امتحان اول المپیاد فیزیک (دوره ۱۰ نفر) تاریخ: ۸۵/۱۱/۱۶

وقت امتحان: ۴:۳۰

۱) لوله ای توخالی به مساحت مقطع s که دو انتهای آن بسته است توسط پیستونی به جرم m به دو بخش تقسیم شده است. پیستون می تواند آزادانه و بدون اصطکاک در طول لوله حرکت کند. لوله به شکل قطاعی از یک دایره به شعاع a است. وقتی پیستون در $\theta = 0$ است. حجم سمت راست و چپ با هم برابر است و مقدار آن $v_0 = sa$ است. زاویه ی θ که از خط قائم OA سنجیده می شود بین ۱- تا ۱+ رادیان می تواند تغییر کند.

فرض کنید n مول گاز ایده آل در سمت راست پیستون و n مول از همان گاز در سمت چپ آن است. دمای گازها را T بگیرید.

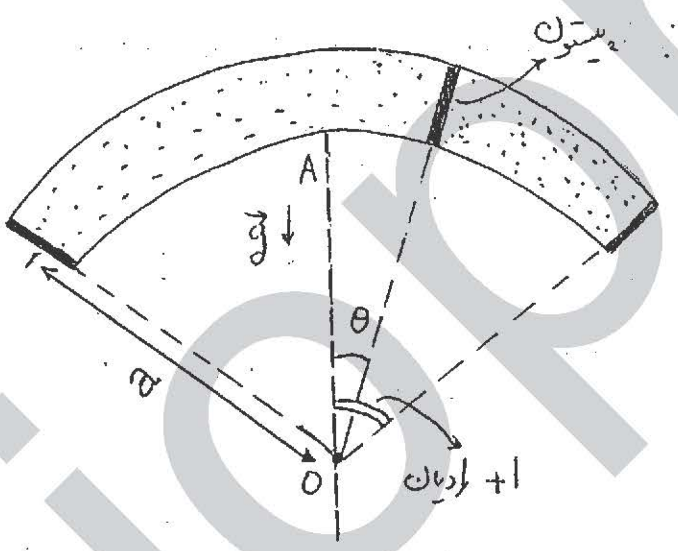
الف) مطابق شکل اگر پیستون به اندازه ی θ از حالت قائم منحرف شود، فشارهای گاز در دو طرف پیستون را برحسب زاویه ی θ و دمای T و کمیت های ثابت دیگر بنویسید.

ب) نیروی مماسی وارد بر پیستون در وضعیت قسمت الف را برحسب θ پیدا کنید.

فرض کنید $T_c = mga/(2R)$ دمای بحرانی باشد.

ج) اگر $T > T_c$ باشد نقاط تعادل را پیدا کنید و در مورد پایداری یا ناپایداری آنها بحث کنید.

د) اگر $T < T_c$ باشد نقاط تعادل را پیدا کنید و در مورد پایداری یا ناپایداری آنها بحث کنید.



۶۸

۲) این سه شکل را در نظر بگیرید.

S: دایره ی ـ $x^2 + y^2 = R^2$ و $z = 0$

R: مربع ـ به ضلع ـ a که رأس‌ها یش نقاط ـ $(\pm\frac{a}{2}, \pm\frac{a}{2}, 0)$ اند.

T: مثلث ـ متساوی‌الاضلاع ـ به ضلع ـ b که رأس‌ها یش نقاط ـ $(0, \frac{b}{\sqrt{3}}, 0)$ و $(\frac{b}{2}, \pm\frac{b}{2\sqrt{3}}, 0)$ اند.

اگر از S جریان ـ I، در جهت ـ مثبت (مثلثاتی) بگذرد، رو ی ـ محور ـ z میدان ـ مغناطیسی فقط مؤلفه ی ـ z دارد، و اندازه اش برابر است با

$$B(0,0,z) = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}}. \qquad (1)$$

اگر S با چگالی ی ـ ثابت ـ λ باردار باشد، میدان ـ الکتریکی رو ی ـ محور ـ z فقط مؤلفه ی ـ z دارد، و اندازه اش برابر است با

$$E(0,0,z) = \frac{\lambda}{2\varepsilon_0} \frac{R z}{(R^2 + z^2)^{3/2}}. \qquad (2)$$

(a) فرض کنید مربع ـ R با چگالی ی ـ ثابت ـ λ باردار باشد. میدان ـ الکتریکی را رو ی ـ محور ـ z به دست آورید.

(b) ضلع ـ a چه قدر باشد تا در $a \ll z$، و رو ی ـ محور ـ z، این میدان برابر باشد با میدان ـ ناشی از دایره ی ـ باردار ـ S؟

(c) فرض کنید مثلث ـ T با چگالی ی ـ ثابت ـ λ باردار باشد. میدان ـ الکتریکی را رو ی ـ محور ـ z به دست آورید.

(d) ضلع ـ b چه قدر باشد تا در $b \ll z$، و رو ی ـ محور ـ z، این میدان برابر باشد با میدان ـ ناشی از دایره ی ـ باردار ـ S؟

(e) فرض کنید از مربع ـ R جریان ـ I، در جهت ـ مثبت بگذرد. میدان ـ مغناطیسی را رو ی ـ محور ـ z به دست آورید.

(f) ضلع ـ a چه قدر باشد تا در $a \ll z$، و رو ی ـ محور ـ z، این میدان برابر باشد با میدان ـ ناشی از حلقه ی ـ جریان ـ S؟

(g) ضلع ـ a چه قدر باشد تا در $z = 0$، و رو ی ـ محور ـ z، این میدان برابر باشد با میدان ـ ناشی از حلقه ی ـ جریان ـ S؟

(h) فرض کنید از مثلث ـ T جریان ـ I، در جهت ـ مثبت بگذرد. میدان ـ مغناطیسی را رو ی ـ محور ـ z به دست آورید.

(i) ضلع ـ b چه قدر باشد تا در $z = 0$، و رو ی ـ محور ـ z، این میدان برابر باشد با میدان ـ ناشی از حلقه ی ـ جریان ـ S؟

(j) ضلع ـ b چه قدر باشد تا در $b \ll z$، و رو ی ـ محور ـ z، این میدان برابر باشد با میدان ـ ناشی از حلقه ی ـ جریان ـ S؟

راهنمایی: $\int \frac{ds}{(c^2 + s^2)^{3/2}}$ را می‌توانید با تعریف ـ $s = c \tan\theta$ ساده کنید.

۳) دست‌گاه‌های K و K' و K'' را در نظر می‌گیریم. محورهای K و K' موازی و هم‌نام اند (یعنی مثلاً محور x موازی x' است). محورهای K' و K'' هم موازی و هم‌نام اند. K' با سرعت $(v,0,0)$ نسبت به K حرکت می‌کند، و K'' با سرعت $(0,w,0)$ نسبت به K' حرکت می‌کند.

(a) تبدیل‌های لُرنتس K به K'، و K' به K'' را بنویسید.

(b) این تبدیل‌ها را ترکیب کنید تا تبدیل K به K'' به دست آید.

(c) سرعت K'' نسبت به K چیست؟

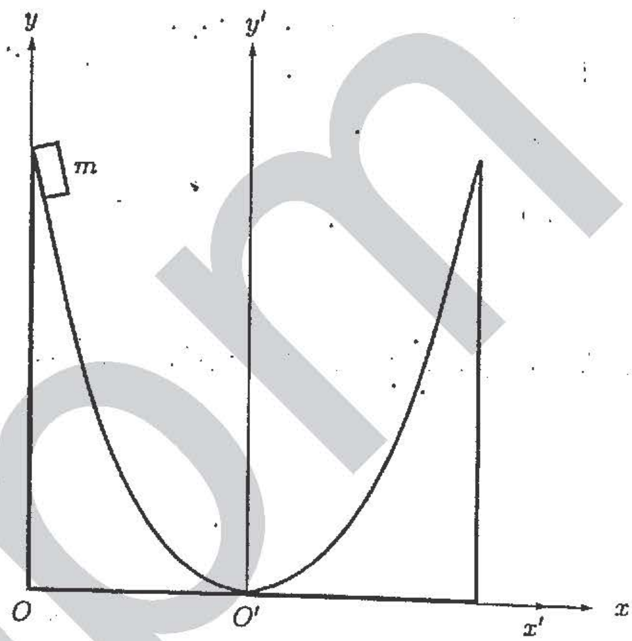
۹

۶۹

۴) مکعبی به جرم m را از بالای یک پایه‌ی سهمی شکل به جرم M رها می‌کنیم. معادله‌ی سهمی در دستگاه مختصات متصل به پایه (دستگاه $x'O'y'$) $y' = kx'^{2}/2$ است که $-a \leq x' \leq a$. از اصطکاک بین مکعب با پایه و پایه با سطح افقی زیرش صرفنظر کنید. در حالی که پایه ساکن است، مکعب را از بالای پایه رها می‌کنیم. مطابق شکل دستگاه مختصات ساکنی (دستگاه xOy) در نظر بگیرید که در لحظه‌ی رها شدن دستگاه، فاصله‌ی مبدأ O' نسبت به مبدأ آن، O، برابر a باشد.

آ) معادله‌ی مسیر حرکت مکعب در دستگاه مختصات ساکن را به دست آورید.

ب) زمان تناوب حرکت مکعب را بر حسب انتگرال بیضوی مناسب بنویسید.



