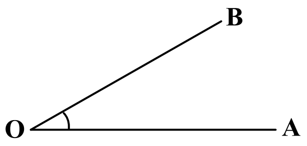
فصل ششم

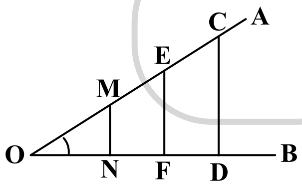
نسبت‌های مثلثاتی

زاویه

فضای بین دو نیم‌خط که در یک رأس مشترک هستند را زاویه گویند.

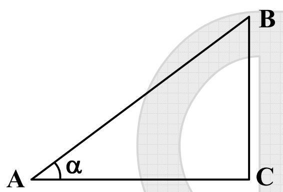


نکته: اگر در ضلع یک زاویه نقاطی را مشخص کنیم و از آن‌ها عمودی بر ضلع دیگر رسم کنیم نسبت‌های زیر در آن‌ها یکسان است و فقط به زاویه انتخاب شده بستگی دارد.



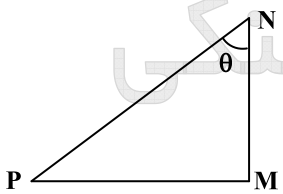
$$\frac{MN}{ON}=\frac{EF}{OF}=\frac{CD}{OD}$$
$$\frac{ON}{OM}=\frac{OF}{OE}=\frac{OD}{OC}$$
$$\frac{MN}{OM}=\frac{EF}{OE}=\frac{CD}{OC}$$

بنابراین نسبت‌هایی در یک مثلث وجود دارند که فقط به زاویه وابسته هستند که اکنون به تعریف این نسبت‌ها در مثلث قائم‌الزاویه می‌پردازیم.



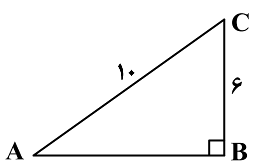
$$\tan\alpha=\frac{\text{ضلع روبه‌رو به زاویه }\alpha}{\text{ضلع مجاور زاویه }\alpha}=\frac{BC}{AC}$$
$$\mathrm{Cot}\alpha=\frac{\text{ضلع مجاور زاویه }\alpha}{\text{ضلع روبه‌رو به زاویه }\alpha}=\frac{AC}{BC}$$
$$\mathrm{Sin}\alpha=\frac{\text{ضلع روبه‌رو به زاویه }\alpha}{\text{وتر}}=\frac{BC}{AB}$$
$$\mathrm{Cos}\alpha=\frac{\text{ضلع مجاور زاویه }\alpha}{\text{وتر}}=\frac{AC}{AB}$$

مثال: در مثلث قائم‌الزاویه زیر نسبت‌های مربوط به زاویه θ را بنویسید.



$$\tan\theta=\frac{MP}{MN}$$
$$\mathrm{Sin}\theta=\frac{MP}{PN}$$
$$\mathrm{Cos}\theta=\frac{MN}{PN}$$
$$\mathrm{Cot}\theta=\frac{MN}{PM}$$

مثال: با توجه به شکل زیر، $\mathrm{Cos}\hat{A}$ چه‌قدر است؟



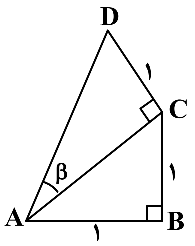
۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $\frac{۴}{۵}$

۳) $\frac{۳}{۵}$ ۴) ۱

پاسخ: گزینه ۲

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{Cos}A=\dfrac{AB}{AC}\\ AC^{۲}=AB^{۲}+BC^{۲}\Rightarrow ۱۰۰=AB^{۲}+۳۶\Rightarrow AB^{۲}=۶۴\Rightarrow AB=۸\end{array}\right\}\Rightarrow \mathrm{Cos}A=\frac{۸}{۱۰}=\frac{۴}{۵}$$

مثال: در شکل روبه‌رو، $\tan\beta$ کدام است؟



۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

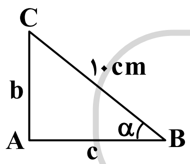
۳) $\sqrt{۳}$

۴) $۲\sqrt{۲}$

پاسخ: گزینه ۱

$$AC^{۲}=۱^{۲}+۱^{۲} \Rightarrow AC^{۲}=۲ \Rightarrow AC=\sqrt{۲} \Rightarrow \tan\beta=\frac{CD}{AC}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

مثال: در مثلث قائم‌الزاویه روبه‌رو $\text{Sin}\alpha=\frac{۴}{۵}$ است. مساحت مثلث کدام است؟



۱) ۱۰۰

۲) ۲۴

۳) ۴۸

۴) ۳۶

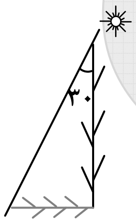
پاسخ: گزینه ۲

$$\text{Sin}\alpha=\frac{۴}{۵} \Rightarrow \frac{b}{۱۰}=\frac{۴}{۵} \Rightarrow b=۸$$

فیثاغورث $b^{۲}+c^{۲}=۱۰۰ \Rightarrow ۶۴+c^{۲}=۱۰۰ \Rightarrow c^{۲}=۳۶ \Rightarrow c=۶$

مساحت مثلث $=\frac{۱}{۲}b\times c=\frac{۱}{۲}\times ۶\times ۸=۲۴$

مثال: اگر آفتاب از بالای درختی به‌طول ۴ متر مطابق شکل با زاویه‌ی ۳۰° بتابد، آن‌گاه طول سایه‌ی درخت روی زمین چند متر است؟



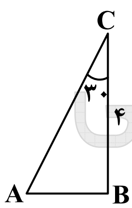
۱) $۴\sqrt{۳}$

۲) $\frac{۴\sqrt{۳}}{۳}$

۳) ۲

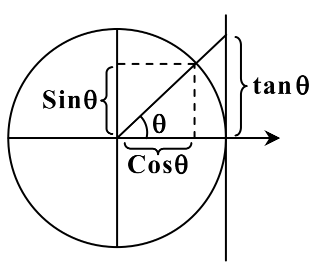
۴) $۲\sqrt{۳}$

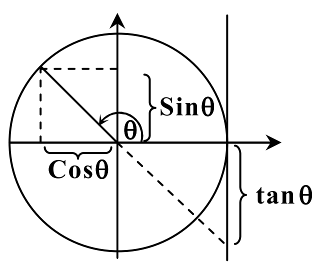
پاسخ: گزینه ۲



$$\tan ۳۰^\circ=\frac{AB}{BC} \Rightarrow \frac{۱}{\sqrt{۳}}=\frac{AB}{۴} \Rightarrow AB=\frac{۴}{\sqrt{۳}}=\frac{۴\sqrt{۳}}{۳}$$

نمایش نسبت‌های مثلثاتی در دایره‌ای به شعاع واحد





نسبت‌های مثلثاتی زوایای معروف

	۰	۳۰	۴۵	۶۰	۹۰
$\text{Sin}\theta$	۰	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	۱
$\text{Cos}\theta$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۰
$\tan\theta$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۱	$\sqrt{۳}$	تعریف نشده

مثال: مقدار عددی عبارت $(\text{Sin}۶۰^\circ - \text{Sin}۴۵^\circ)(\text{Cos}۳۰^\circ + \text{Cos}۴۵^\circ)$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۱

پاسخ: گزینه ۲

$$\text{Sin}۶۰ = \frac{\sqrt{۳}}{۲},\quad \text{Sin}۴۵ = \frac{\sqrt{۲}}{۲},\quad \text{Cos}۳۰ = \frac{\sqrt{۳}}{۲},\quad \text{Cos}۴۵ = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\Rightarrow (\frac{\sqrt{۳}}{۲} - \frac{\sqrt{۲}}{۲})(\frac{\sqrt{۳}}{۲} + \frac{\sqrt{۲}}{۲}) = (\frac{\sqrt{۳}}{۲})^۲ - (\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۲ = \frac{۳}{۴} - \frac{۲}{۴} = \frac{۱}{۴}$$

نکته: اگر زاویه θ حاده و از ۰ تا ۹۰ درجه افزایش یابد.

