المپیاد: فیزیک	باشگاه دانش پژوهان جوان	زمان پاسخگویی: ۲۴۰ دقیقه
سوالات امتحان: تئوری چهارم		تاریخ آزمون: ۹۳/۶/۵
نام : علی		تعداد مسائل : ۴ مسئله
نام خانوادگی : فتحی		سوالات ۶ صفحه در ۳ برگه

تذکر:

۱- مشخصات خود به هیچ وجه روی برگه های پاسخنامه ننویسید.

۲- جهت پاسخ گویی ازلاک غلط گیر یا مداد استفاده ننمایید.

۳- پاسخ هر سوال را با خط خوانا در برگه پاسخنامه مخصوص به خود بنویسید.

مساله ۱)

مسئله‌ی ۱) وقتی دو لایه‌ی شاره رویِ هم می‌لغزند، و سرعتشان با هم فرق دارد نیرویی بینِ دو لایه وارد می‌شود که در جهتِ کم کردنِ اختلافِ سرعتِ دو لایه است. نیرو بر واحدِ سطح

$$\mu\frac{\Delta v}{\Delta x}$$

است، که Δv اختلاف سرعتِ دو نقطه با فاصله‌ی Δx است. پارامتری از شاره که به این خاصیت مربوط است گران‌روی نام دارد و با μ نشان داده می‌شود.

الف- بُعدِ گران‌روی را به دست آورید. (۱ نمره)

شاره‌ای با چگالیِ ρ با بُعدِ ML^{-3} و گران‌رویِ μ به خاطرِ اختلافِ فشارِ ΔP که دو سرِ لوله‌ای استوانه‌ای به طولِ ℓ و شعاعِ R اعمال شده، درونِ لوله در حرکتی پایاست. در حرکتِ پایا هر نقطه از شاره با سرعتی مستقل از زمان در حرکت است. به خاطرِ تقارنِ استوانه‌ایِ مسئله، سرعتِ هر نقطه از شاره را

$$\mathbf{v} = v(r)\mathbf{k}$$

بگیرید. محورِ استوانه را در راستایِ محورِ z، یعنی در جهتِ بردارِ یکه‌یِ $\mathbf{k}$ گرفته‌ایم. گرانش در مسئله نقشی ندارد.

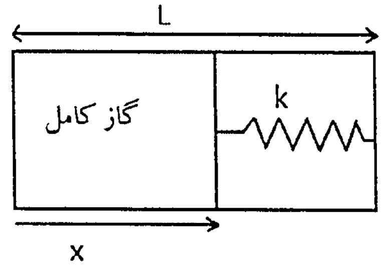
ب- با استفاده از تحلیلِ ابعادی $v(r)$ را بر حسبِ پارمترهایِ مسئله، یعنی $\Delta P, \mu, \rho, \ell, R$ به دست آورید. برایِ هر نتیجه‌یِ خود استدلال کنید. (۲ نمره)

ج- اگر فقط شعاعِ استوانه دو برابر شود ولی باقیِ پارامترها ثابت بمانند، سرعتِ شاره رویِ محورِ استوانه چند برابر می‌شود؟ توضیح دهید. (۲ نمره)

طرح از دکتر آقامحمدی

ادامه سوالات در صفحه بعد

مسئله) ۲



شکل ۱: سیستم در حالت افقی

بخش اول: سیستمی مطابق شکل ۱ در نظر بگیرید. ظرفی به طول L داریم که توسط پیستونی به جرم M به دو بخش تقسیم شده است. سمت راست یک فنر با ثابت k و طول کشیده نشده‌ی L وجود دارد. در این سمت هیچ گازی وجود ندارد. در سمت چپ n مول گاز کامل با ضریب اتمسیته‌ی $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ داریم. مجموع ظرفیت گرمایی ظرف، فنر و پیستون را C بگیرید. فاصله‌ی پیستون تا دیواره‌ی چپ را x می‌نامیم. فرض می‌کنیم همواره تمامی اجزا - یعنی ظرف، گاز، پیستون وفنر - هم‌دما هستند. فرض کنید دمای محیط T است و دیواره‌های ظرف رسانای بسیار خوب گرما هستند. تعریف می‌کنیم:

$$a := \sqrt{\frac{nRT}{k}}, \qquad \Omega := \sqrt{\frac{k}{M}}. \qquad (۱)$$

تمامی پاسخ‌ها را بر حسب، a، Ω، n، R، γ و C بنویسید.

الف)(۱ نمره) مقدار x در حالت تعادل را حساب کنید.

ب) (۱ نمره) بسامد نوسان‌های کوچک حول نقطه‌ی تعادل، ω_1 را حساب کنید.

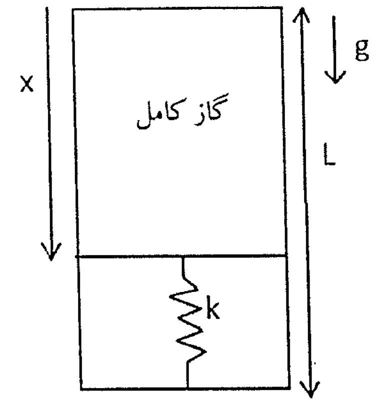
ج) (۱.۵ نمره) فرض کنید سیستم ایزوله شده است. مقدار کمی گرما، $\bar{d}Q$ به آن می‌دهیم. دمای سیستم به اندازه‌ی dT افزایش می‌یابد. تعریف می‌کنیم:

$$C_1 := \frac{\bar{d}Q}{dT}. \qquad (۲)$$

C_1 را حساب کنید.