یادآوری:

انتگرال‌های بیضوی کامل نوع اول و دوم به شکل زیراند

$$F(K) = \int_{0}^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - K^{2}\sin^{2}\theta}}$$

$$E(K) = \int_{0}^{\pi/2} d\theta \sqrt{1 - K^{2}\sin^{2}\theta}$$

که $0 < K < 1$.

۵) یک ظرف ـ استوانه‌ای ي صلب و نارسانا و نفوذناپذیر با مساحتِ‌مقطع ـ A، به وسیله ي یک پیستون ـ صلب و نفوذناپذیر به جرم ـ M به دو بخش تقسیم شده. بخش ـ چپ شامل ـ یک گاز (ـ نه لزوماً کامل) است، و بخش ـ راست خالی است و در آن فقط یک فنر با ضریبِ‌سختی ي k هست که پیستون را به دیواره ي راست ـ استوانه وصل می‌کند. جرم ـ گاز m، و ظرفیت ـ گرمایی ي پیستون C است. (ظرفیت ـ گرمایی یعنی گرما ي ویژه ضرب در جرم.) از جرم و ظرفیتِ‌گرمایی ي فنر چشم بپوشید. در ابتدا فنر نه کشیده‌شده است و نه فشرده‌شده، و طول ـ بخش ـ چپ ـ استوانه (شامل ـ گاز) ℓ است. در این حالت دما ي گاز T_0 و فشار ـ گاز P_0 است. جا ي پیستون را با x نشان می‌دهیم، چنان که در حالت ـ اولیه $x = 0$ است و با حرکت ـ پیستون به طرف ـ راست x مثبت می‌شود. به پیستون یک نیرو ي اصطکاک هم وارد می‌شود (f) که تابع ـ معین ی از سرعت ـ پیستون است. جهت ـ مثبت ـ این نیرو را همان جهت ـ مثبت ـ x بگیرید. فرض کنید حرکت ـ پیستون چنان کند است که در هر لحظه فشار (P) و دما (T) در کل ـ ظرف ـ گاز یک‌سان است، و دما ي پیستون هم با دما ي گاز برابر است.

حتماً همه ي جواب‌ها ي نهایی را در مستطیل‌ها ي مشخص‌شده بنویسید.

a) معادله ي دیفرانسیل ی برا ي x بر حسب ـ حالت ـ گاز و کمیت‌ها ي داده‌شده بنویسید.

b) مشتق ـ انرژی ي درونی ي گاز ($\overline{U}$) نسبت به زمان را بر حسب ـ x و f و حالت ـ گاز بنویسید.

c) توان ـ گرمایی ي داده‌شده به گاز ($\dot{Q}$) را بر حسب ـ x و f و حالت ـ گاز بنویسید.

d) انرژی ي درونی ي گاز ($\overline{U}$) دو بخش دارد: یک ی U، که انرژی ي درونی ي یک گاز ـ ساکن با همان مشخصات ـ گاز ـ درون ـ استوانه است؛ و یک ي یک انرژی ي جنبشی (U_b)، که ناشی از حرکت ـ کپه‌ای (غیرکاتوره‌ای) ي ماده است. سرعت ـ متناظر با این حرکت ـ کپه‌ای را متناسب با فاصله از دیواره ي چپ بگیرید و U_b را بر حسب ـ $\dot{x}$ و داده‌ها ي مسئله حساب کنید.

e) با فرض ـ این که گاز کامل است، P را بر حسب ـ T و x بیابید.

f) با فرض ـ این که گاز کامل است و ظرفیت ـ گرمایی ي این گاز در حجم ـ ثابت برا ي گاز ـ ساکن C_V است، مشتق ـ دما نسبت به زمان را بر حسب ـ x حساب کنید.

g) با فرض ـ این که گاز کامل است، رابطه ي T با x در حالت ـ تعادل را بنویسید.

h) با فرض ـ این که گاز کامل است و C و C_V مستقل از دما یند، یک معادله برا ي x در حالت ـ تعادل بنویسید.

i) فرض کنید k بزرگ است و از معادله ي بخش ـ پیش x را تا مرتبه ي دو نسبت به $(1/k)$ حساب کنید. (راه‌نمایی: تعریف کنید $y := k\,x$ و ابتدا y را حساب کنید.)

۷

V

بسمه تعالی

۸۵/۱۱/۳۰ امتحان دوم المپیاد فیزیک (دوره‌ی ۱ انق)

وقت: ۴ ساعت

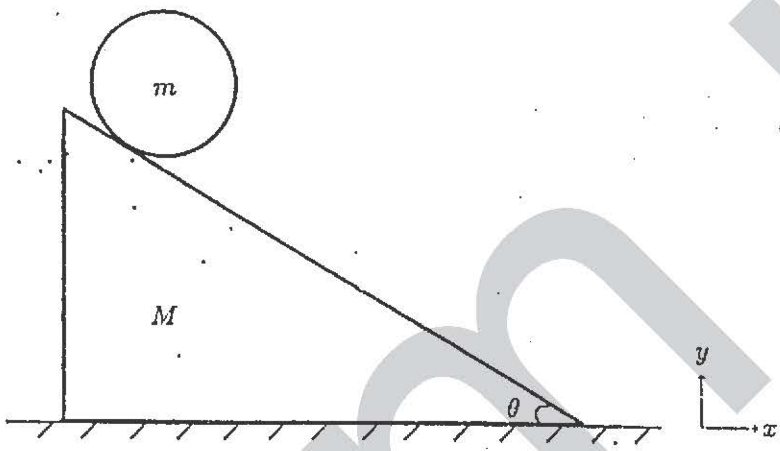
۱) استوانه‌ی همگن توپری به جرم m و شعاع r می‌تواند از روی سطح شیب‌داری به جرم M و شیب θ با غلتش کامل پایین آید. از اصطکاک سطح شیب‌دار با سطح زیرش صرفنظر کنید. اگر استوانه از بالای سطح پایین بیاید:

آ) شتاب مرکز جرم استوانه نسبت به زمین در راستای x و y چقدر است؟

ب) نیروی وارد بر استوانه از طرف سطح شیب‌دار را به دست آورید.

پ) شتاب سطح شیب‌دار و نیروی وارد بر آن از طرف سطح افقی را محاسبه کنید؟

لختی دورانی استوانه همگن حول محورش $\frac{1}{2}mr^2$ است.



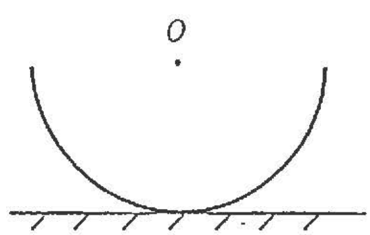
?

۲) یک پوسته‌ی نیم استوانه‌ای شکل همگن به شعاع R روی یک سطح افقی در نظر بگیرید.

آ) مکان مرکز جرم این پوسته را نسبت به نقطه‌ی O محاسبه کنید.

ب) بسامد نوسان‌های کوچک حرکت این پوسته حول نقطه‌ی تعادل پایدار اگر سطح افقی کاملاً بدون اصطکاک باشد چقدر است؟

پ) به سؤال قسمت قبل اگر سطح افقی کاملاً ناهموار باشد پاسخ دهید.



?

۷۱

۳)

حرکتِ قطره‌ي باران در ابر — ابر را محیطی هم‌گن با چگالی‌ي ρ_1 بگیرید. این محیط شاملِ قطراتِ خیلی ریزِ آب است که تقریباً ساکن هستند.
تذکر: پاسخ‌هاي خود را در جعبه‌هاي مربوطه در پاسخ‌نامه وارد کنید.

a) قطره‌ي ریزی را در نظر بگیرید که چون کمی بزرگ‌تر از دیگران است شروع به سقوط می‌کند و سرِ راهش همه‌ي ذراتِ ریزِ بخارِ آب به آن می‌چسبند. فرض کنید قطره هم‌واره کروی می‌ماند. شعاعِ قطره‌ي باران را $r(t)$ بگیرید. رابطه‌ای بینِ $\dot{r}$، سرعتِ سقوطِ قطره $v(t)$، چگالی‌ي ابر ρ_1 و چگالی‌ي آب ρ_0 به دست آورید.

b) قانونِ نیوتن را براي قطره‌ي باران بنویسید. با حذفِ v و $\dot{v}$ معادله‌ي دیفرانسیلی براي $r(t)$ به دست آورید.

5

c) این معادله یک معادله‌ي غیرخطی است. براي به دست آوردنِ جواب فرض کنید $r(0) \approx 0$ و $\dot{r}(0) \approx 0$ و سپس با استفاده از روشِ تحلیلِ ابعادی رابطه‌ای بینِ r و پارامترهایی که در معادله‌ي دیفرانسیل ظاهر شده‌اند، به دست آورید. حالا با استفاده از معادله‌ي دیفرانسیلی که قبلاً به دست آورده بودید می‌توانید $r(t)$ را به دست آورید.

d) شتابِ سقوطِ قطره‌ي باران در ابر چه‌قدر است؟

$F = U - TS$

$dF = -pdV - SdT$

۴) نوع ی ماده هست که فشار ـ آن تابع ـ فقط دما است:

$$P = \alpha T^{\beta},$$

که P فشار و T دما است، و α و β ثابت‌ها یی مثبت اند و $\beta > 1$.
حتماً همه ي جواب‌ها ي نهایی را در مستطیل‌ها ي مشخص‌شده بنویسید.

a) انرژی ي آزاد ـ هِلم‌هُلتس (F) را برحسب ـ T و V (حجم) به دست آورید.

b) انتروپی (S) را برحسب ـ T و V به دست آورید.

c) انرژی ي درونی (U) را برحسب ـ T و V به دست آورید.

d) ظرفیت ـ گرمایی در حجم ـ ثابت (C_V) را برحسب ـ T و V به دست آورید.

e) ظرفیت ـ گرمایی در فشار ـ ثابت (C_P) را برحسب ـ T و V به دست آورید.