$\text{Sin}\theta$ افزایش می‌یابد.

$\text{Cos}\theta$ کاهش می‌یابد.

$\tan\theta$ افزایش می‌یابد.

مثال: درون $\square$ نماد $>$ یا $<$ قرار دهید.

$\tan ۷۰ \boxed{<} \tan ۸۰ \qquad \text{Sin}۴۰ \boxed{<} \text{Sin}۸۰$

نکته: اگر مجموع دو زاویه ۹۰ درجه باشد آن‌ها را متمم گویند و داریم:

$$\alpha + \beta = ۹۰^\circ \Rightarrow \text{Sin}\alpha = \text{Cos}\beta$$

یعنی:

$$\text{Sin}۲۰ = \text{Cos}۷۰$$
$$\text{Cos}۴۰ = \text{Sin}۵۰$$

روابط بین نسبت‌های مثلثاتی

۱) $\text{Sin}^۲\theta + \text{Cos}^۲\theta = ۱ \Rightarrow \begin{cases} \text{Sin}^۲\theta = ۱ - \text{Cos}^۲\theta \\ \text{Cos}^۲\theta = ۱ - \text{Sin}^۲\theta \end{cases}$

۲)
$$\tan\theta = \frac{\text{Sin}\theta}{\text{Cos}\theta} \Rightarrow \tan^۲\theta = \frac{\text{Sin}^۲\theta}{\text{Cos}^۲\theta},...$$
$$\text{Cot}\theta = \frac{\text{Cos}\theta}{\text{Sin}\theta} \Rightarrow \text{Cos}^۲\theta = \frac{\text{Cos}^۲\theta}{\text{Sin}^۲\theta},...$$

۳) اگر θ حاده باشد $\begin{matrix} ۰ < \text{Sin}\theta < ۱ \\ ۰ < \text{Cos}\theta < ۱ \end{matrix}$

در حالت کلی $\begin{cases} -۱ < \text{Sin}\theta < ۱ \\ -۱ < \text{Cos}\theta < ۱ \end{cases}$

۴) $۱ + \tan^۲\theta = \frac{۱}{\text{Cos}^۲\theta}\ ,\quad ۱ + \text{Cot}^۲\theta = \frac{۱}{\text{Sin}^۲\theta}$

دقت:

$\text{Sin}^{۲}\theta = (\text{Sin}\theta)^{۲} \neq \text{Sin}\theta^{۲}$

$*\text{Sin}۷۵ \neq \text{Sin}۴۵ + \text{Sin}۳۰$

$*\text{Sin}۲۰ + \text{Cos}۲۰ \neq ۱$

مثال: اگر $\text{Sin}\theta = \frac{\sqrt{۵}}{۵}$ باشد، $\tan\theta$ کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۲- ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۲

پاسخ: گزینه ۳

$$\text{Sin}^{۲}\theta + \text{Cos}^{۲}\theta = ۱ \Rightarrow \frac{۱}{۵} + \text{Cos}^{۲}\theta = ۱ \Rightarrow \text{Cos}^{۲}\theta = \frac{۴}{۵} \Rightarrow \text{Cos}\theta = \pm\frac{۲}{\sqrt{۵}} = \pm\frac{۲\sqrt{۵}}{۵}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{Sin}\theta}{\text{Cos}\theta} = \frac{\frac{\sqrt{۵}}{۵}}{\pm۲\frac{\sqrt{۵}}{۵}} = \pm\frac{۱}{۲}$$ در گزینه‌ها است. $+\frac{۱}{۲}$

مثال: حاصل $\left(۱+\frac{۱}{\text{Cos}\theta}\right)\left(\frac{۱}{\text{Cos}\theta}-۱\right)$ برابر کدام است؟

۱) $\tan^{۲}\theta$ ۲) $\text{Cot}^{۲}\theta$ ۳) $\frac{۱}{\text{Sin}^{۲}\theta}$ ۴) $\frac{۱}{\text{Cos}^{۲}\theta}$

پاسخ: گزینه ۱

روش ۱: مزدوج $= \frac{۱}{\text{Cos}^{۲}\theta} - ۱ = ۱ + \tan^{۲}\theta - ۱ = \tan^{۲}\theta$

روش ۲: $\theta = ۶۰^\circ \Rightarrow$ عبارت $= (۱+\frac{۱}{\frac{۱}{۲}})(\frac{۱}{\frac{۱}{۲}}-۱) = ۳\times۱ = ۳$

حال در گزینه‌ها به‌جای θ عدد ۶۰° را جایگذاری کرده و آن‌ها را محاسبه می‌کنیم فقط گزینه‌ی ۱ برابر ۳ می‌شود.

مثال: ساده‌شده‌ی عبارت $(۱-\text{Sin}^{۲}\theta)(۱+\frac{۱}{\text{Cos}^{۲}\theta}) - (۱-\text{Cos}\theta)^{۲}$، کدام است؟ $(\text{Cos}\theta \neq ۰)$

۱) $\text{Sin}^{۲}\theta$ ۲) $\text{Cos}^{۲}\theta$ ۳) $-\text{Cos}^{۲}\theta$ ۴) $۲\text{Cos}\theta$

پاسخ: گزینه ۴

$$\text{عبارت} = \text{Cos}^{۲}\theta(۱+\frac{۱}{\text{Cos}^{۲}\theta}) - (۱+\text{Cos}^{۲}\theta - ۲\text{Cos}\theta) = \cancel{\text{Cos}^{۲}\theta} + \cancel{۱} - \cancel{۱} - \cancel{\text{Cos}^{۲}\theta} + ۲\text{Cos}\theta = ۲\text{Cos}\theta$$

روش دوم: $\theta = ۶۰^\circ$ یا ۳۰°

و حاصل را با گزینه‌ها مقایسه می‌کنیم.

