دانشگاه صنعتی امیرکبیر

دانشکده مهندسی عمران و محیط زیست

جزوه درس :

مقاومت مصالح ۲

استاد :

جناب آقای مهندس پیدایش

نگارش:

حمید کاظم

(کارشناس عمران دانشگاه صنعتی امیرکبیر)

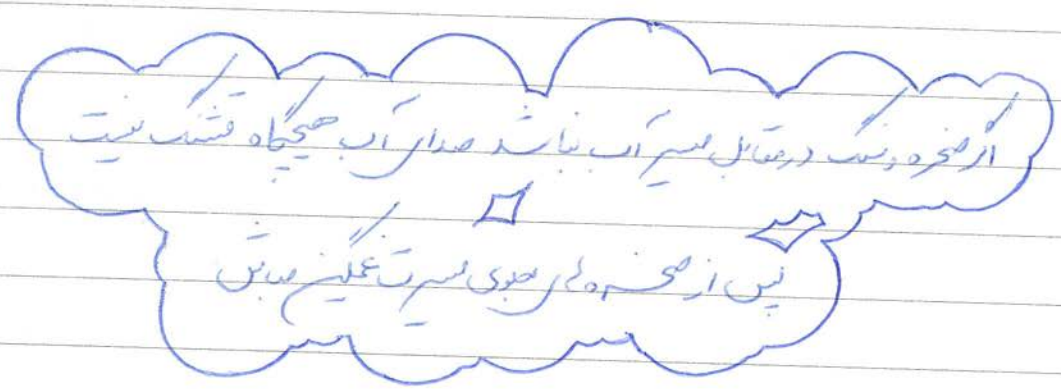
(دانشجوی کارشناسی ارشد گرایش سازه دانشگاه صنعتی امیرکبیر)

تابستان ۱۳۸۹

«بسم الله الرحمن الرحیم»

حمید کاظم

«مقاومت مصالح ۲»



مباحث درس:

مقدمه

فصل اول: تغییر شکل ترکیبی

فصل دوم: تبدیل تنش و کرنش

فصل سوم: پایداری اعضای تحت فشار (کمانش ستون ها)

فصل چهارم: معیارهای گسیختگی مصالح

فصل پنجم: پیوسته ای صفحات نازک

معیارهای طراحی که سازه را مهندسی:

مهندس سازه:
1) مقاومت
2) صلبیت
3) پایداری
4) اقتصاد

معمار:
5) زیبایی

نیروی محوری:
- مقاومت σ
- صلبیت δ

لنگر پیچشی:
- مقاومت τ
- صلبیت ϕ

نیروی برشی:
- مقاومت τ
- صلبیت در راستای عمق $\times$

لنگر خمشی:
- مقاومت σ
- $\times$

شباهت مقاومت ۱ و ۲ : هر دو شیرین هستند.
تفاوت مقاومت ۱ و ۲ : در مقاومت ۱ وزن مقاطع بیشتر است مخصوص مقاطع پایین.
اما در مقاومت ۲ وزن در جهت ریاضی سنگین تر است و مقاطع متعدد نیز دارد.

اهداف بالفعل:
۱) کامل کردن زنجیره شاخص های حرفه ای
۲) تمرین و ماهرانه کردن نظم. (ریاد گیری محل صحیح باند نظم را تمرین نمود.

ترکیب نمرات:
2 نمره ← quiz
2 نمره ← کلاس محل تمرین
6 نمره ← میان ترم (فصل های ۱ و ۲)
10 نمره ← پایان ترم (فصل های ۲ و ۳ و ۴ و ۵)

