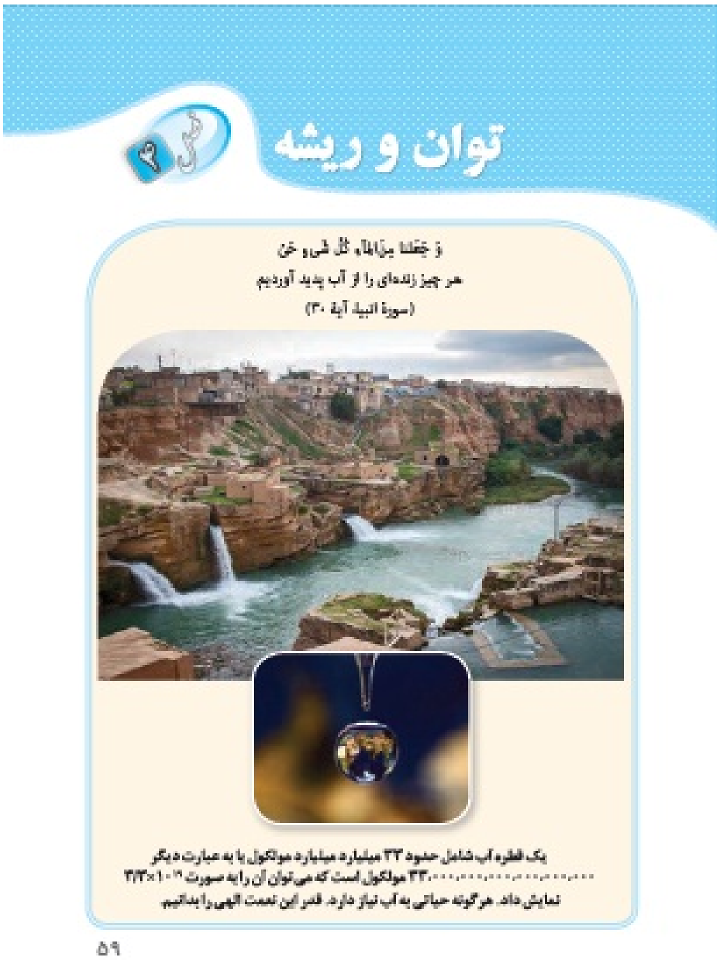
فصل چهارم ریاضی نهم

(توان و ریشه)


توان و ریشه

وَ جَعَلنا مِنَ الماءِ کُلَّ شَیءٍ حَیّ

هر چیز زنده‌ای را از آب پدید آوردیم

(سورهٔ انبیاء آیهٔ ۳۰)

یک قطره آب شامل حدود ۳۳ میلیارد میلیارد مولکول یا به عبارت دیگر ۳۳،۰۰۰،۰۰۰،۰۰۰،۰۰۰،۰۰۰،۰۰۰ مولکول است که می‌توان آن را به صورت $۳/۳\times۱۰^{۱۹}$ نمایش داد. هرگونه حیاتی به آب نیاز دارد. قدر این نعمت الهی را بدانیم

۵۹

کاری از استاد مسعود زیرکاری

(دبیر ریاضی ناحیه ۱ زاهدان)

توان و ریشه

توان : اگر عددی چند بار در خودش ضرب شود برای خلاصه نویسی از توان استفاده می شود.

مانند : $\underbrace{a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ بار}} = a^n$ $\qquad$ $۴ \times ۴ \times ۴ = ۴^۳$ (۴ پایه، ۳ توان)

ضرب اعداد توان دار : الف) اگر پایه ها برابر باشند : یکی از پایه ها را نوشته و توان ها را با هم جمع می کنیم.

مانند : $۴^۷ \times ۴^۳ = ۴^{۱۰}$ $\qquad$ $a^m \times a^n = a^{m+n}$

ب) اگر توان ها برابر باشند : یکی از توان ها را نوشته و پایه ها را در هم ضرب می کنیم.

مانند : $۱۲^۷ \times ۳^۷ = ۳۶^۷$ $\qquad$ $a^m \times b^m = (ab)^m$

تقسیم اعداد توان دار : الف) اگر پایه ها برابر باشند : یکی از پایه ها را نوشته و توان ها را از هم کم می کنیم.