یک ظرف ـ صلب به حجم ـ V را در نظر بگیرید که با یک دیواره به دو بخش تقسیم شده. این دیواره نفوذناپذیر است، اما آزادانه حرکت می‌کند و رسانا ي گرما است. در یک طرف ـ این ظرف به حجم ـ V_1 یک گاز ـ کامل به مقدار ـ n و ظرفیت ـ گرمایی در حجم‌ثابت ـ $\tilde{C}_V$ است، و در طرف ـ دیگر ماده ای که قبلاً معرفی شد.

f) این مجموعه در دما ي T است. V_1 را با این فرض که V_1 کوچک‌تر از V باشد حساب کنید.

g) دما یی را بیابید (T_c) که در آن V_1 با V برابر می‌شود.

h) ظرفیت ـ گرمایی ي این سیستم را بر حسب ـ دما به دست آورید.

۸۵/۱۲/۲۱
وقت : ۵ ساعت

باسمه تعالی
امتحان سوم المپیاد فیزیک (دوره‌ی ۱۰ الف)

آزمایش ۲۰: $\frac{10/75}{17}$

$\frac{18/25}{50}$

۳

۱- استوانه‌ای به طول L، شعاع R و جرم M از دو نیم استوانه‌ی توپر به هم چسبیده تشکیل شده است. توزیع جرم هر نیم استوانه یکنواخت است ولی جنس آن‌ها متفاوت است، در نتیجه مرکز جرم استوانه به فاصله‌ی d از محور استوانه قرار دارد. لختی دورانی استوانه حول محور (وسط) استوانه I است. مطابق شکل استوانه را از بالای سطح شیب‌دار ساکنی به شیب θ از وضعیت نشان داده شده از حالت سکون رها می‌کنیم. طول سطح شیب‌دار با محیط استوانه برابر است. اگر استوانه همه‌ی مسیر را با غلتش کامل پایین بیاید

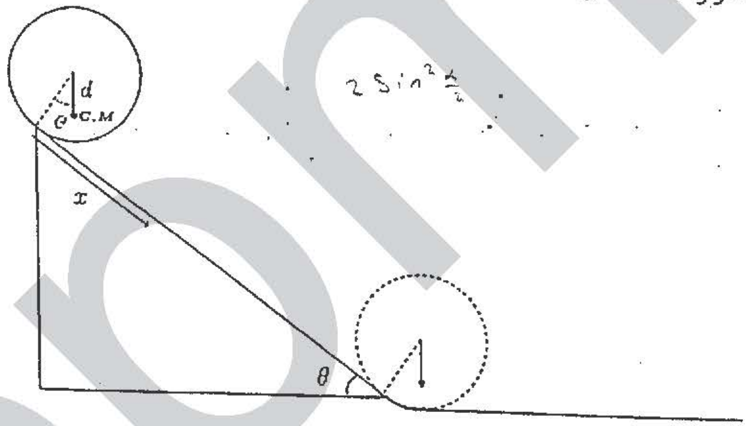
آ) سرعت زاویه‌ای و شتاب زاویه‌ای استوانه پس از اینکه طول x را روی سطح طی کرد بر حسب x و سایر پارامترهای معلوم چقدر است؟

۶

ب) سرعت زاویه‌ای استوانه در پایین سطح چقدر است؟

پ) اگر استوانه در پایین سطح شیب‌دار روی یک سطح افقی (که آن را تقریباً هم تراز با قاعده سطح شیب‌دار می‌گیریم) قرار گیرد و باز هم با غلتش کامل حرکت کند، زمان یک دور چرخشش را تا مرتبه‌ی اول d/R محاسبه کنید.

(جواب‌های آخر را تا حد امکان ساده کنید)

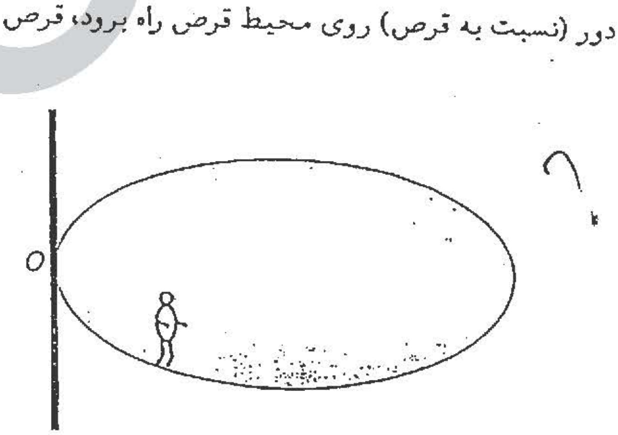


$2\sin^2\frac{\theta}{2}$

۲- مطابق شکل، قرص یکنواختی به جرم M و شعاع R می‌تواند آزادانه حول محور قائم ثابتی که از لبه‌ی آن می‌گذرد، در یک سطح افقی بچرخد. شخصی به جرم m در نقطه‌ی O، محل تماس قرص با محور، روی قرص ساکن ایستاده است. اگر این شخص یک دور (نسبت به قرص) روی محیط قرص راه برود، قرص چه مقدار حول محور قائم می‌چرخد؟

-۵-

۶



۷۳

در صورت نیاز:

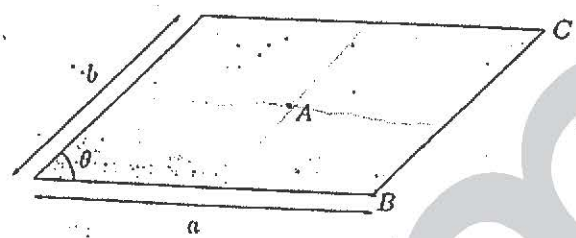
$$\int \frac{dx}{p+q\cos x} = \frac{2}{\sqrt{p^2-q^2}}\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{p-q}{p+q}}\tan\frac{x}{2}\right)$$

۴

۳ـ سطحی به شکلِ یک متوازی‌الاضلاع به ضلع‌هایِ a و b و زاویه‌یِ حاده‌یِ θ با چگالیِ بارِ یک‌نواختِ σ باردار شده است.

a) با استفاده از تحلیلِ ابعادی رابطه‌ای بینِ ϕ_A پتانسیل در نقطه‌یِ A مرکزِ متوازی‌الاضلاع، σ، a، b، و θ به دست آورید.

b) رابطه‌ای بینِ ϕ_A و $\phi_B + \phi_C$ به دست آورید. ϕ_B و ϕ_C پتانسیل در نقطه‌هایِ B و C رأس‌هایِ متوازی‌الاضلاع هستند.

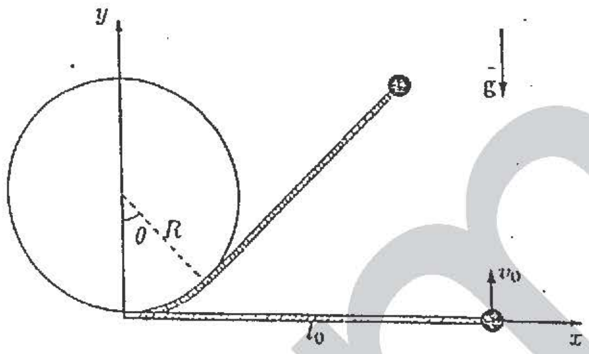


سوال هولوند

۲٫۵

۴- به انتهای نخی که به دور قرقره‌ی ساکنی پیچیده شده جسمی به جرم m متصل است. مطابق شکل جسم با سرعت اولیه‌ی v_0 به سمت بالا پرتاب می‌شود. طول اولیه‌ی نخ l_0 و شعاع قرقره R است.

در همه‌ی بندهای مسأله جز بند آخر فرض کنید $l_0 > 2\pi R$.



?

تذکر: پاسخ‌های خود را در جعبه‌های مربوطه در پاسخ‌نامه وارد کنید.

a) مختصات جسم را بر حسب θ به دست آورید و از آن‌جا سرعت ذره را برحسب θ و $\dot{\theta}$ بنویسید. فرض کنید نخ شُل نشده است.

b) سرعت ذره $v(\theta)$ را تا وقتی که نخ شُل نشده برحسب θ به دست آورید.

c) برای آن‌که به ازای $\theta \leq \pi/2$ نخ شُل نشود سرعت اولیه v_0 باید آن‌چنان باشد که

$$\frac{v_0^2}{Rg} \geq f(\theta).$$

تابع $f(\theta)$ را به دست آورید.

d) به ازای زاویه‌ای مثل θ_0، $f(\theta)$ بیشینه می‌شود. معادله‌ای که θ_0 در آن صدق می‌کند را به دست آورید.

e) حالا شرطی بین v_0 و θ_0 به دست آورید که به ازای $0 < \theta \leq \pi/2$ نخ شُل نشود.

f) چه شرط دیگری لازم است تا در ناحیه‌ی $\pi/2 < \theta \leq \pi$ هم نخ شُل نشود.