ادامه سوالات در صفحه بعد

ادامه مسئله ۲)



شکل ۲: سیستم در حالت عمودی

بخش دوم: حال سیستمی مطابق شکل۲ در نظر بگیرید. ظرفی به طول L داریم که توسط پیستونی به جرم M به دو بخش تقسیم شده است. در بخش پائینی یک فنر با ثابت k و طول کشیده نشده‌ی L وجود دارد. در این بخش هیچ گازی وجود ندارد. در بخش بالایی n مول گاز کامل با ضریب اتمسیته‌ی $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ داریم. مجموع ظرفیت گرمایی ظرف، فنر و پیستون را C بگیرید. فاصله‌ی پیستون تا دیواره‌ی بالایی را x می‌نامیم. فرض می‌کنیم همواره تمامی اجزا - یعنی ظرف، گاز، پیستون وفنر - هم‌دما هستند. شتاب گرانش g است. فرض کنید دمای محیط T است و دیواره‌های ظرف رسانای بسیار خوب گرما هستند. تعریف می‌کنیم:

$$b := \frac{Mg}{k}. \qquad (۳)$$

طرح از آقای مدیر شانه چی

تمامی پاسخ‌ها را بر حسب، a، b، Ω، n، R، γ و C بنویسید.

د) (۱.۵ نمره) مقدار x در حالت تعادل را حساب کنید.

ه) (۲ نمره) بسامد نوسان‌های کوچک حول نقطه‌ی تعادل، ω_2 را حساب کنید.

و) (۱.۵ نمره) فرض کنید سیستم ایزوله شده است. مقدار کمی گرما، $\bar{d}Q$ به آن می‌دهیم. دمای سیستم به اندازه‌ی dT افزایش می‌یابد. تعریف می‌کنیم:

$$C_2 := \frac{\bar{d}Q}{dT}. \qquad (۴)$$

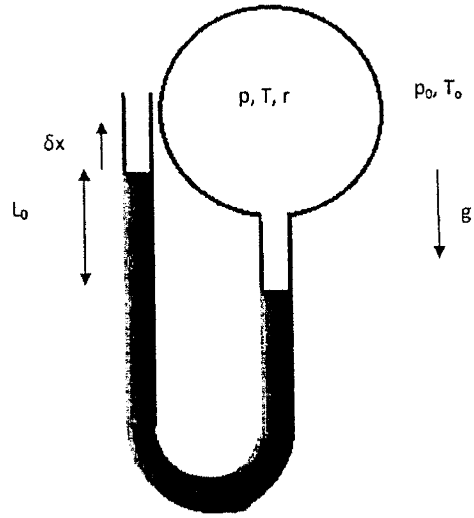
C_2 را حساب کنید.

بخش سوم:

ز) (۱.۵ نمره) جرم پیستون، M و ثابت فنر، k را بر حسب n، R، T، g، ω_1، C_1 و C_2 بنویسید.

ادامه سوالات در صفحه بعد

مسئله) ۳



شکل ۱: لوله‌ی U شکل و بادکنک

مطابق شکل ۱ لوله‌ی U شکل و بادکنکی را که به یک سمت آن بسته شده در نظر بگیرید. درون بادکنک و بخشی از لوله را با n مول گاز کامل با ضریب اتمسیته‌ی $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ پُر کرده‌ایم.

درون لوله مایعی با چگالی ρ ریخته شده و سطح مقطع لوله A است. لوله با مایع هیچ اصطکاکی ندارد.

بادکنک را همواره کُره‌ای به شعاع r می‌گیریم. بادکنک را سطحی کشسان می‌گیریم، چنان که وقتی شعاع آن r است، اگر یک المان کوچک از سطح آن به مساحت dS را بگیریم از طرف سایر بخش‌ها نیرویی برابر با $۲\frac{\tau}{r}dS$ بر آن به سمت مرکز کُره وارد می‌شود. انرژی الاستیک بادکنک را τS می‌گیریم که S مساحت کُل بادکنک است. τ را ثابت و مستقل از شعاع بادکنک، دما و فشار بگیرید. فرض می‌کنیم که همواره دمای بادکنک و گاز یکسان است. گرما از طریق سطح بادکنک با ضریب همرفت h با محیط بیرون تبادل می‌شود. در صورت لزوم مساحت کُره را $۴\pi r^۲ - A$ بگیرید.

فشار هوای بیرون p_0، دما T_0 و شتاب گرانش g است.

از ظرفیت گرمایی بادکنک، جیوه و لوله صرف نظر می‌کنیم. لوله عایق گرما است. جرم بادکنک قابل صرف نظر است. از انبساط جیوه نیز صرف نظر کنید. اگر لازم بود از انحنای بخش پائینی لوله صرف نظر کنید.