تاریخ میان ترم ← پنجشنبه 6 اردیبهشت

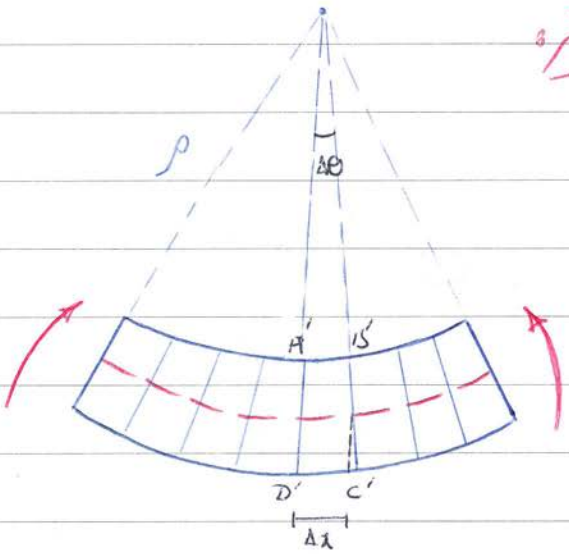
1000 kg = 1 ton

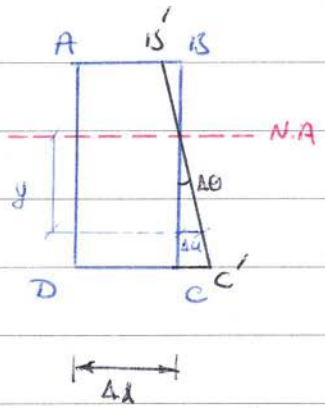
حمید کاظم

فصل اول:

تغییر شکل تیر (Deflection Of Beam)

معادله دیفرانسیل تغییر شکل انحنایی تیر:





تغییر شکل برشی در مقابل تغییر شکل خمشی ناچیز است اگر عرض تیر نسبت به طول تیر کم باشد (عمق نباشد).

$\Delta u = -y\,\Delta\theta$ * منفی لازم است چون در بالای منفی کشیدگی داریم مثبت Δu مثبت داریم.

$$\rightarrow \frac{\Delta u}{\Delta x} = -y\,\frac{\Delta\theta}{\Delta x} \quad , \quad \Delta x = \rho\cdot\Delta\theta$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\Delta u}{\Delta x} = \varepsilon \\ \dfrac{\Delta\theta}{\Delta x} = \dfrac{1}{\rho} \end{array}\right\} \Rightarrow \varepsilon = -y\cdot\frac{1}{\rho} \rightarrow \frac{1}{\rho} = -\frac{\varepsilon}{y}$$

رابطه کرنش انحنا

strain-Curvature equation

$$\varepsilon = \frac{-y}{\rho}$$

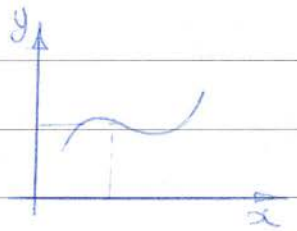
$$\frac{1}{\rho} = k \quad (\text{ثابت})$$

رابطه کرنش ـ انحنا میگوید که تیر باید انحنای ثابت داشته باشد تا کرنش ایجاد شده در همه جای تیر یکسان باشد.

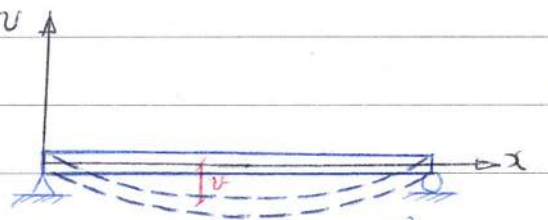
با فرض رفتار الاستیک خطی مصالح:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{-M \cdot y}{IE} \quad (1) \qquad , \qquad \frac{1}{\rho} = \frac{-\varepsilon}{y} \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$$ Moment curvature equation رابطه لنگر ـ انحنا



$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}$$



y فقط در مقطع می‌باشد و x از محور خنثی است. اما v میزان انحنای تیر است

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} = \frac{\frac{d^2v}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}$$

چون فرض صلبیت را در تیر فرض می‌کنیم و تغییر شکل‌ها در تیر را بسیار کم در نظر میگیریم بنابراین شیب منحنی الاستیک تیر یعنی $\frac{dv}{dx}$ نیز بسیار کم یعنی $\frac{dv}{dx} \approx 0$

$$\rightarrow \frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{EI}$$ ← معادله دیفرانسیلی تغییر شکل تیر