۷۴

g) چه شرطی روي سرعتِ اولیه باشد تا نخ یک دور به دورِ قرقره بچرخد ولی نخ شُل نشود.

h) چه شرطی روي سرعتِ اولیه باشد که نخ مادامی که به دورِ قرقره می‌چرخد شُل نشود.

i) فرض کنید $l_0 = (\frac{\pi}{4} + \frac{1}{3})R$. چه شرطی روي سرعتِ اولیه باشد تا نخ تا انتها به دورِ قرقره بچرخد و نخ شُل نشود.

۵- مقدار ی گاز ـ کامل در یک ظرف هست که حجم ـ آن (V) را می‌شود با یک پیستون تغییر داد. پیستون و دیواره‌ها ي ظرف نفوذناپذیر اند. این گاز با محیط ـ ش گرما مبادله می‌کند. گرمابرزمان ی که از این گاز به محیط داده می‌شود $k\,(T - T')$ است، که T دما ي گاز و T' دما ي محیط است. ظرفیت ـ گرمایی ي گاز در حجم ـ ثابت C_V، و ظرفیت ـ گرمایی ي محیط C است. تعریف می‌کنیم

$$a := \frac{n\,R\,\dot{V}}{V}$$

که $\dot{V}$ مشتق ـ V نسبت به زمان، n مقدار ـ گاز، و R ثابت ـ عمومی ي گازها است.هدف محاسبه ي رابطه ي دماها با زمان بر حسب ـ C، C_V، k، و a است. این پارامترها را ثابت بگیرید.

حتماً همه ي جواب‌ها ي نهایی را در مستطیل‌ها ي مشخص‌شده بنویسید.

۹

a) مشتق ـ T نسبت به زمان را بنویسید.

b) مشتق ـ T' نسبت به زمان را بنویسید.

c) T' را حذف کنید و یک معادله ي دیفرانسیل به دست آورید که شامل ـ فقط T باشد.

d) جواب ـ کلی ي این معادله را بنویسید. (لازم نیست ریشه‌ها ي معادله ي مشخصه را حساب کنید.)

e) T و T' در زمان ـ صفر را به‌ترتیب T_0 و T'_0 بگیرید و رابطه ي T با زمان را به دست آورید. (لازم نیست ریشه‌ها ي معادله ي مشخصه را حساب کنید.)

f) نتیجه ي e را در $C \to \infty$ ساده کنید.

g) نتیجه ي e را در $k \to 0$ ساده کنید.

h) نتیجه ي e را در $k \to \infty$ ساده کنید.

بسمه تعالی

امتحان چهارم المپیاد فیزیک (۱۰ نفر)

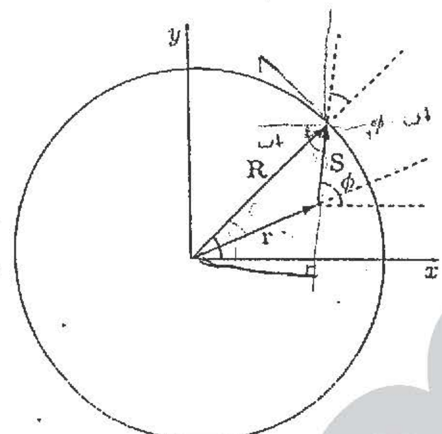
۸۶/۲/۵

وقت : ۴ ساعت

مسئله ۱

مسئله‌ي تعقيب ۲

ذره‌ای (شکار) با سرعتِ زاویه‌ایِ ثابتِ ω رویِ یک دایره به شعاعِ R حرکت می‌کند. ذره‌ي دیگری (شکارچی) آن را تعقیب می‌کند. جهتِ سرعتِ شکارچی همواره به سمتِ شکار و اندازه‌يِ سرعتش v ثابت است.



بردارِ مکانِ شکار $\mathbf{R}$، بردارِ مکانِ شکارچی $\mathbf{r}$ و بردارِ مکانِ نسبیِ آن‌ها $\mathbf{S} = \mathbf{R} - \mathbf{r}$ است.

تذکر: پاسخ‌هاي خود را در جعبه‌هاي مربوطه در پاسخ‌نامه وارد کنید.

a) معادله‌هایِ جفت‌شده‌ای برایِ $\dot{S}$ و $\dot{\phi}$ بر حسبِ R، v، ω، S، ϕ و زمان t به دست آورید.

b) فرض کنید $v > R\omega$. آیا شکارچی در زمانی محدود به شکار می‌رسد؟ جوابِ خود را با استدلالِ دقیقِ ریاضی اثبات کنید.

از این پس فرض کنید $v < R\omega$

c) با استفاده از تغییرِ متغیرِ $\psi = \phi - \omega t$ و حذفِ S معادله‌يِ دیفرانسیلی برایِ ψ بر حسبِ R، v، ω به دست آورید.

d) فرض کنید در لحظه‌ای $\psi = \psi_c$ (که $\sin\psi_c := v/R\omega$) و $S = R\cos\psi_c$ شود. از این پس مسیرِ شکارچی چیست؟

e) حالا بیایید پایداریِ این جواب را بررسی کنیم. فرض کنید

$$S = R\cos\psi_c + \delta,$$
$$\psi = \psi_c + \epsilon,$$

۷۵

که δ و ϵ کوچک هستند. معادله‌هاي جفت‌شده‌ای براي $\dot{\delta}$، و $\dot{\epsilon}$ به دست آورید. معادله‌ها را تارتبه‌ي یک δ و ϵ بنویسید.

۴) معادله‌ي مرتبه‌ي دومی براي δ به دست آورید. براي جواب این معادله نهاده‌ای به صورتِ e^{pt} بگیرید. دو مقدارِ p_1 و p_2 را به دست آورید. δ و ϵ را در زمان‌هاي بزرگ به دست آورید.

۶

ذره‌ای به جرم m با نیروی مرکزی

$$F(r) = -\frac{K}{r^{2}}, \qquad K > 0$$

جذب یک مرکز نیرو می‌شود. در لحظه‌ای که فاصله‌ی ذره از مرکز نیرو r_0 است اندازه‌ی سرعت آن v_0 و زاویه‌ی بردار سرعت با راستای شعاعی θ_0 است. پارامتر α را به صورت $\alpha = \frac{K}{m v_0^2 r_0}$ تعریف می‌کنیم. معادله‌ی مسیر حرکت ذره را در مختصات قطبی (r بر حسب θ) برای حالت‌های زیر به دست آورید

آ) $\alpha < \sin^2 \theta_0$

ب) $\alpha = \sin^2 \theta_0 = 1$

پ) $\alpha = \sin^2 \theta_0 < 1$

ت) $\sin^2 \theta_0 < \alpha < 1$

ث) $\sin^2 \theta_0 < \alpha = 1$

ج) $\sin^2 \theta_0 < 1 < \alpha$

جواب‌های آخر را تا جایی که امکان دارد ساده کنید.

مسئله ۳

یک ماده سه فاز ـ گاز، مایع، و جامد دارد. دما و فشار در نقطه ي سه‌گانه به‌ترتیب T_0 و P_0 اند. گرما ي نهان ـ تبدیل ـ جامد به گاز و مایع به گاز را ثابت می‌گیریم و آن‌ها را با به‌ترتیب $\ell_{\rm S-G}$ و $\ell_{\rm L-G}$ نشان می‌دهیم. حجم ـ ملی ي مایع و جامد را ثابت می‌گیریم و آن‌ها را با به‌ترتیب $v_{\rm L}$ و $v_{\rm S}$ نشان می‌دهیم. گاز را هم کامل فرض می‌کنیم.
حتماً همه ي جواب‌ها ي نهایی را در مستطیل‌ها ي مشخص‌شده بنویسید.

a) رابطه ي فشار (P) با دما (T) بر خم ـ هم‌زیستی ي جامد و مایع را بنویسید.

مایع و جامد در حالت ـ هم‌زیستی و در فشار و دما ي P و T را در نظر بگیرید. در این حالت گاز ـ این ماده هم با مایع و جامد در تعادل است و فشار ـ جزئی ي آن $P_{\rm G}$ است.

b) مشتق ـ $P_{\rm G}$ نسبت به T را حساب کنید.

c) $P_{\rm G}$ را بر حسب ـ T و ثابت‌ها به دست آورید.

d) $P_{\rm G}$ را بر حسب ـ P و ثابت‌ها به دست آورید.

e) $P_{\rm G}$ را تا مرتبه ي یک نسبت به $(P - P_0)$ حساب کنید.

f) اگر در مایع چیزی حل شود، نقطه ي سه‌گانه جابه‌جا می‌شود. کسر ـ ملی ي ماده ي حل‌شده را با x نشان می‌دهیم. فرض کنید تا مرتبه ي یک نسبت به x، پتانسیل ـ شیمیایی ي مایع در محلول

$$\mu_{\rm L}(T,P,x) = \mu_{\rm L0}(T,P) - k\,x$$

است، که شاخص ـ 0 متناظر با مایع ـ خالص، و k ثابت ی مثبت است. جابه‌جایی ي دما و فشار ـ نقطه ي سه‌گانه (به‌ترتیب ΔT و ΔP) را تا مرتبه ي یک نسبت به x حساب کنید.