مثال: در صورتی‌که $\text{Sin}\theta + \text{Cos}\theta = ۱$ باشد، حاصل $\text{Sin}\theta.\text{Cos}\theta(\tan\theta - \text{Cot}\theta)$ برابر است با:

۱) $\text{Sin}\theta - \text{Cos}\theta$ ۲) $\tan\theta - \text{Cos}\theta$ ۳) $\text{Cos}\theta - \text{Sin}\theta$ ۴) $\text{Cos}\theta - \tan\theta$

پاسخ: گزینه ۱

$$\text{عبارت} = \text{Sin}\theta.\text{Cos}\theta(\frac{\text{Sin}\theta}{\text{Cos}\theta} - \frac{\text{Cos}\theta}{\text{Sin}\theta}) = \text{Sin}^{۲}\theta - \text{Cos}^{۲}\theta = (\text{Sin}\theta - \text{Cos}\theta)(\text{Sin}\theta + \text{Cos}\theta) = \text{Sin}\theta - \text{Cos}\theta$$

مثال: در صورتی‌که $\frac{۳}{۲} = \frac{\text{Sin}\theta}{\text{Sin}\theta - \text{Cos}\theta}$ باشد، مقدار $\tan\theta$ برابر است با:

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

پاسخ: گزینه ۲

$$\frac{\text{Sin}\theta}{\text{Sin}\theta - \text{Cos}\theta} = \frac{۳}{۲} \Rightarrow ۲\text{Sin}\theta = ۳\text{Sin}\theta - ۳\text{Cos}\theta$$

$$\Rightarrow ۲\text{Sin}\theta - ۳\text{Sin}\theta = -۳\text{Cos}\theta \Rightarrow -\text{Sin}\theta = -۳\text{Cos}\theta \Rightarrow \frac{\text{Sin}\theta}{\text{Cos}\theta} = \frac{-۳}{-۱} \Rightarrow \tan\theta = ۳$$

مثال: در رابطه‌ی $A(۱+\text{Cot}^۲\theta)=۱$، عبارت A برابر است با:

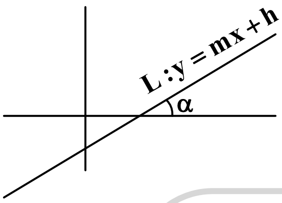
۱) $۱-\tan^۲\theta$ ۲) $۱-\text{Sin}^۲\theta$ ۳) $۱-\text{Cot}^۲\theta$ ۴) $۱-\text{Cos}^۲\theta$

پاسخ: گزینه ۴

$$A=\frac{۱}{۱+\text{Cot}^۲\theta}=\frac{۱}{\frac{۱}{\text{Sin}^۲\theta}}=\text{Sin}^۲\theta=۱-\text{Cos}^۲\theta$$

رابطه‌ی شیب خط و زاویه‌ای که خط با محور افقی می‌سازد:

اگر L با جهت مثبت محور افقی (x) زاویه α بسازد داریم:

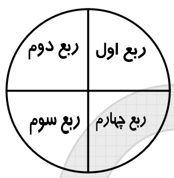


$m=\tan\alpha$ شیب خط

مثال: خط $\sqrt{۳}y=۳x-۱$ با جهت مثبت محور x ها چه زاویه‌ای می‌سازد.

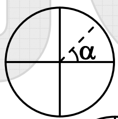
$$-\sqrt{۳}y=-۳x+۱\Rightarrow y=\frac{۳}{\sqrt{۳}}x-\frac{۱}{\sqrt{۳}}\Rightarrow y=\sqrt{۳}x-\frac{۱}{\sqrt{۳}}\Rightarrow \text{شیب خط}=\sqrt{۳}\Rightarrow \tan\alpha=\sqrt{۳}\Rightarrow \alpha=۶۰^\circ$$

دایره‌ی مثلثاتی:

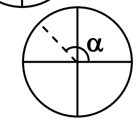


علامت نسبت‌های مثلثاتی در ربع‌های مختلف

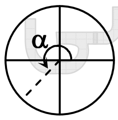
ربع اول $۰<\alpha<۹۰$ $\text{Sin}\alpha>۰$ ، $\text{Cos}\alpha>۰$ ، $\tan\alpha>۰$



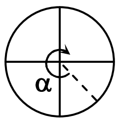
ربع دوم $۹۰<\alpha<۱۸۰$ $\text{Sin}\alpha>۰$ ، $\text{Cos}\alpha<۰$ ، $\tan\alpha<۰$



ربع سوم $۱۸۰<\alpha<۲۷۰$ $\text{Sin}\alpha<۰$ ، $\text{Cos}\alpha<۰$ ، $\tan\alpha>۰$



ربع چهارم $۲۷۰<\alpha<۳۶۰$ $\text{Sin}\alpha<۰$ ، $\text{Cos}\alpha>۰$ ، $\tan\alpha<۰$



مثال: اگر $\text{Sin}\alpha\cdot\text{Cos}\alpha>۰$ باشد، انتهای کمان روبه‌رو به α در کدام ربع مثلثاتی قرار دارد؟

۱) اول یا دوم ۲) دوم یا سوم ۳) سوم یا چهارم ۴) اول یا سوم

پاسخ: گزینه ۴

$\text{Sin}\alpha\cdot\text{Cos}\alpha>۰\Rightarrow$ $\text{Sin}\alpha$ و $\text{Cos}\alpha$ هم‌علامت هستند.

پس یا هر دو مثبت هستند یا هر دو منفی، لذا یا در ربع اول‌اند یا سوم.

فصل هفتم

معادلات درجه دوم و حل آن‌ها

معادله‌هایی‌که پس از ساده کردن بالاترین درجه متغیر آن‌ها ۲ باشد را معادله‌ی درجه دوم گویند.

فرم کلی معادله درجه دوم به صورت $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$ می‌باشد که a,b,c اعداد ثابتی هستند.

روش‌های حل معادله درجه دوم

۱) آزمون و خطا

۲) روش هندسی

۳) روش تجزیه

در این روش ابتدا عبارت سمت چپ را به حاصل‌ضرب دو پرانتز تبدیل می‌کنیم (تجزیه) سپس با توجه به قاعده‌ی زیر جواب را محاسبه می‌کنیم.
برای آن‌که ضرب دو عدد صفر شود باید حداقل یکی از آن‌ها صفر باشد.

$$a\times b=0\Rightarrow\begin{cases}a=0\\ \text{یا}\\ b=0\\ \text{یا هر دو}=0\end{cases}$$

مثال: معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$x^2-3x=0$$

$$\xrightarrow[\text{در ریاضی ۳}]{\text{روش فاکتور صفر}} x(x-3)=0\begin{cases}x=0\\ x-3=0\Rightarrow x=3\end{cases}$$

مثال: برای حل معادله‌ی درجه دوم $x^2+ax+b=0$، جدول زیر مفروض است، ریشه‌ی مثبت معادله در کدام نامساوی صدق می‌کند؟

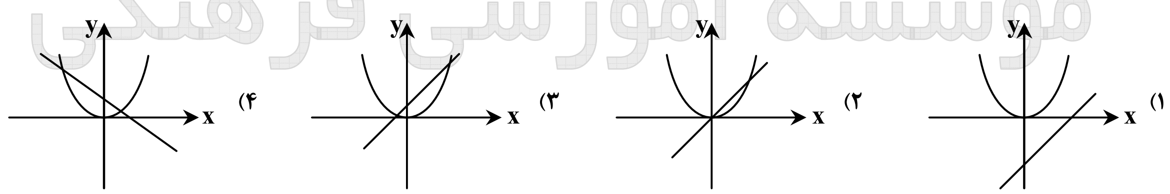
x	۲	۳	۴	۵	۶
x^2+ax+b	۱۴	۷	۲	۱-	۲-

۱) $2<x<3$
۲) $3<x<4$
۳) $4<x<5$
۴) $5<x<6$

پاسخ: گزینه ۳

به‌دلیل این‌که مقدار تابع در $x=4$ مثبت و در $x=5$ منفی است، پس ریشه‌ی معادله بین $x=4$ و $x=5$ می‌باشد.