الف) (۱ نمره) در حالت تعادل فشار داخل بادکنک، p_e و اختلاف ارتفاع جیوه در دو ستون لوله، L_0 را بر حسب شعاع کُره، r_0 و ثوابت مساله بنویسید.

فرض کنید با اختلالی کوچک شعاع بادکنک، فشار گاز داخل بادکنک و دمای آن تغییر می‌کند. این تغییرات کوچک

ادامه سوالات در صفحه بعد

ادامه مسئله ۳

هستند. فرض کنید:

$$p = p_e + \delta p, \qquad T = T_\circ + \delta T, \qquad r = r_\circ + \delta r. \tag{۱}$$

ب) (۱ نمره) قانون دوم نیوتون را برای المان کوچکی از سطح بادکنک بنویسد.

ارتفاع ستون جیوه بخش چپ لوله نیز به اندازه‌ی کوچک δx بالا می‌آید. فرض کنید تغییرات چنان کند است که معادله‌ی حالت گاز کامل اعتبار دارد. تمامی معادلات را بر حسب تغییرات کوچک تا رتبه‌ی اول بنویسید. حجم اولیه‌ی گاز $V_\circ$ و طول کل جیوه L است. از این پس تمامی آنچه خواسته شده را بر حسب δr، δx، $r_\circ$، γ و کمیت‌های زیر بنویسید:

$$\alpha := \frac{A}{4\pi r_\circ^2}, \qquad \beta := \frac{\tau}{r_\circ p_e}, \qquad \lambda := \frac{4\pi r_\circ^3}{3V_\circ},$$
$$\zeta := \frac{\rho g r_\circ^2}{\tau}, \qquad \Omega := \frac{1}{r_\circ}\sqrt{\frac{\tau}{\rho L}}, \qquad v_\circ := \frac{hT_\circ}{p_e}, \qquad \delta\theta := \frac{\delta T}{T_\circ}. \tag{۲}$$

ج) (۲ نمره) معادله‌ی حرکت جیوه را بنویسید.

د) (۲ نمره) قانون اول ترمودینامیک برای مجموعه‌ی بادکنک و گاز را بنویسید.

ه) (۳ نمره) با استفاده از معادلات بخش‌های قبل یک معادله‌ی دیفرانسیل برای δx بنویسید.

و) (۱ نمره) فرض کنید Ω بسیار بزرگ باشد. شرطی بنویسید که جیوه از لوله بیرون نریزد یا در واقع نوسان کوچک بماند.

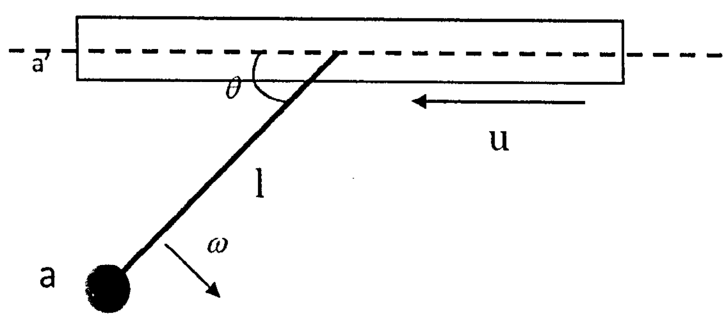
طرح از آقای مهیایه

مسئله ۴) در این مسئله می خواهیم سرعت زاویه‌ای دست پاول بیدرمن، رکورد دار شنای ۲۰۰ متر کرال سینه را با تقریب به دست آوریم. رکورد شنای ۲۰۰ متر در سال ۲۰۰۹ برابر با ۱۰۲/۰ ثانیه بوده است. برای این کار ابتدا باید نیرویی را که یک شاره به جسم صلب متحرک وارد می‌کند، حساب کنیم.

الف) وقتی یک جسم درون یک شاره در حال حرکت است، نیرویی به آن وارد می‌شود که در خلاف جهت سرعت جسم نسبت به شاره است. در شاره ای مانند آب، این نیرو که آن را با F_D نمایش می‌دهیم، به چگالی شاره، ρ، سرعت جسم نسبت به شاره، v و مساحت تصویر جسم متحرک در صفحه‌ی عمود بر جهت سرعت، A بستگی دارد. با تحلیل ابعادی، کلی ترین رابطه‌ی را که می توان برای این نیرو بر حسب کمیت‌های مشخص شده نوشت، به دست آورید. پاسخ شما به بخش‌های «ب» و «پ» می‌تواند شامل ثوابت و یا توابع مجهول در تحلیل ابعادی باشد. (۲ نمره)

ب) حال می‌خواهیم نیروی وارد بر شناگر را حساب کنیم. مطابق شکل فرض می‌کنیم شناگر در حالی که با سرعت u در آب به چگالی ρ به جلو می‌رود، یکی از دست‌هایش را با سرعت زاویه ای ω می‌چرخاند. دست شناگر را به صورت میله‌ای به طول l مدل می‌کنیم که در انتهای آن کف دست به مساحت a قرار دارد. با توجه به مدل ارائه شده و رابطه‌ای که برای نیرو به دست آوردید، نیروی جلوبرنده‌ای را که از طرف آب به دست شناگر وارد می شود، بر حسب زاویه‌ی θ که در شکل مشخص شده و سایر پارامترهایی که تا اینجای سوال معرفی شده است، بنویسید. (۳ نمره)