۳۲
۴۰

باسمه تعالی

۸۶/۲/۲۶
وقت: ۴ ساعت

امتحان پنجم المپیاد فیزیک (دوره ۱۰ نفر)

آزمایشگاه ۵۰: ۲۷/۵ / ۳۲

۱۰

مسئله‌ی ۱) گردابی دوبُعدی با قدرتِ K روی محورِ اُستوانه‌ی ساکنی به شعاعِ a قرار دارد. این استوانه از شاره‌ی تراکم‌ناپذیری با چگالی‌ی ρ و گران‌روی‌ی μ پُر شده. از گرانش صرفِ‌نظر کنید و مسئله را در حالتِ پایا حل کنید. میدانِ سرعت در نزدیکی‌ی یک گرداب دوبُعدی با قدرتِ K، $\mathbf{v} = \frac{K}{2\pi r}\hat{\phi}$ است. r و ϕ مختصه‌هایِ قطبی هستند.

الف– لایه‌ای استوانه‌ای با ضخامتِ dr را در فاصله‌ی r از محورِ استوانه در نظر بگیرید. پس از محاسبه‌ی تنشِ برشی در دو سوی این لایه گشتاورِ وارد بر این لایه را به دست آورید.

۵

ب– میدانِ سرعتِ شاره را به دست آورید.

مسئله‌ی ۲) گازی به‌طورِ شعاعی و هم‌سان‌گرد از یک چشمه‌ی نقطه‌ای در مبدأ خارج می‌شود. معادله‌ی حالت

۲

$$p = \alpha\rho$$

است. $p(r)$ فشارِ گاز، $\rho(r)$ چگالی‌ی آن، و α یک ثابت است. M نرخِ گسیل از چشمه (جرم بر واحدِ زمان)، r فاصله‌ی شعاعی در چارچوبِ کروی، $v(r)$ سرعتِ گاز و v_0 سرعت در جایی است که چگالی ρ_0 است. از گران‌روی و گرانش صرفِ‌نظر کنید و مسئله را در حالتِ پایا حل کنید.

الف– با استفاده از پایستگی‌ی جرم، رابطه‌ای بینِ سرعت در فاصله‌ی r و چگالی در آن فاصله و r به دست آورید.

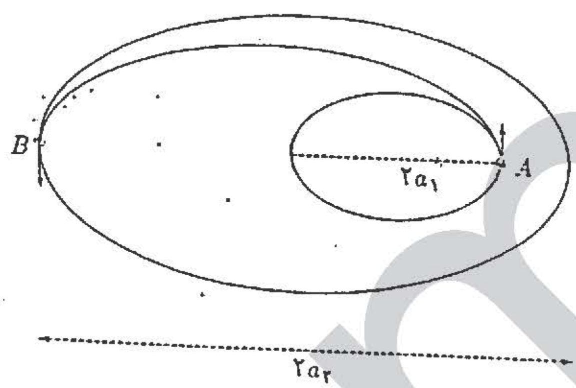
ب– معادله‌ی دیفرانسیلی بینِ ρ و v به دست آورید. با حلِ این معادله و حذفِ ρ، معادله‌ای بینِ $v(r)$ و r به دست آورید.

۷۷

۸

حرکت مرکزی نخوانده‌ایم

مسئله‌ی ۲۳) ماهواره‌ای در یک مدار بیضی شکل به قطر بزرگ $2a_1$ و خروج از مرکز e_1 حول زمین می‌گردد. برای اینکه ماهواره در مدار بیضی شکل دیگری به قطر بزرگ $2a_2$ و خروج از مرکز e_2 قرار گیرد، برای مدت بسیار کوتاهی موشکی در نقطه‌ی A روشن می‌شود و ماهواره را از مدار اولیه خارج می‌کند. سپس در نقطه‌ی B مجدداً موشک برای مدت بسیار کوتاهی روشن می‌شود و ماهواره در مدار نهایی قرار می‌گیرد. برای این تبدیل مدار، تغییر سرعت لازم در نقاط A و B چقدر باید باشد. تغییر سرعت‌ها را در جهت مماس بر مدار (مطابق شکل) در نظر بگیرید.



?

— ۵ —

مسئله‌ی ۴) واکنش ـ تولید ـ آمونیاک به این شکل است.

$$\frac{3}{2}\mathrm{H_2}+\frac{1}{2}\mathrm{N_2}\to \mathrm{H_3N}$$

در کل ـ مسئله اجزا را گاز ـ کامل می‌گیریم. هیدروژن (H_2)، نیتروژن (N_2)، و آمونیاک (H_3N) را اجزا ی به ترتیب 1، 2، و 3 می‌نامیم. گرما ي ویژه ي ملی ي جزئ ـ i در حجم ـ ثابت را با c_i نمایش می‌دهیم. این گرمای‌ویژه‌ها را ثابت می‌گیریم. انتروپی ي ملی ي جزئ ـ i در حالت ـ خالص در فشار ـ P_0 و دما ي T_0 را با s_i نمایش می‌دهیم. متناظر با هر کمیت ـ فزون‌ور ـ M، منظور از تغییر ـ M ـ ملی $[m_3-(3/2)\,m_1-(1/2)\,m_2]$ است، که m_i مقدار ـ M ـ ملی برا ي جزئ ـ i است.

مشاهده می‌شود از واکنش ـ (3/2) مل هیدروژن با (1/2) مل نیتروژن در دما ي T_0 و در یک ظرف ـ صلب و نفوذناپذیر، 1 مل آمونیاک در دما ي T به دست می‌آید گرما ي q به بیرون ـ ظرف داده می‌شود.

حتماً همه ي جواب‌ها ي نهایی را در مستطیل‌ها ي مشخص‌شده بنویسید.

a) $\Delta u(T_0)$ (تغییر ـ انرژی ي درونی ي ملی در واکنش در دما ي T_0) را بنویسید.

b) $\Delta h(T_0)$ (تغییر ـ انتالپی ي ملی در واکنش در دما ي T_0) را بنویسید.

c) $\Delta h(T)$ (تغییر ـ انتالپی ي ملی در واکنش در دما ي T) را بنویسید.

d) $\Delta s^0(P,T)$ (تغییر ـ انتروپی ي ملی در واکنش در فشار ـ P و دما ي T) را بنویسید. منظور از این کمیت اختلاف ـ انتروپی‌ها در حالت ـ خالص است.

e) $\Delta g^0(P,T)$ (تغییر ـ انرژی ي آزاد ـ گیبس ـ ملی در واکنش در فشار ـ P و دما ي T) را بنویسید. منظور از این کمیت اختلاف ـ انرژی ي آزاد ـ گیبس‌ها در حالت ـ خالص است.

f) $[x_3/(x_1^{3/2}\,x_2^{1/2})]$ در حالت ـ تعادل در فشار ـ P و دما ي T را با $K(P,T)$ نمایش می‌دهیم. x_i کسر ـ ملی ي جزئ ـ i است. $K(P,T)$ را حساب کنید.

در یک آزمایش این داده‌ها به دست آمده.

$$P_0=1.00\,\mathrm{atm},\quad T_0=298.15\,\mathrm{K},\quad T_1=510.0\,\mathrm{K},\quad q=37.7\,\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{mol}}$$
$$c_1=20.5\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol\,K}},\quad c_2=20.8\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol\,K}},\quad c_3=26.8\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol\,K}}$$
$$s_1=130.7\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol\,K}},\quad s_2=191.6\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol\,K}},\quad s_3=192.8\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol\,K}}$$

g) مقدار ـ عددی ي $K(P_0,T_0)$ را حساب کنید.

۴٫۵ ساعت
۸۶/۳/۲

امتحان ششم المپیاد فیزیک (دوره ۱۰ نفر)

۱ـ به جای قانون دوم نیوتن، یعنی $\vec{F} = m\vec{a}$ که در آن $\vec{F}$ نیرو و $\vec{a}$ شتاب است، قانون MOND را در نظر بگیرید که به این شکل است: $\vec{F} = m\,\mu(a)\,\vec{a}$، باز هم $\vec{a}$ شتاب و $\vec{F}$ نیرو است، $a = |\vec{a}|$ اندازه‌ی شتاب است، و

$$\mu(a) = \frac{a}{a + a_0}$$

a_0 یک ثابت طبیعت است

$$a_0 = 1.0 \times 10^{-10}\ \mathrm{m/s^2}$$

الف) برای مسیر دایره‌ای به دور خورشید، سرعت (یعنی $v(r)$) را به صورت تابعی از فاصله از خورشید حساب کنید و آن را رسم کنید. (نیروی گرانش خورشید را نیروی گرانش متداول، یعنی $G\,M\,m/r^2$ بگیرید.)

ب) جرم خورشید $M = 2.0 \times 10^{30}\ \mathrm{kg}$ و ثابت گرانش $G = 6.7 \times 10^{-11}\ \mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}}$ است. $\lim_{r\to\infty} v(r)$ را حساب کنید.

ج) قانون دوم کپلر (بستگی دوره‌ی گردش سیاره به فاصله‌اش از خورشید) به چه شکلی در می‌آید؟ (فرمول). (راه‌نمایی: توجّه کنید که شتاب سیاره‌های منظومه‌ی شمسی در مقایسه با a_0 بسیار بزرگ است.)