اگر $M>0$ باشد تقعر به سمت بالا و اگر $M<0$ باشد تقعر به سمت پایین است (انتقادی)

* اگر تغییر شکل تیر $\frac{1}{200}$ طول تیر باشد خطی ایجاد شده از لحاظ تئوری اعتماض است

اشکال دیگر معادله دیفرانسیل تغییر شکل تیر

از این به بعد:

$$\begin{cases} v(x) \rightarrow \text{تغییر شکل تیر} \\ \frac{dv}{dx} = \theta \rightarrow \text{شیب تیر} \end{cases}$$

(1) $$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{EI} \Rightarrow M(x) = EI\frac{d^2v}{dx^2}$$

(2) $$\frac{dM}{dx} = V(x) \Rightarrow V(x) = \frac{d}{dx}\left(EI\frac{d^2v}{dx^2}\right)$$

مطابق فرض: اگر EI در طول تیر ثابت باشد

$$\rightarrow V(x) = EI\frac{d^3v}{dx^3}$$

(3) $$\frac{dV}{dx} = q(x) \Rightarrow q(x) = \frac{d^2}{dx^2}\left(EI\frac{d^2v}{dx^2}\right) \xrightarrow{\text{مطابق فرض}} q(x) = EI\frac{d^4v}{dx^4}$$

1) $M(x) = EI\frac{d^2v}{dx^2}$ 2) $V(x) = EI\frac{d^3v}{dx^3}$ 3) $q(x) = EI\frac{d^4v}{dx^4}$

شرایط مرزی تیرها:

۱) گیردار
- هندسی
- استاتیکی

۲) غیرگیردار
- هندسی
- استاتیکی

* شرایط مرزی گیردار مربوط به کمیت‌هایی است که برابر صفر می‌باشد درحالی که شرایط مرزی غیرگیردار مربوط به کمیت‌هایی است که غیرصفر می‌باشد.
* شرایط مرزی هندسی شرایطی هستند که بیانگر کمیت‌های هندسی هستند ولی کمیت‌های استاتیکی مربوط به کمیت‌های نیروی هستند.

۱) تکیه‌گاه گیردار:

در محل تکیه‌گاه:
- $v = 0$ (شرط مرزی هندسی ـ گیردار)
- $\frac{dv}{dx} = 0$ (شرط مرزی هندسی ـ گیردار)

۲) تکیه‌گاه مفصلی یا غلتکی (انتهای تیر):

شرط عدم اعمال نیروی خارجی ←
در محل تکیه‌گاه:
- $v = 0$ (هندسی ـ گیردار)
- $M = 0$ (استاتیکی ـ گیردار)

اگر لنگر متمرکز خارجی بر تیر وارد شود ← (انتهای غیر گیردار) $M=M_0$

۳) انتهای آزاد تیر:

$M=0$	(انتهای گیردار) ← شرط عدم اعمال لنگر متمرکز
$V=0$	(انتهای گیردار) ← شرط عدم اعمال بار متمرکز

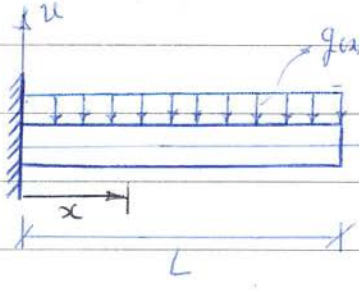
شرایط پیوستگی خیزکی:

یعنی تیر تحت بار داده شده باید تغییر شکل پیوسته باشد یعنی هیچگاه شکستگی نداشته باشیم

← بی شکستگی و بی انفصال

عدم شکستگی: شیب در دو طرف نقطه یکی باشد. (مثلاً نقطه A)
عدم انفصال: تغییر شکل در دو طرف یک نقطه همواره یکی است. (مثلاً نقطه A)

مثال: معادله منحنی تغییر شکل ارتجاعی تیر کنسول به طول l تحت بار گسترده یکنواخت را بدست آورده. تغییر مکان و شیب حداکثر را بدست آورید.