مانند : $\frac{۹^۵}{۹^۳} = ۹^۲$ $\qquad$ $a^m \div a^n = a^{m-n}$

ب) اگر توان ها برابر باشند : یکی از توان ها را نوشته و پایه ها را بر هم تقسیم می کنیم.

مانند : $۲۰^۸ \div ۴^۸ = ۵^۸$ $\qquad$ $a^m \div b^m = \left(\frac{a}{b}\right)^m$

نکته : اگر در ضرب و تقسیم اعداد توان دار پایه ها و توان ها برابر نباشند از تجزیه استفاده می کنیم.

مانند : $\underbrace{۹^۲}_{\text{تجزیه}} \div \underbrace{۲۷}_{\text{تجزیه}} = \overset{۳^۴}{\cancel{(۳^۲)^۲}} \div ۳^۳ = ۳$ $\qquad$ $\underbrace{۴^۸}_{\text{تجزیه}} \times ۲^۳ = \overset{۲^{۱۶}}{\cancel{(۲^۲)^۸}} \times ۲^۳ = ۲^{۱۹}$

نکته : اگر اعداد توان دار مثل هم باشند و بین آن ها علامت جمع باشد آن عبارت را تبدیل به ضرب می کنیم.

مانند : $۹^۵ + ۹^۵ + ۹^۵ = ۳ \times \underbrace{۹^۵}_{\text{تجزیه}} = ۳ \times \overset{۳^{۱۰}}{\cancel{(۳^۲)^۵}} = ۳^{۱۱}$ $\qquad$ $۲^۶ + ۲^۶ = ۲ \times ۲^۶ = ۲^۷$

توان منفی : برای به دست آوردن توان منفی عدد پایه را معکوس کرده تا به توان مثبت تبدیل شود. $\qquad$ $a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$

نکته : تمام قواعد اعداد توان دار برای اعداد با توان منفی صدق می کند.

نکته : اگر عدد صحیحی (غیر از صفر) از صورت به مخرج و یا از مخرج به صورت انتقال داده شود توان آن قرینه می شود.

مثال : حاصل هر عبارت را به صورت توان طبیعی (توان مثبت) بنویسید.

$۳^{-۴} \times ۳^۲ \div ۲۷ = \overset{۳^{-۲}}{\cancel{۳^{-۴} \times ۳^۲}} \div ۳^۳ = ۳^{-۵} = \left(\frac{۱}{۳}\right)^۵$ $\qquad$ $۵^{-۶} = \left(\frac{۱}{۵}\right)^۶$

$\frac{۴^۷ \times ۳^{-۶}}{۳^۳ \times ۴^{-۲}} = \frac{۴^۷ \times ۴^۲}{۳^۳ \times ۳^۶} = \frac{۴^۹}{۳^۹} = \left(\frac{۴}{۳}\right)^۹$ $\qquad$ $\frac{۲۰^{-۶}}{۵^۲ \times ۴^{-۶}} = \frac{۵^{-۶}}{۵^۲} = ۵^{-۸} = \left(\frac{۱}{۵}\right)^۸$

توان و ریشه

نکته : هر عدد (غیر از صفر) به توان صفر باشد حاصل عدد یک است.

مثال : حاصل عبارت مقابل را به دست آورید؟

$$۳^۲ + ۵^۰ - ۲^{-۲} = \cancel{۹ + ۱}^{\,۱۰} - \frac{۱}{۴} = \frac{۴۰ - ۱}{۴} = \frac{۳۹}{۴} = ۹\frac{۳}{۴}$$

نماد علمی : برای محاسبه ساده تر اعداد خیلی بزرگ و اعداد خیلی کوچک آن ها را به صورت توانی از عدد ۱۰ می نویسیم.

نکته : به طور کلی نماد علمی هر عدد اعشاری مثبت به صورت $a \times ۱۰^n$ است که در آن $۱ \leq a < ۱۰$ و n عدد صحیح است.

الف) نماد علمی اعداد خیلی بزرگ (توان مثبت) : ابتدا یک رقم از سمت چپ جدا کرده سپس به تعداد رقم های بعد از ممیز توانی از عدد ۱۰ می نویسیم.

