

-۱

اصول کار مترو (قطار شهری) این است که مسافت بین دو ایستگاه متوالی را در حداقل زمان ممکن طی کند. اگر سرعت حداکثر مجاز V_m ، حداکثر شتاب تندشونده a و حداکثر شتاب کندشونده a' باشد، حداقل فاصله بین دو ایستگاه متوالی چقدر باشد تا قطار بتواند در طی مسیر به حداکثر سرعت خود برسد؟

$$(1) \frac{V_m^2}{2(a+a')} \quad (2) \frac{V_m^2}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} \right) \quad (3) \frac{V_m^2}{a+a'} \quad (4) V_m^2 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} \right)$$

-۲

توپ های فولادی کوچکی از حالت سکون با میزان n توپ در ثانیه به دنبال هم سقوط می کنند. فاصله قائم h بین دو توپ متوالی در لحظه ای که توپ پایین تر مسافت s را طی کرده، چقدر است؟ از مقاومت هوا و ابعاد توپ ها صرف نظر کنید.

$$(1) \frac{\sqrt{2gs}}{n} \quad (2) ng \left(\sqrt{\frac{2s}{g}} - \frac{n}{2} \right) \quad (3) n\sqrt{2gs} \quad (4) \frac{g}{n} \left(\sqrt{\frac{2s}{g}} - \frac{1}{2n} \right)$$

-۳

شخصی با قد h با سرعت ثابت v زیر باران که به طور عمودی با سرعت ثابت u در حال بارش است، قدم می زند. این شخص برای جلوگیری از خیس شدن، از چتری دایره ای با شعاع R استفاده می کند. حداقل شعاع چتر چقدر باشد تا شخص هنگام قدم زدن خیس نشود؟ (از ابعاد شخص صرف نظر کنید و فقط ارتفاع قد او را در نظر بگیرید)

$$(1) \frac{v}{u} h \quad (2) \frac{u}{v} h \quad (3) \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}} h \quad (4) \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}} h$$

-۴

در شکل مقابل، در صورتی که سرعت جسم ۱ برابر ۱ متر بر ثانیه به سمت بالا باشد، سرعت جسم ۲ چقدر و به کدام سمت است؟



(۱) ۴m/s بالا

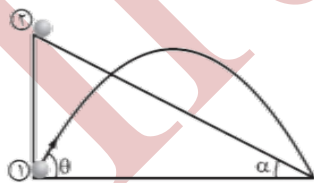
(۲) ۴m/s بالا

(۳) ۴m/s پایین

(۴) ۴m/s پایین

-۵

دو جسم ۱ و جسم ۲ همزمان شروع به حرکت می کنند. جسم ۱ با سرعت اولیه V_0 و با زاویه θ نسبت به افق پرتاب می شود و جسم ۲ از بالای سطح شیب داری بدون اصطکاک و با شیب α از حالت سکون شروع به حرکت می کند. اگر دو جسم همزمان به پایین سطح شیب دار برسند، آنگاه برای θ خواهیم داشت:



$$(4) \tan \theta = 2 \sin(2\alpha)$$

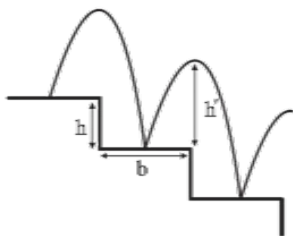
$$(3) \tan \theta = \frac{2}{\cos(2\alpha)}$$

$$(2) \tan \theta = \frac{2}{\sin(2\alpha)}$$

$$(1) \tan \theta = \tan(2\alpha)$$

-۶-

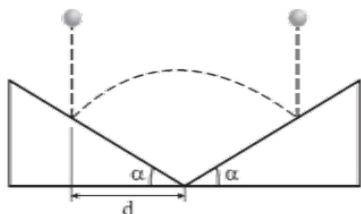
توب کوچکی از بالای پله هایی به طول b و ارتفاع h مطابق شکل پرتاب می شود، به طوری که بعد از هر بار برخورد با پله بعدی تا ارتفاع h' بالا می رود و درست در وسط پله بعدی فرود می آید و این حرکت تکرار می گردد. ضریب بازگشت توب کدام است؟ (ضریب بازگشت e برابر است با نسبت سرعت عمودی بعد از برخورد به سرعت عمودی قبل از برخورد)



$$\begin{aligned} (1) & \sqrt{\frac{h'}{h+h'}} \\ (2) & \frac{h'}{h+h'} \\ (3) & \sqrt{\frac{h}{h+h'}} \\ (4) & \frac{h}{h+h'} \end{aligned}$$

-۷-

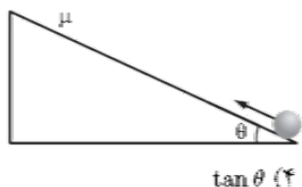
جسمی از ارتفاع اولیه h نسبت به سطح شیب داری با زاویه شیب α از حالت سکون رها می شود و بعد از برخورد با سطح، به سطح شیب دار مقابل برخورد می کند. نسبت d به h چقدر باشد تا جسم مسیر خود را تکرار کند؟



$$\begin{aligned} (1) & \frac{d}{h} = \sin(\frac{\pi}{2}\alpha) \\ (2) & \frac{d}{h} = \sin(\frac{\pi}{4}\alpha) \\ (3) & \frac{d}{h} = \sin \alpha \\ (4) & \frac{d}{h} = \tan(\frac{\pi}{2}\alpha) \end{aligned}$$

-۸-

جسمی با سرعت اولیه روی سطح شیب داری با زاویه شیب θ به سمت بالای آن شروع به حرکت می کند. اگر زمان بالا رفتن جسم از سطح شیب دار، n برابر زمان پایین آمدن آن باشد، ضریب اصطکاک با سطح شیب دار چقدر است؟



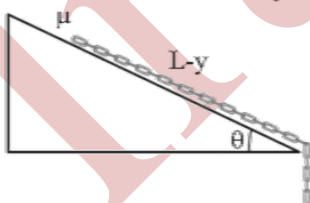
$$\frac{1+n^2}{1-n^2} \tan \theta$$

$$\frac{1-n}{1+n} \tan \theta$$

$$\frac{1-n^2}{1+n^2} \tan \theta$$

-۹-

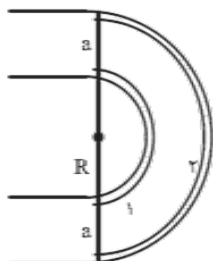
زنجریری به طول L و جرم m از سطح شیب داری با زاویه شیب θ آویزان است. اگر ضریب اصطکاک زنجر و سطح شیب دار برابر μ به طوری که $\tan \theta < \mu$ باشد، حداکثر چه طولی از زنجر از سطح می تواند آویزان باشد تا زنجر نلغزد؟



$$\begin{aligned} (1) & \frac{\mu}{1+\mu} L \\ (2) & \frac{\mu \cos \theta}{1+\mu \cos \theta} L \\ (3) & \frac{\mu \cos \theta}{1+\mu} L \\ (4) & \text{زنجر هرگز نمی نلغزد.} \end{aligned}$$

-۱۰

ضریب اصطکاک جاده ای افقی برابر μ و عرض جاده برابر a است. دو اتومبیل همزمان و با حداکثر سرعت ممکن، مطابق شکل وارد پیچی به شکل نیم دایره ای به شعاع R می شوند. اتومبیل شماره ۱ مسیر شماره ۱ و اتومبیل شماره ۲ مسیر ۲ را طی می کند تا به انتهای پیچ برسند. کدام اتومبیل زودتر به انتهای پیچ می رسد؟



۱ (۱)

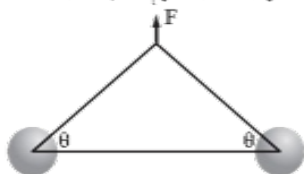
۲ (۲)

۳ همزمان می رسند.

۴ نمی توان تعیین کرد.

-۱۱

دو گوی فولادی هر کدام به جرم m توسط طنابی بی جرم به طول $2b$ به یکدیگر متصل هستند و روی سطح افقی و بدون اصطکاک در فاصله اولیه $2b$ از هم قرار دارند. نیروی ثابت F در صفحه افقی مطابق شکل به وسط طناب وارد می شود. فرض کنید دو جرم فقط در راستای خط واصل اولیه خود می توانند حرکت کنند. هنگامی که زاویه طناب برابر θ است. سرعت هر یک از جرم ها چقدر است؟



$$\sqrt{\frac{Fb \tan \theta}{m}} \quad (1)$$

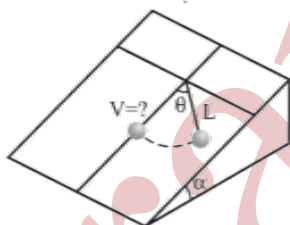
$$\sqrt{\frac{Fb \cos \theta}{m}} \quad (2)$$

$$\sqrt{\frac{Fb \sin \theta}{m}} \quad (3)$$

$$\sqrt{\frac{Fb}{m}} \quad (4)$$

-۱۲

جسمی به جرم m توسط نخ به طول L به نقطه ثابتی روی سطح شیب دار بدون اصطکاک متصل شده است. مطابق شکل جسم از حالت سکون و با زاویه اولیه θ آغاز به حرکت میکند. سرعت جسم هنگام عبور از پایین ترین نقطه مسیر کدام است؟



$$\sqrt{2gL(1 - \cos \theta)} \quad (1)$$

$$\sqrt{2gL(1 - \cos \alpha) \sin \theta} \quad (2)$$

$$\sqrt{2gL(1 - \cos \theta) \sin \alpha} \quad (3)$$

$$\sqrt{2gL \sin \alpha} \quad (4)$$

-۱۳

خودرویی با سرعت ثابت V در حال حرکت است. ناگهان راننده نوک برجی را می بیند. اتومبیل بعد از زمان T به پای برج می رسد. اگر شعاع کره زمین R باشد، ارتفاع برج چقدر است؟ (فرض کنید ارتفاع برج نسبت به شعاع زمین بسیار کوچک است)

$$\frac{V^2 T^2}{2R} \quad (4)$$

$$\frac{V^2 T^2}{R} \quad (3)$$

$$\frac{2V^2 T^2}{R} \quad (2)$$

$$\frac{V^2 T^2}{R} \quad (1)$$

-۱۴

از دوش آبی که در ارتفاع H قرار دارد، در هر T ثانیه، n قطره به طور متوالی با فواصل زمانی یکسان جدا شده و سقوط میکنند. توسط دوربین از این دوش عکس گرفته میشود. کدام یک از عبارتهای زیر میتواند تعداد قطرات موجود در عکس باشد؟ ([] علامت جزء صحیح است)

$$\left[\sqrt{\frac{gT}{Hn}} \right] \quad (۴) \quad \left[\sqrt{\frac{gT}{2Hn}} \right] \quad (۳) \quad \left[\sqrt{\frac{Hn}{gT}} \right] \quad (۲) \quad \left[\sqrt{\frac{2Hn}{gT}} \right] \quad (۱)$$

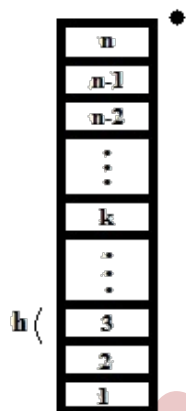
-۱۵

دو اتومبیل با سرعتهای V_1 و V_2 در جادهای مستقیم در حال حرکت به سمت یکدیگر هستند. ناگهان دو راننده در فاصله L از یکدیگر متوجه میشوند و ترمز میکنند. اگر زمان عکسالعمل (فاصله زمانی بین دیدن تا ترمز کردن) رانندهها به ترتیب T_1 و T_2 ، و شتاب ترمز اتومبیلها به ترتیب a_1 و a_2 باشد، کدام شرط برقرار باشد تا تصادفی رخ ندهد؟

$$L \leq \frac{(V_1 + V_2)^2}{2(a_1 + a_2)} + (V_1 + V_2)(T_1 + T_2) \quad (۲) \quad L \geq \frac{(V_1 + V_2)^2}{2(a_1 + a_2)} + (V_1 + V_2)(T_1 + T_2) \quad (۱)$$

$$L \leq \frac{V_1^2}{2a_1} + \frac{V_2^2}{2a_2} + V_1T_1 + V_2T_2 \quad (۴) \quad L \geq \frac{V_1^2}{2a_1} + \frac{V_2^2}{2a_2} + V_1T_1 + V_2T_2 \quad (۳)$$

