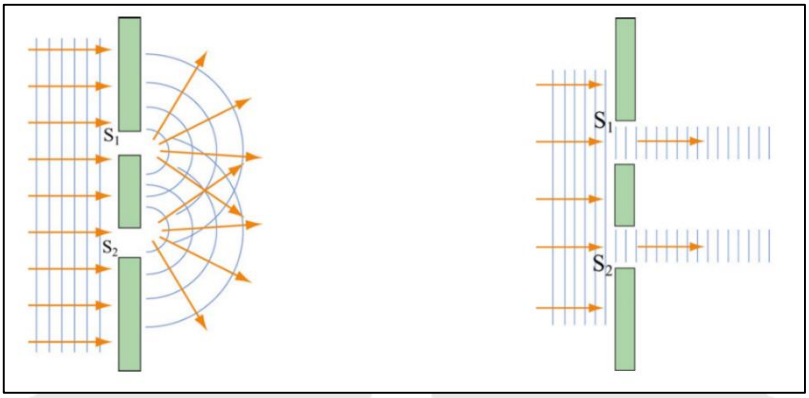
الف) معادله موج برآیند این دو را حساب کنید و فاز اولیه و دامنه موج برآیند را بدست آورید.

اکنون فرض کنید یک منبع نور همدوس$(coherent)$ و تک رنگ$(monochromatic)$ داریم. همدوس بودن بدین معناست که اختلاف فاز موج های ساطع شده از منبع باید با زمان ثابت بماند و تغییر نکند؛ تک رنگ بودن یعنی نور تنها از یک طول موج تشکیل شده است. این دو شرط برای منبع باید برقرار باشد تا طرح تداخلی در آزمایش های مربوط به شکاف وجود بیاید.

یک منبع را در نظر بگیرید که هر دو شرط بالا را ارضا می کند، این منبع را در مقابل یک صفحه کدر می گذاریم که دو شکاف موازی روی آن ایجاد شده است. اصل هویگنز بیان می کند که هر نقطه روی جبهه موج که مانعی جلوی آن نباشد می تواند به عنوان منبع یک موج کروی عمل کند؛ همین اصل باعث می شود که موج پس از عبور از شکاف ها طرح تداخلی ایجاد کند.

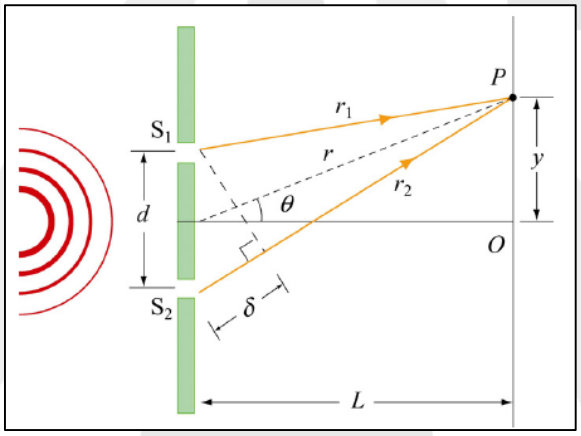


انتشار جبهه موج بنا بر اصل هویگنز



همانطور که در شکل بالا مشاهده می کنید، در صورتی که اصل هویگنز نبود جبهه موج ها موازی باقی می ماندند و طرح تداخلی به وجود نمی آمد.

ب) اکنون به سراغ ازمایش دو شکاف یانگ می رویم، در مقابل صفحه کدر یک پرده قرار می دهیم، با توجه به شکل زیر و با این فرض که فاصله دو شکاف بسیار کوچک تر از فاصله پرده و صفحه شکاف ها است($\frac{d^2}{r^2} \approx 0$)؛ اختلاف راه دو پرتو($\delta$) را حساب و سپس اختلاف فاز دو موج را بدست آورید؛ سپس با توجه به بخش الف موج برآیند را بدست آورید. دامنه این موج چقدر است؟



پ) در صورتی که دامنه موج برآیند صفر باشد تداخل ویرانگر و در صورتی که بیشینه باشد تداخل سازنده است، شرطی برای δ بیابید تا تداخل سازنده یا ویرانگر باشد.