مانند :

$$۱\overbrace{۴۷۵۲}^{\text{۴ رقم}}/۹۳ = ۱/۴۷۵۲۹۳ \times ۱۰^۴$$

$$۳\overbrace{۴۱۰۰۰۰۰۰}^{\text{۸ رقم}} = ۳/۴۱ \times ۱۰^۸$$

ب) نماد علمی اعداد خیلی کوچک (توان منفی) : ابتدا یک رقم مخالف صفر از سمت چپ جدا کرده سپس به تعداد رقم های قبل از ممیز توانی از عدد ۱۰ می نویسیم.

مانند :

$$۰/۰۰۶۷۸ = ۶/۷۸ \times ۱۰^{-۳}$$

$$۰/\overbrace{۰۰۰۰۰۳}^{\text{۶ رقم}}۷ = ۳/۷ \times ۱۰^{-۶}$$

مثال : حاصل عبارت زیر را به صورت نماد علمی بنویسید.

$$۵۳۰۰۰۰ \times ۰/۰۰۲۷ = \underline{۵/۳} \times \underline{۱۰^۵} \times \underline{۲/۷} \times \underline{۱۰^{-۴}} = ۱۴/۳۲ \times ۱۰^۱ = ۱/۴۳۲ \times ۱۰^۲$$

ریشه گیری : الف) ریشه دوم اعداد : هر عدد دارای دو ریشه دوم است : (یکی مثبت و دیگری منفی)

مانند : (ریشه های دوم ۱۶ برابر است با ۴ و ۴-)

$$۴^۲ = (-۴)^۲ = ۱۶ \Rightarrow \sqrt{۱۶} = ۴ \text{ و } -۴$$

نکته : اعداد منفی جذر (ریشه دوم) ندارند. (چون مجذور دو عدد مثل هم هیچ وقت منفی نمی شود)

ب) ریشه سوم اعداد : هر عدد دارای یک ریشه سوم است.

نکته : اگر a یک عدد حقیقی باشد ریشه سوم آن را به صورت $\sqrt[۳]{a}$ نشان می دهیم.

فرجه یا ریشه

مانند :

$$(-۳)^۳ = -۲۷ \Rightarrow \sqrt[۳]{-۲۷} = -۳ \quad \text{و} \quad ۳^۳ = ۲۷ \Rightarrow \sqrt[۳]{۲۷} = ۳$$

مثال : حاصل جذر های زیر را به دست آورید.

$$۴\sqrt[۳]{-۱۲۵} = ۴ \times -۵ = -۲۰$$

$$\sqrt{۶۴ \times \frac{۱}{۹}} = ۸ \times \frac{۱}{۳} = \frac{۸}{۳}$$

$$\sqrt[۳]{۰/۰۰۱} \times \sqrt{\sqrt{۱۶}} = ۰/۱ \times ۲ = ۰/۲$$

$$\sqrt{۶۴} \times \sqrt[۳]{-۶۴} = ۸ \times -۴ = -۳۲$$

توان و ریشه

ضرب و تقسیم رادیکال ها : اگر دو رادیکال دارای ریشه (فرجه) یکسان باشند می توانیم آن ها را در هم ضرب یا بر هم تقسیم کنیم.

نکته : اگر رادیکال ها دارای عدد صحیح باشند ابتدا اعداد صحیح را ضرب یا تقسیم کرده سپس رادیکال ها را ضرب یا تقسیم می کنیم.

مثال : حاصل ضرب و تقسیم های زیر را به دست آورید؟

$\sqrt[3]{-۲} \times \sqrt[3]{۳۲} = \sqrt[3]{-۶۴} = -۴$

$۲\sqrt{۲} \times \sqrt{۸} = ۲\sqrt{۱۶} = ۲ \times ۴ = ۸$

$۹\sqrt[3]{۵۴} \div ۳\sqrt[3]{۲} = ۳\sqrt[3]{۲۷} = ۳ \times ۳ = ۹$

$۸\sqrt{۵۰} \div ۴\sqrt{۲} = ۲\sqrt{۲۵} = ۲ \times ۵ = ۱۰$

ساده کردن رادیکال ها : بعضی از رادیکال ها را می توان ساده کرد. به این صورت که برای عدد یک ضربی بنویسیم که یکی از آن اعداد ریشه دوم یا ریشه سوم داشته باشد.