-۱۶



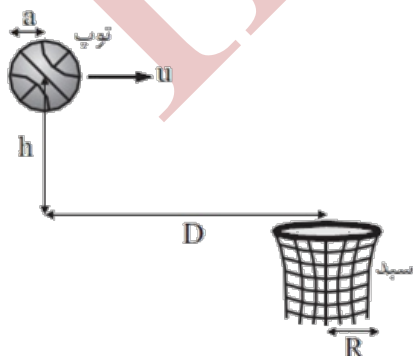
ساختمانی دارای n طبقه هر یک به ارتفاع h است. سنگی از بالای ساختمان رها میشود. شخصی که در یکی از طبقات کنار پنجره ایستاده است این سنگ را در حال عبور از مقابل پنجره خود، برای مدت زمان T مشاهده میکند. فرض کنید ارتفاع هر پنجره با ارتفاع هر طبقه یکسان و برابر h است. این شخص در کدام طبقه قرار دارد؟

$$k = n - \frac{h}{2gT^2} \left[1 - \frac{gT^2}{2h} \right] \quad (۲) \quad k = n - \frac{h}{gT^2} \left[1 - \frac{gT^2}{h} \right] \quad (۱)$$

$$k = n - \frac{2h}{gT^2} \left[1 - \frac{gT^2}{h} \right] \quad (۴) \quad k = n - \frac{2h}{gT^2} \left[1 - \frac{2gT^2}{h} \right] \quad (۳)$$

-۱۷

توپیی با شعاع a مطابق شکل، با سرعت افقی u به سمت سبدی با دهانه به شعاع R پرتاب میشود. اگر دهانه سبد در ارتفاع h پایینتر از محل پرتاب و فاصله افقی مرکز سبد از محل پرتاب برابر D باشد، اختلاف حداکثر و حداقل سرعت لازم برای افتادن توپها داخل سبد چقدر است؟



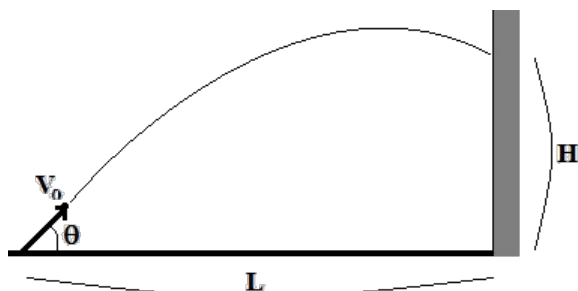
$$\left(\sqrt{\frac{2g}{h}} \right) a \quad (۲) \quad \left(\sqrt{\frac{2g}{h}} \right) R \quad (۱)$$

$$\sqrt{2gh} \quad (۴) \quad \left(\sqrt{\frac{2g}{h}} \right) (R - a) \quad (۳)$$

-۱۸

توپى با سرعت اولیه V_0 به سوى دیواری در فاصله افقى L پرتاب میشود. ارتفاع محل برخورد توپ با دیوار را H مینامیم. حداکثر مقدار H

چقدر است؟ (فرض کنید $\frac{V_0^2}{g} > L$)

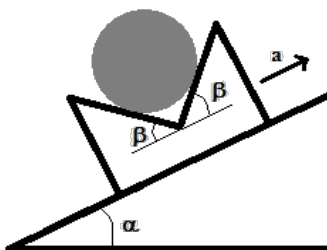


$$\frac{V_0^2}{2g} \quad (2) \quad \frac{V_0^2}{2g} \left[1 - \left(\frac{gL}{V_0^2} \right)^2 \right] \quad (1)$$

$$\frac{gL^2}{2V_0^2} \quad (4) \quad \frac{V_0^2}{g} \left[1 - \left(\frac{gL}{V_0^2} \right)^2 \right] \quad (3)$$

-۱۹

ارابه های برای بالا بردن الوار چوب استوانه های از تپه های با زاویه α نسبت به افق طراحی شده است. با توجه به شکل، حداکثر شتاب اربه که میتواند به سمت بالای تپه حرکت کند به طوری که الوار چوب تماس خود را با اربه از دست ندهد، چقدر است؟

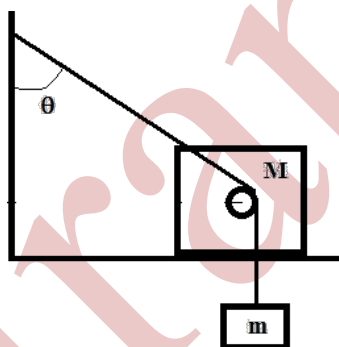


$$g \frac{\cos(\beta - \alpha)}{\cos \beta} \quad (2) \quad g \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin \beta} \quad (1)$$

$$g \frac{\cos(\beta - \alpha)}{\sin \beta} \quad (4) \quad g \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\cos \beta} \quad (3)$$

-۲۰

مطابق شکل، جعبه های به جرم M روس سطحی با اصطکاک قرار دارد. جرم m توسط نخى آویزان است. در وضعیت نشان داده شده جرم M در آستانه حرکت قرار دارد. ضریب اصطکاک سطح چقدر است؟

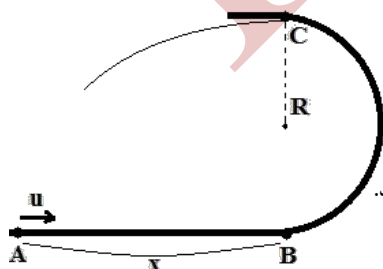


$$\frac{m \sin \theta}{M + m(1 - \cos \theta)} \quad (2) \quad \frac{M \sin \theta}{m + M(1 - \cos \theta)} \quad (1)$$

$$\frac{m \sin \theta}{m + M(1 - \cos \theta)} \quad (4) \quad \frac{M \sin \theta}{M + m(1 - \cos \theta)} \quad (3)$$

-۲۱

مطابق شکل شخصی توپی را از نقطه A از فاصله X از نقطه B با سرعت اولیه افقى u روی سطحی صیقلی پرتاب میکند. توپ بعد از عبور از نقطه C به شکل یک پرتابه به روی سطح افقى برمیگردد. کدام گزینه درست است؟



(۱) به ازای همه مقادیر X و همه مقادیر u ، توپ در مسیر بازگشت میتواند از نقطه A بگذرد.

(۲) به ازای همه مقادیر X و بعضی مقادیر u ، توپ در مسیر بازگشت میتواند از نقطه A بگذرد.

(۳) به ازای بعضی مقادیر X و بعضی مقادیر u ، توپ در مسیر بازگشت میتواند از نقطه A بگذرد.

(۴) به ازای هیچ مقدار X و هیچ مقدار u ، توپ در مسیر بازگشت نمیتواند از نقطه A بگذرد.

-۲۲

حداقل سرعت افقی برای پیمودن مسافت R توسط پرتابه چقدر است؟

(۴) اطلاعات مسئله کافی نیست

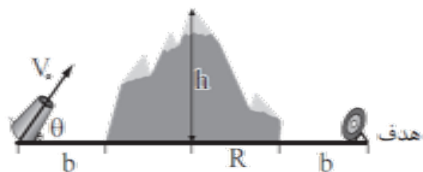
$$\frac{R}{g} \quad (۳)$$

$$\sqrt{Rg} \quad (۲)$$

$$Rg \quad (۱)$$

-۲۳

توپ جنگی مطابق شکل برای هدف گیری هدفی در طرف دیگر کوه مورد استفاده قرار گرفته است. اگر ارتفاع کوه برابر h و فاصله توپ و هدف از کوه برابر b باشد، حداقل سرعت لازم برای برخورد به هدف چقدر است؟



$$\sqrt{[(R+b)^2 + 4h^2] \frac{g}{2h}} \quad (۱)$$

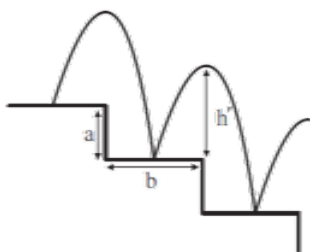
$$\sqrt{[(R+b)^2 + h^2] \frac{g}{h}} \quad (۲)$$

$$\sqrt{2(R+b)g} \quad (۳)$$

(۴) هیچکدام

-۲۴

توبی کوچک از بالای پله‌هایی به طول b و ارتفاع h مطابق شکل پرتاب می‌شود، به طوری که بعد از هر بار برخورد با پله بعدی تا ارتفاع h' بالا می‌رود و درست در وسط پله بعدی فرود می‌آید و این حرکت تکرار می‌گردد. مولفه‌ی افقی سرعت توپ کدام است؟



$$\frac{\sqrt{\frac{g}{2}}b}{\sqrt{h+h'}+\sqrt{h}} \quad (۲)$$

$$\sqrt{2gh} \quad (۱)$$

$$\frac{\sqrt{\frac{g}{2}}b}{\sqrt{h+h'}+\sqrt{h'}} \quad (۴)$$

$$\sqrt{2gb} \quad (۳)$$

-۲۵

ارابه‌ای از سطح شیب داری بدون اصطکاک با زاویه شیب α به سمت پایین در حال حرکت است. آونگی از سقف ارابه آویزان است که با محور قائم، زاویه‌ی β می‌سازد. مقدار β کدام است؟

$$2\alpha = \beta \quad (۴)$$

$$\alpha = \beta \quad (۳)$$

$$\alpha < \beta \quad (۲)$$

$$\alpha > \beta \quad (۱)$$

-۲۶

در چهارراهی خودروهایی به طول b در یک صف با فاصله طولی $\frac{b}{2}$ از یکدیگر ایستاده‌اند. شتاب



تند شونده خودروها برابر a است. چراغ راهنما به مدت T سبز می‌شود. هر خودرو زمانی آغاز به حرکت می‌کند که فاصله خودرو جلویی از آن برابر b شود. چه شرطی برقرار باشد تا خودروی n

آم بتواند از چهارراه عبور کند؟ (عبور به معنی گذشتن جلوی خودرو از چهارراه است.)

$$\left[2(n-1) + \sqrt{(n-1)} \right] \sqrt{\frac{b}{a}} \leq T \quad (۲)$$

$$\left[(n-1) + \sqrt{(n-1)} \right] \sqrt{\frac{b}{a}} \leq T \quad (۱)$$

$$\left[(n-1) + \sqrt{(n-1)} \right] \sqrt{\frac{2b}{a}} \leq T \quad (۴)$$

$$\left[(n-1) + \sqrt{2(n-1)} \right] \sqrt{\frac{b}{a}} \leq T \quad (۳)$$

-۲۷

در جاده ای دوطرفه اتومبیل هایی با طول b با سرعت ثابت v حرکت می کنند. حداکثر شتاب تندشونده اتومبیل ها برابر a است. اگر فاصله طولی اتومبیل ها از یکدیگر کمتر از L شود، وضعیت غیری به وجود می آید و احتمال وقوع تصادف وجود دارد. وضعیتی مطابق شکل را در نظر بگیرید. فاصله اتومبیل ۱ تا اتومبیل ۳ که از روبرو به سمت یکدیگر حرکت می کنند برابر S است. در این وضعیت اتومبیل ۱ آغاز به سبقت گرفتن می کند. سبقت زمانی پالین می گیرد که خودروی ۱ به اندازه L از خودروی ۲ جلو افتاده باشد. حداقل مقدار S چقدر باشد تا خودروی ۱ با اینی کامل بتواند سبقت بگیرد؟

$$2L + 3b + 4v\sqrt{\frac{b+L}{a}} \quad (2)$$

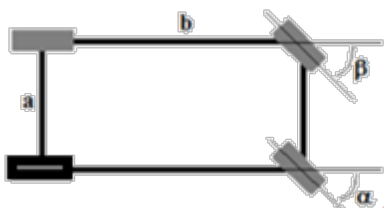
$$3L + 2b + 4v\sqrt{\frac{b+L}{a}} \quad (1)$$

$$4L + 3b + 2v\sqrt{\frac{b+L}{a}} \quad (4)$$

$$3L + 2b + 2v\sqrt{\frac{b+L}{a}} \quad (3)$$

-۲۸

چرخ های جلوی اتومبیل می توانند حداکثر با زوای α و β نسبت به محور طولی اتومبیل منحرف شوند. برای اینکه اتومبیل بتواند حول مسیری دایه ای دور بزند، کدام گزینه درست است؟



$$\beta < \alpha \quad (2)$$

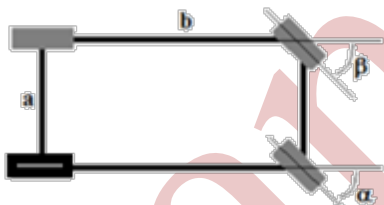
$$\beta > \alpha \quad (1)$$

(۴) بستگی به ابعاد اتومبیل دارد.

$$\beta = \alpha \quad (3)$$

-۲۹

چرخ های جلوی اتومبیل به طول b و عرض a می توانند حداکثر با زوای α و β نسبت به محور طولی اتومبیل منحرف شوند. حداقل شعاع مسیری دایه ای (فاصله مرکز دایه از چرخ عقب با رنگ سرخ) که اتومبیل می تواند حول آن دور بزند چقدر است؟



$$\frac{b}{\tan \beta} - a \quad (2)$$

$$\frac{b}{\tan \alpha} \quad (1)$$

(۴) هیچ کدام

(۳) گزینه ۱ و ۲

-۳۰

اتوبوسی با سرعت v در طول یک بزرگراه در حال حرکت است. مردی به فاصله عرضی a از بزرگراه و فاصله افقی b از اتوبوس قرار دارد. کمترین سرعت دویدن شخص چقدر باشد، شخص به اتوبوس برسد؟

$$\frac{a}{b} v \quad (4)$$

$$\frac{b}{a} v \quad (3)$$

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} v \quad (2)$$

$$\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} v \quad (1)$$

-۳۱

حداقل سرعت لازم برای پرتاب تویی درون سبیدی که به فاصله افقی s از توپ و بلندی h از سطح زمین قرار دارد چقدر است؟

$$\sqrt{gh\sqrt{1 + \frac{s^2}{h^2}}} \quad (4)$$

$$\sqrt{gh\left[1 + \sqrt{1 + \frac{s^2}{h^2}}\right]} \quad (3)$$

$$\sqrt{gh\left[1 + \sqrt{1 + \frac{h^2}{s^2}}\right]} \quad (2)$$

$$\sqrt{2gh} \quad (1)$$

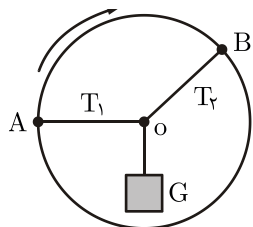
-۳۲

سیستم جرم و فنری از سقف آسانسوری ساکن آویزان شده و در حال نوسان در راستای قائم است. در لحظهای که جرم به پایینترین نقطه حرکت خود می رسد، ناگهان کابل نگهدارنده آسانسور پاره شده و آسانسور شروع به سقوط آزاد میکند. از دید شخصی که درون آسانسور قرار دارد، کدام یک از کمیت های زیر طی سقوط بدون تغییر باقی میماند؟ از مقاومت هوا صرف نظر کنید.