$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{M}{EI} \qquad M(x) = -\frac{q(l-x)^2}{2}$$

$$EI\frac{dv}{dx} = \frac{q(l-x)^3}{6} + C_1 \rightarrow EIv = \frac{-q(l-x)^4}{24} + C_1x + C_2$$

شرایط مرزی: $\begin{cases} v'(0) = 0 \Rightarrow C_1 = \dfrac{-ql^3}{6} \\ v(0) = 0 \Rightarrow C_2 = \dfrac{ql^4}{24} \end{cases}$ → 3 تکیه گاه

$$\Rightarrow v(x) = \frac{q}{24EI}\left(-x^4 + 4Lx^3 - 6L^2x^2\right)$$

تغییر شکل ماکزیمم و منفی ماکزیمم در انتهای آزاد تیر است.

$$\delta_{Max} = v(l) = -\frac{ql^4}{8EI}$$

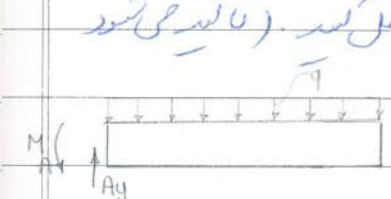
$$\theta_{Max} = v'(l) = -\frac{ql^3}{6EI}$$

یک شرط مرزی دیگری هم در انتهای آزاد تیر داریم:

$V=0$, $M=0$

می دانیم که M با $\frac{d^2v}{dx^2}$ و V با $\frac{d^3v}{dx^3}$ رابطه دارند ولی چون در فرمول این دو وجود ندارند و فقط v و $\frac{dv}{dx}$ وجود است پس این شرط مرزی بدرد ما نمی خورد.

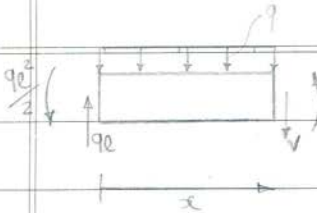
مثال: مثال فوق را با استفاده از تعادل (نه انتگرال) حل کنید. (تاکید می شود حتماً این مسئله را با انتگرال حل کنید و مارا کپی نفرمایید)



$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow A_y = ql$$

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow M_A - ql(l/2) = 0$$

$$\Rightarrow M_A = \frac{ql^2}{2}$$



$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow ql - qx - V = 0 \rightarrow V = q(l-x)$$

$$\Sigma M = 0 \Rightarrow \frac{ql^2}{2} - qlx + \frac{qx^2}{2} + M = 0$$

$$\rightarrow M = \frac{-q}{2}(l^2 - 2lx + x^2) \rightarrow M = \frac{-q}{2}(l-x)^2$$

$$EI\frac{d^4u}{dx^4} = -q \Rightarrow EI\frac{d^3u}{dx^3} = -qx + C_1 \rightarrow EI\frac{d^2u}{dx^2} = -\frac{1}{2}qx^2 + C_1x + C_2$$

$$\Rightarrow EI\frac{du}{dx} = -\frac{1}{6}qx^3 + \frac{1}{2}C_1x^2 + C_2x + C_3$$

$$EIu = -\frac{1}{24}qx^4 + \frac{1}{6}C_1x^3 + \frac{1}{2}C_2x^2 + C_3x + C_4$$

شرایط مرزی: گیردار $\begin{cases} u(0) = 0 \\ u'(0) = 0 \end{cases}$ انتهای آزاد $\begin{cases} M(l) = 0 \rightarrow \left.\frac{d^2u}{dx^2}\right|_{x=l} = 0 \\ V(l) = 0 \rightarrow \left.\frac{d^3u}{dx^3}\right|_{x=l} = 0 \end{cases}$

$$\left.\frac{d^3u}{dx^3}\right|_{x=l} = 0 \Rightarrow 0 = -ql + C_1 \Rightarrow C_1 = ql$$