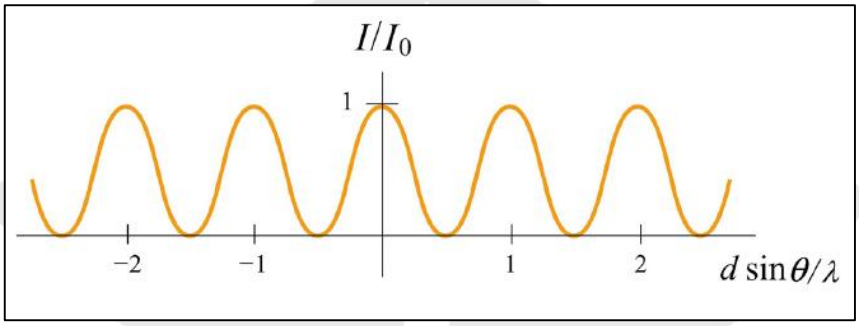
اکنون به محاسبه شدت می پردازیم، شدت نور برابر است با میانگین زمانی بردار پوین تینگ می باشد و خود بردار پوین تینگ با ψ^2 متناسب است :

$$I = \langle S \rangle \propto \langle \psi^2 \rangle$$

ت) اکنون با توجه به معادله موج برآیند که پیش تر بدست آوردید نشان دهید تابعیت شدت نور روی پرده به صورت زیر است که I_0.

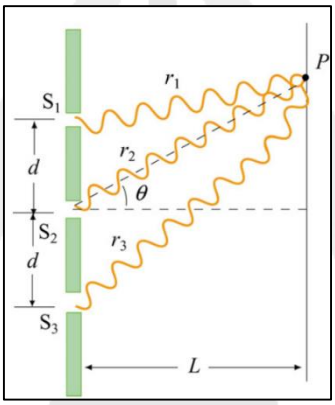
شدت بیشینه است :

$$I = I_0 \cos^2\left(\frac{\pi d \sin\theta}{\lambda}\right)$$



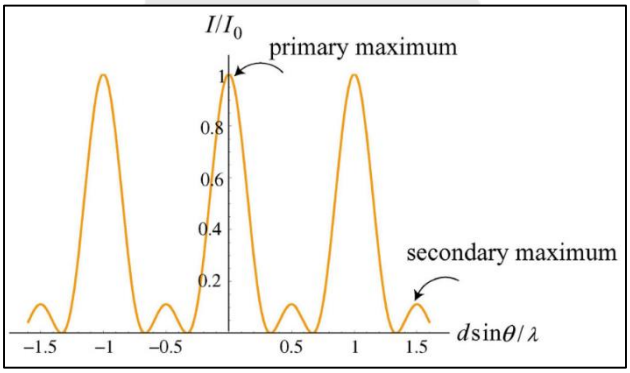
در ادامه قصد داریم رویکرد مشابهی را برای سه شکاف و در نهایت چندین شکاف اعمال کنیم.

ث) در این قسمت به سه شکاف می پردازیم، با توجه به شکل زیر معادله موج برآیند را بدست آورید.



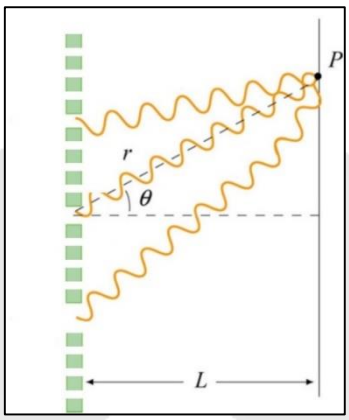
ج) ثابت کنید تابعیت شدت روی پرده به صورت زیر خواهد بود و نشان دهید شدت در دو نقطه متفاوت بیشینه می شود :

$$I = \frac{I_0}{9}\left[1 + 2\cos\left(\frac{2\pi d \sin\theta}{\lambda}\right)\right]^2$$



چ) در این قسمت بجای دو یا سه شکاف، قصد داریم N شکاف با فواصل برابر قرار دهیم. موج برآیند را بدست آورید.

(برای این کار پیشنهاد می شود از راهنمایی آمده در پایان سوال استفاده کنید.). فاصله بالاترین و پایین ترین شکاف را d فرض کنید و θ را از شکاف میانی فرض کنید.(اگر N زوج بود θ را همانند دوشکاف بسنجید.) نوجه کنید که شکل شماتیک است و همچنان شرط ($\frac{d^2}{r^2} \approx$ ۰) برقرار است



ح) ثابت کنید تابعیت شدت روی پرده به صورت زیر خواهد بود :

$$I = \frac{I_0}{N^2}\left[\frac{\sin\left(\frac{N}{N-1}\frac{\pi d \sin\theta}{\lambda}\right)}{\sin\left(\frac{\pi d \sin\theta}{\lambda(N-1)}\right)}\right]^2$$

خ) تابعیت شدت را در حد $N \to \infty$ بدست آورید.

راهنمایی :

با استفاده از فرمول اویلر می توان جمع چند جمله سینوسی را به فرم زیر نوشت :

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$\to \sin\theta = Im[e^{i\theta}]$$

$$\sum_{j=0}^{N} \sin\theta_j = Im[\sum_{j=0}^{N} e^{i\theta_j}]$$

که $Im[\ ]$ جزء موهومی را می دهد.