- (۱) دامنه
(۲) دوره تناوب
(۳) حداکثر سرعت جسم
(۴) حداکثر ارتفاع جسم

-۳۳

حلقه ای می تواند در صفحه قائم بغلتد. مطابق شکل به دو نقطه ثابت A و B از حلقه دو نخ بدون جرم متصل هستند. این دو نخ در مرکز حلقه گره خورده و به جسمی به وزن W متصل شدهاند. در حالت اولیه نخ OA افقی است. حلقه بزرگ به آرامی ساعتگرد میغلند تا نقطه A به بالاترین نقطه حلقه برسد. در طول حرکت کشش نخ OA را با T_1 و کشش نخ OB را با T_2 نشان می دهیم. کدام گزینه درست است؟



- (۱) T_1 همواره کاهش می یابد.
(۲) T_1 همواره افزایش می یابد.
(۳) T_2 همواره افزایش می یابد.
(۴) T_2 در پایان حرکت برابر صفر است.

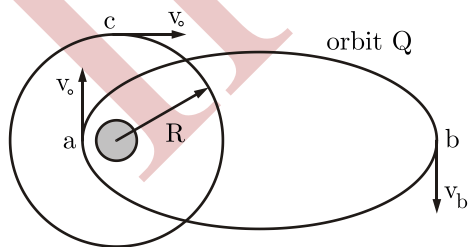
-۳۴

سه جرم یکسان m در رؤس مثلث متساویالاضاعی در صفحه افقی هستند. سه جرم توسط فنرهای یکسان در راستای اضلاع مثلث به یکدیگر متصل شدهاند. در حالت عادی طول ضلع مثلث برابر L است. هنگامی که هر سه جرم با سرعت زاویه ای ω حول مرکز مثلث در حال چرخش هستند، طول ضلع مثلث برابر $2L$ است. ضریب سختی فنر کدام گزینه است؟

(۱) $2m\omega^2$ (۲) $\frac{2}{\sqrt{3}}m\omega^2$ (۳) $\frac{2}{3}m\omega^2$ (۴) $\frac{1}{\sqrt{3}}m\omega^2$

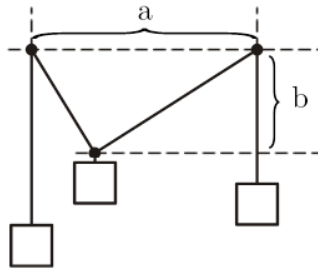
-۳۵

دو مدار مطابق شکل به دور خورشید را در نشر بگیرید. مدار دایره ای به شعاع R است که سرعت چرخش در آن v_c است. مدار بیضی است به طوری که دورترین فاصله آن از خورشید بین $2R$ و $3R$ است و سرعت در این نقطه برابر v_b است و نزدیکترین نقطه به خورشید بین $\frac{R}{3}$ و $\frac{R}{2}$ است و سرعت در این نقطه برابر v_a است. کدام گزینه درست می باشد؟



- (۱) $v_b > v_c > 2v_a$
(۲) $2v_c > v_b > v_a$
(۳) $10v_b > v_a > v_c$
(۴) $v_c > v_a > 4v_b$

-۳۶



سه جرم یکسان مطابق شکل در حال تعادل قرار دارند. نخ ها بدون جرم و قرقره ها کوچک و بدون اصطکاک هستند. نسبت a/b کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\sqrt{3}$ (۳) 2 (۴) $2\sqrt{3}$

-۳۷

سه جرم یکسان در سطحی بدون اصطکاک قرار دارند. جسم وسط در حال سکون است ولی دو جرم دیگر هر یک با سرعت v به سمت جرم وسط در حال حرکت هستند. در شروع حرکت جرم سمت چپ به جرم وسطی نزدیکتر است. فرض کنید همه برخوردها کشسان (بدون اتلاف انرژی) است. کدام گزینه در مورد وضعیت نهایی جرم وسط درست است؟

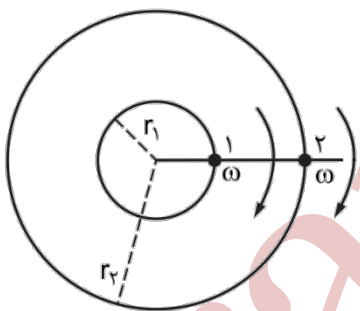


- (۱) جرم وسط به سمت راست حرکت میکند.
(۲) جرم وسط در مکانی در سمت چپ مکان اولیه در حال سکون است.
(۳) جرم وسط در مکانی در سمت راست مکان اولیه در حال سکون است.
(۴) جرم وسط در مکان اولیه در حال سکون است.

-۳۸

دو جسم توسط دو نخ در مسیرهای دایره ای با شعاع های r_1 و r_2 ، ($1 < \frac{r_2}{r_1} < 5$) ، در جهت ساعتگرد در حال چرخش هستند. دو جسم

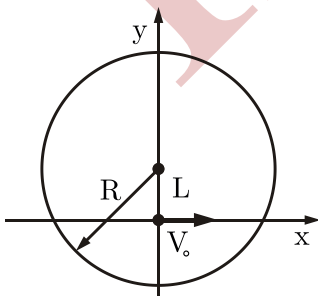
از روی محور افقی شروع به حرکت کرده و سرعت زاویه ای ثابت آن ها با هم یکسان و برابر با ω است. در زمان T ، نخ جسم ۱ پاره می شود. از گرانث صرف نظر کنید. کدام گزینه درست است؟



- (۱) حتماً جسم ۱ با جسم ۲ برخورد خواهد کرد.
(۲) حتماً جسم ۱ با جسم ۲ برخورد نخواهد کرد.
(۳) به ازای مقداری خاصی از $\frac{r_2}{r_1}$ ، جسم ۱ با جسم ۲ برخورد خواهد کرد.
(۴) به ازای مقداری خاصی از T ، جسم ۱ با جسم ۲ برخورد خواهد کرد.

-۳۹

مرکز یک دیوار دایره ای شکل به شعاع R در مختصات $(L, 0)$ قرار دارد به طوری که $(R > 4L)$. شتاب گرانش در جهت $-y$ است. پسریچه ای می خواهد توپی را از مبدأ مختصات به صورت افقی پرتاب کند. سرعت اولیه v_0 لازم برای اینکه بعد از برخورد با دیوار روی مسیر رفت برگردد (از تمام اتلافات صرف نظر کنید).



$$v_0 = \sqrt{\frac{g}{L}(R^2 - 4L^2)} \quad (2)$$

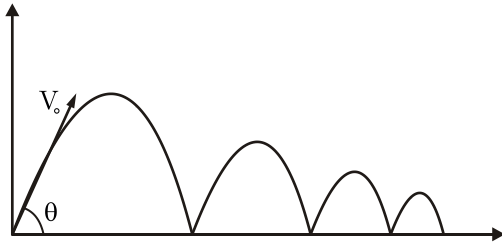
$$v_0 = \sqrt{\frac{g}{L}(R^2 - L^2)} \quad (4)$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{g}{2L}(R^2 - 4L^2)} \quad (1)$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{g}{2L}(R^2 - L^2)} \quad (3)$$

-۴۰-

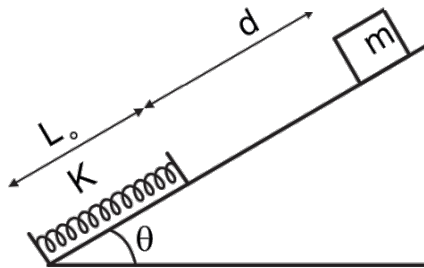
یک پرتابه با سرعت اولیه V_0 تحت زاویه θ نسبت به سطح افق پرتاب می‌شود. در هر برخورد پرتابه با سطح زمین، هر دو مولفه‌ی سرعت پرتابه β برابر می‌شوند ($\beta < 1$). برد نهایی این پرتابه چقدر است؟



$$\begin{aligned} (1) \quad & \frac{V_0^2 \sin^2 \theta}{g(1-\beta^2)} \\ (2) \quad & \frac{V_0^2 \sin^2 \theta}{g(1-\beta^2)} \\ (3) \quad & \frac{V_0^2 \sin^2 \theta}{g(1-\beta^2)} \\ (4) \quad & \frac{V_0^2 \sin^2 \theta}{g} \end{aligned}$$

-۴۱-

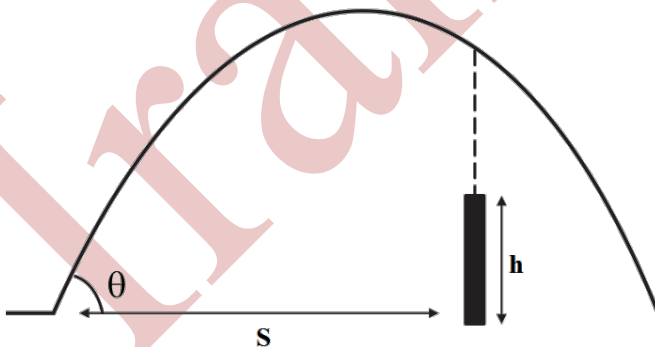
جسمی به جرم m روی سطح شیبدار بدون اصطکاک با شیب θ نسبت به افق قرار دارد. فاصله اولیه جسم از سر آزاد فنر برابر d است. ضریب سختی فنر برابر با k و طول عادی آن برابر با L_0 می‌باشد. جسم از حالت سکون رها می‌شود. دوره تناوب حرکت جسم کدام گزینه است؟



$$\begin{aligned} (1) \quad & 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} + 2\sqrt{\frac{d}{g \sin \theta}} \\ (2) \quad & 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} + \sqrt{\frac{2d}{g \sin \theta}} \\ (3) \quad & 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} + \sqrt{\frac{2d}{g \sin \theta}} \\ (4) \quad & 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} + \sqrt{\frac{d}{g \sin \theta}} \end{aligned}$$

-۴۲-

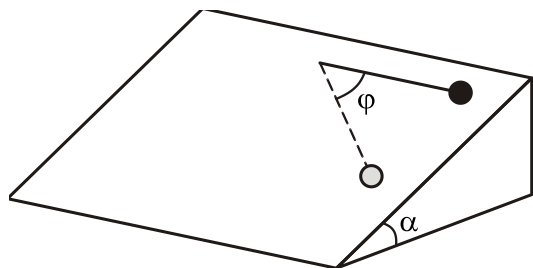
در آخرین روزهای سال میلادی ۲۰۰۷ حادثه‌ای در باغ وحش سانفرانسیسکو به وقوع پیوست که در طی آن یک ببر ۲۰۰ کیلوگرمی با پریدن از روی مانع قفس خود و حمله به یک کودک، اقدام به مجروح کردن کودک و کشتن نوجوانی کرد. تحقیقات نشان می‌دهد که قفس ببر یک خندق به پهنای S متر و نرده‌ی محافظی به ارتفاع h متر داشته است. بر اساس اطلاعات جانورشناسی این گونه ببر قادر است با دورخیز بسیار کوتاهی به سرعت حدود V_0 برسد. فرض کنید که این ببر با همین سرعت و زاویه پرتابه‌ای θ از زمین جدا شود. بیشینه‌ی ارتفاع نرده‌ای که این ببر می‌تواند ضمن پریدن از خندق از روی آن بگذرد، $h_{\max}$ ، چقدر است؟ (شتاب گرانش زمین را g در نظر بگیرید).