پ) در شنای کرال، در هر لحظه فقط یکی از دو دست شاگر درون آب حرکت می‌کند. همچنین فرض کنید سهم حرکت پا و دست در نیروی جلوبرنده برابر است. از نیروی به دست آمده روی θ در بازه‌ی ۰ تا π متوسط گیری کنید و متوسط نیروی کل جلوبرنده را محاسبه کنید. در ادامه‌ی مسئله به تقریب، متوسط زمانی نیروی جلوبرنده را با متوسط زاویه‌ای به دست آمده برابر می‌گیریم. (۲ نمره)



ت) مساحت سر شناگر را که درون آب و در راستای عمود بر جهت حرکت شناگر است، a' فرض کنید. رابطه ای برای ω بر حسب کمیت‌های u، a، l، a' و ρ به دست آورید. (۲ نمره)

ث) با استفاده از مقادیر عددی داده شده و تخمین مقادیر برخی از کمیت‌ها، مقدار عددی ω را بر حسب رادیان بر ثانیه و دور بر ثانیه حساب کنید. توجه داشته باشید که قد پاول بیدرمن ۱/۹ متر است. (۱ نمره)

« موفق باشید».

طرح از آقای اخترا‌چیان

مسئله ۱ امتحان چهارم :

الف) $\frac{F}{A}=\mu\frac{\Delta v}{\Delta x} \Rightarrow [\mu]=\left[\frac{F\Delta x}{A\Delta v}\right]=\frac{MLT^{-2}\times L}{L^{2}\times LT^{-1}}=\boxed{ML^{-1}T^{-1}}$

ب) کمیت‌های موثر و ابعادشان : $[v]=LT^{-1}$ ، $[R]=L$ ، $[r]=L$ ، $[l]=L$ ، $[\rho]=ML^{-3}$ ، $[\mu]=ML^{-1}T^{-1}$ ، $[\Delta P]=ML^{-1}T^{-2}$ ،

۷ کمیت ، ۳ بعد مختلف $\Leftarrow$ ۴ کمیت بدون بعد

v ، ΔP ، r ، و l را مستقل می‌گیریم

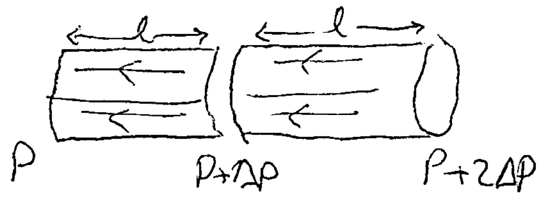
$$\Rightarrow \pi_1=\frac{R\rho v}{\mu} ,\quad \pi_2=\frac{\Delta P\,\rho\, l^2}{\mu^2} ,\quad \pi_3=\frac{r}{R} ,\quad \pi_4=\frac{l}{R}$$

$$\Rightarrow \pi_1=f_1(\pi_2,\pi_3,\pi_4) \Rightarrow v=\frac{\mu}{R\rho}f_1\left(\frac{\rho l^2\Delta P}{\mu^2},\frac{l}{R},\frac{r}{R}\right)$$

در معادلات ما ، چون حرکت پایاست پس لختی ظاهر نمی‌شود . همچنین در دیگر نیروهای ما (ΔPA و نیروی گرانروی) هم جرم یا همان چگالی ظاهر نمی‌شود پس v به ρ ربطی ندارد

$$\Rightarrow v=\frac{\mu}{R\rho}\times\frac{\rho l^2\Delta P}{\mu^2}f_2\left(\frac{l}{R},\frac{r}{R}\right)=\frac{l^2\Delta P}{\mu R}f_2\left(\frac{l}{R},\frac{r}{R}\right)$$

اگر دو لوله‌ی مشابه را به هم بچسبانیم ، هیچ تغییری ایجاد نمی‌شود . پس کمیت موثر در v ، $\frac{\Delta P}{l}$ است و این دو بصورت مجزا نباید ظاهر شوند .

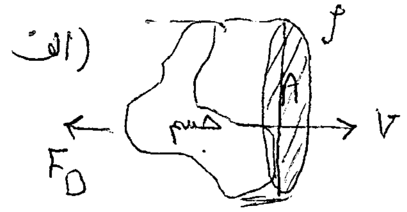


$$\Rightarrow v=\frac{l^2\Delta P}{\mu R}\times\left(\frac{R}{l}\right)^3 f_3\left(\frac{r}{R}\right)=\boxed{\frac{R^2\Delta P}{\mu l}f_3\left(\frac{r}{R}\right)}$$

ج) $r=0 \Rightarrow f_3\left(\frac{r}{R}\right)\Big|_{r=0}=C$ (ثابت) $\Rightarrow v_0=\frac{R^2\Delta P}{\mu l} \Rightarrow \frac{v_0'}{v_0}=\left(\frac{R'}{R}\right)^2=\boxed{4}$

مسئله ④ آزمون چهارم :

