

فصل ششم

پخش بار

بهروز آدینه

بهار ۹۵

تجزیه و تحلیل پخش بار

در این فصل تجزیه و تحلیل حالت ماندگار یک سیستم قدرت به هم پیوسته را تحت شرایط بهره برداری عادی مورد مطالعه قرار می دهیم. فرض بر آن است که سیستم در شرایط متقاضی مورد بهره برداری قرار گرفته و با یک شبکه تک فاز نمایش داده می شود. شبکه مذکور شامل صدها گره و شاخه می باشد که در آن امپدانس شاخه ها بر حسب pu در مبنای مشترک MVA نشان داده می شود. معادلات شبکه به صورت های نظام مند مختلفی فرمول بندی می شوند. به هر حال معمولا از روش ولتاژ گره^۱ که مناسب ترین روش برای بسیاری از تجزیه و تحلیل های سیستم قدرت است، استفاده می گردد. فرمول بندی معادلات شبکه به صورت ادمیتانس گره منجر به تشکیل معادلات جبری مختلط همزمان بر حسب جریان گره ها می شود. چنانچه جریان گره ها معلوم می باشند، مجموعه معادلات خطی را می توان برای تعیین ولتاژ گره ها حل کرد. در هر صورت، در یک سیستم قدرت، ترجیحاً توان ها بجای جریان ها معلوم فرض می شوند؛ بنابراین، معادلات بدست آمده بر حسب توان به معادلات پخش توان^۲ موسوماند. این

معادلات غیرخطی بوده و باید به روش های مبتنی بر تکرار^۳ حل شوند. مطالعات پخش توان که معمولاً پخش بار^۴ نامیده می شوند، استخوان بندی اصلی تجزیه و تحلیل و طراحی سیستم قدرت را تشکیل می دهد. این مطالعه برای برنامه ریزی، بهره برداری، برنامه ریزی زمان بندی اقتصادی و تبادل توان بین

¹ Node-Voltage method

² Power flow equations

³ Iterative techniques

⁴ Load flow

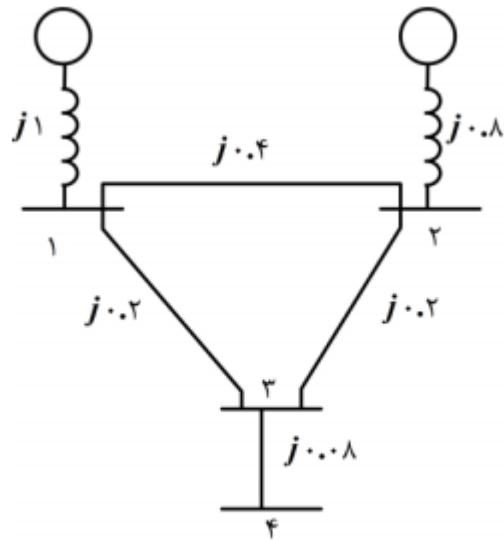
شرکت‌های برق ضروری است. افزون برآن، تجزیه و تحلیل پخش بار برای تحلیل‌های دیگر، مانند مطالعات پایداری گذرا و احتمال وقوع حوادث^۱ مورد نیاز است.

در این فصل، ماتریس ادمیتانس شین، مورد نیاز در مطالعه ولتاژ گره، فرمول‌بندی شده است. سپس دو روش متناول مبتنی بر تکرار، تحت عنوانین گوس-سایدل^۲ و نیوتون-رافسون^۳، برای حل معادلات غیرخطی مورد بحث قرار گرفته‌اند. این روش‌ها در حل مساله پخش بار بکار گرفته شده‌اند.

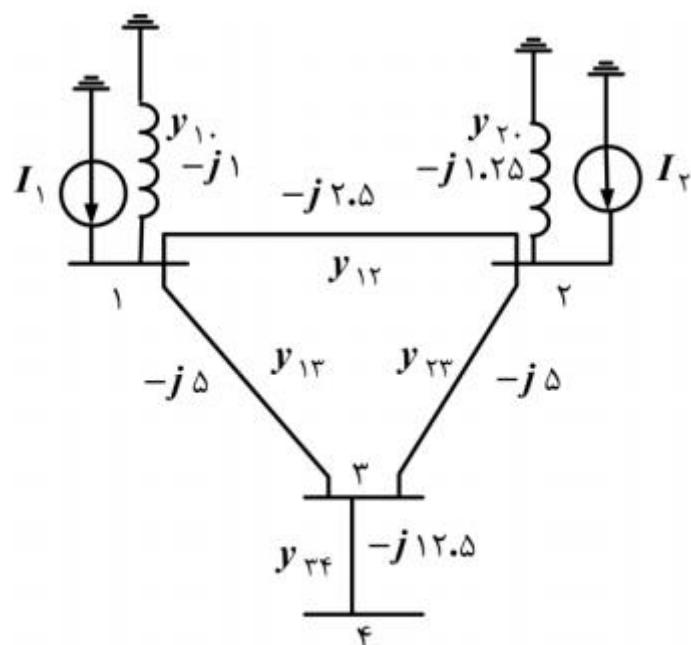
¹ Contingency studies

² Gauss-Seidel

³ Newton-Raphson



شکل ۱.۵ نمایش امپدانس یک سیستم ساده.



شکل ۲.۵ نمایش ادمیتانس برای سیستم شکل ۱.۵.

برای دست یابی به معادلات ولتاژ گره، سیستم قدرت ساده شکل ۱.۵ را در نظر بگیرید که در آن امپدانس‌ها بر حسب پریونیت در MVA مبنا مشخص شده و از مقاومت‌های اهمی برای سهولت محاسبات چشم‌پوشی شده است. از آنجایی که تحلیل گره براساس قانون جریان کیرشهف انجام می-

شود، مقادیر امپدانس‌ها با استفاده از رابطه زیر به ادمیتانس‌ها تبدیل می‌شوند:

$$y_{ij} = \frac{1}{z_{ij}} = \frac{1}{r_{ij} + jx_{ij}}$$

در شکل ۲.۵ مدار ذکر شده در بالا بر حسب ادمیتانس‌ها و منابع جریان حامل از تبدیل منابع ولتاژ نشان داده شده است. گره صفر (که معمولاً زمین است) به عنوان مرجع در نظر گرفته می‌شود. با اعمال KCL