سوال سوم

کتیبه‌ای ناشناخته کشف شده است که در آن نظریه‌ای تحت عنوان "سحابی مولایی" بیان شده است که به بررسی ویژگی‌های این سحابی و تاثیرشان بر روی حرکت ذرات درون این سحابی ها می‌پردازد. ما معادلات و فرض های این نظریه را به زبان ریاضی شناخته شده‌مان ترجمه کردیم: ابتدا در نظر بگیرید که در نظریه مولایی تمامی طول ها در واحد دلخواهی نوشته شده‌اند و مشکلی از لحاظ ابعادی در روابط نیست و همه‌ی طول هارا به صورت عدد صریح و فارغ از واحد بیان می‌کنیم. فرض اول این است که سحابی تماما در تعادل است و تقارن کروی دارد. فرض‌های بعدی که انجام شده است این است که از مرکز سحابی تا شعاع $\sqrt{e}$ در این دستگاه واحدها، ناحیه‌ای تهی وجود دارد یعنی هیچ ماده ای در این ناحیه وجود ندارد(e عدد نپر است.). در ادامه گفته شده است از شعاع $\sqrt{e}$ از مرکز سحابی تا شعاع $e^{\frac{۳}{۲}}$ رابطه‌ای اخترفیزیکی برای این ناحیه برقرار است. به دلیل اینکه آنها معادلات را از دید ناظری نوشتند این معادله اخترفیزیکی شامل ثابت تکانه زاویه‌ای واحد جرم (h) است. رابطه به شرح زیر است:

$$\frac{dP}{dm} = \frac{h^{۲}(۱ - \ln(r^{۲}))}{۴\,\pi r^{۵}}$$

P در معادله فشار در نقاط مختلف سحابی است و dm المان جرم متقارن کروی است. همانطور که گفتیم r ها بی بعد اند و برای این معادله: $\sqrt{e} \le r \le e^{\frac{۳}{۲}}$. به این ناحیه، منطقه بحرانی می‌گوییم. در فاصله $r_{.}$ دلخواه از مرکز سحابی با شرط $\sqrt{e} \le r_{.} \le e^{\frac{۳}{۲}}$ ذره ای را با سرعت اولیه $v_{.}$ و به طوری پرتاب می‌کنیم که زاویه جهت سرعت کل با جهت مثبت شعاعی β باشد و برای مقدار β داریم: $\csc\beta = \sqrt{\ln(r_{.}^{۲})}$. توجه داشته باشید تکانه زاویه ای واحد جرم این ذره همان h است.

الف)معادله مسیر قطبی این ذره (r بر حسب θ) در منطقه بحرانی را بدست آورید.(در انتخاب مبدا زاویه مختارید.)

ب) زاویه مسیر ذره (زاویه بین راستای مماسی مثبت و جهت سرعت کل) در منطقه بحرانی را بنامید و آنرا تابعی از θ بدست آورید.

ج) فرض کنید در داخل منطقه بحرانی رابطه ضریب کدری با فاصله به صورت زیر است:

$$\kappa = \frac{\kappa_{.}}{h^{۲}\ln\left(\frac{e^{۳}}{r^{۲}}\right)}$$

که در آن $\kappa_{.} = ۷.۱۳۱۷ \times ۱۰^{-۹}$ و یک ثابت است. پرتوی نوری از مرز $r = e^{\frac{۳}{۲}}$ به سمت مرکز سحابی مولایی می‌فرستیم. چند در صد از شدت پرتو به مرکز می‌رسد؟(باز هم تاکید می‌کنیم که اعداد در دستگاه واحدهای کتیبه محاسبه شده اند و تبدیل از SI آنها صورت گرفته و شما با آسودگی برای ثوابت دیگر مقادیر SI آنها را جایگذاری کنید.)

د) ناحیه بیرونی یعنی $r > e^{\frac{۳}{۲}}$ ناحیه فرامولایی است که ذکر شده است ماده این ناحیه گاز کامل است. درباره انتهای ناحیه فرامولایی اطلاعاتی در دست نیست فقط می‌دانیم که بی‌نهایت نیست. برای این ناحیه می‌دانیم:

$$T(r)^{\frac{۱}{۲}}M(r)\rho(r)^{\frac{۱}{۲}} = const.$$

که در آن $T(r)$ دما تابع فاصله، $M(r)$ جرم محصور در شعاع r و $\rho(r)$ هم چگالی تابع فاصله در این ناحیه است. فرم چگالی تابعی از فاصله و فرم جرم محصور تابع فاصله را برای ناحیه فرامولایی بدست آورید.