$$\begin{aligned} (1) \quad & \frac{V_0^2}{2g} - \frac{gS^2}{V_0^2} \\ (2) \quad & \frac{V_0^2}{2g} - \frac{2gS^2}{V_0^2} \\ (3) \quad & \frac{V_0^2}{2g} - \frac{gS^2}{2V_0^2} \\ (4) \quad & \frac{V_0^2}{2g} \end{aligned}$$

-۴۳

جرم m توسط نخ به طول L به نقطه ثابتی روی سطح شیبدار با زاویه α نسبت به افق متصل شده است. ضریب اصطکاک جرم و سطح شیبدار برابر μ است ($\tan \alpha > \mu$). جرم و نخ در حالت اولیه افقی و کشیده مطابق شکل قرار دارند و از حالت سکون رها می شوند. سرعت جسم هنگامی که نخ زاویه φ با امتداد اولیه خود میسازد، چقدر است؟



$$\sqrt{2gL(\sin \alpha \cdot \sin \varphi + \mu \cos \varphi \cos \alpha)} \quad (1)$$

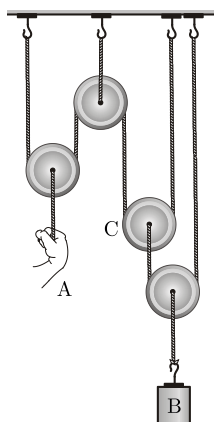
$$\sqrt{2gL(\sin \alpha \cdot \sin \varphi + \mu \varphi \cos \alpha)} \quad (2)$$

$$\sqrt{2gL(\sin \alpha \cdot \sin \varphi + \mu \cos \alpha)} \quad (3)$$

$$\sqrt{2gL(\sin \alpha \cdot \sin \varphi + \mu \varphi \sin \alpha)} \quad (4)$$

-۴۴

در سیستمی مطابق شکل زیر، طناب A با سرعت v به سمت پایین کشیده می شود.



سرعت جسم B چقدر است؟

$$\frac{v}{2} \quad (1)$$

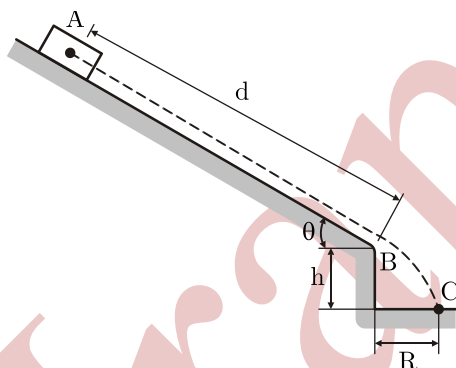
$$4v \quad (2)$$

$$\frac{v}{4} \quad (3)$$

$$2v \quad (4)$$

-۴۵

جسمی از حال سکون روی سطح شیبداری با زاویه θ نسبت به افق و بدون اصطکاک رها می شود و بعد از طی مسافت d از ارتفاع h به سمت زمین جدا می شود و در فاصله R از سطح شیبدار به زمین برخورد میکند (مطابق شکل). کدام گزینه درست است؟



$$R^2 + d \sin^2 \theta \cdot \cos \theta \cdot R - 4hd \sin \theta \cdot \cos^2 \theta = 0 \quad (1)$$

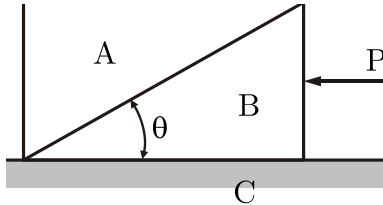
$$R^2 + 4d \sin^2 \theta \cdot \cos \theta \cdot R - hd \sin \theta \cdot \cos^2 \theta = 0 \quad (2)$$

$$R^2 + 4d \sin^2 \theta \cdot \cos \theta \cdot R + 4hd \sin \theta \cdot \cos^2 \theta = 0 \quad (3)$$

$$R^2 + 4d \sin^2 \theta \cdot \cos \theta \cdot R - 4hd \sin \theta \cdot \cos^2 \theta = 0 \quad (4)$$

-۴۶

ضریب اصطکاک بین جسم A و B برابر μ_1 و بین جسم B و سطح C برابر μ_2 است. اگر نیروی P در محدوده $P_{\min} < P < P_{\max}$ باشد، ضمن حرکت جسم B، جسم A نسبت به جسم B در حال سکون است. مقدار $\frac{P_{\max} - P_{\min}}{(m_A + m_B)g}$ برابر است با:



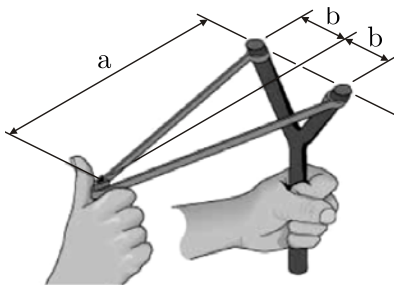
$$\frac{2\mu_2}{\cos^2 \theta - \mu_1^2 \sin^2 \theta} \quad (2)$$

$$\frac{2\mu_2}{\cos^2 \theta - \mu_2^2 \sin^2 \theta} \quad (4)$$

$$\frac{2\mu_1}{\cos^2 \theta - \mu_1^2 \sin^2 \theta} \quad (1)$$

$$\frac{2\mu_1}{\cos^2 \theta - \mu_2^2 \sin^2 \theta} \quad (3)$$

-۴۷



کودکان دهه های قبل از ۷۰، با سلاحی به نام فلاخن سرگرم می شدند! این سلاح از دو چوب که به شکل V به یکدیگر محکم بسته شده و به دو سر آن کش متصل است تشکیل می شود. سنگ در وسط کش قرار گرفته و بعد از کشیدن آن و رها شدن، سنگ شلیک می شود. مطابق شکل، طول عادی کش ۲b است. سنگی کوچک به جرم m در وسط کش گذاشته و به اندازه $a = 6b$ کشیده شده و سپس رها می شود. اگر ضریب کشسانی کش برابر k باشد، و

$\frac{mg}{k} = b$ باشد، حداکثر ارتفاع سنگ نسبت به فلاخن چقدر است؟

۴۶b (۴)

۳۶b (۳)

۲۶b (۲)

۱۶b (۱)

-۴۸

اسکی بازی از حال سکون از نقطه A شروع به حرکت می کند. ضریب اصطکاک کل مسیر برابر با μ است. اسکی باز در نقطه B به حال سکون می رسد. اختلاف ارتفاع نقاط A و B چقدر است؟

$$\mu S \quad (2)$$

$$\frac{S}{\mu} \quad (1)$$

$$\sqrt{\mu} S \quad (4)$$

$$S \quad (3)$$

-۴۹

روباهی به دنبال خرگوشی می دود، روباه همواره به طرف خرگوش حرکت می کند ولی خرگوش به طور تصادفی در جهات مختلف فرار می کند. اندازه سرعت خرگوش و روباه ثابت است. کدام گزینه درست است؟

(۱) اگر اندازه ی سرعت خرگوش بزرگ تر از سرعت روباه باشد حتماً فرار می کند.

(۲) اگر اندازه ی سرعت روباره بزرگ تر از سرعت خرگوش باشد حتماً به خرگوش می رسد.

(۳) اگر اندازه ی سرعت روباه کوچکتر از سرعت خرگوش باشد هرگز به آن نمی رسد.

(۴) هر سه گزینه درست است.

-۵۰

دو جسم در یک لحظه و از یک مکان با سرعت های اولیه برابر مطابق شکل پرتاب می شوند (جسم اول تحت زاویه α نسبت به افق به سمت راست و جسم دوم تحت زاویه β نسبت به افق به سمت چپ). این دو جسم در یک صفحه قائم پرتاب شده اند. در هنگام پرواز، خطی که این دو جسم را به هم متصل می کند با راستای افق چه زاویه ای می سازد؟

$$(۱) \frac{1}{2}|\alpha - \beta| \quad (۲) |\alpha - \beta| \quad (۳) \frac{1}{4}|\alpha - \beta| \quad (۴) \frac{1}{3}|\alpha - \beta|$$

-۵۱

اگر حداکثر برد یک پرتابه هنگامی که از بالای یک سطح شیبدار به سمت پایین پرتاب می شود دو برابر حداکثر برد پرتابه هنگامی که از پایین به سمت بالای همان سطح شیبدار پرتاب می شود باشد، زاویه سطح شیبدار برابر است با:

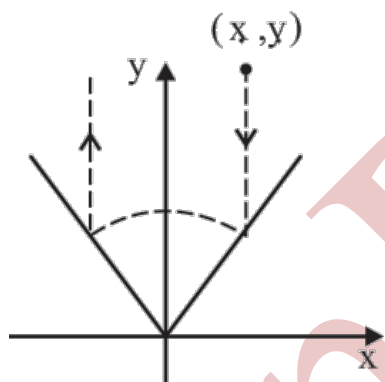
$$(۱) \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) \quad (۲) \sin^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) \quad (۳) \sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) \quad (۴) \cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$$

-۵۲

دو سطح شیبدار به ترتیب با شیب های m و $-m$ مطابق شکل موجودند. می خواهیم توپی را از مختصه (x_0, y_0) رها کنیم. به نحوی که توپ بعد از برخورد با دو سطح از سطح شیبدار دوم به طور قائم به سمت بالا پرتاب شود.

کدام

رابطه درست است؟



$$(۱) \frac{4m(1-m^2)}{(1+m^2)^2}(y_0 - mx_0) = x_0$$

$$(۲) \frac{4m}{1+m^2}(y_0 - mx_0) = x_0$$

$$(۳) \frac{4m(1+m^2)}{(1-m^2)^2}(y_0 - mx_0) = x_0$$

$$(۴) \frac{4m(1-m^2)}{(1+m^2)}(y_0 - mx_0) = x_0$$

-۵۳

مهندسی در یک کارخانه خارج از شهر کار میکند. انومبیلی هر روز از کارخانه به دنبال او به ایستگاه مترو فرستاده میشود. این اتومبیل همزمان با پیاده شدن او از قطار به ایستگاه میرسد. یک روز مهندس یک ساعت قبل از زمان همیشگی به ایستگاه رسید و بدون آنکه منتظر اتومبیل شود، پیاده به سمت کارخانه به راه افتاد. در راه به اتومبیل رسید و سوار آن شد و در نتیجه ۱۰ دقیقه زودتر از همیشه به دفتر کارش رسید. مهندس چند دقیقه پیاده روی کرده است؟

(۴) ۶۰

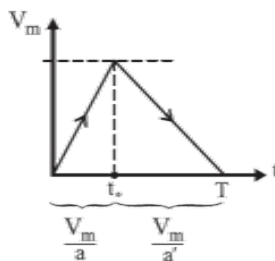
(۳) ۳۵

(۲) ۵۵

(۱) ۵

-۱

گزینه ی «۲» صحیح است.
مساحت زیر نمودار $(V-t)$ = جابجایی



$$V_m = at_0$$

$$V_m = a'(T - t_0) \Rightarrow T - t_0 = \frac{V_m}{a'}$$

$$L = \frac{V_m}{2} \left(\frac{V_m}{a} + \frac{V_m}{a'} \right) = \frac{V_m^2}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} \right)$$

-۲

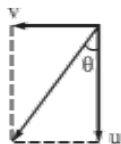
گزینه ی «۴» صحیح است.
با توجه به اینکه n توپ در ثانیه سقوط می کنند، بنابراین فاصله زمانی بین دو توپ متوالی $\frac{1}{n}$ است.

$$s = \frac{1}{2}gt^2 \rightarrow t = \sqrt{\frac{2s}{g}}$$

$$s - h = \frac{1}{2}g\left(t - \frac{1}{n}\right)^2 \rightarrow h = s - \frac{1}{2}g\left(t - \frac{1}{n}\right)^2 \rightarrow h = s - \frac{1}{2}g\left(\sqrt{\frac{2s}{g}} - \frac{1}{n}\right)^2 = \frac{g}{n}\left(\sqrt{\frac{2s}{g}} - \frac{1}{n}\right)$$

-۳

گزینه ی «۳» صحیح است.
با توجه که شخص و باران نسبت به یکدیگر حرکت می کنند، بنابراین باران نسبت به شخص با زاویه θ نسبت به قائم به شخص برخورد میکند.



$$\tan \theta = \frac{v}{u} \quad (I)$$

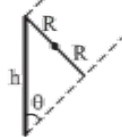
برای اینکه شخص خیس نشود، چتر باید مسیر برخورد باران به شخص را مسدود کند.

$$\sin \theta = \frac{vR}{h} \Rightarrow R = \frac{h}{v} \sin \theta \quad (II)$$

$$1 + \cot^2 \theta = \frac{1}{\sin^2 \theta} \Rightarrow \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2 \theta}}$$

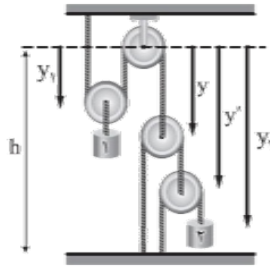
$$\Rightarrow \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{u^2}{v^2}}}$$

$$(I), (II), (III) \Rightarrow R = \frac{h}{v} \frac{v}{\sqrt{v^2 + u^2}}$$



-۴-

گزینه ی «۴» صحیح است.
طول نخ ها ثابت است بنابراین:



$$\left. \begin{aligned} 2y_1 + y &= L_1 \\ h - y + y' - y &= L_2 \\ h - y' + y_2 - y' &= L_3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} 2y_1 + y &= C_1 \\ y' - 2y &= C_2 \\ y_2 - 2y' &= C_3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2y_1 + y_2 = C \quad , \quad 2 \frac{\Delta y_1}{\Delta t} + \frac{\Delta y_2}{\Delta t} = 0 \Rightarrow 2v_1 + v_2 = 0$$

بنابراین اگر سرعت جسم ۱ برابر ۱ m/s به سمت بالا باشد، سرعت جسم ۲ برابر ۸ m/s به سمت پایین است.