به گره‌های مستقل^۱ ۱ تا ۴ داریم:

$$I_1 = y_{11}V_1 + y_{12}(V_1 - V_2) + y_{13}(V_1 - V_3)$$

$$I_2 = y_{21}V_1 + y_{12}(V_2 - V_1) + y_{23}(V_2 - V_3)$$

$$\therefore = y_{22}(V_2 - V_2) + y_{13}(V_3 - V_1) + y_{23}(V_3 - V_2)$$

$$\therefore = y_{24}(V_4 - V_2)$$

معادلات بالا را می‌توان به صورت زیر مرتب کرد:

$$\begin{aligned}I_1 &= (y_{1.} + y_{12} + y_{13})V_1 - y_{12}V_2 - y_{13}V_3 \\I_2 &= -y_{12}V_1 + (y_{2.} + y_{12} + y_{23})V_2 - y_{23}V_3 \\&\cdot = -y_{13}V_1 - y_{23}V_2 + (y_{12} + y_{23} + y_{24})V_3 - y_{24}V_4 \\&\cdot = -y_{24}V_2 + y_{24}V_4\end{aligned}$$

حال ادمیتانس‌های زیر معرفی می‌شوند:

$$\begin{aligned}Y_{11} &= y_{1.} + y_{12} + y_{13}, Y_{22} = y_{2.} + y_{12} + y_{23}, Y_{33} = y_{13} + y_{23} + y_{24}, Y_{44} = y_{24} \\Y_{12} &= Y_{21} = -y_{12}, Y_{13} = Y_{31} = -y_{13}, Y_{23} = Y_{32} = -y_{23}, Y_{34} = Y_{43} = -y_{24}\end{aligned}$$

معادلات گره مطابق زیر خلاصه می‌گردد:

$$\begin{aligned}I_1 &= Y_{11}V_1 + Y_{12}V_2 + Y_{13}V_3 + Y_{14}V_4 \\I_2 &= Y_{21}V_1 + Y_{22}V_2 + Y_{23}V_3 + Y_{24}V_4 \\I_3 &= Y_{31}V_1 + Y_{32}V_2 + Y_{33}V_3 + Y_{34}V_4 \\I_4 &= Y_{41}V_1 + Y_{42}V_2 + Y_{43}V_3 + Y_{44}V_4\end{aligned}$$

از آنجایی که در این شبکه، اتصالی بین شین‌های ۱ و ۴ وجود ندارد، $Y_{14} = Y_{41} = 0$ بوده و به همین ترتیب $Y_{24} = Y_{42} = 0$ است.

با بسط رابطه فوق به یک سیستم با n شین، معادله ولتاژ گره به صورت ماتریسی زیر خواهد بود:

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_r \\ \vdots \\ I_i \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{1r} & \cdots & Y_{1j} & \cdots & Y_{1n} \\ Y_{r1} & Y_{rr} & \cdots & Y_{ri} & \cdots & Y_{rn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ Y_{i1} & Y_{ir} & \cdots & Y_{ii} & \cdots & Y_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ Y_{n1} & Y_{nr} & \cdots & Y_{ni} & \cdots & Y_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_r \\ \vdots \\ V_i \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

یا

$$I_{bus} = Y_{bus} V_{bus} \quad (2.5)$$

که در آن I_{bus} بردار جریان‌های تزریق شده شین (منابع جریان خارجی) است. چنانچه جهت منبع به سمت شین باشد، جریان مثبت و در صورتی که جهت منبع از شین دور شود، جریان منفی منظور می‌شود. در اینجا V_{bus} بردار ولتاژ شین است که نسبت به گره مرجع¹ سنجیده می‌شود (ولتاژ گره‌ها). ماتریس Y_{bus} به ماتریس ادمیتانس شین موسوم است. عنصر قطری هر گره مجموع ادمیتانس‌های متصل به آن است که ادمیتانس خودی¹ یا ادمیتانس نقطه تحریک² نامیده می‌شود؛ بنابراین:

¹ Self admittance

² Driving point admittance

$$Y_{ii} = \sum_{j=1}^n y_{ij} \quad j \neq i \quad (3.5)$$

هر یک از عناصر غیر قطری برابر است با ادمیتانس بین دو گره در علامت منفی که ادمیتانس متقابل^۳ یا ادمیتانس انتقالی^۴ نامیده می‌شود، بنابراین:

$$Y_{ij} = Y_{ji} = -y_{ij} \quad (4.5)$$

چنانچه جریان شین‌ها معلوم باشد، از حل معادله (۲.۵) می‌توان ولتاژها را بدست آورد:

$$V_{bus} = Y_{bus}^{-1} I_{bus} \quad (5.5)$$

معکوس ماتریس ادمیتانس شین به ماتریس امپدانس شین (Z_{bus}) موسوم است. ماتریس ادمیتانس، با در نظر گرفتن يکی از شین‌ها به عنوان مرجع، غیرمنفرد^۵ است. در غیر این صورت ماتریس گره منفرد^۶ خواهد بود.

³ Mutual admittance

⁴ Transfer admittance

⁵ Nonsingular

⁶ Singular

بررسی ماتریس ادمیتانس شین نشان می‌دهد که این ماتریس نسبت به قطر اصلی متقارن است و بنابراین کافی است مثلث بالایی ماتریس گره را ذخیره کرد. در یک سیستم قدرت نوعی، هر شین فقط به چند شین نزدیک به آن متصل است. در نتیجه، بسیاری از عناصر غیرقطری صفر می‌باشند. چنین ماتریسی، تنک (پراکنده)^۱ نامیده می‌شود. روش‌های موثر عددی موجود هستند که می‌توان توسط آن‌ها معکوس این گونه ماتریس‌ها را محاسبه کرد. بوسیله تجزیه مثلثی مرتب شده^۲، می‌توان معکوس یک ماتریس تنک را به صورت حاصل ضرب عوامل ماتریس تنک بیان کرد که برتری آن سرعت محاسبات، ذخیره‌سازی مناسب و کاهش خطاهای گرد کردن^۳ می‌باشد. به هر حال Z_{bus} که برای تجزیه و تحلیل اتصال کوتاه مورد نیاز است، بدون نیاز به معکوس ماتریس ادمیتانس شین، مستقیماً از روش الگوریتم ساخت^۴ بدست می‌آید.