مانند : $\sqrt[3]{۸۱} = \sqrt[3]{۳ \times \underbrace{۲۷}_{\text{ریشه سوم}}} = ۳\sqrt[3]{۳}$ $\quad \sqrt[3]{۱۲۸} = \sqrt[3]{۲ \times \underbrace{۶۴}_{\text{ریشه سوم}}} = ۴\sqrt[3]{۲}$ $\quad \sqrt{۲۰} = \sqrt{\underbrace{۴}_{\text{ریشه دوم}} \times ۵} = ۲\sqrt{۵}$

جمع و تفریق رادیکال ها : اگر قسمت رادیکال ها پس از ساده کردن مثل هم باشند می توانیم آن ها را همانند عبارت های جبری با هم جمع یا تفریق کنیم.

مانند : $\underline{۵\sqrt{۲}} - \underline{۶\sqrt{۵}} + \underline{۳\sqrt{۲}} - \underline{۶\sqrt{۲}} - \underline{۳\sqrt{۵}} = ۲\sqrt{۲} - ۹\sqrt{۵}$

مثال : عبارت های زیر را ساده کنید.

$$۲\sqrt{۲} - \sqrt{۷۵} - ۳\sqrt{۷۲} + ۴\sqrt{۳} = \underline{۲\sqrt{۲}} - \overset{-۵\sqrt{۳}}{\cancel{\sqrt{۳ \times ۲۵}}} - \overset{-۱۸\sqrt{۲}}{\cancel{۳\sqrt{۲ \times ۳۶}}} + \underline{۴\sqrt{۳}} = -۱۶\sqrt{۲} - \sqrt{۳}$$

$$\sqrt{۱۸} + ۳\sqrt[3]{-۵۴} + \sqrt[3]{۱۶} - ۲\sqrt{۸} = \overset{۳\sqrt{۲}}{\cancel{\sqrt{۲ \times ۹}}} + \overset{-۹\sqrt[3]{۲}}{\cancel{۳\sqrt[3]{۲ \times -۲۷}}} + \overset{+۲\sqrt[3]{۲}}{\cancel{\sqrt[3]{۲ \times ۸}}} - \overset{-۴\sqrt{۲}}{\cancel{۲\sqrt{۲ \times ۴}}} = -\sqrt{۲} - ۷\sqrt[3]{۲}$$

گویا کردن مخرج کسرهای رادیکالی : گاهی اوقات برای ساده کردن لازم است مخرج کسر را از حالت رادیکالی بیرون بیاوریم که برای این کار صورت و مخرج را در عددی ضرب می کنیم تا مخرج از حالت رادیکالی خارج شود.

الف) مخرج کسر دارای ریشه دوم باشد : صورت و مخرج را در همان رادیکال مخرج ضرب می کنیم.

مانند : $\frac{۲}{۳\sqrt{۲}} = \frac{۲ \times \sqrt{۲}}{۳\sqrt{۲} \times \sqrt{۲}} = \frac{\cancel{۲}^{۱}\sqrt{۲}}{\cancel{۶}_{۳}} = \frac{\sqrt{۲}}{۳}$ $\qquad \frac{۳}{\sqrt{۵}} = \frac{۳ \times \sqrt{۵}}{\sqrt{۵} \times \sqrt{۵}} = \frac{۳\sqrt{۵}}{۵}$

ب) مخرج کسر دارای ریشه سوم باشد : صورت و مخرج را در همان رادیکال مخرج ضرب کرده با این تفاوت که عدد زیر رادیکال به توان ۳ برسد. برای این کار فرجه را توان کم کرده تا توان عدد زیر رادیکال مشخص شود.

مانند : $\frac{۱}{\sqrt[3]{a^۲}} = \frac{۱ \times \sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a^۲} \times \sqrt[3]{a}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{a}$ $\qquad \sqrt[3]{\frac{۳}{۷}} = \frac{\sqrt[3]{۳}}{\sqrt[3]{۷}} = \frac{\sqrt[3]{۳} \times \sqrt[3]{۷^۲}}{\sqrt[3]{۷} \times \sqrt[3]{۷^۲}} = \frac{\sqrt[3]{۱۴۷}}{۷}$

$۳ - ۲ = ۱$ $\qquad$ $۳ - ۱ = ۲$