مثال: برای حل معادله‌ی $x^2-3x-1=0$، نمودار $y_1=x^2$ و خط $y_2=3x+1$ را در یک دستگاه محورهای مختصات رسم کرده‌ایم، کدام نمودار زیر به‌دست می‌آید؟



پاسخ: گزینه ۳

باید خط $y=3x+1$ به‌صورت صحیح ترسیم شود که در آن شیب مثبت است و عرض از مبدأ نیز مثبت می‌باشد.

مثال: برای آن‌که $x=1$ ریشه‌ی معادله‌ی $x^3+a^2x^2-3ax+1=0$ باشد، a کدام است؟

۱) $a=0,a=1$ ۲) $a=1;a=-1$ ۳) $a=-2,a=2$ ۴) $a=1,a=2$

پاسخ: گزینه ۴

$x=1$ ریشه‌ی معادله است پس باید در آن صدق کند، پس:

$$1+a^2-3a+1=0\Rightarrow a^2-3a+2=0$$

$$\Delta=9-8=1\Rightarrow a=\frac{3+1}{2}=2 \ \text{یا}\ a=\frac{3-1}{2}=1$$

۴) روش مربع کامل کردن (همان روش خوارزمی است که نیاز به دید هندسی ندارد.)

مراحل:

۱) ابتدا عدد ثابت را به‌سمت دیگر تساوی می‌بریم.

۲) تمام عبارت را بر ضریب $(a)x^{۲}$ تقسیم می‌کنیم.

۳) مربع نصف ضریب x را به دو طرف تساوی اضافه می‌کنیم.

۴) عبارت سمت چپ را به فرم مربع کامل می‌نویسیم و با جذرگیری از دو طرف جواب‌های معادله محاسبه می‌شوند.

مثال: معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$۲x^{۲}+۴x-۱=۰ \Rightarrow ۲x^{۲}+۴x=۱ \Rightarrow x^{۲}+۲x=\frac{۱}{۲} \Rightarrow x^{۲}+۲x+۱=\frac{۱}{۲}+۱$$

$$(x+۱)^{۲}=\frac{۳}{۲} \Rightarrow \begin{cases} x+۱=\sqrt{\frac{۳}{۲}} \\ x+۱=-\sqrt{\frac{۳}{۲}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-۱+\sqrt{\frac{۳}{۲}} \\ x=-۱-\sqrt{\frac{۳}{۲}} \end{cases}$$

۵) فرمول کلی حل معادلات درجه دوم

فرم کلی معادله درجه دوم به‌صورت $ax^{۲}+bx+c=۰$ $(a\neq ۰)$ است و برای آن مبین معادله یا دلتای معادله (Δ) به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Delta=b^{۲}-۴ac$$

دقت: c, b, a ضرائب مجهول‌ها هستند.

حال با توجه به علامت Δ جواب‌های معادله به شرح زیر می‌باشند:

۱) $\Delta>۰$ معادله دو ریشه‌ی حقیقی متمایز دارد:

$$x_{۱}=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a}$$

$$x_{۲}=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a}$$

۲) $\Delta=۰$ در این حالت عبارت جبری را می‌توان به فرم مربع کامل نوشت ← معادله دارای دو ریشه‌ی یکسان و به اصطلاح ریشه‌ی مضاعف است.

$$x_{۱}=\frac{-b}{۲a}$$

۳) $\Delta<۰$ معادله فاقد ریشه‌ی حقیقی است.

مثال: در مورد تعداد جواب‌ها و جواب‌های معادله‌ی $۷x^{۲}-۸x+۱=۰$ بحث کنید.

$۷x^{۲}-۸x+۱=۰ \Rightarrow \Delta=۶۴-۲۸=۳۶ \Rightarrow$ دو ریشه‌ی متمایز دارد

$$x_{۱}=\frac{۸+\sqrt{۳۶}}{۱۴}=\frac{۸+۶}{۱۴}=۱$$

$$x_{۲}=\frac{۸-\sqrt{۳۶}}{۱۴}=\frac{۸-۶}{۱۴}=\frac{۲}{۱۴}=\frac{۱}{۷}$$

مثال: کدام‌یک از معادلات زیر دارای دو ریشه‌ی متمایز است؟

۱) $x^{۲}+۲x=-۳$ ۲) $x^{۲}+x=۱$ ۳) $x^{۲}-x=-۲$ ۴) $۲x^{۲}-x=-۳$

پاسخ: گزینه ۲

گزینه‌ی ۱: $x^{۲}+۲x+۳=۰ : \Delta=۴-۱۲=-۸<۰ \Rightarrow$ فاقد ریشه

گزینه‌ی ۲: $x^{۲}+x-۱=۰ : \Delta=۱+۴=۵>۰$ دو ریشه‌ی حقیقی دارد

گزینه‌ی ۳: $x^{۲}-x+۲=۰ \Rightarrow \Delta=۱-۸=-۷<۰ \Rightarrow$ فاقد ریشه

گزینه‌ی ۴: $۲x^{۲}-x+۳=۰ \Rightarrow \Delta=۱-۲۴=-۲۳<۰ \Rightarrow$ فاقد ریشه

مثال: اگر معادله‌ی $x^{۲}+۲mx+m^{۲}+n=۰$ دارای دو ریشه‌ی مساوی باشد، بین m و n کدام رابطه برقرار است؟

۱) $m-n=۰$ ۲) $m+n=۰$ ۳) $m=۰$ ۴) $n=۰$

پاسخ: گزینه ۴

$$\Delta=۰ \Rightarrow ۴m^{۲}-۴(m^{۲}+n)=۰ \Rightarrow -۴n=۰ \Rightarrow n=۰$$

مثال: ریشه‌های معادله‌ی $x^2+2x\sqrt{5}+5=0$:

۱) گویا و برابرند. ۲) گنگ و برابرند. ۳) گویا و نابرابرند. ۴) گنگ و نابرابرند.