¹ Sparse

براساس روابط (۳.۵) و (۴.۵)، ماتریس ادمیتانس شین برای شبکه شکل ۲.۵ تنها با مشاهده شکل

² Ordered triangular decomposition

عبارتست از:

³ Round-off errors

⁴ Building algorithm

$$Y_{bus} = \begin{bmatrix} -j18.5 & j2.5 & j5 & . \\ j2.5 & -j8.75 & j5 & . \\ j5 & j5 & -j22.5 & j12.5 \\ . & . & j12.5 & -j12.5 \end{bmatrix}$$

حل معادلات جبری غیرخطی

روش‌های تکراری متداول برای حل معادلات جبری غیرخطی، روش‌های گوس-سایدل، نیوتن-رافسون و شبیه نیوتن^۵ هستند. روش‌های گوس-سایدل و نیوتن-رافسون برای یک معادله یک بعدی شرح و سپس برای معادلات n بعدی تعمیم داده شده‌اند.

روش گوس-سایدل

روش گوس-سایدل به روش جایگزینی متوالی^۱ نیز موسوم است. برای شرح این روش، فرض کنید حل معادله غیرخطی به صورت زیر باشد:

$$f(x) = 0 \quad (6.5)$$

معادله فوق را به صورت زیر تغییر می‌دهیم:

$$x = g(x) \quad (7.5)$$

اگر $x^{(k)}$ تخمین اولیه متغیر x باشد، ترتیب تکراری زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$x^{(k+1)} = g(x^{(k)}) \quad (8.5)$$

^۵ Quasi- Newton

¹ Successive displacement

پاسخ مساله هنگامی بدست می‌آید که قدر مطلق اختلاف متغیر x در دو تکرار متوالی کمتر از دقت

تعیین شده باشد، یعنی:

$$|x^{(k+1)} - x^{(k)}| \leq \epsilon \quad (9.5)$$

که در آن ϵ دقت مورد نظر می‌باشد.

مثال: با استفاده از روش گوس-سایدل، یکی از ریشه‌های معادله زیر را بدست آورید:

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4 = 0$$

حل: با حل معادله بالا برای x داریم:

$$x = -\frac{1}{9}x^3 + \frac{6}{9}x^2 + \frac{4}{9} = g(x)$$

تخمین اولیه عبارتست از: $x^{(0)} = 2$

با استفاده از معادله (۶.۵)، تکرار اول به صورت زیر خواهد بود:

$$x^{(1)} = g(2) = -\frac{1}{9}(2)^3 + \frac{6}{9}(2)^2 + \frac{4}{9} = 2.2222$$

$$x^{(2)} = g(2.2222) = -\frac{1}{9}(2.2222)^3 + \frac{6}{9}(2.2222)^2 + \frac{4}{9} = 2.5173$$

$$x^{(3)} = g(2.5173) = -\frac{1}{9}(2.5173)^3 + \frac{6}{9}(2.5173)^2 + \frac{4}{9} = 2.8966$$

$$x^{(4)} = g(2.8966) = -\frac{1}{9}(2.8966)^3 + \frac{6}{9}(2.8966)^2 + \frac{4}{9} = 3.2376$$

$$x^{(5)} = g(3.2376) = -\frac{1}{9}(3.2376)^3 + \frac{6}{9}(3.2376)^2 + \frac{4}{9} = 3.7398$$

$$x^{(6)} = g(3.7398) = -\frac{1}{9}(3.7398)^3 + \frac{6}{9}(3.7398)^2 + \frac{4}{9} = 3.9988$$

$$x^{(7)} = g(3.9988) = -\frac{1}{9}(3.9988)^3 + \frac{6}{9}(3.9988)^2 + \frac{4}{9} = 4$$

این فرآیند ادامه می‌یابد تا مقدار تغییر x به محدوده دقت مورد نظر برسد. در عمل، روش گوس-

سایدل برای رسیدن به دقت دلخواه به تکرارهای زیادی نیاز دارد و تضمین برای حصول همگرائی وجود ندارد. در این مثال، از آنجائی که تخمین اولیه در محدوده ناحیه مناسبی بوده است همگرائی به

صورت زیگزاگ در اطراف یکی از ریشه‌ها حاصل شده است. در واقع، اگر تخمین اولیه خارج از این ناحیه، مثلاً $x^{(0)} = 6$ بود، فرآیند واگرا می‌شد. آزمایش همگرائی، به ویژه برای حالت n بعدی، مشکل

است و روش شناخته شده‌ای در این زمینه وجود ندارد.

¹ Acceleration factor

در برخی موارد می‌توان از ضریب تسریع^۱ برای بهبود سرعت همگرائی استفاده کرد. اگر $\alpha > 1$ ضریب

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha [g(x^{(k)}) - x^{(k)}] \quad (10.5)$$

تسریع باشد، الگوریتم گوس-سایدل به صورت زیر در می‌آید:

مثال: یکی از ریشه‌های معادله مثال قبل را با استفاده از روش گوس سایدل با ضریب تسریع $\alpha = 1.25$ بدست آورید.

حل: محاسبه را با تخمین اولیه $x^{(0)} = 2$ شروع کرده و با استفاده از معادله (10.5) برای تکرار اول

$$g(2) = -\frac{1}{9}(2)^3 + \frac{6}{9}(2)^2 + \frac{4}{9} = 2.2222, x^{(1)} = 2 + 1.25[2.2222 - 2] = 2.2778$$

تکرار دوم عبارتست از:

$$g(2.2778) = -\frac{1}{9}(2.2778)^3 + \frac{6}{9}(2.2778)^2 + \frac{4}{9} = 2.5902, x^{(2)} = 2.2778 + 1.25[2.5902 - 2.2778] = 2.6683$$

با تکرارهای بعدی مقادیر ۱.۰۸۰۳، ۱.۰۸۳۱، ۱.۰۸۴۰، ۱.۰۹۷۸، ۱.۱۸۲۳، ۱.۲۲۳۸، ۱.۲۶۴۰ و ۱.۳۰۵۰ بدست می‌آیند. باید

دقت کرد تا از ضریب تسریع بسیار بزرگ استفاده نشود زیرا گام‌های بزرگ‌تر ممکن است منجر به جهش شود. این عامل می‌تواند باعث افزایش تعداد تکرارها و حتی واگرایی شود.