الف)



$$[\rho]=ML^{-3}\ ,\ [V]=LT^{-1}\ ,\ [A]=L^2\ ,\ [F_D]=MLT^{-2}$$

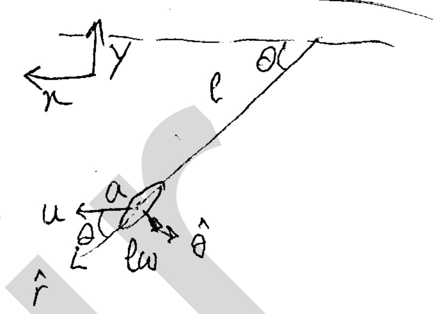
تعداد کمیت های بی بعد ← 1

$$\Rightarrow \pi=\frac{F_D}{\rho A v^2}=c \Rightarrow \boxed{F_D=c\rho A v^2}$$

$$\Rightarrow \left(\vec{F_D}=-c\rho A v^2\ \hat{v}\right)$$

ب)

از ابعاد دست در برابر l صرف‌نظر می‌کنیم



$$\vec{v}=u\cos\theta\ \hat{r}+(l\omega-u\sin\theta)\ \hat{\theta}$$

$$\vec{F_D}=-c\rho(\vec{A}\cdot\hat{v})v^2\hat{v}=-c\rho(\vec{A}\cdot\vec{v})\vec{v}$$

$$\vec{A}=a\hat{\theta} \Rightarrow \vec{A}\cdot\vec{v}=a(l\omega-u\sin\theta)$$

$$\Rightarrow \vec{F_D}=-c\rho a(l\omega-u\sin\theta)\vec{v}$$

$$\xrightarrow{\text{نیروی جلو برنده}} \vec{F_D}\cdot\hat{x}=-c\rho a(l\omega-u\sin\theta)(u-l\omega\sin\theta)=-c\rho a(l\omega u+l\omega u\sin^2\theta-u^2\sin\theta-l^2\omega^2\sin\theta)$$

$$\Rightarrow f=\boxed{c\rho a l^2\omega^2\left[\left(1+\frac{u^2}{l^2\omega^2}\right)\sin\theta-\frac{u}{l\omega}(1+\sin^2\theta)\right]}$$

پ)

$$\underset{\text{دو دست}}{\bar{f}}=2c\rho a l^2\omega^2\left\{\left(1+\frac{u^2}{l^2\omega^2}\right)\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin\theta\, d\theta-\frac{u}{l\omega}-\frac{u}{l\omega}\cdot\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin^2\theta\, d\theta\right\}$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{f}=2c\rho a l^2\omega^2\left[\frac{2}{\pi}\left(1+\frac{u^2}{l^2\omega^2}\right)-\frac{3u}{2l\omega}\right]}$$

ت)

$$|f_{\text{مقاوم}}|=\bar{f} \rightarrow c\rho a' u^2=\bar{f} \Rightarrow \frac{a'}{a}=\frac{4}{\pi}\left(\frac{l^2\omega^2}{u^2}+1\right)-3\frac{l\omega}{u}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{l\omega}{u}\right)^2-\frac{3\pi}{4}\left(\frac{l\omega}{u}\right)+1-\frac{\pi a'}{4a}=0 \Rightarrow \frac{l\omega}{u}=\frac{3\pi}{8}\pm\sqrt{\left(\frac{3\pi}{8}\right)^2+\frac{\pi a'}{4a}-1}$$

$$\frac{\partial\left(\frac{l\omega}{u}\right)}{\partial a'}>0 \Rightarrow \text{جواب + صحیح است.} \Rightarrow \boxed{\omega=\frac{u}{l}\left[\frac{3\pi}{8}+\sqrt{\left(\frac{3\pi}{8}\right)^2+\left(\frac{\pi a'}{4a}\right)-1}\right]}$$

ث)

$$v=\frac{200\,m}{102\,s}=\frac{100}{101}\ m/s\ ,\ l\simeq\frac{1{,}9\,m}{3{,}1}\simeq 0{,}613\ m \Rightarrow \frac{u}{l}\simeq 1{,}615\ rad\,s^{-1}$$

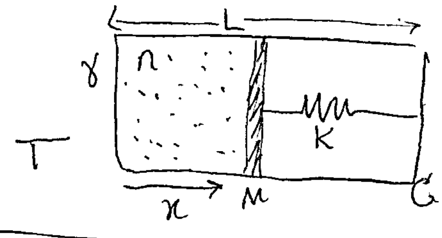
[illegible] ← 3,1

$$\begin{cases} a\simeq 170\ cm^2 \\ a'\simeq 260\ cm^2 \end{cases}$$

[illegible] ← a'

$$\Rightarrow \omega=2{,}44\,u/l\simeq 3{,}9\ rad/s\simeq \boxed{4\ rad/s}=\boxed{0{,}6\ rev/s}$$

مسئله ۲ آزمون چهارم :