پاسخ: گزینه ۲

$\Delta=(2\sqrt{5})^2-4\times5=20-20=0$ ریشه‌ی مضاعف دارد

$$x=\frac{-2\sqrt{5}}{2}=-\sqrt{5}$$

مثال: اگر در معادله‌ی درجه دوم $x^2-(2m+1)x-m=6$، یکی از ریشه‌ها برابر ۱ باشد، مجموع عکس ریشه‌های معادله کدام است؟

۱) $\frac{4}{3}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{3}{2}$

پاسخ: گزینه ۲

ریشه $x=1 \Rightarrow 1-(2m+1)-m=6 \Rightarrow -3m=6 \Rightarrow m=-2$

معادله را بازنویسی می‌کنیم $x^2+3x+2=6 \Rightarrow x^2+3x-4=0$

$$\Delta=9+16=25 \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-3+5}{2}=1 \\ x=\dfrac{-3-5}{2}=-4 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{1}-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

مثال: معادله‌ی $x^2-2mx+6-m=0$، به‌ازای کدام‌یک از مقادیر m دارای دو ریشه‌ی مساوی است؟

۱) ۲- و ۳ ۲) ۲ و ۳- ۳) ۱- و $\frac{3}{2}$ ۴) ۱ و $-\frac{3}{2}$

پاسخ: گزینه ۲

$$\Delta=0 \Rightarrow 4m^2-4(6-m)=0 \Rightarrow 4m^2+4m-24=0 \Rightarrow m^2+m-6=0$$

$$\Delta=1+24=25=\begin{cases} m=\dfrac{-1+5}{2}=2 \\ m=\dfrac{-1-5}{2}=-3 \end{cases}$$

مثال: ریشه‌های معادله‌ی $35x^2-20x-15=0$ برابرند با:

۱) $x'=1$ و $x''=-\frac{3}{7}$ ۲) $x'=-1$ و $x''=\frac{3}{7}$ ۳) $x'=1$ و $x''=\frac{3}{7}$ ۴) $x'=x''=-\frac{3}{7}$

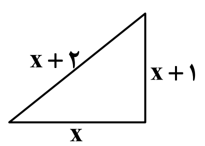
پاسخ: گزینه ۳

نکته: در معادله‌ی درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ اگر جمع ضرائب صفر باشد یک ریشه‌ی معادله $x=1$ و ریشه‌ی دیگر $x=\frac{c}{a}$ خواهد بود.

نکته: در معادله‌ی درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ اگر $a+c=b$ باشد، آن‌گاه یک ریشه‌ی معادله $x=-1$ و ریشه‌ی دیگر $x=-\frac{c}{a}$ خواهد بود.

گاهی مسئله به زبان نوشتاری داده شده که دانش‌آموزان باید آن را به فرم معادله نوشته و حل نمایند. فقط باید دقت شود که ممکن است برخی جواب‌ها قابل قبول نباشد.

مثال: اگر اضلاع یک مثلث قائم‌الزاویه به شکل روبه‌رو باشد x را بیابید.



$$(x+2)^2=x^2+(x+1)^2$$

$$x^2+4x+4=x^2+x^2+2x+1 \Rightarrow -x^2+2x+3=0 \Rightarrow x^2-2x-3=0$$

$$\Delta=4+12=16\begin{cases} x_1=\dfrac{2+4}{2}=3 \\ x_2=\dfrac{2-4}{2}=-1 \end{cases}$$

که جواب ۱- برای x قابل‌قبول نیست، زیرا x طول ضلع است و نمی‌تواند منفی باشد.

مثال: ۴ برابر مربع عددی از ۱۲ برابر آن عدد ۹ واحد کم‌تر است. معکوس آن عدد کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) $\frac{۵}{۶}$

پاسخ: گزینه ۱

$$۴x^۲ = ۱۲x - ۹ \Rightarrow ۴x^۲ - ۱۲x + ۹ = ۰ \Rightarrow (۲x - ۳)^۲ = ۰ \Rightarrow ۲x = ۳ \Rightarrow x = \frac{۳}{۲}$$

معکوس عدد خواسته شده پس جواب $\frac{۲}{۳}$ می‌باشد.

فصل هشتم

عبارت‌های گویا

عبارت‌های جبری که پس از ساده کردن به‌صورت تقسیم دو چندجمله‌ای درمی‌آیند را عبارات گویا گویند (مخرج کسر شامل متغیر باشد).
مثلاً:

گویا: $7\ ,\ 4xy^2\ ,\ \frac{xy+x^2-1}{2x+y}\ ,\ \frac{x+2}{x-3}$

گویا نیستند: $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+y}\ ,\ \sqrt[3]{x}\ ,\ \frac{\sqrt{x}+1}{x-3}$

اعمال جبری روی عبارات گویا

$$\frac{A}{C}\pm\frac{B}{C}=\frac{A\pm B}{C}$$

$$\frac{A}{B}\pm\frac{C}{D}=\frac{AD\pm CB}{BD}$$ (مخرج مشترک)

$$\frac{A}{B}\div\frac{C}{D}=\frac{A}{B}\times\frac{D}{C}=\frac{AD}{BC}$$

$$\frac{A}{B}\times\frac{C}{D}=\frac{AC}{BD}$$

مثال: عبارت گویایی بیابید که اگر با $\frac{x+1}{x-2}$ جمع شود حاصل برابر ۳ شود.

$$\frac{x+1}{x-2}+A=3 \Rightarrow A=3-\frac{x+1}{x-2}$$

مخرج مشترک : $A=\frac{3}{1}-\frac{x+1}{x-2} \Rightarrow A=\frac{3(x-2)-(x+1)}{x-2} \Rightarrow A=\frac{3x-6-x-1}{x-2}=\frac{-4x-7}{x-2} \Rightarrow A=\frac{-4x-7}{x-2}$

مثال: نسبت $2x-y$ به $x+2y$ برابر $\frac{2}{3}$ است. نسبت x به y چقدر خواهد بود؟

$$\frac{2x-y}{x+2y}=\frac{2}{3} \Rightarrow 6x-3y=2x+4y \Rightarrow 4x=7y \Rightarrow \frac{x}{y}=\frac{7}{4}$$

مثال: اگر رابطه‌ی $\frac{5x-1}{x^2-1}=\frac{B}{x+1}+\frac{A}{x-1}$ نسبت به x یک اتحاد باشد، آن‌گاه حاصل $(A+B)$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۴ ۴) ۳

پاسخ: گزینه ۱

$$\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}=\frac{5x-1}{x^2-1} \Rightarrow \frac{A(x+1)+B(x-1)}{x^2-1}=\frac{5x-1}{x^2-1} \Rightarrow Ax+A+Bx-B=5x-1 \Rightarrow (A+B)x+A-B=5x-1$$

$$\Rightarrow \begin{cases}A+B=5\\A-B=-1\end{cases} \Rightarrow 2A=4 \Rightarrow A=2 \Rightarrow B=3$$

ساده‌سازی عبارات گویا

برای ساده‌سازی باید تمام جملات را تجزیه نمود سپس عمل ساده‌سازی را انجام داد:

مثال: حاصل عبارات زیر را بیابید.

الف) $$\frac{x^2-7x+6}{x^2-1} \underset{\text{مزدوج}}{=} \frac{\cancel{(x-1)}(x-6)}{\cancel{(x-1)}(x+1)}=\frac{x-6}{x+1}$$

عبارت فوق دیگر ساده نمی‌شود. دقت کنید که نباید x را با x ساده کنید!!!