حال سیستمی با n معادله شامل n متغیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= c_1 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= c_2 \\ \dots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) &= c_n \end{aligned} \tag{11.5}$$

هر یک از معادلات را می‌توان برای یک متغیر حل کرده و توابع بالا را به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} x_1 &= c_1 + g_1(x_2, x_3, \dots, x_n) \\ x_2 &= c_2 + g_2(x_1, x_3, \dots, x_n) \\ \dots \\ x_n &= c_n + g_n(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \end{aligned} \tag{12.5}$$

روش تکرار با تخمین مناسب برای هر یک از متغیرهای مستقل $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ آغاز شود. معادله

(۱۲.۵) حل تقریبی جدیدی را ارائه می‌کند $(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)})$. در روش گوس-سایدل مقادیر به هنگام شده متغیرها که از معادلات قبلی بدست آمده‌اند، بلافاصله در حل معادلات بعدی به کار می‌روند. در پایان هر تکرار، مقادیر محاسبه شده همه متغیرها با مقادیر تکرار قبلی آن‌ها مقایسه می‌شوند. اگر میزان اختلاف متغیرها همگی در محدوده دقت تعیین شده باشد، مساله همگرا شده است. در غیر این صورت باید به تکرار بعدی پرداخت. سرعت همگرایی را اغلب می‌توان با استفاده از ضریب تسريع مناسب افزایش داد. در این صورت ترتیب تکرار بعدی مطابق زیر خواهد بود:

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \alpha \left[x_{i\ cal}^{(k+1)} - x_i^{(k)} \right] \quad (12.5)$$

راایچ ترین روش حل معادلات جبری غیرخطی همزمان، روش نیوتن- رافسون است. روش نیوتن یک روش تقریب متوالی^۱ است که براساس تخمین اولیه مقادیر مجهول و استفاده از بسط سری تیلور بنا شده است. فرض کنید حل معادله یک بعدی زیر مد نظر باشد:

$$f(x) = c \quad (14.5)$$

اگر $x^{(0)}$ تخمین اولیه از حل مساله بوده و $\Delta x^{(0)}$ انحراف کوچکی نسبت به پاسخ صحیح باشد، داریم:

$$f(x^{(0)} + \Delta x^{(0)}) = c$$

با بسط سری تیلور سمت چپ معادله بالا در اطراف $x^{(0)}$ خواهیم داشت:

$$f(x^{(0)}) + \left(\frac{df}{dx}\right)^{(0)} \Delta x^{(0)} + \frac{1}{2!} \left(\frac{d^2 f}{dx^2}\right)^{(0)} (\Delta x^{(0)})^2 + \dots = c$$

با فرض اینکه $\Delta x^{(0)}$ خیلی کوچک باشد، می‌توان از جملات مرتبه‌های بالاتر چشم‌پوشی کرد که در این

$$\Delta c^{(0)} \approx \left(\frac{df}{dx}\right)^{(0)} \Delta x^{(0)} \quad \text{صورت می‌توان نوشت:}$$

$$\Delta c^{(0)} = c - f(x^{(0)}) \quad \text{که در آن:}$$

¹ Successive approximation

$$x^{(0)} = x^{(\cdot)} + \frac{\Delta c^{(\cdot)}}{\left(\frac{df}{dx}\right)^{(\cdot)}}$$

کاربرد متوالی این روش، الگوریتم نیوتن- رافسون را می دهد:

$$\Delta c^{(k)} = c - f(x^{(k)}) \quad (15.5)$$

$$\Delta x^{(k)} = \frac{\Delta c^{(k)}}{\left(\frac{df}{dx}\right)^{(k)}} \quad (16.5)$$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \Delta x^{(k)} \quad (17.5)$$

معادله (16.5) را می توان به صورت زیر مرتب کرد:

$$\Delta c^{(k)} = j^{(k)} \Delta x^{(k)} \quad (18.5)$$

$$j^{(k)} = \left(\frac{df}{dx}\right)^{(k)} \quad \text{که در آن:}$$

رابطه (18.5) نشان می دهد که معادله غیرخطی $f(x) - c = 0$ با خط مماس بر منحنی در نقطه $x^{(k)}$

تقریب زده می شود؛ بنابراین یک معادله خطی بر حسب تغییرات کوچک متغیرها بدست می آید. از تلاقی

خط مماس با محور x مقدار $x^{(k+1)}$ بدست می آید.

مثال: با استفاده از روش نیوتن رافسون یکی از ریشه‌های معادله $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4 = 0$ را بدست آورید.

$$x^{(0)} = 6$$

$$\frac{df(x)}{dx} = 3x^2 - 12x + 9, \Delta c^{(0)} = c - f(x^{(0)}) = -[(6)^3 - 6(6)^2 + 9(6) - 4] = -5.$$

$$\left(\frac{df}{dx}\right)^{(0)} = 3(6)^2 - 12(6) + 9 = 45, \Delta x^{(0)} = \frac{\Delta c^{(0)}}{\left(\frac{df}{dx}\right)^{(0)}} = \frac{-5}{45} = -0.1111$$

$$x^{(1)} = x^{(0)} + \Delta x^{(0)} = 6 - 0.1111 = 4.8889$$

$$x^{(1)} = x^{(0)} + \Delta x^{(0)} = 4.8889 - \frac{13.4431}{22.037} = 4.2789$$

$$x^{(2)} = x^{(1)} + \Delta x^{(1)} = 4.2789 - \frac{2.9981}{12.5797} = 4.0405$$

$$x^{(3)} = x^{(2)} + \Delta x^{(2)} = 4.0405 - \frac{0.3748}{9.4914} = 4.0011$$

$$x^{(4)} = x^{(3)} + \Delta x^{(3)} = 4.0011 - \frac{0.0095}{9.0126} = 4.0000$$

ملاحظه می‌شود که همگرایی در روش نیوتن به طور قابل ملاحظه‌ای سریع‌تر از روش گوس-سایدل است. اگر مقدار شروع به اندازه کافی به ریشه معادله نزدیک نباشد، این روش ممکن است در ریشه‌ای غیر از ریشه مورد انتظار همگرا یا حتی واگرا شود.