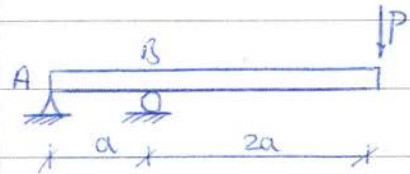
$$\left.\frac{d^2u}{dx^2}\right|_{x=l} = 0 \Rightarrow 0 = -\frac{1}{2}ql^2 + ql^2 + C_2 \Rightarrow C_2 = -\frac{1}{2}ql^2$$

$$\left.\frac{du}{dx}\right|_{x=0} = 0 \Rightarrow C_3 = 0$$

$$u(0) = 0 \Rightarrow C_4 = 0$$

$$u = \frac{1}{EI}\left(-\frac{1}{24}qx^4 + \frac{1}{6}qlx^3 - \frac{1}{4}ql^2x^2\right) = \frac{q}{24EI}(-x^4 + 4lx^3 - 6l^2x^2)$$

نکته: انتخاب یکی از این روابط $q(x)=EI\frac{d^4v}{dx^4}$, $V(x)=EI\frac{d^3v}{dx^3}$, $M(x)=EI\frac{d^2v}{dx^2}$ برای یک حالت تعلق خاصی به این دارد که رابطه $\frac{d^4v}{dx^4}$ نداشت از کمیت های بارگذاری، نیروی برشی و یا لنگر خمشی را توان به طور مستقیم در آورد. برای روابط دیفرانسیل از مرتبه ۲ یا پایین تر راحت تر می توان انتگرال گیری کرد و مورد نیاز است. این موضوع می تواند معیاری برای انتخاب یکی از این روابط قرار باشد.



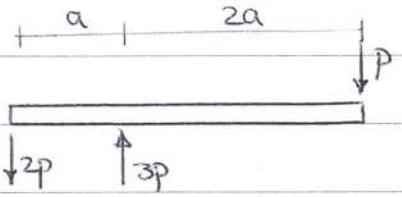
مثال: برای تیر زیر داده شده مطلوبست

الف) تعیین معادلات منحنی تغییر شکل تیر

ب) می خواهیم حداکثر تغییر مکان مثبت و منفی تیر

* نقطه تغییر شکل برای کل شکل تیر است. اما نقطه تغییر مکان برای یک نقطه از تیر است. ولی بعضی این دو نقطه را به جای هم به کار می برند (صحیح نیست). بعضی کتاب ها هم نقطه عطف نام می برند.

چون از دو ماده تشکیل شده دو معادله تغییر شکل دارد.



$$\Sigma M_A=0 \Rightarrow aB_y-3ap=0 \rightarrow B_y=3p$$

$$\Sigma F_y=0 \Rightarrow A_y+3p-p=0 \rightarrow A_y=-2p$$

$$0\le x\le a \rightarrow M(x)=-2px \rightarrow EI\frac{d^2v_1}{dx^2}=-2px$$

$$\rightarrow EI\frac{dv_1}{dx}=-px^2+C_1 \Rightarrow EIv_1=-\frac{px^3}{3}+C_1x+C_2$$

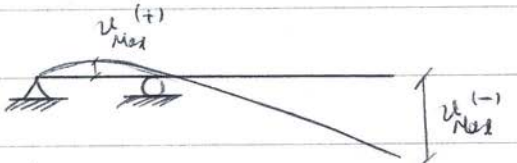
$$a\le x\le 3a \rightarrow M(x)=-p(3a-x) \rightarrow EI\frac{d^2v_2}{dx^2}=-p(3a-x)$$

$$\rightarrow EIv_2=-\frac{3pa}{2}x^2+\frac{p}{6}x^3+C_3x+C_4$$

شرایط مرزی

$$\begin{cases} v_1(0) = 0 \\ v_1(a) = 0 \\ v_2(a) = 0 \\ \frac{dv_1}{dx}(a) = \frac{dv_2}{dx}(a) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{Pa^2}{3} \\ C_2 = 0 \\ C_3 = \frac{11Pa^2}{6} \\ C_4 = \frac{-Pa^3}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow v_1(x) = -\frac{Px^3}{3EI} + \frac{Pa^2}{3EI}x \qquad v_2(x) = \frac{P}{6EI}x^3 - \frac{3Pa}{2EI}x^2 + \frac{11Pa^2}{6EI}x - \frac{Pa^3}{2EI}$$