ب) $$\frac{4x^2-25y^2}{2x^2y+5xy^2}\div\frac{6x^2-15xy}{9x^2y^2}=\frac{\cancel{(2x+5y)}\ \cancel{(2x-5y)}}{\cancel{x}y\ \cancel{(2x+5y)}}\times\frac{\overset{3}{\cancel{9}}\ \cancel{x^2}\ y^2}{\cancel{3}\ \cancel{x}\ \cancel{(2x-5y)}}=3y$$

مثال: عبارت $\frac{1-y+y^3-y^4}{1-y}$ با کدام عبارت زیر هم‌ارز است؟ $(y \neq 1)$

۱) y^3 ۲) y^3+1 ۳) $1-y+y^3$ ۴) y^3-y^4

پاسخ: گزینه ۲

$$\frac{1-y+y^3(1-y)}{1-y}=\frac{\cancel{(1-y)}(1+y^3)}{\cancel{1-y}}=1+y^3$$

راه حل دیگر: عددگذاری: به‌جای y عدد ۲ را قرار می‌دهیم و حاصل عبارت را با مقدار گزینه‌ها مقایسه می‌کنیم.

مثال: اگر $A=x-\frac{5x-6}{x}$ و $B=\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}$، آن‌گاه $\frac{A}{B}+1$ برابر کدام است؟

۱) x^2 ۲) $(x+1)^2$ ۳) $(x-1)^2$ ۴) $(2x-1)^2$

پاسخ: گزینه ۳

$$\begin{cases}A=\frac{x^2-5x+6}{x}\\ B=\frac{x-3}{x^2}\end{cases} \Rightarrow \frac{A}{B}+1=\frac{\frac{x^2-5x+6}{x}}{\frac{x-3}{x^2}}+1=\frac{x(x^2-5x+6)}{(x-3)}+1=\frac{x(x-2)\cancel{(x-3)}}{\cancel{x-3}}+1=x^2-2x+1=(x-1)^2$$

راه حل دیگر: به‌جای x در A و B عدد ۱ را قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases}A=1-\frac{-1}{1}=2\\ B=1-3=-2\end{cases} \Rightarrow \frac{A}{B}+1=\frac{2}{-2}+1=0$$

حال گزینه‌ها را به‌ازای $x=1$ محاسبه می‌کنیم.

مثال: حاصل عبارت $\frac{x+1}{x^2+2x}\div(2-\frac{x^2+1}{x+2})$ کدام است؟

۱) x^2-3x ۲) x^2-x ۳) x^2+x ۴) x^2+3x

پاسخ: گزینه ۱

$$\frac{x^2+1-2x-4}{x+2}\times\frac{x^2+2x}{x+1} \Rightarrow \frac{x^2-2x-3}{x+2}\times\frac{x(x+2)}{x+1}=\frac{\cancel{(x+1)}(x-3)}{\cancel{x+2}}\times\frac{x\cancel{(x+2)}}{\cancel{x+1}}=x(x-3)=x^2-3x$$

راه حل دیگر:

$$x=1:(\frac{2}{3}-2)\div\frac{2}{3}=\frac{-\frac{4}{3}}{\frac{2}{3}}=-2$$

فقط گزینه‌ی (۱) به‌ازای $x=1$ جواب ۲- می‌دهد.

مثال: خلاصه شده‌ی عبارت $(x-5+\frac{6}{x+2})\div(1-\frac{1}{x+2})$ کدام است؟

۱) $x+3$ ۲) $x-3$ ۳) $x-4$ ۴) $x-6$

پاسخ: گزینه ۳

از راه حل عددگذاری استفاده می‌کنیم:

$$x=4:(4-5+\frac{6}{4+2})\div(1-\frac{1}{4+2})=(-1+1)\div(1-\frac{1}{6})=\frac{0}{\frac{1}{6}}=0$$

فقط گزینه‌ی (۳) به‌ازای $x=4$ برابر صفر است.

دقت: اگر صورت کسر صفر باشد و مخرج کسر عبارتی غیرصفر آن‌گاه حاصل صفر می‌شود:

$$\frac{0}{\text{عبارت غیرصفر}}=0$$

دقت: اگر صورت غیرصفر و برابر مخرج باشد، حاصل ۱ می‌شود:

$$\frac{A}{A}=1 \leftarrow \text{مخالف صفر}$$

دقت: اگر مخرج کسر برابر صفر باشد، عبارت تعریف نشده خواهد بود.

مثال: عبارت $\frac{x^2-2x+1}{2x^2-x}$ به‌ازای کدام‌یک از مقادیر زیر تعریف نشده است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) -2 ۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۴) 1

پاسخ: گزینه ۱

$$x(2x-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow$$ $\frac{1}{2}$ در گزینه‌ها موجود است، پس گزینه‌ی (۱) صحیح است.

تقسیم چندجمله‌ای‌ها

تقسیم تک‌جمله‌ای بر تک‌جمله‌ای: همان قواعد توان برقرار است. مثلاً داریم:

$$\frac{5x^2}{3x}=\frac{5}{3}x$$

تقسیم چندجمله‌ای بر تک‌جمله‌ای (تفکیک کردن): تک‌جمله‌ای را در مخرج هر کدام از جمله‌های چندجمله‌ای قرار می‌دهیم. مثلاً داریم:

$$\frac{5x^2y+3xy^2}{2xy}=\frac{5x^2y}{2xy}+\frac{3xy^2}{2xy}=\frac{5}{2}x+\frac{3}{2}y$$

تقسیم چندجمله‌ای بر چندجمله‌ای

در این حالت چندجمله‌ای‌های یک متغیره مورد بررسی قرار می‌گیرند.
عمل تقسیم را به شکلی مانند زیر که همانند تقسیم اعداد طبیعی است انجام می‌دهیم و برای انجام عمل تقسیم باید درجه‌ی مقسوم از درجه‌ی مقسوم‌علیه بزرگ‌تر یا مساوی باشد.

$$\begin{array}{c|c} \text{مقسوم} & \text{مقسوم‌علیه} \\ \vdots & \text{خارج قسمت} \\ \hline \text{باقی‌مانده} & \end{array}$$

مراحل انجام تقسیم

مراحل را با انجام عمل تقسیم زیر بیان می‌کنیم:

$$\frac{-2x^2+x^3-1+3x}{1-x}$$

۱- مقسوم و مقسوم‌علیه را به فرم استاندارد (از بالاترین توان به کم‌ترین توان) می‌نویسیم.

$$\begin{array}{l|l} x^3-2x^2+3x-1 & -x+1 \\ & \end{array}$$

۲- اولین جمله‌ی مقسوم را بر اولین جمله‌ی مقسوم‌علیه تقسیم می‌کنیم و حاصل را در محل خارج‌قسمت می‌نویسیم:

$$\begin{array}{l|l} x^3-2x^2+3x-1 & -x+1 \\ \cline{2-2} & -x^2 \end{array}$$

۳- خارج‌قسمت به‌دست آمده در مرحله‌ی قبل را در مقسوم‌علیه ضرب کرده و با علامت قرینه زیر مقسوم می‌نویسیم و با مقسوم جمع می‌کنیم و حاصل را به‌صورت استاندارد می‌نویسیم:

$$\begin{array}{l|l} \cancel{x^3}-2x^2+3x-1 & -x+1 \\ \cline{2-2} -\cancel{x^3}+x^2 & -x^2 \\ \hline -x^2+3x-1 & \end{array}$$