حل معادلات n بعدی (۱۱.۵) را در نظر بگیرید. بسط سمت چپ این معادله به صورت سری تیلور در

اطراف تخمین‌های اولیه و چشم‌پوشی از جملات مرتبه بالاتر منجر به روابط زیر می‌شود:

$$\begin{bmatrix} c_1 - (f_1)^{(.)} \\ c_r - (f_r)^{(.)} \\ \vdots \\ c_n - (f_n)^{(.)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{df_1}{dx_1}\right)^{(.)} & \left(\frac{df_1}{dx_r}\right)^{(.)} & \cdots & \left(\frac{df_1}{dx_n}\right)^{(.)} \\ \left(\frac{df_r}{dx_1}\right)^{(.)} & \left(\frac{df_r}{dx_r}\right)^{(.)} & \cdots & \left(\frac{df_r}{dx_n}\right)^{(.)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\frac{df_n}{dx_1}\right)^{(.)} & \left(\frac{df_n}{dx_r}\right)^{(.)} & \cdots & \left(\frac{df_n}{dx_n}\right)^{(.)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1^{(.)} \\ \Delta x_r^{(.)} \\ \vdots \\ \Delta x_n^{(.)} \end{bmatrix}$$

$$(f_1)^{(.)} + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)^{(.)} \Delta x_1^{(.)} + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_r}\right)^{(.)} \Delta x_r^{(.)} + \cdots + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_n}\right)^{(.)} \Delta x_n^{(.)} = c_1$$

$$(f_r)^{(.)} + \left(\frac{\partial f_r}{\partial x_1}\right)^{(.)} \Delta x_1^{(.)} + \left(\frac{\partial f_r}{\partial x_r}\right)^{(.)} \Delta x_r^{(.)} + \cdots + \left(\frac{\partial f_r}{\partial x_n}\right)^{(.)} \Delta x_n^{(.)} = c_r$$

⋮

$$(f_n)^{(.)} + \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_1}\right)^{(.)} \Delta x_1^{(.)} + \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_r}\right)^{(.)} \Delta x_r^{(.)} + \cdots + \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\right)^{(.)} \Delta x_n^{(.)} = c_n$$

با به صورت ماتریسی خواهیم داشت:

این معادله به صورت زیر خلاصه می‌شود: $\Delta C^{(k)} = J^{(k)} \Delta X^{(k)}$ یا

$$\Delta X^{(k)} = [J^{(k)}]^{-1} \Delta C^{(k)} \quad (۱۹.۵)$$

و الگوریتم نیوتون-رافسون برای حالت n بعدی به صورت زیر در می‌آید:

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} + \Delta X^{(k)} \quad (۲۰.۵)$$

$$\Delta X^{(k)} = \begin{bmatrix} \Delta x_1^{(k)} \\ \Delta x_2^{(k)} \\ \vdots \\ \Delta x_n^{(k)} \end{bmatrix}, \quad \Delta C^{(k)} = \begin{bmatrix} c_1 - (f_1)^{(k)} \\ c_2 - (f_2)^{(k)} \\ \vdots \\ c_n - (f_n)^{(k)} \end{bmatrix} \quad (21.5)$$

ماتریس $J^{(k)}$ ، ماتریس ژاکوبین^۱ نامیده می‌شود. عناصر این ماتریس مشتقات جزئی هستند که در $x^{(k)}$ ارزیابی می‌گردند. فرض می‌شود که $J^{(k)}$ در هر تکرار دارای معکوس باشد. اعمال روش نیوتن به دستگاه معادلات غیرخطی، مساله را به حل دستگاه معادلات خطی کاهش می‌دهد تا مقادیری که دقت تخمین‌ها را بهبود می‌دهند، تعیین شوند.

$$J^{(k)} = \begin{bmatrix} \left(\frac{df_1}{dx_1}\right)^{(k)} & \left(\frac{df_1}{dx_2}\right)^{(k)} & \cdots & \left(\frac{df_1}{dx_n}\right)^{(k)} \\ \left(\frac{df_2}{dx_1}\right)^{(k)} & \left(\frac{df_2}{dx_2}\right)^{(k)} & \cdots & \left(\frac{df_2}{dx_n}\right)^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\frac{df_n}{dx_1}\right)^{(k)} & \left(\frac{df_n}{dx_2}\right)^{(k)} & \cdots & \left(\frac{df_n}{dx_n}\right)^{(k)} \end{bmatrix} \quad (22.5)$$

حل معادله (۱۹.۵) از طریق معکوس کردن، روش غیرموثری است. بدست آوردن معکوس $J^{(k)}$ لزومی ندارد. به جای آن، می‌توان روش مستقیمی را با استفاده از فاکتورگیری مثلثی مرتب شده بهینه بکار گرفت. در MATLAB، حل معادلات خطی همزمان $\Delta C = J \Delta X$ با استفاده از عملگر تقسیم ماتریسی \ (یعنی $\Delta X = J \backslash \Delta C$) که مبتنی بر فاکتورگیری مثلثی و حذف گوسی است، انجام می‌شود.

مطالعات پخش توان که معمولاً پخش بار نامیده می‌شود، بخش مهمی از تجزیه و تحلیل سیستم قدرت را تشکیل می‌دهد. این پخش بارها برای طراحی سیستم، برنامه‌ریزی اقتصادی، کنترل سیستم موجود و همچنین برنامه‌ریزی توسعه آینده سیستم ضروری می‌باشند. مساله شامل تعیین اندازه و زاویه ولتاژها در هر شین و توان‌های اکتیو و راکتیو عبوری از هر خط است.

در حل مساله پخش بار، فرض می‌شود که سیستم در شرایط متقارن کار می‌کند؛ بنابراین از مدل تک‌فاز استفاده می‌شود. در هر شین چهار کمیت با هم ارتباط دارند که عبارتند از: اندازه ولتاژ $|V|$ ، زاویه فاز δ ، توان اکتیو P و توان راکتیو Q . شین‌های سیستم معمولاً به سه نوع تقسیم می‌شوند:

یکی از شین‌ها که شین‌شناور^۱ یا شین‌نوسان^۲ نام دارد، به عنوان مرجع^۳ انتخاب می‌گردد که در آن اندازه و زاویه فاز ولتاژ معلوم است. این شین اختلاف میان بارهای برنامه‌ریزی شده و توان‌های تولید شده را که به علت تلفات شبکه به وجود می‌آید، جبران می‌کند.

شین‌های بار^۴

در این شین‌ها توان‌های اکتیو و راکتیو معلوم و اندازه و زاویه فاز ولتاژ آن‌ها مجھول می‌باشند. این شین‌ها به شین‌های PQ موسوم هستند.