سول چهارم

کیهانی را در نظر بگیرید که تخت است و فقط از ماده ای به نام $garnar$ تشکیل شده است.در این کیهان پایستگی انرژی وجود ندارد و با آهنگ $\dot{Q}$ به آن انرژی اضافه می شود.اگر رابطه $\dot{Q}$ با سایر پارامتر ها به صورت زیر باشد،

$$\dot{Q} = \mathrm{BV}\frac{\dot{a}}{a}\varepsilon^{۲}$$

که در آن V حجم است، B یک ثابت است ، a پارامتر مقیاس کیهان است وε چگالی انرژی ماده ی$garnar$ است.

با توجه به اینکه معادله حالت به برای این ماده به صورت $P = \omega\varepsilon$ که ω یک مقدار ثابت است و اینکه رابطه $\varepsilon_{(a)}$ به صورت:

$$\varepsilon(a) = \frac{۹}{۰.۴۸۷\,a + ۲}$$

مقدار ω را برای ماده $garnar$ محاسبه کنید.

(مقدار ε را برای زمان حال $\frac{j}{m^{۳}}$ ۵ در نظر بگیرید.)

مقدار $B = ۲\ \frac{m^{۳}}{j}$ است.

سوال پنجم

انفجار در سحابی

یک ستاره نوترونی را در نظر بگیرید که در یک سحابی بسیار عظیم با چگالی ثابت ρ در حال حرکت در مدار دایروی به شعاع R است، ناگهان ستاره در مدار خود متوقف شده و منفجر شده و به N ذره همسان تقسیم می شود($N \to \infty$) . فرض کنید ذرات در جهات مختلف با سرعت v به فضا پرتاب می شوند. یک دستگاه مختصات دکارتی روی مرکز سحابی قرار دهید، محور x را در راستای مبدا انفجار قرار دهید؛ با توجه به اطلاعات داده شده به سوالات زیر پاسخ دهید.

الف) نشان دهید مسیر هر یک از این ذرات یک بیضی است.

ب) معادله سطح گذرنده از این ذرات را در هر لحظه بدست آورید. سرعت مرکز هندسی این سطح را به صورت تابعی از زمان بدست آورید و مساحت آن را در گسترده ترین حالت بیابید.

ج) پس از چه مدت ذرات با یکدیگر برخورد می کنند؟ در صورتی که ذرات باهم برخورد ناکشسان انجام دهند، معادله حرکت جسم جدید را بدست آورید.

اکنون یک وضعیت متفاوت را بررسی می کنیم؛ فرض کنید مولکول های درون سحابی به ذرات ستاره نوترونی یک نیروی ترمزی به فرم $\overrightarrow{f_d} = -mC\vec{v}$ وارد کنند که m جرم ذرات، C یک ثابت و $\vec{v}$ بردار سرعت هر ذره است به سوالات زیر پاسخ دهید ($\frac{C}{2} < \sqrt{\frac{4}{3}\pi G\rho}$) :

د) مختصات هر یک از ذرات را به صورت تابعی از زمان بیابید.

ه) نشان دهید هر یک از این ذرات در هر حظه روی یک بیضی قرار دارد. معادله این بیضی را بیابید و پارامتر های آن را به صورت تابعی از زمان مشخص کنید.

و) معادله سطح گذرنده از این ذرات را در هر لحظه بدست آورید.

ن) پس از چه مدت ذرات با یکدیگر برخورد می کنند؟ در صورتی که ذرات باهم برخورد ناکشسان انجام دهند، معادله حرکت جسم جدید را بدست آورید.

سوال ششم

ناظری را در مرکز یک خوشه کروی به شعاع ۵ سال نوری در نظر بگیرید . این ناظر متوجه میشود که تابعیت

چگالی تعداد ستارگان در این خوشه به این صورت است :

$$n_{(r,\theta)} = n_{\cdot}(۱ - \left(\frac{r}{R_{\cdot}}\right)^{۲}) \times (۱ - \cos\theta)$$

که در این تابع r فاصله از مرکز خوشه و θ زاویه سنجیده شده از سرسو ناظر است . همه ستارگان دراین خوشه خورشید گون هستند. $R_{\cdot}$ شعاع خوشه است.

الف) تابع روشنایی سطحی بر حسب زاویه سرسویی (از دید ناظر مرکز خوشه) بدست آورید

ب) اگر قدر سطحی در زاویه سرسویی ۳۰ درجه برابر ۱۸.۹ قدر بر ثانیه قوسی مربع باشد، $n_{\cdot}$ را بیابید.

ج) حال ناظری را در فاصله بسیار دور از خوشه در نظر بگیرید به طوری که راستای دید این ناظر هم راستا با سرسو ناظر است . تابع روشنایی سطحی بر حسب فاصله تصویر شده در صفحه آسمان از مرکز خوشه بیابید.

د) قدرسطحی مرکز خوشه از دید این ناظر را بدست آورید.

با آرزوی موفقیت

چهاردهمین تیم ملی المپیاد نجوم و اخترفیزیک