۴- چندجمله‌ای جدید را به مانند مقسوم جدید گرفته و مراحل ۲ و ۳ را برای آن‌ها اعمال می‌کنیم. تقسیم تا زمانی ادامه می‌یابد که درجه‌ی چندجمله‌ای به‌دست آمده (باقی‌مانده) از درجه‌ی مقسوم‌علیه کم‌تر شود.

$$\begin{array}{l|l}
\cancel{x^3}-2x^2+3x-1 & -x+1 \\ \cline{2-2}
-\cancel{x^3}+x^2 & -x^2+x-2 \\ \cline{1-1}
\quad -\cancel{x^2}+3x-1 & \\
\quad \cancel{x^2}-x & \\ \cline{1-1}
\qquad 2x-1 & \\
\qquad -2x+2 & \\ \cline{1-1}
\qquad\quad 1 &
\end{array}$$

در این حالت، عبارت به‌دست آمده باقی‌مانده خواهد بود.

اگر مقسوم بر مقسوم‌علیه بخش‌پذیر باشد، باقی‌مانده صفر خواهد شد.

دقت: در هر عمل تقسیم داریم:

باقی‌مانده + خارج‌قسمت × مقسوم‌علیه = مقسوم

مثلاً برای تقسیمی که در بالا انجام شد داریم:

$$x^3-2x^2+3x-1=(-x+1)(-x^2+x-2)+1$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$\frac{x^3-2x^2+3x-1}{-x+1}=\underbrace{-x^2+x-2}_{\text{خارج‌قسمت}}+\frac{1}{\boxed{-x+1}}\quad \begin{array}{l}\to \text{باقی‌مانده}\\ \to \text{مقسوم‌علیه}\end{array}$$

مثال: مقدار خارج قسمت تقسیم $2x^3-5x+4$ بر $x-2$ به‌ازای $x=0$ چقدر است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینه ۴

$$\begin{array}{l|l}
2x^3-5x+4 & x-2 \\ \cline{2-2}
-2x^3+4x^2 & \boxed{2x^2+4x+3} \to \text{خارج‌قسمت} \\ \cline{1-1}
\quad 4x^2-5x+4 & \\
\quad -4x^2+8x & \\ \cline{1-1}
\qquad 3x+4 & \\
\qquad -3x+6 & \\ \cline{1-1}
\qquad\quad 10 &
\end{array}$$

$$x=0 \Rightarrow \text{خارج‌قسمت}=3$$

مثال: در تقسیم x^2-x+a بر $x-a$، خارج‌قسمت $x+2$ و باقی‌مانده $3a$ شده، مقدار a چقدر است؟

۱) ۴- ۲) ۳ ۳) ۲- ۴) ۱

پاسخ: گزینه ۲

باقی‌مانده + خارج‌قسمت × مقسوم‌علیه = مقسوم

$$\Rightarrow x^2-x+a=(x-a)(x+2)+3a \Rightarrow x^2-x+a=x^2+(2-a)x+a \xrightarrow{\text{با متحد قرار دادن}} 2-a=-1$$

$$\Rightarrow -a=-3 \Rightarrow a=3$$

تعیین باقی‌مانده به روش سریع

اگر مقسوم‌علیه درجه اول باشد، ریشه‌ی مقسوم‌علیه را یافته و در مقسوم جایگذاری می‌کنیم. جواب به‌دست آمده همان باقی‌مانده خواهد بود.

مثال: باقی‌مانده‌ی x^3+3x^2-2x+1 را بر $x-2$ بیابید.

پاسخ:

$$x-2=0 \Rightarrow x=2$$

$x=2$ را در مقسوم جایگذاری می‌کنیم $\rightarrow$ $2^3+2^2\times 3-2\times 2+1=8+12-4+1=17$:باقی‌مانده

اما راه تشریحی:

$$\begin{array}{l|l}
x^3+3x^2-2x+1 & x-2 \\
\cline{2-2}
-x^3+2x^2 & x^2+5x+8 \\
\cline{1-1}
\quad 5x^2-2x+1 & \\
\quad -5x^2+10x & \\
\cline{1-1}
\qquad 8x+1 & \\
\qquad -8x+16 & \\
\cline{1-1}
\qquad\quad 17 &
\end{array}$$

مثال: باقی‌مانده‌ی تقسیم $x^5-x^4+2x^2-3x-5$ بر $x-1$ کدام است؟

۱) -5 ۲) -6 ۳) 5 ۴) 6

پاسخ: گزینه ۲

$$x-1=0 \Rightarrow x=1$$

در عبارت مقسوم جایگذاری می‌کنیم : $1-1+2-3-5=-6$

مثال: در تقسیم $(x^4-x^3)\div(x^2+2)$ باقی‌مانده کدام است؟

۱) $x+2$ ۲) $-x+2$ ۳) $2x+4$ ۴) $-2x+4$

پاسخ: گزینه ۳

$$\begin{array}{l|l}
x^4-x^3 & x^2+2 \\
\cline{2-2}
-x^4-2x^2 & x^2-x-2 \\
\cline{1-1}
\quad -x^3-2x^2 & \\
\quad\ x^3+2x & \\
\cline{1-1}
\qquad -2x^2+2x & \\
\qquad\ 2x^2+4 & \\
\cline{1-1}
\qquad \boxed{2x+4} \rightarrow \text{باقی‌مانده} &
\end{array}$$

راه حل دیگر:

$$x^2+2=0 \Rightarrow x^2=-2$$

$$x^4-x^3=(x^2)^2-x\times x^2=(-2)^2-(-2)\times x=\underbrace{4+2x}_{\text{باقی‌مانده}}$$

عبارت رادیکالی

به عبارت‌های جبری که در آن محاسبات ریشه‌گیری وجود دارد، عبارت‌های رادیکالی می‌گویند.

$$\sqrt{1+x^2}\ ,\quad \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{y}}{x+y}\ ,\quad \frac{1}{\sqrt{x}+y}$$

دقت: $\sqrt{(\text{عبارت})^2}=|\text{عبارت}|$

مثال: حاصل عبارت $\sqrt{a^۲+۲a+۱}-\sqrt{a^۲-۲a+۱}$ اگر $a>۱$ باشد، با کدام گزینه برابر است؟

۱) $۲a-۲$ ۲) $۲a+۲$ ۳) $۲a$ ۴) ۲

پاسخ: گزینه ۴

$$\sqrt{(a+۱)^۲}-\sqrt{(a-۱)^۲}=|a+۱|-|a-۱|\overset{a>۱}{=\!=}(a+۱)-(a-۱)=۲$$

گویا کردن عبارت‌های رادیکالی

همانند گویا کردن کسرهای رادیکالی که در قبل گفته شد می‌باشد.