د) شتاب گرانش نیوتنی را به شکل $\vec{g} = \frac{1}{m}\vec{F}$ تعریف می‌کنیم. معادله‌ی $\vec{F} = m\,\mu(a)\,\vec{a}$ به شکل $\vec{g} = \mu(a)\,\vec{a}$ در می‌آید. این معادله را می‌توان به شکل $\vec{a} = \eta(g)\,\vec{g}$ نوشت. تابع $\eta(g)$ را به دست آورید. (توجه: $g = |\vec{g}|$ مثبت است، و $\vec{a}$ و $\vec{g}$ هم‌جهت اند.)

هـ) برای شتاب گرانشی نیوتنی یک جسم نقطه‌ای داریم $\vec{g} = -G\,M\frac{\vec{r}}{r^3}$. برای این میدان شتاب $\vec{a}$، یعنی $\vec{g}\,\eta(g)$ را به دست آورید.

و) میدان شتاب بخش قبل را در نظر بگیرید. معادله‌ی $\vec{a} = \vec{g}\,\eta(g)$ را می‌توان به صورت $\vec{a} = \vec{h}$ نوشت که در آن $\vec{h} = \vec{g}\,\eta(g)$ است. این معادله درست معادله‌ی حرکت یک نقطه‌ی مادی در میدان گرانش $\vec{h}$ است. برای این میدان جدید شار میدان روی کره ای به شعاع r را حساب کنید.

$$\Phi = \oint \vec{h}\cdot\hat{n}\,da$$

ز) این شار را می‌توان به شکل $-4\,\pi\,G\,M(r)$ نوشت، که در این جا $M(r)$ جرمی است که در کره‌ای به شعاع r هست. $M(r)$ را به دست آورید.

ح) $\lim_{r\to\infty} M(r)$ را حساب کنید.

ط) هر واحد نجومی، با علامت AU مسافت $1.5 \times 10^{11}\ \mathrm{m}$ است. برای $r = 1\,\mathrm{AU}$ و $r = 10\,\mathrm{AU}$ جرم $M(r)$ را حساب کنید.

۲ــ سنگی به جرم m از ارتفاع h بالای سطح زمین در نقطه‌ای به عرض جغرافیایی λ از حالت سکون رها می‌شود. نیروی مقاومت هوا را متناسب با مربع سرعت، $F = kv^2$، در نظر بگیرید. از آنجا که مؤلفه‌ی سرعت در راستای قائم بر زمین خیلی بزرگتر از دو مؤلفه‌ی دیگر است، از نیروی مقاومت هوا در دو راستای دیگر می‌توان صرفنظر کرد. تا مرتبه‌ی اول ω (سرعت زاویه‌ای زمین) انحراف جانبی سنگ را در موقع رسیدن به سطح زمین تا اولین مرتبه‌ی غیر صفر پارامتر $\alpha = 2k/m$ بدست آورید.

۳ــ یک میله با چگالی ی ρ، مدول‌یانگ ـ Y، مساحت‌ِمقطع ـ A، و طول ـ L را در نظر بگیرید. فاصله ی یک نقطه از میله از یک سر ـ میله در وضعیت ـ تعادل را با x، و جابه‌جایی ی این نقطه از حالت ـ تعادل در زمان ـ t را با $\psi(x,t)$ نشان می‌دهیم. فرض می‌کنیم جابه‌جایی ی همه ی نقاط در راستا ی میله است. به بخش ی از میله که بین ـ x و $(x + \Delta x)$ است، علاوه بر نیرو ی کش‌سانی یک نیرو ی بازدارنده ی متناسب با سرعت هم وارد می‌شود که برابر با $(-\alpha A \rho \dot{\psi} \Delta x)$ است. α مقدار ی ثابت است. به یک سر ـ میله $(x = L)$ یک جسم ـ نقطه‌ای به جرم ـ M وصل است. حرکت ـ سر ـ دیگر $(x = 0)$ به شکل ـ

$$\psi(0,t) = c \exp(-i\omega t)$$

است، که c و ω ثابت اند.

حتماً همه ی جواب‌ها ی نهایی را در مستطیل‌ها ی مشخص‌شده بنویسید.

a) یک معادله ی دیفرانسیل برا ی ψ بنویسید.

b) $\psi(x,t)$ را به شکل ـ $\Psi(x)\exp(-i\omega t)$ بگیرید. یک معادله ی دیفرانسیل برا ی $\Psi(x)$ بنویسید.

c) برا ی Ψ جواب ی به شکل ـ $\exp(ikx)$ بگیرید و رابطه ی k و ω (معادله ی پاشنده‌گی) را بر حسب ـ α و $V := \sqrt{Y/\rho}$ بنویسید.

d) شرایط ـ مرزی برا ی Ψ در $x = 0$ را بنویسید.

e) شرایط ـ مرزی برا ی Ψ در $x = L$ را بنویسید.

f) برا ی Ψ جواب ی به شکل ـ $a\exp(ikx) + b\exp(-ikx)$ بگیرید، که a و b ثابت اند، و بخش ـ حقیقی ی k مثبت است. a و b را حساب کنید. (لازم نیست مقدار ـ k را جاگذاری کنید.)

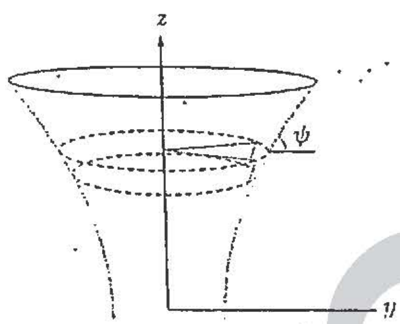
g) $\psi(L,t)$ به شکل ـ $X\exp(-i\omega t)$ است. X را حساب کنید.

h) مقدار ـ X را در $L = 0$ حساب کنید.

i) مقدار ـ X را در $L \to \infty$ ساده کنید.

۴_ دو حلقه‌ي نازک را درون ظرفی از آب و صابون فرو می‌بریم. وقتی که حلقه را بیرون می‌آوریم حبابی از مایعِ صابون به شکلِ یک رویه‌ي دوّار بینِ دو حلقه تشکیل می‌شود. مطابقِ شکل محورِ z را محورِ تقارن و مبدأ مختصات را درست بینِ دو حلقه می‌گیریم. مرکزِ دو حلقه در $z = L$ و $z = -L$ قرار دارند. در این مسئله می‌خواهیم معادله‌ي رویه‌ای که توسطِ حباب ساخته می‌شود را به دست آوریم.

برایِ یک‌سان شدنِ نمادگذاری از نمادهایی که در مسئله تعریف شده‌اند استفاده کنید. سطحِ zy، رویه را در خمی با معادله‌ي $z(y)$ قطع می‌کند. $\tan\psi$ شیبِ این خم است.



جواب‌هاي خود را حتماً در جعبه‌هاي مربوطه در پاسخ‌نامه وارد کنید.

a) مطابقِ شکل یک عنصرِ سطحی رویِ رویه را در نظر بگیرید. قانونِ نیوتن را برایِ این عنصر بنویسید. از جرمِ حباب چشم‌پوشی کنید. ρ فاصله از محورِ z و یکی از مختصه‌ها در چارچوبِ استوانه‌ای است. معادله‌ي دیفرانسیلی بینِ ψ و ρ به دست آورید.

b) معادله‌ای که به دست آوردید را حل کنید و از آن معادله‌ای بینِ ψ و ρ به دست آورید.

c) حالا معادله‌ای بینِ $dz/d\rho$ و ρ به دست آورید. با تغییرِ متغیری مثلِ $\rho = C\cosh v$، و انتگرال‌گیری از آن معادله‌ي بینِ z و ρ را به دست آورید. در جوابِ شما یک ثابتِ تعیین نشده باقی می‌ماند که به شعاعِ حلقه‌ها بستگی دارد.

بسمه تعالی

امتحان نهایی المپیاد فیزیک (دوره‌ی ۱۰ نفر)

۸۶/۳/۱۹

وقت: ۵ ساعت

۱ــ تله‌ی پنینگ (Penning Trap)

پتانسیل الکتریکی زیر را در نظر بگیرید.

$$\phi(x,y,z) = \frac{m\,\omega_0^2}{4\,e}\left(x^2 + y^2 - 2\,z^2\right) \qquad (1)$$

در این فرمول $m = 9.1 \times 10^{-31}\ \mathrm{kg}$ جرم الکترون است، و $e = 1.6 \times 10^{-19}\ \mathrm{C}$ اندازه‌ی بار الکتریکی الکترون است، و $\omega_0 = 2\,\pi\,\nu_0$ یک بسامد زاویه‌ای ثابت است که در آن $\nu_0 = 64\ \mathrm{MHz}$ است.

فرض کنید علاوه بر این میدان الکتریکی، یک میدان مغناطیسی ثابت در راستای z هم داشته باشیم. تعریف می‌کنیم $\omega_c = e\,B/m$ و $\nu_c = \omega_c/(2\,\pi)$. فرض کنید $\nu_c = 148\ \mathrm{GHz}$ باشد ($\mathrm{G} = 10^9$).

الف) اندازه‌ی میدان B (بر حسب تسلا) چه قدر است؟

ب) معادله‌ی حرکت یک الکترون در میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی فوق را در دستگاه دکارتی (x,y,z) بنویسید. (دینامیک را غیرنسبیتی بگیرید. دقت کنید که بار الکترون منفی است.)