الف)

$$\left.\begin{array}{l} PA = Kx_0 \\ PAx_0 = nRT \end{array}\right\} \Rightarrow Kx_0^2 = nRT$$

$$\Rightarrow x_0 = \sqrt{\frac{nRT}{K}} \boxed{= a}$$

ب) فرض می‌کنیم دمای گاز همیشه T است

$$M\ddot{x} = \frac{nRT}{x} - Kx \Rightarrow M\delta\ddot{x} = \frac{nRT}{a}\left(1 - \frac{\delta x}{a}\right) - Ka\left(1 + \frac{\delta x}{a}\right)$$

$$\Rightarrow M\delta\ddot{x} = -\frac{nRT}{a^2}\delta x - K\delta x \Rightarrow \delta\ddot{x} + \left(\frac{nRT}{Ma^2} + \frac{K}{M}\right)\delta x = 0$$

$$\Rightarrow \omega_1 = \sqrt{\frac{Ka^2}{Ma^2} + \frac{K}{M}} = \sqrt{2\frac{K}{m}} \Rightarrow \boxed{\omega_1 = \sqrt{2}\,\Omega}$$

ج)

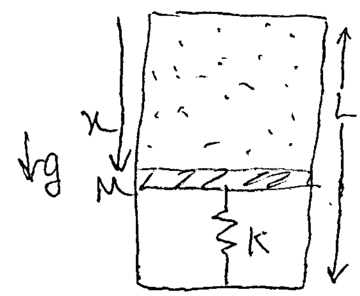
$$E_{in} = \frac{1}{2}Kx^2 + nC_vT + CT$$

چون : $nRT = Kx^2 \Rightarrow E_{in} = n(C_v + R/2)T + CT$

$$\Rightarrow dE_{in} = (nC_v + nR/2 + C)\,dT = dQ \Rightarrow C_1 = C + nR\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\gamma - 1}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{C_1 = C + \frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}nR}$$

د)



$$\frac{nRT}{x_0} + Mg = Kx_0$$

$$\Rightarrow x_0^2 - \frac{Mg}{K}x_0 - \frac{nRT}{K} = 0 \Rightarrow x_0^2 - bx_0 - a^2 = 0$$

$$\Rightarrow x_0 = \frac{b \pm \sqrt{b^2 + 4a^2}}{2} \xrightarrow{x_0 > 0} \boxed{x_0 = \frac{b + \sqrt{b^2 + 4a^2}}{2}}$$

ه)

$$M\delta\ddot{x} = \frac{nRT}{x_0\left(1 + \frac{\delta x}{x_0}\right)} + Mg - Kx_0 - K\delta x$$

$$\Rightarrow M\delta\ddot{x} = -\frac{nRT}{x_0^2}\delta x - K\delta x \Rightarrow \omega_2^2 = \frac{K}{M} + \frac{nRT}{Mx_0^2} = \Omega^2\left(1 + \frac{a^2}{x_0^2}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega_2 = \sqrt{1 + \frac{1}{\left(\frac{b}{2a} + \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} + 1}\right)^2}}\;\Omega}$$

g) $E_{in} = CT + \frac{nR}{\gamma-1}T + \frac{1}{2}kx^2 - Mgx$

$$\Rightarrow dE_{in} = dQ = C_2\,dT = C\,dT + \frac{nR}{\gamma-1}dT + (kx - Mg)\,dx$$

$$\Rightarrow C_2 = C + \frac{nR}{\gamma-1} + (kx-Mg)\frac{dx}{dT}$$

$$x = \frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{nRT}{k}} \Rightarrow \frac{dx}{dT} = \frac{\frac{nR}{k}}{\sqrt{b^2+4\frac{nRT}{k}}} \quad , \quad (kx-Mg) = k(x-b) = \frac{k}{2}\left(\sqrt{b^2+4\frac{nRT}{k}} - b\right)$$

$$\Rightarrow (kx-Mg)\frac{dx}{dT} = \frac{nR}{2} - \frac{nRb}{2\sqrt{b^2+4a^2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{C_2 = C + \frac{nR(\gamma+1)}{2(\gamma-1)} - \frac{nRb}{2\sqrt{b^2+4a^2}}}$$

---

i) $C_1 = C + \frac{nR(\gamma+1)}{2(\gamma-1)} \Rightarrow C_1 - C_2 = \frac{nR}{2\sqrt{1+4a^2/b^2}}$ $\quad a^2 = \frac{nRT}{k}$, $b = \frac{Mg}{k}$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2k}{M}} \Rightarrow k = \frac{1}{2}M\omega_1^2 \Rightarrow a^2 = \frac{2nRT}{M\omega_1^2} \; , \; b^2 = \frac{4g^2}{\omega_1^4} \Rightarrow 4a^2/b^2 = \frac{2nRT\omega_1^2}{Mg^2}$$

$$\Rightarrow C_1 - C_2 = \frac{nR}{2\sqrt{1+\frac{2nRT\omega_1^2}{Mg^2}}} \Rightarrow 1 + \frac{2nRT\omega_1^2}{Mg^2} = \frac{n^2R^2}{4(C_1-C_2)^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{M = \frac{2nRT\omega_1^2}{g^2\left[\frac{n^2R^2}{4(C_1-C_2)^2} - 1\right]}} \Rightarrow \boxed{k = \frac{nRT\omega_1^4}{g^2\left[\frac{n^2R^2}{4(C_1-C_2)^2} - 1\right]}}$$