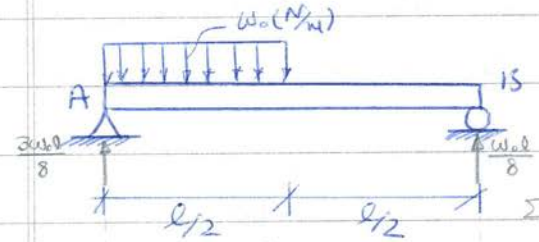
$$\begin{cases} 0 \le x \le a \Rightarrow M_1 < 0 & \text{تقعر منفی} \\ a \le x \le 3a \Rightarrow M_2 < 0 & \text{تقعر منفی} \end{cases}$$

$$v_{Max}^{(-)} = v_2(3a) = \frac{-4Pa^3}{EI}$$

$$v_1'(x) = 0 \Rightarrow$$

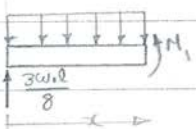
$$v_{Max}^{(+)} = \frac{2Pa^3\sqrt{3}}{27EI}$$

مثال: معادلات تغییر شکل و تغییر مکان را بدست آورید.



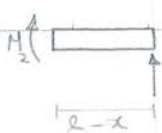
$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -(w_0 l/2)\, l/4 + B_y(l) = 0$$

$$\Rightarrow B_y = \frac{w_0 l^2}{8} \qquad \sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + \frac{w_0 l}{8} - \frac{w_0 l}{2} = 0 \Rightarrow A_y = \frac{3w_0 l}{8}$$



$$M_1 - \frac{3w_0 l}{8}x + w_0 x(x/2) = 0$$

$$\Rightarrow M_1 = \frac{3w_0 l}{8}x - \frac{w_0}{2}x^2 \qquad 0 \le x \le l/2$$



$$-M_2 + \frac{w_0 l}{8}(l-x) = 0$$

$$\Rightarrow M_2 = -\frac{w_0 l}{8}x + \frac{w_0 l^2}{8} \qquad l/2 \le x \le l$$

$0 \le x \le l/2 \rightarrow M_1 = -\frac{w_0}{2}x^2 + \frac{3w_0 l}{8}x \rightarrow EI\frac{dv_1}{dx} = -\frac{w_0}{6}x^3 + \frac{3w_0 l}{16}x^2 + C_1$

$\rightarrow EIv_1 = -\frac{w_0}{24}x^4 + \frac{w_0 l}{16}x^3 + C_1 x + C_2$

$l/2 \le x \le l \rightarrow M_2 = -\frac{w_0 l}{8}x + \frac{w_0 l^2}{8} \rightarrow EI\frac{dv_2}{dx} = -\frac{w_0 l}{16}x^2 + \frac{w_0 l^2}{8}x + C_3$

$\rightarrow EIv_2 = -\frac{w_0 l}{48}x^3 + \frac{w_0 l^2}{16}x^2 + C_3 x + C_4$

حال شرایط مرزی را بررسی می‌کنیم:

1) $v_1(0) = 0 \rightarrow \underline{C_2 = 0}$

2) $v_2(l) = 0 \rightarrow 0 = -\frac{w_0 l^4}{48} + \frac{w_0 l^4}{16} + C_3 l + C_4$ (I)

3) $v_1'(l/2) = v_2'(l/2) \rightarrow -\frac{w_0 l^3}{48} + \frac{3w_0 l^3}{64} + C_1 = -\frac{w_0 l^3}{64} + \frac{w_0 l^3}{16} + C_3$

$\rightarrow C_1 - C_3 = \frac{w_0 l^3}{48}$

4) $v_1(l/2) = v_2(l/2) \rightarrow -\frac{w_0 l^4}{384} + \frac{w_0 l^4}{128} + \frac{l}{2}C_1 = -\frac{w_0 l^4}{384} + \frac{w_0 l^4}{64} + C_3 l/2 + C_4$