ج) تعریف کنید $u = x + i\,y$، و به جای دو معادله‌ی دیفرانسیل حقیقی برای x و y، یک معادله‌ی دیفرانسیل برای u (که مختلط است) بنویسید.

د) حل معادله‌ی دیفرانسیل u را به شکل $u(t) = u(0)\,e^{i\,\omega\,t}$ بگیرید و معادله ای جبری برای ω به دست آورید. این معادله را حل کنید و بسامدهای خاص را، که $\omega_\pm = 2\,\pi\,\nu_\pm$ می‌نامیم، حساب کنید (فرمول برای $\omega_\pm$، و عدد برای $\nu_\pm$).

و) جواب کلی u را به شکل زیر بگیرید.

$$u(t) = u_+\,e^{i\,(\omega_+\,t + \theta_+)} + u_-\,e^{i\,(\omega_-\,t + \theta_-)} \qquad (2)$$

در این جا $u_\pm$ دو عدد حقیقی نامنفی اند. حالا کلی‌ترین جواب $x(t)$ و $y(t)$ را بنویسید.

ز) کلی‌ترین جواب $z(t)$ را بنویسید.

ح) با فرض $u_+ \gg u_-$ مدار الکترون را با کشیدن شکل توصیف کنید.

۸۱

۲ـ توضیح: این مسئله دو بخش است که هیچ ربطی به هم ندارند.

• جرم سکون پروتون $m = 1.67 \times 10^{-27}$ kg است. بار الکتریکی پروتون 1.6×10^{-19} C است. پروتونی با انرژی کل 1.1×10^{-3} J وارد کهکشانی می‌شود که در آن یک میدان مغناطیسی ثابت با شدت 10^{-9} T هست. فرض کنید پروتون کاملاً عمود بر میدان B وارد شود، و بنا بر این حرکت آن در یک صفحه‌ی عمود بر B باشد (صفحه‌ی $z = 0$ مثلاً).

الف) شعاع دایره‌ی مسیر این پروتون را حساب کنید. (از دید ناظری که نسبت به کهکشان ساکن است.)

ب) از دید ناظری که نسبت به کهکشان ساکن است، پریود این حرکت دایره‌ای چه قدر است؟

ج) از دید ناظری که هم‌راه پروتون است، پریود این حرکت دایره‌ای چه قدر است؟

• لیزری با توان $P = 100$ W نور تک‌فام با طول‌موج $\lambda = 550$ nm می‌دهد. مساحت مقطع باریکه 10^{-6} m^2 است. فرض کنید این نور خطی‌قطبیده باشد.

د) دامنه‌ی شدت میدان الکتریکی این موج، یعنی E_0، چقدر است؟

ه) این لیزر در هر ثانیه چند فتون گسیل می‌کند؟ (یادآوری: $h = 6.6 \times 10^{-34}$ J s)

۳ـ یک جسم به جرم ـ m به یک جسم ـ دیگر به جرم ـ M می‌خورد. همه ي حرکت‌ها در راستا ي یک خط است. مختصه ي جرم‌ها ي m و M بر این خط را با به‌ترتیب x و X نشان می‌دهیم؛ جرم ـ M به یک سر ـ فنر ی با ضریب‌سختی ي $M\omega^2$ بسته شده. سر ـ دیگر ـ فنر ثابت است، چنان که در $X = 0$ فنر نه کشیده شده و نه فشرده شده. بین ـ این دوجرم یک نیرو ي اصطکاک هم هست، چنان که نیرو یی که به m وارد می‌شود $[-\alpha(v - V)]$ است، که v سرعت ـ m و V سرعت ـ M است، و α ثابت ی مثبت است.

حتماً همه ي جواب‌ها ي نهایی را در مستطیل‌ها ي مشخص‌شده بنویسید.

a) شتاب ـ m را بر حسب ـ سرعت‌ها و مکان‌ها بنویسید.

b) شتاب ـ M را بر حسب ـ سرعت‌ها و مکان‌ها بنویسید.

c) یک معادله ي دیفرانسیل بنویسید که شامل ـ فقط X و ثابت‌ها باشد.

d) جواب ی به شکل ـ $\exp(s\,t)$ برا ي X بگیرید، که t زمان و s ثابت است. معادله ای برا ي s به دست آورید.

e) برا ي α ي کوچک ریشه‌ها ي معادله ي بالا را تا حد ـ جمله ي غالب و اول‌ین تصحیح ـ غیرصفر به دست آورید.

f) برا ي α ي بزرگ ریشه‌ها ي معادله ي بالا را تا حد ـ جمله ي غالب و اول‌ین تصحیح ـ غیرصفر به دست آورید.

راه‌نمایی: شاید در موارد ی متغیر ـ (s/α) مفید باشد.

نخواندم

۴_ یک ظرف به حجم ـ V شامل ـ N ملکول گاز ـ کامل ـ دواتمی است. جرم ـ هر اتم m، و انرژی ي هر پی‌وند q است. (q انرژی ي لازم برا ي این است که ملکول به دو اتم شکسته شود.) ملکول را صلب بگیرید (از ارتعاش ـ آن چشم بپوشید). ثابت ـ بُلتس‌مان را با $k_{\rm B}$، ثابت ـ پْلانک را با h، و لختی ي دورانی ي ملکول را با I نشان می‌دهیم. فرض کنید N_1 تا از ملکول‌ها شکسته شده اند و $(N-N_1)$ تا از آن‌ها به شکل ـ ملکول باقی مانده اند، و اتم‌ها و ملکول‌ها ي حاصل با هم برهم‌کنش ندارد. این کمیت‌ها را تعریف می‌کنیم.

$$\lambda := \frac{h}{\sqrt{2\pi m k_{\rm B} T}},\quad \epsilon := \frac{q}{k_{\rm B} T},\quad a^2 := \frac{4\pi I}{m},\quad v := \frac{V}{N},\quad x := \frac{N_1}{N}.$$

می‌دانیم تابع ـ پارش برا ي یک ذره ي ساده (بدون ـ اجزا) برابر است با

$$Z_1 = \int \frac{{\rm d}^3 r\, {\rm d}^3 p}{h^3} \exp\left(-\frac{E}{k_{\rm B} T}\right)$$

که E انرژی ي ذره، $\mathbf{r}$ مکان ـ آن، و $\mathbf{p}$ تکانه ي آن است. برا ي یک ذره ي مرکب (ملکول) هم تابع ـ پارش می‌شود همان عبارت ـ بالا (که مکان و تکانه و انرژی مکان و تکانه و انرژی ي مرکزجرم اند) ضرب در Z_2 (تابع‌پارش حاصل از حرکت‌ها ي درونی). در این مسئله، Z_2 در دماها ي بزرگ $(\lambda/a)^2$ و در دماها ي کوچک یک است. داریم

$$\int_{-\infty}^{\infty} {\rm d}s\ \exp(-\alpha s^2) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}},\quad \ln(X!) \approx X \ln X - X.$$

در کل ـ مسئله فرض می‌شود N و N_1 و $(N-N_1)$ و V بزرگ اند. همه ي خواسته‌ها ي مسئله را بر حسب ـ λ، ϵ، a، v و x بنویسید.

حتماً همه ي جواب‌ها ي نهایی را در مستطیل‌ها ي مشخص‌شده بنویسید.

a) تابع‌پارش ـ اتم‌ها (ملکول‌ها ي شکسته‌شده) را بنویسید.

b) تابع‌پارش ـ ملکول‌ها ي شکسته‌نشده را در دماها ي کم بنویسید.

c) تابع‌پارش ـ ملکول‌ها ي شکسته‌نشده را در دماها ي زیاد بنویسید.

d) تابع‌پارش ـ کل را در دماها ي کم بنویسید.

e) تابع‌پارش ـ کل را در دماها ي زیاد بنویسید.

f) انرژی ي آزاد ـ هلم‌هُلتس را در دماها ي کم بنویسید.

g) انرژی ي آزاد ـ هلم‌هُلتس را در دماها ي زیاد بنویسید.

h) در دماها ي کم، رابطه ای برا ي مقدار ـ x در حالت ـ تعادل بیابید.

i) در دماها ي زیاد، رابطه ای برا ي مقدار ـ $\tilde{x}$ در حالت ـ تعادل بیابید.

j) در دماها ي بسیار نزدیک به صفر، مقدار ـ x در حالت ـ تعادل را حساب کنید. (جمله ي غالب کافی است.)

نمره ۱

۵ـ یک ماده با گذردهی ي الکتریکی ي ϵ و تراوایی ي مغناطیسی ي μ را در نظر بگیرید. در مواد ـ معمولی گذردهی ي الکتریکی و تراوایی ي مغناطیسی (هردو) مثبت اند. مواد ـ چپ‌دست (یا مواد ـ با ضریب‌شکست ـ منفی) به مواد ی می‌گویند که گذردهی ي الکتریکی و تراوایی ي مغناطیسی ي آن‌ها (هردو) منفی باشد.

حتماً همه ي جواب‌ها ي نهایی را در مستطیل‌ها ي مشخص‌شده بنویسید.