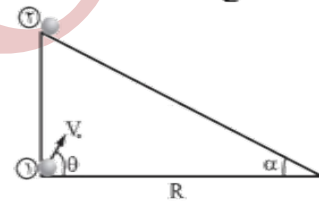
-۵-

گزینه ی «۲» صحیح است.

$$R = \frac{v_o^2}{g} \sin 2\theta \quad , \quad t_1 = \frac{2v_o \sin \theta}{g}$$

$$\frac{R}{\cos \alpha} = \frac{1}{2} g \sin \alpha t^2 \Rightarrow t_2 = \sqrt{\frac{2R}{g \sin \alpha \cos \alpha}} \Rightarrow t_2 = \frac{2v_o}{g} \sqrt{\frac{\sin 2\theta}{\sin 2\alpha}}$$

$$t_1 = t_2 \Rightarrow \sin \theta = \sqrt{\frac{\sin 2\theta}{\sin 2\alpha}} \Rightarrow \sin^2 \theta = \frac{\sin \theta \cos \theta}{\sin 2\alpha} \Rightarrow \tan \theta = \frac{1}{\sin(2\alpha)}$$



-۶-

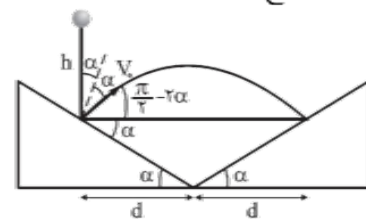
گزینه ی «۱» صحیح است.

$$V_y^2 = 2gy_{max}$$

$$\left. \begin{aligned} V_y^2 \text{ قبل از برخورد} &= 2g(h+h') \\ V_y^2 \text{ بعد از برخورد} &= 2gh' \end{aligned} \right\} \rightarrow e = \frac{V_y \text{ بعد از برخورد}}{V_y \text{ قبل از برخورد}} = \sqrt{\frac{h'}{h+h'}}$$

-۷-

گزینه ی «۱» صحیح است.



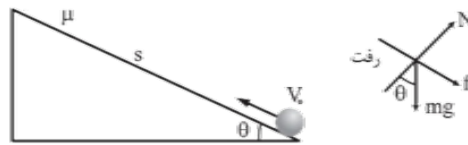
$$v_o^2 = 2gh$$

$$2d = \frac{v_o^2}{g} \sin \left[2 \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \right] \Rightarrow 2d = 2h \sin 2\alpha$$

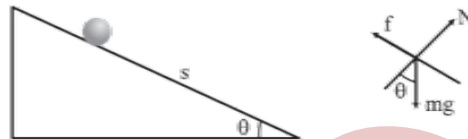
$$\frac{d}{h} = \sin(2\alpha)$$

-۸

گزینه ی «۱» صحیح است.



$$\left. \begin{aligned} N - mg \cos \theta &= 0 \\ -f - mg \sin \theta &= ma \\ f &= \mu N \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{رفت}} a = -g(\sin \theta + \mu \cos \theta), \quad S = \frac{V_0^2}{2g(\sin \theta + \mu \cos \theta)}, \quad t = \frac{V_0}{g(\sin \theta + \mu \cos \theta)}$$



$$\left. \begin{aligned} N - mg \cos \theta &= 0 \\ mg \sin \theta - f &= ma \\ f &= \mu N \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{برگشت}} a = g(\sin \theta - \mu \cos \theta), \quad S = \frac{1}{2}at^2, \quad t = \frac{v_0}{g \sin \theta - \mu \cos \theta}$$

$$t_{\text{رفت}} = nt_{\text{برگشت}} \Rightarrow \frac{1}{(\sin \theta + \mu \cos \theta)^2} = \frac{n^2}{\sin^2 \theta - \mu^2 \cos^2 \theta} \Rightarrow \mu = \frac{1-n^2}{1+n^2} \tan \theta$$

-۹

گزینه ی «۲» صحیح است.

$$\mu \frac{m}{L}(L-y)g \cos \theta = \frac{m}{L}yg \Rightarrow y = \frac{\mu \cos \theta}{1 + \mu \cos \theta} L$$

-۱۰

گزینه ی «۱» صحیح است.

$$\left. \begin{aligned} \mu mg &= \frac{mv_{max}^2}{r} \Rightarrow V_{max}^2 = \mu rg \Rightarrow v_{max} = \sqrt{\mu gr} \\ t &= \frac{\pi r}{v_{max}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow t = \left(\frac{\pi}{\sqrt{\mu g}} \right) \sqrt{r}$$

همانطور که از رابطه ی به دست آمده مشخص است، زمان با $\sqrt{r}$ متناسب است، بنابراین با کاهش r زمان لازم برای پیمودن پیچ نیز کاهش می یابد.

$$r_1 < r_2 \Rightarrow t_1 < t_2$$

بنابر این اتومبیل ۱ زودتر به انتهای پیچ می رسد.

-۱۱

گزینه ی «۳» صحیح است.

طبق قضیه ی کار و انرژی:

$$W = \Delta k$$

$$Fb \sin \theta = \frac{1}{2}(mv^2) \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2Fb \sin \theta}{m}}$$

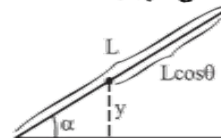
-۱۲

گزینه ی ۳ صحیح است.
طبق پایستگی انرژی:

$$y = L(1 - \cos \theta) \sin \alpha$$

$$mgy = \frac{1}{2}mv^2$$

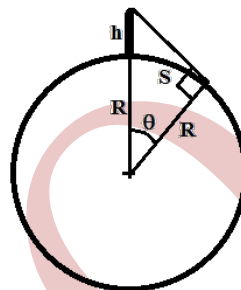
$$V = \sqrt{2gy} = \sqrt{2gL(1 - \cos \theta) \sin \alpha}$$



-۱۳

گزینه "۴" صحیح است.

$$\left. \begin{aligned} S &= VT \\ \theta &= \frac{S}{R} \\ \cos \theta &= \frac{R}{R+h} \Rightarrow 1 - \frac{h}{R} \\ \cos \theta &= 1 - \frac{\theta^2}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow h \approx \frac{V^2 T^2}{2R}$$



-۱۴

گزینه "۱" صحیح است.

فرض کنید قطرهای در آستانه رسیدن به زمین است، بنابراین به اندازه ارتفاع H سقوط کرده است. زمان لازم برای این سقوط برابر

$$\sqrt{\frac{2H}{g}} \text{ است. در این مدت تعداد } \sqrt{\frac{2H}{g}} \frac{n}{T} \text{ قطره از دوش جدا شده اند که هنوز به زمین نرسیده اند. بنابراین تعداد قطرهای بلیکی از}$$

عبارات زیر برابر است:

$$\left[\sqrt{\frac{2H}{g}} \frac{n}{T} \right] \text{ یا } \left[\sqrt{\frac{2H}{g}} \frac{n}{T} \right] + 1$$

-۱۵

گزینه "۳" درست است.

فرض کنید اتومبیلی با سرعت اولیه V در حال حرکت است. ناگهان راننده مانعی میبیند و ترمز میکند. زمان عکسالعمل او T و شتاب

کاهنده ترمز برابر a است. در این صورت مسافت طی شده طی زمان عکسالعمل برابر VT و مسافت لازم برای ایستادن بعد از ترمز برابر

$$\frac{V^2}{2a} \text{ است.}$$

بنابراین مسافت لازم برای هر یک از اتومبیلها به صورت زیر است:

$$L_1 = \frac{V_1^2}{2a_1} + V_1 T_1, \quad L_2 = \frac{V_2^2}{2a_2} + V_2 T_2$$

فاصله بین دو اتومبیل باید بیشتر از مسافت لازم برای ایستادن آنها باشد،

$$\Rightarrow L \geq L_1 + L_2 \Rightarrow L \geq \frac{V_1^2}{2a_1} + \frac{V_2^2}{2a_2} + V_1 T_1 + V_2 T_2$$

-۱۶

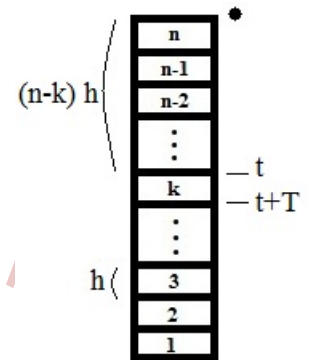
گزینه "۲" صحیح است.

فرض کنید شخص در طبقه k ام قرار دارد. بنابراین سنگ به اندازه n-k طبقه سقوط کرده است.

$$(n-k)h = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2(n-k)h}{g}} \quad (I)$$

$$\left. \begin{aligned} V_1 &= gt \\ V_2 &= g(t+T) \\ V_2 - V_1 &= 2gh \end{aligned} \right\} \Rightarrow (2t+T)T = \frac{2h}{g} \Rightarrow t = \frac{h}{gT} - \frac{T}{2} \quad (II)$$

$$(I), (II) \Rightarrow \sqrt{\frac{2(n-k)h}{g}} = \frac{h}{gT} - \frac{T}{2} \Rightarrow k = n - \frac{h}{2gT^2} \left(1 - \frac{gT^2}{2h} \right)^2$$



-۱۷

گزینه "۳" صحیح است.

$$\left. \begin{aligned} y &= \frac{1}{2}gt^2 \\ x &= ut \end{aligned} \right\} \Rightarrow y = \frac{g}{2u^2}x^2 \Rightarrow u = \sqrt{\frac{g}{2y}}x$$

$$\left. \begin{aligned} U_{min} &= \sqrt{\frac{g}{2h}}(D-R+a) \\ u_{max} &= \sqrt{\frac{g}{2h}}(D+R-a) \end{aligned} \right\} \Rightarrow U_{max} - U_{min} = \sqrt{\frac{2g}{h}}(R-a)$$

-۱۸

گزینه "۱" صحیح است.

فرض کنید پرتابه با زاویه θ پرتاب شده و در فاصله افقی L در ارتفاع H به دیوار برخورد کرده است.

معادله مسیر پرتابه طبق رابطه زیر می باشد:

$$\left. \begin{aligned} y &= \tan \theta \cdot x - \frac{g}{2V_0^2 \cos^2 \theta} \cdot x^2 \\ \frac{1}{\cos^2 \theta} &= 1 + \tan^2 \theta \end{aligned} \right\} \Rightarrow H = L \tan \theta - \frac{gL^2}{2V_0^2} (1 + \tan^2 \theta) \quad (I)$$

$$(I) \Rightarrow \frac{gL^2}{2V_0^2} \tan^2 \theta - L \tan \theta + \left(H + \frac{gL^2}{2V_0^2}\right) = 0$$

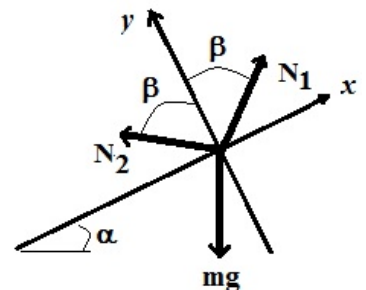
$$\Delta \geq 0 \Rightarrow L^2 - 4 \frac{gL^2}{2V_0^2} \left(H + \frac{gL^2}{2V_0^2}\right) \geq 0$$

$$H \leq \frac{V_0^2}{2g} \left[1 - \left(\frac{gL}{V_0^2} \right)^2 \right] \Rightarrow H_{\max} = \frac{V_0^2}{2g} \left[1 - \left(\frac{gL}{V_0^2} \right)^2 \right]$$

-۱۹

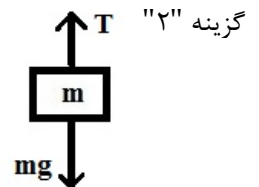
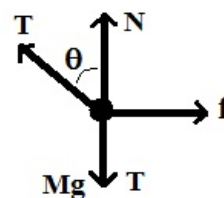
$$\left. \begin{aligned} N_1 \sin \beta - N_2 \sin \beta - mg \sin \alpha &= ma \\ N_1 \cos \beta + N_2 \cos \beta - mg \cos \alpha &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} N_1 - N_2 = \frac{m(a + g \sin \alpha)}{\sin \beta} \\ N_1 + N_2 = \frac{mg \cos \alpha}{\cos \beta} \end{cases}$$

$$N_2 = m \left[\frac{g \cos \alpha}{\cos \beta} - \frac{(a + g \sin \alpha)}{\sin \beta} \right] \geq 0 \Rightarrow a \leq g \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\cos \beta}$$



-۲۰

$$\left. \begin{aligned} T \sin \theta - f &= 0 \\ N + T \cos \theta - T - Mg &= 0 \\ f &= \mu N \\ T - mg &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \mu = \frac{m \sin \theta}{M + m(1 - \cos \theta)}$$



گزینه "۲"

-۲۱

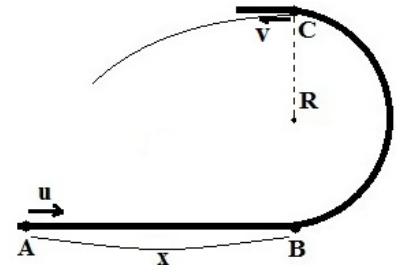
گزینه "۳" صحیح است.