شین‌های تنظیم شده^۵

این شین‌ها، شین‌های ژنراتور هستند که به شین‌های با ولتاژ کنترل شده^۶ نیز موسوم‌اند. در این شین‌ها، توان اکتیو و اندازه ولتاژ معلوم هستند. زاویه فاز ولتاژها و توان‌های راکتیو باید محاسبه شوند. حدود بالا و پایین مقادیر توان راکتیو نیز معلوم می‌باشند. این شین‌ها، شین‌های PV نیز نامیده می‌شوند.

9 inch

¹ Slack bus

² Swing bus

³ Reference

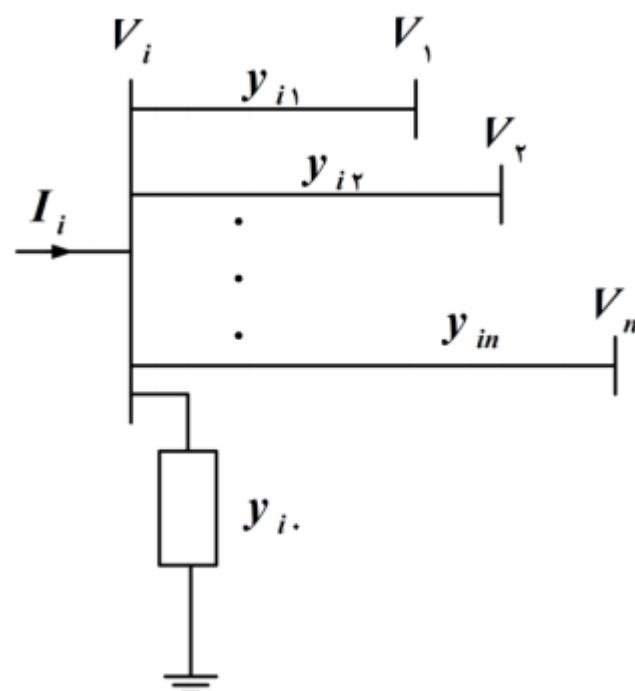
⁴ Load buses

⁵ Regulated buses

⁶ Voltage-controlled buses

معادله پخش بار یک شین نوعی را در شبکه سیستم قدرتی مطابق شکل ۳.۵ در نظر بگیرید. خطوط انتقال با مدل π نشان داده شده است که در آنها امپدانس‌ها به ادمیتانس‌ها بر حسب pu در مبنای مشترک MVA تبدیل شده‌اند.

با اعمال KCL به این شین داریم:



$$I_i = y_{i1}V_i + y_{i1}(V_i - V_1) + y_{i2}(V_i - V_2) + \dots + y_{in}(V_i - V_n) \\ = (y_{i1} + y_{i2} + y_{i3} + \dots + y_{in})V_i - y_{i1}V_1 - y_{i2}V_2 - \dots - y_{in}V_n \quad (23.5)$$

یا

$$I_i = V_i \sum_{j=1}^n y_{ij} - \sum_{j=1}^n y_{ij}V_j \quad j \neq i \quad (24.5)$$

توان‌های اکتیو و راکتیو در این شین عبارتند از:

$$P_i + jQ_i = V_i I_i^* \quad (25.5)$$

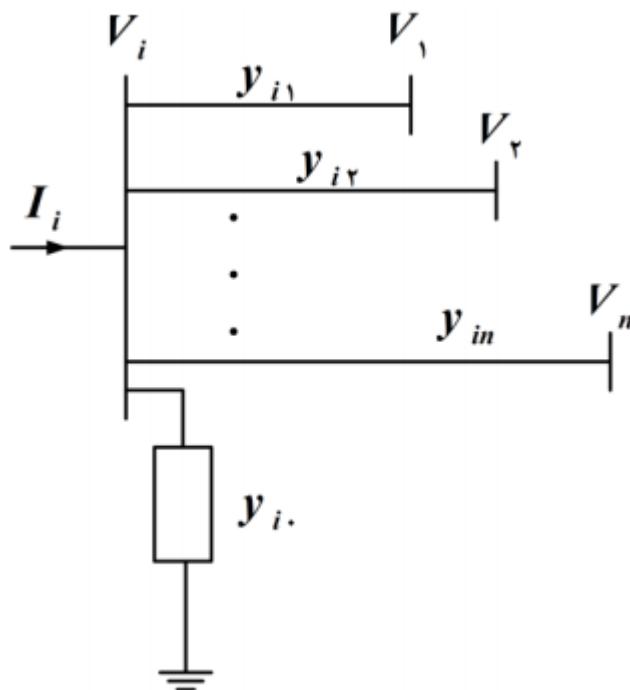
شکل ۳.۵ یک شین نوعی از سیستم قدرت.

$$I_i = \frac{P_i - jQ_i}{V_i^*} \quad (26.5)$$

با جایگزینی I_i از رابطه اخیر در (۲۴.۵) خواهیم داشت:

$$\frac{P_i - jQ_i}{V_i^*} = V_i \sum_{j=1}^n y_{ij} - \sum_{j=1}^n y_{ij} V_j \quad j \neq i \quad (27.5)$$

با توجه به رابطه بالا، فرمول‌بندی ریاضی مساله پخش‌بار منجر به یک سیستم معادلات جبری غیرخطی می‌گردد، که باید با روش‌های تکراری حل شود.



شکل ۳.۵ یک شین نوعی از سیستم قدرت.

حل پخش بار با روش گوس - سایدل

در مطالعه، پخش بار، لازم است یک سری معادلات غیرخطی را که با رابطه (۲۷.۵) ارائه شده‌اند برای دو متغیر مجهول در هر گره حل کرد. در روش گوس - سایدل برای تعیین V_i از معادله (۲۷.۵) استفاده نموده و با در نظر گرفتن ترتیب تکرارها داریم:

$$V_i^{(k+1)} = \frac{\frac{P_i^{sch} - jQ_i^{sch}}{V_i^{*(k)}} + \sum y_{ij} V_j^{(k)}}{\sum y_{ij}} \quad j \neq i \quad (28.5)$$