در یک ماده با مشخصات ـ ϵ و μ یک موج ـ تخت ـ الکترومغناطیسی منتشر می‌شود، یعنی میدان‌ها به شکل ـ بخش ـ حقیقی ي $\mathbf{E}\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-i\omega t)$ و $\mathbf{H}\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-i\omega t)$ اند، که $\mathbf{E}$ و $\mathbf{H}$ بردارها ي مختلط ـ ثابت اند، t زمان و $\mathbf{r}$ مکان است، ω یک ثابت ـ حقیقی ي مثبت است، و $\mathbf{k}$ یک بردار ـ ثابت ـ حقیقی است. میان‌گین ـ زمانی ي بردار ـ چگالی ي توان بخش ـ حقیقی ي $\mathbf{S}=\frac{1}{2}\mathbf{E}\times\mathbf{H}^*$ است.

a) $\mathbf{H}$ را بر حسب ـ $\mathbf{E}$ حساب کنید.

b) $\mathbf{S}$ را بر حسب ـ $\mathbf{E}$ حساب کنید.

c) جهت ـ انتشار ـ انرژی را بر حسب ـ جهت ـ $\mathbf{k}$ بنویسید (هم برا ي مواد ـ معمولی و هم برا ي چپ‌دست).

یک موج ـ الکترومغناطیسی ي تخت با مشخصات ـ $\mathbf{E}_i$ و ω و $\mathbf{k}_i$ در محیط ـ 1 با مشخصات ـ ϵ_1 و μ_1 به مرز ـ مشترک ـ محیط ـ 1 و 2 می‌تابد. این مرز یک صفحه است. مشخصات ـ محیط ـ 2، ϵ_2 و μ_2 است. محیط ـ 1 معمولی است و داریم

$$\mathbf{k}_i=k_i\,(\hat{\mathbf{z}}\,\cos\theta_i+\hat{\mathbf{x}}\,\sin\theta_i),\qquad \mathbf{E}_i=E_i\,\hat{\mathbf{y}}$$

که (x,y,z) مختصات ـ دکرتی اند، $\hat{\mathbf{z}}$ بردار ـ یکه ي عمود بر مرز از محیط ـ 1 به محیط ـ 2 است، و k_i اندازه ي $\mathbf{k}_i$ است. مشخصات ـ موج ـ بازتابیده $(E_r\,\hat{\mathbf{y}})$ و $\mathbf{k}_r$، و مشخصات ـ موج ـ شکسته $(E_t\,\hat{\mathbf{y}})$ و $\mathbf{k}_t$ است.

d) در حالت ی که محیط ـ 2 معمولی است، $\mathbf{k}_r$ و $\mathbf{k}_t$ را حساب کنید.

e) در حالت ی که محیط ـ 2 چپ‌دست است، $\mathbf{k}_r$ و $\mathbf{k}_t$ را حساب کنید.

f) در حالت ی که محیط ـ 2 معمولی است، (E_r/E_i) را حساب کنید.

g) در حالت ی که محیط ـ 2 چپ‌دست است، (E_r/E_i) را حساب کنید.

بسمه تعالی

امتحان نهایی المپیاد فیزیک (دوره ۲۰ام) - ادامه

۸۶/۳/۲۰

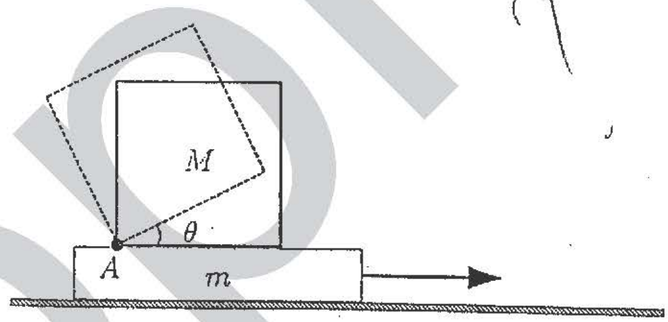
وقت: ۴ ساعت

۶- مکعبی به جرم M و طول ضلع L مطابق شکل در نقطه‌ی A (گوشه‌ی مکعب) به پایه‌ای به جرم m که روی یک سطح بدون اصطکاک قرار دارد، لولا شده و می‌تواند بدون اصطکاک حول محور لولا بچرخد.

آ) بیشینه‌ی نیروی افقی که می‌توان با آن پایه را به راست کشید به طوری که مکعب حول محور لولا نچرخد، چقدر است؟

ب) اگر با نیروی افقی دو برابر نیروی خواسته شده در قسمت آ) پایه را بکشیم، مکعب حول محور لولا خواهد چرخید. در وضعیتی که زاویه سطح زیری مکعب با پایه θ و سرعت زاویه‌ای چرخش آن حول محور لولا ω است، شتاب زاویه‌ای آن چقدر است؟

لختی دورانی مکعب حول محور لولا $2ML^2/3$ است.

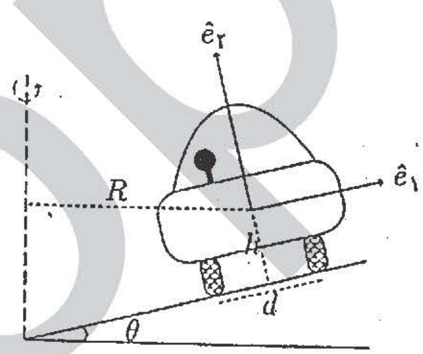


۷- اتومبیلی به جرم m بر روی یک جاده‌ی شیب دار و دایره‌ای شکل (مانند سطح داخلی یک مخروط) با تندی V در حرکت است. شعاع دایره‌ی مسیر R و شیب جاده θ است. مرکز جرم اتومبیل به فاصله‌ی h از سطح جاده قرار دارد و فاصله‌ی عرضی بین چرخ‌ها d است. محورهای $\hat{e}_1$ و $\hat{e}_2$ نشان داده شده روی شکل (که مبدأ آن‌ها روی مرکز جرم اتومبیل است) محورهای اصلی اتومبیل‌اند و لختی دورانی حول آنها I_1 و I_2 است. محور اصلی $\hat{e}_3$ بر دوتای قبلی عمود است و لختی دورانی حول آن I_3 است. فرض کنید نیروهای قائم وارد بر هر یک از دو چرخ سمت چپ (سمت راننده) از طرف زمین یکسان است (و همین طور برای چرخ‌های سمت راست).

آ) نیروی قائم وارد بر هر چرخ از طرف زمین را به دست آورید.

ب) برای جاده‌ی بدون شیب ولی دایره‌ای نیروی قائم وارد بر هر چرخ از طرف زمین چقدر است؟

پ) برای جاده‌ی مستقیم ولی شیب‌دار نیروی قائم وارد بر هر چرخ از طرف زمین چقدر است؟



۸- ذره‌ای به جرم m و سرعت ۰/۸c (که c سرعت نور است) با ذره‌ی ساکنی به جرم M برخورد می‌کند.

اگر برخورد کاملاً ناکشسان باشد (یعنی ذرات به هم بچسبند):

آ) جرم ذره‌ی مرکب چقدر است؟

ب) سرعت ذره مرکب نسبت به چارچوبی که M ابتدا در آن ساکن است، چقدر است؟

اگر برخورد کاملاً کشسان باشد (یعنی جرم ذرات پس از برخورد با جرم ذرات قبل از برخورد یکسان باشد) و سرعت m پس از برخورد ۰/۶c باشد:

پ) سرعت M پس از برخورد چقدر است؟

ت) زاویه‌ی انحراف m از راستای اولیه چقدر است؟

ث) زاویه‌ی انحراف M از راستای اولیه چقدر است؟

۹

۹- انبرک نوری:

الف) نیرویی که نور غیر یکنواخت به یک کره دی‌الکتریک شفاف وارد می‌کند را در وضعیتی که قطر کره بسیار کوچکتر از طول موج است ($D>>\lambda$)، به دست آورید و نشان دهید متناسب با شیب تغییرات (گرادیان) شدت نور است. در این وضعیت می‌توانید کره دی‌الکتریک را به صورت یک دوقطبی (دو بار $+q$ و $-q$ به فاصله Δx در میدان الکترومغناطیسی ناهمگن فرض نمایید.

برای سهولت در حل مسئله می‌توانید فرض نمایید که شدت میدان الکترومغناطیسی فقط در راستای x (عمود بر راستای انتشار) تغییر می‌کند.

برای حل مسئله به نکات ذیل توجه نمایید:

- نیروی وارد به یک ذره باردار برابر است با: $\vec{F}=q(\vec{E}+d\vec{x}/dt\times\vec{B})$
- برای پلاریزاسیون دوقطبی فرض نمایید که متناسب با میدان الکتریکی است: $\vec{p}=q.\Delta\vec{x}=\alpha\vec{E}$
- $(\vec{E}.\vec{\nabla})\vec{E}=\vec{\nabla}(1/2E^2)-\vec{E}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E})$
- $\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$
- میانگین شدت نور در هر نقطه مستقل از زمان است.

ب) با استفاده از یک عدسی به فاصله کانونی ۱ mm و قطر ۰/۱ cm نور لیزری به طول موج ۶۳۸ nm را کانونی کرده‌ایم. در نقطه کانونی پهنای باریکه نور با توجه به اثرات پراش از روزنه چه مقدار است؟ اگر یک کره دی‌الکتریک شفاف کوچک را در نزدیکی نقطه کانونی قرار دهیم، نقطه تعادل آن کجا خواهد بود؟ اگر تغییرات شدت نور در پیرامون نقطه کانونی در راستای عمود بر انتشار متناسب با مربع فاصله از محور عدسی کاهش یابد، نیروی وارد به کره دی الکتریک را برای لیزری با توان ۱۰ mW به دست آورید.