مثال : $\dfrac{۲}{\sqrt{x}-۱}\times\dfrac{\sqrt{x}+۱}{\sqrt{x}+۱}=\dfrac{۲(\sqrt{x}+۱)}{x-۱}=\dfrac{۲\sqrt{x}+۲}{x-۱}$

فصل نهم

نامعادلات درجه اول

هرگاه در معادله‌ی درجه اول به‌جای تساوی یکی از علائم $<$ و $>$ و $\geq$ و $\leq$ قرار گیرد، به آن نامعادله‌ی درجه اول گویند.
به‌عنوان مثال:

۱) $2x+1<3x-1$

۲) $\frac{3x+1}{5}\geq\frac{2x-1}{3}$

جواب‌های نامعادله

مقادیری از متغیر است که به‌ازای آن‌ها نامساوی برقرار شود. یعنی تعداد جواب‌ها ممکن است زیاد یا بی‌شمار باشد و به همین دلیل به آن مجموعه جواب گویند.

روش حل نامعادله

روش حل مانند معادله درجه اول است، فقط در انتها برای یافتن x باید دقت کرد که اگر دو طرف نامساوی را در یک عدد منفی ضرب یا تقسیم کنیم، جهت نامساوی عوض می‌شود.

مثال: نامعادلات ساده‌ی زیر را حل کنید.

$-2x>3 \Rightarrow x<-\frac{3}{2}$

$-3x\leq-7 \Rightarrow x\geq\frac{-7}{-3} \Rightarrow x\geq\frac{7}{3}$

بیان ریاضی مطلب فوق:

$x<y$

اگر $a>0 \Rightarrow ax<ay$

اگر $a<0 \Rightarrow ax>ay$

مثال: نامعادله‌های زیر را حل کنید:

۱) $\frac{2x+1}{5}<\frac{x+3}{2}$

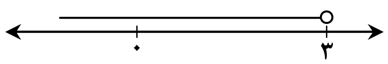
$\Rightarrow 4x+2<5x+15 \Rightarrow 4x-5x<15-2 \Rightarrow -x<13 \Rightarrow$ دو طرف را در ۱- ضرب می‌کنیم (یا بر ۱- تقسیم می‌کنیم): $x>-13$

۲) $\frac{x}{4}\leq\frac{x}{2}-\frac{x}{3}+1$

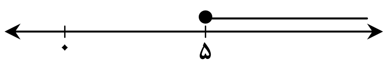
دو طرف را در ۱۲ ضرب می‌کنیم: $3x\leq\overset{2x}{\cancel{6x-4x}}+12 \Rightarrow x\leq12$

دقت: مجموعه جواب را می‌توان روی محور اعداد نمایش داد.

مثال: $x<3$



$x\geq5$



مثال: اگر b و a مختلف‌العلامه و $a>b$ باشد، در صورتی‌که $c<0$ باشد، کدام گزینه صحیح است؟

۱) $\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$ ۲) $ac>bc$ ۳) $\frac{c}{a}<\frac{a}{c}$ ۴) $\frac{a}{c}<\frac{b}{c}$

پاسخ: گزینه ۴

$$\begin{cases}a>b\\c<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}ac<bc\\\frac{a}{c}<\frac{b}{c}\end{cases}$$

مثال: حداکثر «چند عدد اول» در مجموعه جواب نامعادله‌ی $۳-\frac{x}{۲}\geq ۱$ قرار دارند؟

۱) ۲ ‏ ۲) ۳ ‏ ۳) ۱ ‏ ۴) بی‌شمار

پاسخ: گزینه ۱

$$۳-\frac{x}{۲}\geq ۱ \Rightarrow -\frac{x}{۲}\geq -۲ \Rightarrow x\leq ۴$$

عدد اول $x\in\{۲,۳\} \Rightarrow$ تعداد اعــداد اول $= ۲$

مثال: اگر $a>b$ و $c<۰$، آن‌گاه:

۱) $ac^۲>bc^۲$ و $\frac{a}{c}<\frac{b}{c}$ ‏ ۲) $ac^۲<bc^۲$ و $\frac{a}{c}<\frac{b}{c}$ ‏ ۳) $ac^۲>bc^۲$ و $\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$ ‏ ۴) $ac^۲<bc^۲$ و $\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$

پاسخ: گزینه ۱

$$c<۰ \Rightarrow c^۲>۰$$

$$\begin{cases} a>b \\ c^۲>۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ac^۲>bc^۲ \\ \frac{a}{c^۲}>\frac{b}{c^۲} \end{cases} \qquad \begin{cases} a>b \\ c<۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ac<bc \\ \frac{a}{c}<\frac{b}{c} \end{cases}$$

مثال: مجموعه جواب نامعادله‌ی $۱+\frac{۲x-۱}{۹}<\frac{x-۳}{۶}$، کدام گزینه است؟

۱) $x<-۲۵$ ‏ ۲) $x>-۲۵$ ‏ ۳) $x<-۸$ ‏ ۴) $x<۲۵$

پاسخ: گزینه ۱

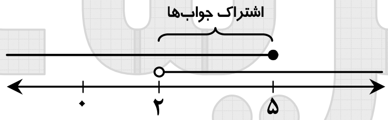
دو طرف را در ۱۸ ضرب می‌کنیم: $۱۸+۲(۲x-۱)<۳(x-۳) \Rightarrow ۱۸+۴x-۲<۳x-۹ \Rightarrow -x>۲۵ \Rightarrow x<-۲۵$

دستگاه نامعادلات

برای حل دستگاه نامعادلات هر نامعادله را جداگانه حل می‌کنیم و مجموعه جواب هر دو را می‌یابیم، سپس هر دو جــواب را روی یــک محــور مشخص نموده و اشتراک آن‌ها را پیدا می‌کنیم.

مثال: دستگاه نامعادله‌ی زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} ۲x-۱>۳ \Rightarrow ۲x>۴ \Rightarrow x>۲ \\ ۱-x\geq -۴ \Rightarrow -x\geq -۵ \Rightarrow x\leq ۵ \end{cases}$$



جواب نهــایی: $\{x \mid ۲<x\leq ۵\} \Leftarrow$

مثال: مجموعه جواب دستگاه نامعادلات $\begin{cases} \frac{۲x+۱}{۳}\geq x-۱ \\ x(x-۴)\leq x^۲-۱۶ \end{cases}$ کدام است؟

۱) $\{۴\}$ ‏ ۲) $\varnothing$ ‏ ۳) $\{x : x\geq ۴\}$ ‏ ۴) $\{x : x\leq ۴\}$

پاسخ: گزینه ۱

$$\frac{۲x+۱}{۳}\geq x-۱ \Rightarrow ۲x+۱\geq ۳x-۳ \Rightarrow -x\geq -۴ \Rightarrow x\leq ۴$$

$$x(x-۴)\leq x^۲-۱۶ \Rightarrow \cancel{x^۲}-۴x\leq \cancel{x^۲}-۱۶ \Rightarrow -۴x\leq -۱۶ \Rightarrow x\geq ۴$$

اشتراک این دو محدوده فقط عدد $\{۴\}$ است.