که در آن y_{ij} (که با حروف کوچک نشان داده شده است) ادمیتانس واقعی و مقادیر P_i^{sch} و Q_i^{sch} توان-های اکتیو و راکتیو بر حسب p_{iu} می‌باشند. هنگام نوشتن KCL، جریان ورودی به شین مثبت فرض می-شود؛ بنابراین، در شین‌هایی که توان‌های اکتیو و راکتیو به آن‌ها تزریق می‌شود، مانند شین‌های دارای ژنراتور، P_i^{sch} و Q_i^{sch} دارای مقادیر مثبت می‌باشند. در شین‌های بار که در آن‌ها توان‌های اکتیو و راکتیو از شین دور می‌شوند P_i^{sch} و Q_i^{sch} دارای مقادیر منفی می‌باشند. اگر معادله (۲۷.۵) برای محاسبه P_i و Q_i بکار رود، خواهیم داشت:

$$P_i^{(k+1)} = \Re \left\{ V_i^{*(k)} \left[V_i^{(k)} \sum_{j=1}^n y_{ij} - \sum_{j=1}^n y_{ij} V_j^{(k)} \right] \right\} \quad j \neq i \quad (29.5)$$

(۳۰.۵)

معادله پخش بار معمولاً بر حسب عناصر ماتریس ادمیتانس شین^۱ بیان می‌شود. از انجایی که هر یک از عناصر غیرقطری ماتریس ادمیتانس شین Y_{bus} (که با حروف بزرگ نشان داده می‌شود) $-y_{ij} = Y_{ij}$ بوده و هر یک از عناصر قطری $Y_{ii} = \sum y_{ij}$ می‌باشد، معادله (۲۸.۵) به صورت زیر خواهد بود:

$$V_i^{(k+1)} = \frac{\frac{P_i^{sch} - jQ_i^{sch}}{V_i^{*(k)}} - \sum_{j \neq i} Y_{ij} V_j^{(k)}}{Y_{ii}} \quad (۳۱.۵)$$

$$P_i^{(k+1)} = \Re \left\{ V_i^{*(k)} \left[V_i^{(k)} Y_{ii} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n Y_{ij} V_j^{(k)} \right] \right\} \quad j \neq i \quad (۳۲.۵)$$

$$Q_i^{(k+1)} = -\Im \left\{ V_i^{*(k)} \left[V_i^{(k)} Y_{ii} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n Y_{ij} V_j^{(k)} \right] \right\} \quad j \neq i \quad (۳۳.۵)$$

^۱ Bus admittance matrix

^۲ Susceptance

^۳ Line charging

^۴ Off- nominal ratio

عنصر Y_{ii} شامل ادمیتانس موازی مربوط به سوپتانس^۲ باردهی خط^۳ و هر ادمیتانس ثابت دیگری که به زمین متصل است نیز می‌باشد. در بخش ۷-۵، مدلی برای ترانسفورماتورهای با نسبت تبدیل غیر اسمی^۴ ارائه شده که اثر تنظیم تپ ترانسفورماتور را نیز منظور نموده است.

از آنجایی که هر دو مولفه ولتاژ در شین مرجع معلوم است، تعداد معادلات $(n-1)$ می‌باشد که باید با یکی از روش‌های تکراری حل شوند. در شرایط بهره‌برداری عادی، اندازه ولتاژ شین‌ها حدود ۱ pu یا نزدیک اندازه ولتاژ شین مرجع است. اندازه ولتاژ در شین‌های بار کمی کوچکتر از مقدار شین مرجع، بسته به تقاضای توان راکتیو، می‌باشد در حالی که ولتاژ تعیین شده در شین‌های دارای ژنراتور کمی بزرگتر است. همچنین زاویه فاز شین‌های بار، بسته به میزان تقاضای توان اکتیو، کمتر از زاویه مرجع است در صورتی که زاویه فاز شین‌های دارای ژنراتور، بسته به مقدار توان اکتیو عبوری از شین، ممکن است بیشتر از مقدار مرجع باشد؛ بنابراین در روش گوس-سایدل، تخمین ولتاژ اولیه $1.00+j0.00$ برای ولتاژهای مجھول مناسب است و پاسخ حاصل از همگرایی با حالت واقعی عملکرد مرتبط می‌باشد.

در شین‌های PQ ، توان‌های اکتیو و راکتیو P_i^{sch} و Q_i^{sch} معلوم هستند. با شروع از یک تخمین اولیه، مولفه‌های حقیقی و موهومی ولتاژ از معادله (۳۱.۵) بدست می‌آیند. در شین‌های با ولتاژ کنترل شده (شین‌های PV) که در آن‌ها P_i^{sch} و $|V_i|$ معلوم هستند، ابتدا $Q_i^{(k+1)}$ از معادله (۳۳.۵) بدست آمده و سپس در رابطه (۳۱.۵) قرار داده می‌شود تا $V_i^{(k+1)}$ محاسبه شود. در هر صورت، چون $|V_i|$ معلوم است، فقط قسمت موهومی $V_i^{(k+1)}$ نگهداشته می‌شود و قسمت حقیقی آن برای برقراری رابطه زیر انتخاب می‌شود:

$$\left(e_i^{(k+1)}\right)^r + \left(f_i^{(k+1)}\right)^r = |V_i|^r \quad (34.5)$$

یا

$$e_i^{(k+1)} = \sqrt{|V_i|^r - \left(f_i^{(k+1)}\right)^r} \quad (35.5)$$

که در آن $e_i^{(k+1)}$ و $f_i^{(k+1)}$ به ترتیب مولفه‌های حقیقی و موهومی ولتاژ $V_i^{(k+1)}$ در تکرارهای متوالی می‌باشند.

سرعت همگرایی با اعمال ضریب تسریع به پاسخ تقریبی بدست آمده از هر تکرار به صورت زیر افزایش می‌یابد:

$$V_i^{(k+1)} = V_i^{(k)} + \alpha (V_{i\ cal}^{(k)} - V_i^{(k)}) \quad (36.5)$$

که در آن α ضریب تسریع بوده و مقدار آن به اندازه سیستم بستگی دارد. تجربه نشان داده است که محدوده ۱,۳ تا ۱,۷ برای سیستم‌های نوعی رضایت‌بخش است.