برای اینکه توپ بتواند به نقطه C برسد، (بدون اینکه از سطح جدا شود) طبق روابط زیر باید:

$$\frac{1}{2} m u^2 = \frac{1}{2} m v^2 + mg(rR) \Rightarrow v^2 = u^2 - 2gR \quad (I)$$

$$mg + N = m \frac{v^2}{R} \Rightarrow N = m \frac{v^2}{R} - mg \geq 0 \Rightarrow v^2 \geq gR \quad (II)$$

$$(I), (II) \Rightarrow u \geq \sqrt{5gR}$$



حال با توجه به سرعت در نقطه C، میتوان فاصله نقطه فرود توپ از نقطه B را که L نامگذاری میشود را محاسبه کرد:

$$\left. \begin{aligned} x &= vt \\ y &= \frac{1}{2} gt^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow y = \frac{g}{2v^2} x^2 \Rightarrow 2R = \frac{g}{2v^2} L^2 \Rightarrow v^2 = \frac{gL^2}{4R} \quad (III)$$

$$(II), (III) \Rightarrow \frac{gL^2}{4R} \geq gR \Rightarrow \left. \begin{aligned} L &\geq 2R \\ L &= x \end{aligned} \right\} \Rightarrow x \geq 2R$$

بنابراین برای اینکه توپ بعد از رسیدن به نقطه C به نقطه شروع حرکت بازگردد، باید حداقل سرعت اولیه افقی آن برابر $\sqrt{5gR}$ باشد و محل پرتاب نیز حداقل در فاصله $2R$ قرار داشته باشد.

-۲۲

گزینه ی « ۲ » صحیح است.

باتوجه به رابطه ی برد:

$$R = \frac{V_o^2}{g} \sin^2 \theta \Rightarrow V_o^2 = Rg \frac{1}{\sin^2 \theta} \Rightarrow V_o = \frac{\sqrt{Rg}}{\sin \theta} \Rightarrow U_{o, \min} = \sqrt{Rg}$$

-۲۳

گزینه ی « ۱ » صحیح است.

$$2(R+b) = \frac{v_o^2}{g} \sin^2 \theta \Rightarrow \sin^2 \theta = \frac{2g}{v_o^2} (R+b) \quad (I)$$

$$\left. \begin{aligned} h &= \frac{v_o^2}{2g} \sin^2 \theta \\ \sin^2 \theta &= \frac{1 - \cos^2 \theta}{1} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \cos^2 \theta = 1 - \frac{2g}{v_o^2} (2h) \quad (II)$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \quad (III)$$

$$(I), (II), (III) \Rightarrow [(R+b)^2 + (2h)^2] \frac{g}{2h} = v_o^2$$

-۲۴

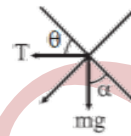
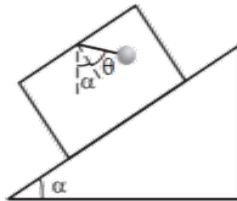
گزینه ی «۴» صحیح است.

$$\left. \begin{aligned} V_y = V_{oy} - gt &\Rightarrow -\sqrt{2g(h+h')} = \sqrt{2gh'} - gt \\ x - V_{ox}t &\Rightarrow t = \frac{b}{V_x} \end{aligned} \right\} \Rightarrow V_x = \frac{\sqrt{\frac{g}{2}} \times b}{\sqrt{h+h'} + \sqrt{h'}}$$

-۲۵

گزینه ی «۳» صحیح است.

$$\left. \begin{aligned} mgsin\alpha + Tsin\theta &= ma \\ mgsin\alpha &= Tcos\theta \\ a &= gsin\alpha \end{aligned} \right\} \Rightarrow \theta = 0$$

بنابراین زاویه نخ با محور قائم که برابر $\alpha + \theta$ است، همان α می شود.

-۲۶

گزینه "۳" صحیح است.

هر خودرو بعد از زمان $\sqrt{\frac{b}{a}}$ از آغاز حرکت خودروی جلویی خود، شروع به حرکت میکند. (چرا؟) بنابراین خودروی n ام بعد از زمان

$(n-1)\sqrt{\frac{b}{a}}$ از سبز شدن چراغ شروع به حرکت میکند. فاصله جلوی خودروی n ام از چهارراه برابر $\frac{3b}{4}(n-1)$ است. (چرا؟) بنابراین

زمان لازم برای طی کردن این فاصله تا چراغ راهنما برابر $\sqrt{\frac{3(n-1)b}{a}}$ است. هنگامی که جلوی خودروی n ام به چهارراه رسید، زمان

$(n-1)\sqrt{\frac{b}{a}} + \sqrt{\frac{3(n-1)b}{a}}$ از سبز شدن چراغ میگذرد. در این لحظه اگر چراغ راهنما همچنان سبز باشد، ماشین n ام میتواند از چهارراه عبور کند:

$$\left[(n-1) + \sqrt{3(n-1)} \right] \sqrt{\frac{b}{a}} \leq T$$

-۲۷

گزینه "۱" صحیح است.

معادلات مکان سه خودرو به صورت زیر است: (جلوی هر خودرو به عنوان مکان خودرو و لحظه آغاز سبقت مبدأ زمان در نظر گرفته شده است)

$$x_1 = b + vt + \frac{1}{2}at^2, \quad x_2 = 2b + L + vt, \quad x_3 = b + S - vt$$

سبقت زمانی پایان میگیرد که خودروی ۱ به اندازه L از خودروی ۲ جلو افتاده باشد. در این هنگام فاصله خودروی ۱ از خودروی ۳ باید حداقل L باشد، بنابراین شرط برقراری ایمنی به صورت زیر است:

$$x_1 - x_2 = L + b \Rightarrow (b + vt + \frac{1}{2}at^2) - (2b + L + vt) = \frac{1}{2}at^2 - b - L = L + b \Rightarrow \frac{1}{2}at^2 = 2(b + L) \quad (I)$$

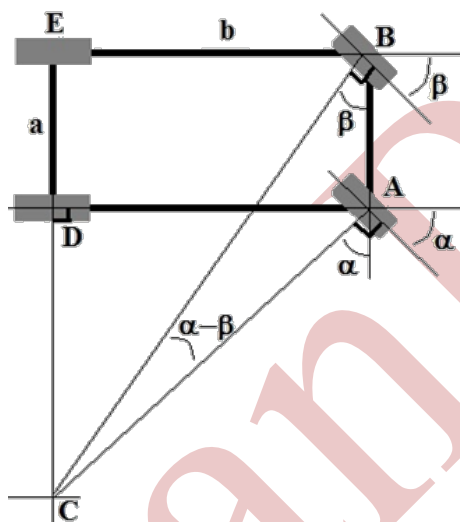
$$x_2 - x_3 \geq L \Rightarrow (b + S - vt) - (b + vt + \frac{1}{2}at^2) \geq L \Rightarrow S \geq L + 2vt + \frac{1}{2}at^2 \quad (II)$$

$$(I), (II) \Rightarrow S \geq 2L + 2b + 2v\sqrt{\frac{b+L}{a}}$$

-۲۸

گزینه "۲" صحیح است.

مرکز دوران هر ۴ چرخ باید یک نکته باشد.



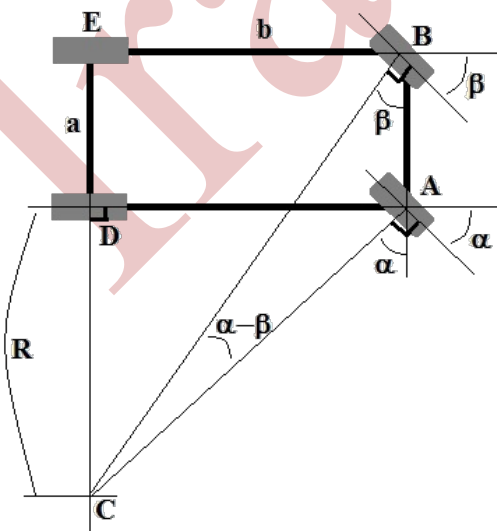
-۲۹

گزینه "۳" صحیح است.

مرکز دوران هر ۴ چرخ باید یکسان باشد.

بنابراین با توجه به هندسه شکل مقابل و تعریف تانژانت زوایای α و β ,

پاسخ مسئله به دست میآید.

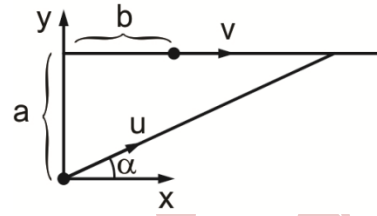


۳۰-

گزینه ۲ صحیح است.

$$\text{شخص} \begin{cases} x = u \cos \alpha t \\ y = u \sin \alpha t \end{cases}$$

$$\text{اتوبوس} \begin{cases} x = b + vt \\ y = a \end{cases}$$



هنگام به هم رسیدن شخص و اتوبوس مکان آن ها یکسان است:

$$\begin{cases} u \cos \alpha t = b + vt \rightarrow \cos \alpha = \frac{b + vt}{ut} \\ u \sin \alpha t = a \rightarrow \sin \alpha = \frac{a}{ut} \end{cases} \quad \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

T زمان رسیدن شخص به اتوبوس است

$$\begin{aligned} \rightarrow \left(\frac{b+vt}{ut}\right)^2 + \left(\frac{a}{ut}\right)^2 &= 1 \Rightarrow b^2 + v^2 t^2 + 2bvt + a^2 = u^2 t^2 \\ \Rightarrow (v^2 - u^2)t^2 + 2bvt + a^2 + b^2 &= 0 \end{aligned}$$

شرط وجود جواب برای t بزرگ بودن Δ از صفر است:

$$\Delta \geq 0 \Rightarrow (2bv)^2 - 4(v^2 - u^2)(a^2 + b^2) \geq 0$$

$$\Rightarrow b^2 v^2 - v^2 a^2 - v^2 - b^2 + u^2 a^2 + u^2 b^2 \geq 0$$

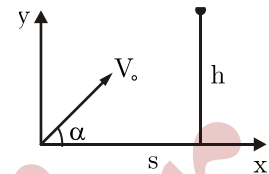
$$\Rightarrow u^2 (a^2 + b^2) \geq a^2 v^2 \Rightarrow u^2 \geq \frac{a^2}{a^2 + b^2} v^2$$

$$\Rightarrow u \geq \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} v$$

-۳۱

گزینه ۳ صحیح است.

معادله مسیر پرتابه:



$$y = \tan \alpha x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2$$

$$\Rightarrow h = \tan \alpha s - \frac{gs^2}{2v_0^2} (1 + \tan^2 \alpha)$$

$$\Rightarrow \frac{gs^2}{2v_0^2} \tan^2 \alpha - s \tan \alpha + h + \frac{gs^2}{2v_0^2} = 0$$

$$\Delta \geq 0 \Rightarrow s^2 - \frac{gs^2}{v_0^2} (h + \frac{gs^2}{2v_0^2}) \geq 0 \Rightarrow \frac{v_0^2}{g} \geq h + \frac{gs^2}{2v_0^2}$$

$$\Rightarrow v_0^4 \geq 2ghv_0^2 + g^2 s^2 \Rightarrow v_0^4 - 2ghv_0^2 - g^2 s^2 \geq 0$$

دلتای عبارت بالا همواره بزرگتر از صفر است.

$$v_0^2 = \frac{2gh \pm \sqrt{(2gh)^2 + 4g^2 s^2}}{2} = gh \left[1 \pm \sqrt{1 + \frac{s^2}{h^2}} \right]$$

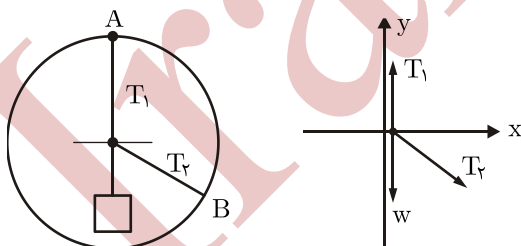
علامت مثبت مورد قبول است (چرا؟)

$$\Rightarrow v_0^2 = gh \left[1 + \sqrt{1 + \frac{s^2}{h^2}} \right]$$

-۳۲

گزینه ۲ صحیح است.