$\rightarrow -\frac{w_0 l^4}{128} + l/2(C_1 - C_3) = C_4 \rightarrow \underline{C_4 = \frac{w_0 l^4}{384}}$

(I) $\rightarrow \underline{C_3 = \frac{17w_0 l^3}{384}}$, $\underline{C_1 = \frac{25w_0 l^3}{384}}$

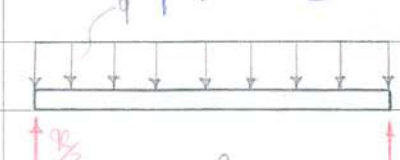
$$\begin{cases} v_1(x) = \frac{1}{EI}\left(-\frac{w_0}{24}x^4 + \frac{w_0 l}{16}x^3 + \frac{25w_0 l^3}{384}x\right) & 0 \le x \le l/2 \\ v_2(x) = \frac{1}{EI}\left(-\frac{w_0 l}{48}x^3 + \frac{w_0 l^2}{16}x^2 + \frac{17w_0 l^3}{384}x + \frac{w_0 l^4}{384}\right) \end{cases}$$

تمرین: برای تیر ساده (که در وسط دهانه گشتاور ماکزیمم دارد) بگذارید بار گسترده یکنواخت به طول l و شدت q تغییر شکل تیر را از روش زیر بدست آورید.

الف) معادله دیفرانسیل مرتبه دوم و تغییر محل Max تیر را حساب کنید.

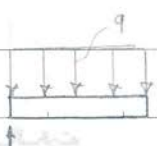
ب) معادله دیفرانسیل مرتبه چهار و تغییر محل Max تیر را حساب کنید.

(الف)



$M - \frac{ql}{2}x + qx(x/2) = 0$

$\rightarrow M = -\frac{q}{2}x^2 + \frac{ql}{2}x$



$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{q}{2}x^2 + \frac{ql}{2}x \rightarrow EI\frac{dv}{dx} = -\frac{q}{6}x^3 + \frac{ql}{4}x^2 + C_1$$

$$\rightarrow EIv = \frac{-q}{24}x^4 + \frac{ql}{12}x^3 + C_1x + C_2$$

حالت اول: طرفین گیردار

1) $v(0) = 0 \rightarrow 0 = C_2$

2) $v(l) = 0 \rightarrow 0 = \frac{-q}{24}l^4 + \frac{q}{12}l^4 + C_1l \Rightarrow C_1 = \frac{-q}{24}l^3$

$$\rightarrow v(x) = \frac{1}{EI}\left(\frac{-q}{24}x^4 + \frac{ql}{12}x^3 - \frac{q}{24}l^3x\right)$$

حالت دوم: طرفین مفصل

$$EI\frac{d^4v}{dx^4} = -q \rightarrow EI\frac{d^3v}{dx^3} = -qx + C_1 \rightarrow EI\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{-q}{2}x^2 + C_1x + C_2$$

$$\rightarrow EI\frac{dv}{dx} = \frac{-q}{6}x^3 + \frac{1}{2}C_1x^2 + C_2x + C_3$$

$$\rightarrow EIv = \frac{-q}{24}x^4 + \frac{1}{6}C_1x^3 + \frac{1}{2}C_2x^2 + C_3x + C_4$$

1) $v(0) = 0 \rightarrow C_4 = 0$

2) $M(0) = 0 \rightarrow C_2 = 0$

3) $M(l) = 0 \rightarrow 0 = \frac{-q}{2}l^2 + C_1l \Rightarrow C_1 = \frac{q}{2}l$