ولتاژ‌های به هنگام شده در حل معادلات بعدی بلاfacسله جایگزین مقادیر قبلی می‌شوند. این فرآیند آن‌قدر ادامه می‌یابد تا اختلاف مولفه‌های حقیقی و موهومی ولتاژ شین‌ها در دو تکرار متوالی در محدوده دقت تعیین شده قرار بگیرد، یعنی:

$$\begin{aligned} |e_i^{(k+1)} - e_i^{(k)}| &\leq \varepsilon \\ |f_i^{(k+1)} - f_i^{(k)}| &\leq \varepsilon \end{aligned} \quad (37.5)$$

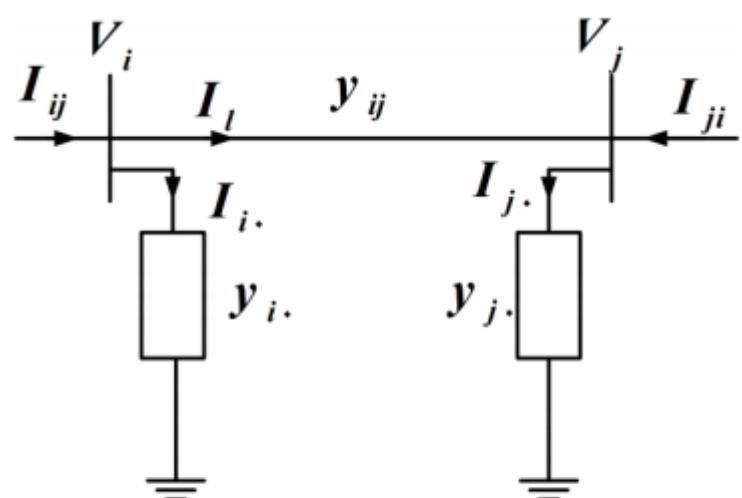
دو مولفه ولتاژ تعیین کرد. دقت ولتاژ در محدوده $1 pu \dots 0.0005 pu$ رضایت‌بخش است. در عمل روش تشخیص پایان محاسبات به شاخص دقت مورد نظر برای عدم تطابق توان بستگی دارد. این تکرارها آن‌قدر ادامه می‌یابند تا اندازه بزرگترین عنصر در ستون‌های ΔP و ΔQ کمتر از مقدار تعیین شده شود. مقدار نوعی دقت در عدم تطابق توان $1 pu \dots 0.0001 pu$ است.

پس از حصول همگرایی، توان‌های خالص اکتیو و راکتیو در شین مرجع از معادلات (۳۲.۵) و (۳۳.۵) محاسبه می‌شود.

پخش توان و تلفات در خط انتقال

پس از حل تکراری ولتاژ شین‌ها، گام بعدی محاسبه پخش توان و تلفات در خطوط انتقال است. خط انتقالی را که به دو شین i و j متصل است مطابق شکل ۴.۵ در نظر بگیرید. جریان خط I_{ij} که در شین i

اندازه‌گیری شده و در جهت $j \rightarrow i$ مثبت تعریف می‌شود، از رابطه زیر بدست می‌آید:



$$I_{ij} = I_I + I_{i.} = y_{ij} (V_i - V_j) + y_{i.} V_i \quad (38.5)$$

به طور مشابه، جریان خط I_{ji} که در شین j اندازه‌گیری شده و در جهت $i \rightarrow j$ مثبت تعریف می‌شود، برابر است با:

$$I_{ji} = -I_I + I_{j.} = y_{ij} (V_j - V_i) + y_{j.} V_j \quad (39.5)$$

توان‌های مختلط S_{ij} از شین i به j و S_{ji} از شین j به i عبارتند از:

$$S_{ij} = V_i I_{ij}^* \quad (40.5)$$

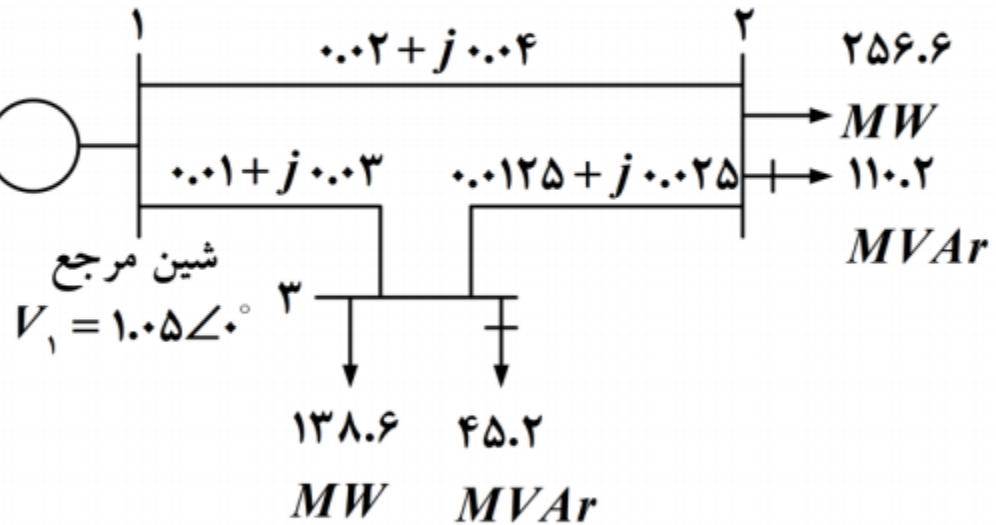
$$S_{ji} = V_j I_{ji}^* \quad (41.5)$$

تلفات توان در خط $j - i$ از جمع توان‌های جاری که از روابط (۴۰.۵) و (۴۱.۵) تعیین می‌شوند، بدست

$$S_{Lij} = S_{ij} + S_{ji} \quad (42.5)$$

می‌آید؛ یعنی:

مثال ۵.۵ نمایش تک خطی یک سیستم قدرت ساده با سه شین را نشان می‌دهد که در آن شین ۱ تولیدکننده توان است. اندازه ولتاژ در شین ۱ در pu ۱.۰۵ تنظیم شده است. بارهای برنامه‌ریزی شده برای شین‌های ۲ و ۳ در شکل مشخص شده‌اند. امپدانس خطوط بر حسب pu در مبنای ۱۰۰ MVA داده شده و از سوسيپتانس باردهی خطوط چشم‌پوشی شده است.



شکل ۵.۵ نمایش تک خطی مثال (امپدانس‌ها بر حسب pu در مبنای ۱۰۰ MVA).

- الف با استفاده از روش گوس-سایدل، مقادیر فازوری ولتاژ را در شین‌های ۲ و ۳ (شین‌های PQ) با تقریب چهار رقم اعشار بدست آورید.
- ب) توان‌های اکتیو و راکتیو شین مرجع را محاسبه کنید.
- ج) پخش توان و تلفات خطوط را تعیین نمایید. نمایش پخش توان را که نشان‌دهنده جهت پخش توان در خطوط است، ارائه نمایید.