دوره تناوب جرم و فنر از رابطه $2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ بدست می آید. همانطور که مشهود است این عبارت هیچ ارتباطی با شتاب محل آزمایش ندارد.



-۳۳

گزینه ۴ صحیح است.

تصویر حالت نهایی مطابق شکل است

از تعادل نیروها واضح است T_2 برابر صفر می باشد (چرا؟)

-۳۴

گزینه ۳ صحیح است.

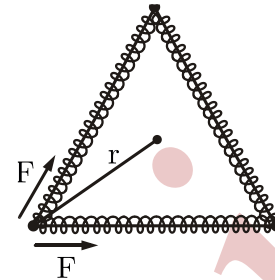
مقدار تغییر طول فنر ما است.

$$f = KL$$

$$rF \cos 30^\circ = m r \omega^2$$

$$r \times KL \times \frac{\sqrt{3}}{2} = m \left(\frac{r}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} r L \right) \omega^2$$

$$\Rightarrow K = \frac{2}{3} m \omega^2$$



-۳۵

گزینه ۳ صحیح است.

در هر سه نقطه a, b, c، نیرو بر سرعت عمود است. بنابراین:

$$\frac{GMm}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM}{r}} \rightarrow \begin{cases} V_a = \sqrt{\frac{GM}{r_a}} & \frac{R}{3} \leq r_a \leq \frac{R}{2} \\ V_b = \sqrt{\frac{GM}{r_b}} & \sqrt{2}R < r_b < \sqrt{3}R \\ V_c = \sqrt{\frac{GM}{r_c}} & r_c = R \end{cases}$$

$$\sqrt{\frac{2GM}{R}} \leq V_a \leq \sqrt{\frac{3GM}{R}} \quad \sqrt{2}V_c \leq V_a \leq \sqrt{3}V_c$$

$$\sqrt{\frac{1}{3} \frac{GM}{R}} \leq V_a \leq \sqrt{\frac{1}{2} \frac{GM}{R}} \quad \frac{1}{\sqrt{3}} V_c \leq V_b \leq \frac{1}{\sqrt{2}} V_c$$

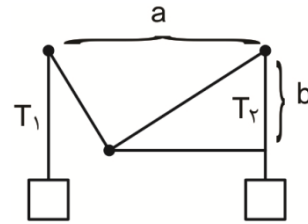
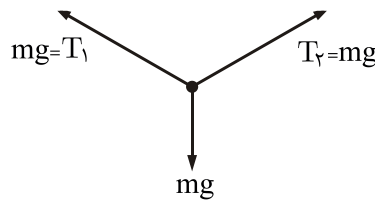
$$V_c = \sqrt{\frac{GM}{R}} \quad V_a > V_c$$

$$V_b < V_c$$

$$\Rightarrow 1 \cdot V_b > V_a > V_c$$

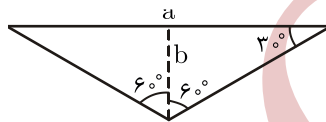
۳۶-

گزینه ۴ صحیح است.



سه نیروی یکسان هنگامی با هم برابر هستند که زاویه بین آنها 120° باشد.

$$\Rightarrow \tan 60^\circ = \frac{a/2}{b} = \frac{a}{2b} \Rightarrow \frac{a}{b} = 2 \tan 60^\circ = 2\sqrt{3}$$



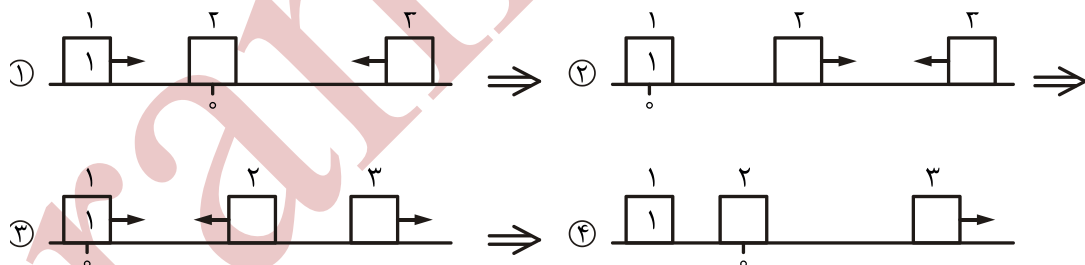
۳۷-

گزینه ۴ صحیح است.

ابتدا مسئله برخورد دو جرم یکسان را بررسی می کنیم.



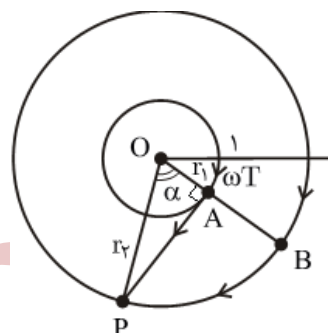
با استفاده از بایستگی تکانه و انرژی به راحتی اثبات می شود که در برخورد دو جرم یکسان سرعت ها تبادل می شوند یعنی جرم متحرک ساکن شده و جرم ساکن با سرعت اولیه حرکت می کند.



$$\overline{AP} = \sqrt{r_{\gamma}^{\gamma} - r_1^{\gamma}} \quad , \quad \overline{BP} = \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{r_1}{r_{\gamma}} \quad , \quad \tan \alpha = \frac{\sqrt{r_{\gamma}^{\gamma} - r_1^{\gamma}}}{r_1} = \sqrt{\left(\frac{r_{\gamma}^{\gamma}}{r_1^{\gamma}}\right)^{\gamma} - 1}$$

$$t_{\overline{AP}} = t_{\overline{BP}} \quad , \quad t_{\overline{AP}} = \frac{\overline{AP}}{r_1 \omega} \quad , \quad t_{\overline{BP}} = \frac{\overline{BP}}{\omega}$$

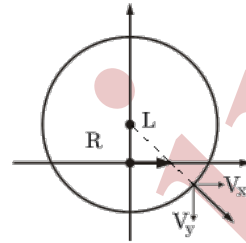
$$\frac{\alpha}{\omega} = \frac{\sqrt{r_{\gamma}^{\gamma} - r_1^{\gamma}}}{r_1 \omega} \Rightarrow \alpha = \frac{\sqrt{r_{\gamma}^{\gamma} - r_1^{\gamma}}}{r_1} \Rightarrow \alpha = \tan \alpha$$


مقادیر خاصی از $\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$ برخورد رخ می‌دهد و به T بستگی ندارد.

-۳۹

گزینه ۱ درست است.

برای این که جسم بعد از برخورد با سطح داخلی دیوار دایره ای روی مسیر خود برگردد، هنگام برخورد راستای سرعت جسم باید در راستای شعاع باشد. (سرعت جسم عمود بر محیط دایره باشد).



$$\left. \begin{aligned} x &= R \sin \theta = v_0 t \\ R \cos \theta &= y + L \\ y &= \frac{1}{2} g t^2 \end{aligned} \right\} \tan \theta = \frac{v_0 t}{\frac{1}{2} g t^2 + L} \quad (I)$$

$$\left. \begin{aligned} v_x &= v_0 \\ v_y &= g t \end{aligned} \right\} \Rightarrow \tan \theta = \frac{v_0}{g t} \quad (II)$$

$$(I, II) \Rightarrow \frac{v_0}{g t} = \frac{v_0 t}{\frac{1}{2} g t^2 + L} \Rightarrow \frac{1}{2} g v_0 t^2 + v_0 L = g v_0 t^2 \Rightarrow t^2 = \frac{2L}{g}$$

$$\left. \begin{aligned} (y + R)^2 + x^2 &= R^2 \\ y &= \frac{1}{2} g \left(\frac{2L}{g} \right) = L \\ x &= v_0 \left(\sqrt{\frac{2L}{g}} \right) \end{aligned} \right\} \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{g}{2L} (R^2 - 4L^2)}$$

-۴۰

گزینه ۲ درست است.

فرض کنید مؤلفه سرعت اولیه پرتابه ای به ترتیب v_{ox} و v_{oy} باشد، در نتیجه برد پرتابه از رابطه زیر به دست می آید:

$$R = \frac{v_{oy}^2}{g} \cdot v_{ox} = \left(\frac{v_{oy}}{g} \right) v_{ox} \cdot v_{oy}$$

در هر برخورد سرعت افقی و عمودی هر دو β برابر می شود، بنابراین جمع بردها برابر خواهد بود با:

$$R_{total} = \frac{v_{oy}^2}{g} \cdot v_{ox} \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta + \frac{v_{oy}^2}{g} \cdot v_{ox} \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta \cdot \beta^2 + \dots = \frac{v_{oy}^2}{g} \sin 2\theta (1 + \beta^2 + \beta^4 + \dots)$$

$$R_{total} \equiv \frac{v_{oy}^2 \sin 2\theta}{g(1 - \beta^2)}$$

-۴۱

گزینه ۴ درست است.

دوره تناوب کل حرکت از دو بخش تشکیل شده است. زمان رفت و برگشت جسم تا فنر و زمان رفت و برگشت فنر:

$$\left. \begin{aligned} T &= 2t_1 + t_2 \\ d &= \frac{1}{2} g \sin \theta \cdot t_1^2 \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2d}{g \sin \theta}} \\ t_2 &= 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} + 2\sqrt{\frac{2d}{g \sin \theta}}$$

-۴۲

گزینه ۳ درست است.

معادله مسیر پرتابه به شکل زیر است:

$$y = \tan \theta \cdot x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} \cdot x^2$$

$$\frac{1}{\cos^2 \theta} = 1 + \tan^2 \theta$$

$$p = \tan \theta$$

$$y = h, \quad x = s$$

$$\Rightarrow h = ps - \frac{gs^2}{2v_0^2} (1 + p^2) \Rightarrow h = -\frac{gs^2}{2v_0^2} p^2 + sp - \frac{gs^2}{2v_0^2} \quad (I)$$

روش اول: برای یافتن حداکثر مقدار h ، نسبت به p مشتق می گیریم:

$$\frac{dh}{dp} = 0 \Rightarrow -\frac{gs^2}{v_0^2} p + s = 0 \Rightarrow p = \frac{v_0^2}{gs}$$

با جایگذاری مقدار به دست آمده برای p در معادله (I)، خواهیم داشت:

$$h_{\max} = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gs^2}{2v_0^2}$$

روش دوم: معادله (I) را به صورت معادله درجه ۲ برای p در نظر می گیریم. برای وجود جواب باید $\Delta \geq 0$ باشد.

$$-\frac{gs^2}{2v_0^2} p^2 + sp - \frac{gs^2}{2v_0^2} - h = 0 \Rightarrow \Delta = s^2 - 4 \frac{gs^2}{2v_0^2} \left(\frac{gs^2}{2v_0^2} + h \right) \geq 0$$

بعد از ساده کردن Δ ، به نتیجه زیر می رسیم:

$$h \leq \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gs^2}{2v_0^2} \Rightarrow h_{\max} = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gs^2}{2v_0^2}$$

-۴۳

گزینه ۲ درست است.

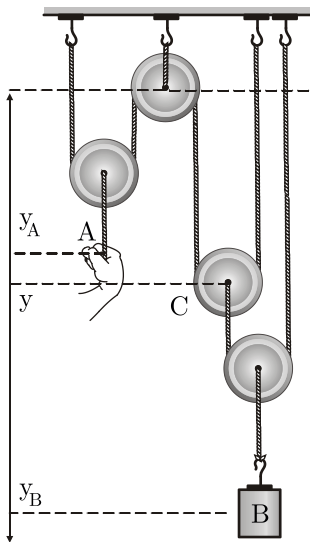
مقدار نیروی اصطکاک در طول مسیر ثابت است و برابر $\mu mg \cos \alpha$ می باشد. با استفاده از پایستگی انرژی:

$$0 = -mgL \sin \phi \cdot \sin \alpha + \frac{1}{2} mv^2 - \mu mg \cos \alpha \cdot L \phi$$

$$\Rightarrow v^2 = 2gL [\sin \alpha \cdot \sin \phi + \mu \cos \alpha \cdot \phi] \Rightarrow v = \sqrt{2gL [\sin \alpha \cdot \sin \phi + \mu \cos \alpha \cdot \phi]}$$

-۴۴

گزینه ۱ درست است.