سؤال ③ آزمون چهارم :

الف) 

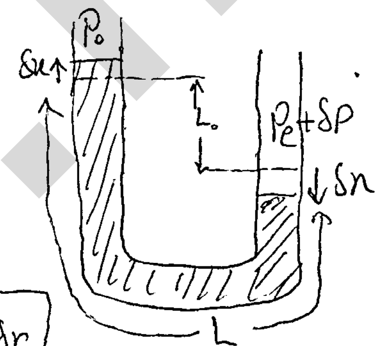
$$P_e\,dS - P_0\,dS = 2\frac{\tau}{r_0}dS \Rightarrow \boxed{P_e = P_0 + 2\tau/r_0}$$

$$P_e - \rho g L_0 = P_0 \Rightarrow \rho g L_0 = 2\tau/r_0 \Rightarrow \boxed{L_0 = \frac{2\tau}{\rho g r_0}}$$

ب) $r = r_0 + \delta r$, $T = T_0 + \delta T$, $p = p_e + \delta p$

$$\delta M = 0 \Rightarrow (P_e + \delta P)\,dS - P_0\,dS - \frac{2\tau}{r_0 + \delta r}dS = 0 \Rightarrow \delta P + 2\frac{\tau}{r_0} - 2\frac{\tau}{r_0 + \delta r} = 0$$

$$\Rightarrow \delta P + 2\frac{\tau}{r_0^2}\delta r = 0 \Rightarrow \boxed{\delta P = -\frac{2\tau}{r_0^2}\delta r}$$

ج) 

$$(\delta P + P_e)A - P_0 A - \rho g A(L_0 + 2\delta x) = \rho A L\,\delta\ddot{x}$$

$$\Rightarrow \delta P + \frac{2\tau}{r_0} - 2\frac{\tau}{r_0} - 2\rho g\,\delta x = \rho L\,\delta\ddot{x}$$

$$\cancel{\Rightarrow \delta\ddot{x} = -2\rho g\delta x - \frac{2\tau}{r_0^2}\delta P} \Rightarrow \boxed{\delta\ddot{x} = -\frac{2g}{L}\delta x - \frac{2\tau}{\rho L r_0^2}\delta r}$$

$$\Rightarrow \boxed{\delta\ddot{x} = -2\zeta\Omega\,\delta x - 2\Omega^2\,\delta r}$$

د) $dV = 4\pi r_0^2\,\delta r + A\delta x$ $[\to \delta V = (4\pi r_0^2 - A)\delta r + A\delta r + A\delta x]$

$$\Rightarrow -\delta W = (P_e + \delta P)\;\delta V = P_e 4\pi r_0^2\delta r + P_e A\delta x$$

$$U = \frac{nR}{\gamma-1}T \Rightarrow \frac{dU}{dt} = \frac{nR}{\gamma-1}\delta\dot{T} = -P_e 4\pi r_0^2\delta\dot{r} - P_e A\delta\dot{x} - hA\delta T \quad (1)$$

$$\cancel{(P_e + \delta P)(V_0 + \delta V) = nR(T_0 + \delta T) \Rightarrow P_e\delta V + V_0\delta P = nR\,\delta T \Rightarrow \delta T = \frac{P_e}{nR}4\pi r_0^2\delta r + \frac{P_e}{nR}A\delta x - \frac{2\tau V_0}{nRr_0^2}\delta r}$$

$$\cancel{\Rightarrow \left(\frac{nR}{\gamma-1} + hA\right)\left(\frac{P_e}{nR}4\pi r_0^2\delta r - \frac{2\tau V_0}{nRr_0^2}\delta r + \frac{P_e}{nR}A\,\delta x\right) = -P_e A\delta x - P_e 4\pi r_0^2\delta r}$$

$$\cancel{\Rightarrow \left(\frac{nR}{\gamma-1} + \frac{\tau\,4\pi r_0^2}{r_0 T_0}\cdot\frac{\alpha v_0}{\beta}\right)\left(\frac{4\pi r_0^2\tau}{nR\beta r_0}\delta r - 2\tau\frac{4\pi r_0^2}{3\lambda r_0 nR}\delta r + \frac{4\pi r_0^2\tau}{nR\beta r_0}\alpha\delta x\right) = -\frac{\tau\,4\pi r_0^2}{\beta r_0}\alpha\delta x - \frac{4\pi r^2\tau}{\beta r_0}\delta r}$$

$$\cancel{\Rightarrow \left(\frac{nR}{\gamma-1} + \frac{4\pi r_0^2\tau}{r_0 T_0}\cdot\frac{\alpha v_0}{\beta}\right)\left(\frac{\delta r}{nR} + \frac{\alpha\delta x}{nR} - \frac{2\beta}{3\lambda nR}\delta r\right) = -\alpha\delta x - \delta r}$$

$(P_e+\delta P)(V_0+\delta V)=nR(\delta T+T_0)$, $P_eV_0=nRT_0 \Rightarrow nR=\dfrac{\frac{\tau}{\beta r_0}\cdot\frac{4\pi r_0^3}{3\lambda}}{T_0}$

$\Rightarrow P_e\,\delta V+V_0\,\delta P=nR\,\delta T \Rightarrow nR\,\delta T=P_e 4\pi r_0^2\,\delta r+P_eA\,\delta x-\dfrac{2\tau V_0}{r_0^2}\,\delta r$

$$\overset{(1)}{\Rightarrow} \frac{P_e4\pi r_0^2}{\gamma-1}\delta\dot r+\frac{P_eA}{\gamma-1}\delta\dot x-\frac{2\tau V_0}{(\gamma-1)r_0^2}\delta\dot r=-P_e4\pi r_0^2\delta\dot r-P_eA\,\delta\dot x-hA\frac{4\pi r_0^2P_e}{nR}\delta r-hA\frac{P_eA}{nR}\delta x+\frac{2\tau V_0}{nRr_0^2}hA\,\delta r$$

$$\Rightarrow \frac{\gamma}{\gamma-1}P_e4\pi r_0^2\delta\dot r+\frac{\gamma}{\gamma-1}P_eA\,\delta\dot x-\frac{2\tau V_0}{r_0^2(\gamma-1)}\delta\dot r=-hA\frac{4\pi r_0^2P_e}{nR}\delta r-hA\frac{P_eA}{nR}\delta x+\frac{2\tau V_0}{nRr_0^2}hA\,\delta r$$

$$\Rightarrow \frac{\gamma}{\gamma-1}\cdot\frac{\tau}{\beta r_0}\delta\dot r+\frac{\gamma}{\gamma-1}\alpha\frac{\tau}{\beta r_0}\delta\dot x-\frac{2\tau}{3\lambda(\gamma-1)r_0}\delta\dot r=-\frac{\tau}{\beta r_0}\cdot\frac{3\alpha\lambda v_0}{r_0}\delta r-\frac{\tau}{\beta r_0}\cdot\frac{3\alpha\lambda v_0}{r_0}\alpha\,\delta x+{}^{2}\frac{\tau\alpha v_0}{r_0^2}\delta r$$

$$\boxed{\Rightarrow \left(\frac{\gamma}{\gamma-1}-\frac{2\beta}{3\lambda(\gamma-1)}\right)\delta\dot r+\frac{\gamma}{\gamma-1}\alpha\,\delta\dot x=-\frac{3\alpha\lambda v_0}{r_0}\delta r-\frac{3\alpha^2\lambda v_0}{r_0}\delta x+2\beta\frac{\alpha v_0}{r_0}\delta r}$$

ه) $\delta\ddot x=-2\xi\Omega\,\delta x-2\Omega^2\delta r \Rightarrow \delta r=\dfrac{-\xi}{\Omega}\delta x-\dfrac{1}{2\Omega^2}\delta\ddot x \Rightarrow \delta\dot r=\dfrac{-\xi}{\Omega}\delta\dot x-\dfrac{1}{2\Omega^2}\delta\dddot x$

$$\Rightarrow \left(\frac{\gamma}{\gamma-1}-\frac{2\beta}{3\lambda(\gamma-1)}\right)\times\frac{-\xi}{\Omega}\delta\dot x-\frac{1}{2\Omega^2}\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}-\frac{2\beta}{3\lambda(\gamma-1)}\right)\delta\dddot x+\frac{\gamma}{\gamma-1}\alpha\,\delta\dot x=-\frac{3\alpha^2\lambda v_0}{r_0}\delta x+\left(\frac{\xi\,\delta x}{\Omega}+\frac{\delta\ddot x}{2\Omega^2}\right)\left(\frac{3\alpha\lambda v_0}{r_0}-\frac{2\alpha\beta v_0}{r_0}\right)$$

$$\boxed{\begin{aligned}\Rightarrow\ &\frac{1}{\Omega^2}\left(\frac{\gamma}{2(\gamma-1)}-\frac{\beta}{3\lambda(\gamma-1)}\right)\delta\dddot x+\frac{1}{\Omega^2}\left(\frac{3\alpha\lambda v_0}{2r_0}-\frac{\alpha\beta v_0}{r_0}\right)\delta\ddot x\ +\\ &+\left(\frac{\gamma\xi}{(\gamma-1)\Omega}-\frac{2\beta\xi}{3\lambda\Omega(\gamma-1)}-\frac{\alpha\gamma}{\gamma-1}\right)\delta\dot x+\left(\frac{3\alpha\lambda v_0\xi}{r_0\Omega}-\frac{2\alpha\beta v_0\xi}{r_0\Omega}-\frac{3\alpha^2\lambda v_0}{r_0}\right)\delta x=0\end{aligned}}$$

و) $\dfrac{1}{\Omega}\approx 0 \Rightarrow -\dfrac{\alpha\gamma}{\gamma-1}\delta\dot x-\dfrac{3\alpha^2\lambda v_0}{r_0}\delta x=0 \Rightarrow \delta\dot x=-\underbrace{\dfrac{\gamma-1}{\gamma}\cdot\dfrac{3\alpha\lambda v_0}{r_0}}_{\text{مثبت باشد}}\delta x$

$\Rightarrow \boxed{\gamma>1}$