طول دو نخ که در شکل وجود دارند ثابت است:

$$\left. \begin{aligned} y_B + y_B - y &= \text{const.} \\ 2y + y_B &= \text{const.} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} 2y_B - y &= \text{const.} \\ y + y_A &= \text{const.} \\ 2y_B + y_A &= \text{const.} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 2v_B + v_A = 0 \Rightarrow v_B = \frac{-v_A}{2}$$

جسم B با سرعت $\frac{v}{2}$ به سمت بالا حرکت می کند.

-۴۵

گزینه ۴ درست است.

با استفاده پایستگی انرژی بین A و B:

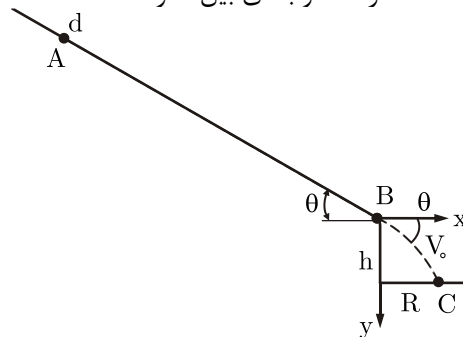
$$v_o^2 = 2gd \sin \theta$$

$$\left. \begin{aligned} x &= v_o \cos \theta t \\ y &= v_o \sin \theta t + \frac{1}{2} gt^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow y = \tan \theta \cdot x + \frac{g}{2v_o^2 \cos^2 \theta} \cdot x^2$$

$$\Rightarrow h = \tan \theta \cdot R + \frac{g}{2gd \sin \theta \cos^2 \theta} \cdot R^2$$

$$\Rightarrow R^2 + 2d \sin^2 \theta \cos \theta \cdot R - 2hd \sin \theta \cdot \cos^2 \theta = 0$$

با نوشتن معادلات حرکت دو بعدی بین B و C:



گزینه ۱ درست است.

در حالت $P_{\min}$ نمودار نیروها را رسم کرده و معادلات را می نویسیم.

$$I \begin{cases} n \sin \theta - \mu_1 n \cos \theta = m_A a \\ n \cos \theta + \mu_1 n \sin \theta = m_A g \end{cases}$$

$$II \begin{cases} P_{\min} + \mu_1 n \cos \theta - n \sin \theta - \mu_2 N = m_B a \\ N = m_B g + n \cos \theta + \mu_1 n \sin \theta \end{cases}$$

$$I \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{\sin \theta - \mu_1 \cos \theta}{\cos \theta + \mu_1 \sin \theta} g \\ n = \frac{m_A g}{\cos \theta + \mu_1 \sin \theta} \end{cases}$$

$$I, II \Rightarrow \begin{cases} N = (m_A + m_B)g \\ P_{\min} = (m_A + m_B)g \cdot \left[\mu_2 + \frac{\sin \theta - \mu_1 \cos \theta}{\cos \theta + \mu_1 \sin \theta} \right] \end{cases}$$

در حالت $P_{\max}$ نمودار نیروها و معادلات به حالت زیر است:

$$I' \begin{cases} n' \sin \theta + \mu_1 n' \cos \theta = m_A a' \\ n' \cos \theta - \mu_1 n' \sin \theta = m_A g \end{cases}$$

$$II' \begin{cases} P_{\max} - n' \sin \theta - \mu_1 n' \cos \theta - \mu_2 N' = m_B a' \\ N' = m_B g + n' \cos \theta - \mu_1 n' \sin \theta \end{cases}$$

$$I' \Rightarrow \begin{cases} a' = \frac{\sin \theta + \mu_1 \cos \theta}{\cos \theta - \mu_1 \sin \theta} g \\ n' = \frac{m_A g}{\cos \theta - \mu_1 \sin \theta} \end{cases}$$

$$I', II' \Rightarrow \begin{cases} N' = (m_A + m_B)g \\ P_{\max} = (m_A + m_B)g \cdot \left[\mu_2 + \frac{\sin \theta + \mu_1 \cos \theta}{\cos \theta - \mu_1 \sin \theta} \right] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{P_{\max} - P_{\min}}{(m_A + m_B)g} = \frac{2\mu_1}{\cos^2 \theta - \mu_1^2 \sin^2 \theta}$$

-۴۷

گزینه ۴ درست است.

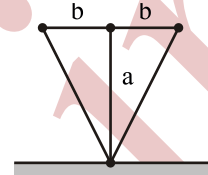
برای رسیدن به بیشترین ارتفاع، باید در راستای عمود شلیک کرد.

اگر فنی به ضریب سختی k را نصف کنیم، ضریب سختی هر فنر $2k$ می شود. (چرا؟)
با استفاده از پایستگی انرژی:

$$2 \times \frac{1}{2} k \left[\sqrt{a^2 + b^2} - b \right] = mg(a + H)$$

$$\Rightarrow \frac{2k}{mg} \left(a^2 + 2b^2 - 2b\sqrt{a^2 + b^2} \right) - a = H$$

$$\left. \begin{aligned} a &= 6b \\ \frac{mg}{k} &= b \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{2}{b} \left[36b^2 + 2b^2 - 2b\sqrt{37} \right] - 6b = H \Rightarrow H \leq 46b$$



-۴۸

گزینه ب درست است.

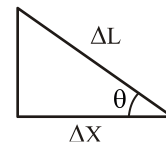
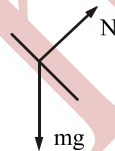
قسمتی از مسیر را در نظر می گیریم:

$$N = mg \cos \theta$$

$$f = \mu N = \mu mg \cos \theta \rightarrow \Delta W_F = F \Delta L = \mu mg \Delta L \cos \theta$$

$$\Delta x = \Delta L \cos \theta \Rightarrow \Delta W_F = -\mu mg \Delta x$$

$$W_F = \sum \Delta W_F = -\mu mg \sum \Delta x = -\mu mgs$$



از پایستگی انرژی: (اسکی باز در ابتدا و انتهای حرکت در حال سکون است).

$$mg \Delta h = \mu mgs \Rightarrow \Delta h = \mu s$$

-۴۹

گزینه ۴ درست است.

برای حل این مسئله، از سرعت و جابه جایی نسبی استفاده می شود.

بنابراین اگر سرعت روباه بیش از سرعت خرگوش باشد، در نهایت فاصله کاهش می یابد و روباه به خرگوش می رسد. و بالعکس.

-۵۰

گزینه ۱ درست است.

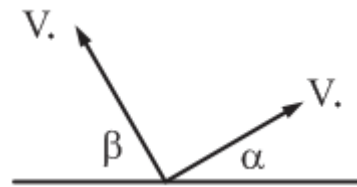
$$\vec{r}_1 = v_0 \cos \alpha \cdot t \hat{i} + \left(v_0 \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2 \right) \hat{j}$$

$$\vec{r}_2 = -v_0 \cos \beta \cdot t \hat{i} + \left(v_0 \sin \beta - \frac{1}{2} g t^2 \right) \hat{j}$$

$$\tan \theta = \left| \frac{\Delta r_y}{\Delta r_x} \right| = \left| \frac{v_0 (\sin \beta - \sin \alpha)}{v_0 \cos \beta + \cos \alpha} \right|$$

$$= \left| \frac{\sin \beta - \sin \alpha}{\cos \beta + \cos \alpha} \right| = \left| \frac{\cancel{2} \cdot \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \sin \left(\frac{\beta - \alpha}{2} \right)}{\cancel{2} \cdot \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\beta - \alpha}{2} \right)} \right| = \left| \tan \left(\frac{\beta - \alpha}{2} \right) \right|$$

$$\Rightarrow \theta = \left| \frac{\beta - \alpha}{2} \right|$$



-۵۱

گزینه ۳ درست است.

$$x_1 = v_0 \cos \alpha + \frac{1}{2} g \sin \theta t^2$$

$$y_1 = v_0 \sin \alpha - \frac{1}{2} g \cos \theta t^2$$

$$y_1 = 0 \rightarrow t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g \cos \theta}$$

$$\rightarrow R_1 = V_0 \cos \alpha \cdot \frac{2V_0 \sin \alpha}{g \cos \theta} + \frac{1}{2} g \sin \theta \cdot \frac{4v_0^2 \sin^2 \alpha}{g^2 \cos^2 \theta}$$

$$R_1 = \frac{2v_0^2}{g} \left[\frac{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\cos \theta} + \frac{\sin \theta \cdot \sin^2 \alpha}{\cos^2 \theta} \right] = \frac{2v_0^2}{g} \cdot \frac{2 \cos \theta \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha + 2 \sin \theta \cdot \sin^2 \alpha}{2 \cos^2 \theta}$$

$$= \frac{V_0^2}{g \cos^2 \theta} [\cos \theta \cdot \sin 2\alpha + \sin \theta \cdot (1 - \cos 2\alpha)] = \frac{V_0^2}{g \cos^2 \theta} [\sin 2\alpha \cdot \cos \theta - \cos 2\alpha \sin \theta + \sin \theta]$$

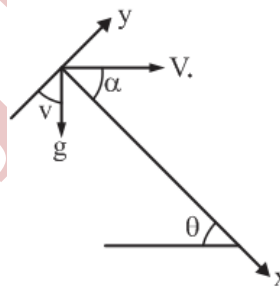
$$= \frac{V_0^2}{g \cos^2 \theta} [\sin \theta + \sin (2\alpha - \theta)] \rightarrow R_{1\max} = \frac{V_0^2}{g} \cdot \frac{1 + \sin \theta}{\cos^2 \theta}$$

$$x_2 = v_0 \cos \alpha t - \frac{1}{2} g \sin \theta t^2$$

$$y_2 = v_0 \sin \alpha t - \frac{1}{2} g \cos \theta t^2$$

$$y_2 = 0 \Rightarrow t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g \cos \theta}$$

$$\Rightarrow R_2 = v_0 \cos \alpha \cdot \frac{2v_0 \sin \alpha}{g \cos \theta} - \frac{1}{2} g \sin \theta \cdot \frac{4v_0^2 \sin^2 \alpha}{g^2 \cos^2 \theta}$$



$$\begin{aligned}
 &= \frac{v_0^2}{g \cos^2 \theta} [2 \sin \alpha \cos \alpha \cos \theta - 2 \sin^2 \alpha \sin \theta] \\
 &= \frac{v_0^2}{g \cos^2 \theta} [\sin 2\alpha \cos \alpha - (1 - \cos 2\alpha) \sin \theta] \\
 &= \frac{v_0^2}{g \cos^2 \theta} [\sin 2\alpha \cos \alpha + \cos 2\alpha \sin \theta - \sin \theta] = \frac{v_0^2}{g \cos^2 \theta} [\sin(2\alpha + \theta) - \sin \theta] \\
 &\Rightarrow R_{2\max} = \frac{v_0^2}{g} \frac{1 - \sin \theta}{\cos^2 \theta}
 \end{aligned}$$

$$\frac{R_{1\max}}{R_{2\max}} = \frac{1 + \sin \theta}{1 - \sin \theta} = 2 \Rightarrow 1 + \sin \theta = 2 - 2 \sin \theta \Rightarrow \sin \theta = \frac{1}{3}$$

-۵۲

گزینه ۱ درست است.

$$\tan \theta = m$$

$$v_0^2 = 2g(y_0 - mx_0), \quad \alpha = \frac{\pi}{2} - 2\theta$$

$$R = 2x_0 = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha = \frac{v_0^2}{g} \sin(4\theta)$$

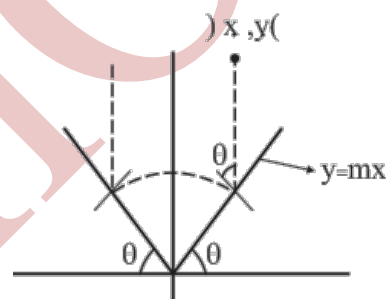
$$\sin 4\theta = 2 \sin 2\theta \cos 2\theta$$

$$\cos 2\theta = \frac{1 - \tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta} \Rightarrow \cos 2\theta = \frac{1 - m^2}{1 + m^2}$$

$$\sin 2\theta = \sqrt{1 - \cos^2 2\theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{1 - m^2}{1 + m^2}\right)^2} = \frac{2m}{1 + m^2}$$

$$x_0 = 2(y_0 - mx_0) \cdot \frac{2m}{1 + m^2} \cdot \frac{1 - m^2}{1 + m^2}$$

$$\Rightarrow x_0 = \frac{4m(1 - m^2)}{(1 + m^2)^2} (y_0 - mx_0)$$



-۵۳

گزینه ۲ درست است.

زود رسیدن مهندس به مدت ۱۰ دقیقه، یعنی راننده در مسیر رفت و برگشت به مدت ۱۰ دقیقه صرفه جویی کرده است و به معنای دیگر ۵ دقیقه در مسیر رفت و ۵ دقیقه در مسیر برگشت. این بدان معنی است که راننده ۵ دقیقه زودتر از همیشه به مهندس رسیده است و در نتیجه مهندس ۵۵ دقیقه پیاده روی کرده است.