4) $v(l) = 0 \rightarrow 0 = \frac{-q}{24}l^4 + \frac{q}{12}l^4 + C_3l \Rightarrow C_3 = \frac{-q}{24}l^3$

$$\rightarrow v(x) = \frac{1}{EI}\left(\frac{-q}{24}x^4 + \frac{ql}{12}x^3 - \frac{ql^3}{24}x\right) =$$

$$v'(x) = \frac{1}{EI}\left(\frac{-q}{6}x^3 + \frac{ql}{4}x^2 - \frac{ql^3}{24}\right) = 0$$

$$\rightarrow \frac{-1}{6}x^3 + \frac{l}{4}x^2 - \frac{l^3}{24} = 0 \Rightarrow -4x^3 + 6x^2 - l^3 = 0$$

$$\rightarrow x = l/2$$

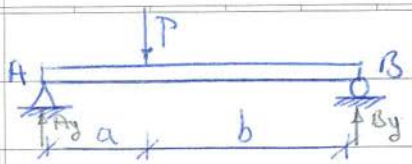
$$\rightarrow v(l/2) = \frac{+q}{24EI}\left(-(\frac{l}{2})^4 + 2l(l/2)^3 - l^3(l/2)\right)$$

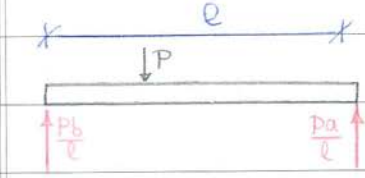
$$= \frac{q}{24EI}\left(\frac{-5}{16}l^4\right) \rightarrow v_{Max} = \frac{5ql^4}{384EI}$$

$$v(x) = \frac{qx}{24EI}\left[-x^3 + 2lx^2 - l^3\right]$$

تمرین ۳ معادله تغییر شکل تیر را بدست آورید

تغییر مکان Max را بدست آورید

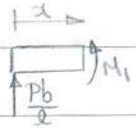




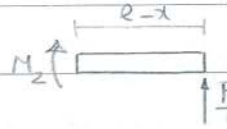
$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow -Pa + By(\ell) = 0 \rightarrow By = \frac{Pa}{\ell}$

$\Sigma F_y = 0 \rightarrow Ay + By = P \rightarrow Ay = \frac{Pb}{\ell}$

$M_1 - \frac{Pb}{\ell}x = 0 \rightarrow M_1 = \frac{Pb}{\ell}x \quad 0 \le x \le a$



$-M_2 + \frac{Pa}{\ell}(\ell - x) = 0 \rightarrow M_2 = \frac{-Pa}{\ell}x + Pa \quad a \le x \le \ell$



$M_1 = \frac{Pb}{\ell}x \rightarrow EI\frac{d^2v_1}{dx^2} = \frac{Pb}{\ell}x$

$\rightarrow EI\frac{dv_1}{dx} = \frac{Pb}{2\ell}x^2 + C_1 \rightarrow EIv_1 = \frac{Pb}{6\ell}x^3 + C_1x + C_2 \quad 0 \le x \le a$

$M_2 = \frac{-Pa}{\ell}x + Pa \rightarrow EI\frac{d^2v_2}{dx^2} = \frac{-Pa}{\ell}x + Pa \rightarrow EI\frac{dv_2}{dx} = \frac{-Pa}{2\ell}x^2 + Pax + C_3$

$EIv_2 = \frac{-Pa}{6\ell}x^3 + \frac{Pa}{2}x^2 + C_3x + C_4 \quad a \le x \le \ell$

شرایط مرزی:

1) $v_1(0) = 0 \rightarrow C_2 = 0$

2) $v_2(\ell) = 0 \rightarrow -\frac{Pa}{6}\ell^2 + \frac{Pa}{2}\ell^2 + C_3\ell + C_4 = 0 \quad (1)$

3) $v_1'(a) = v_2'(a) \rightarrow \frac{Pb}{2\ell}a^2 + C_1 = \frac{-Pa}{2\ell}a^2 + Pa^2 + C_3$

$\rightarrow Pa^2\left(\frac{b+a}{2\ell}\right) - Pa^2 = C_3 - C_1 \Rightarrow C_3 - C_1 = \frac{-1}{2}Pa^2 \quad (2)$

4) $v_1(a) = v_2(a) \rightarrow \frac{Pb}{6\ell}a^3 + C_1a = \frac{-Pa}{6\ell}a^3 + \frac{P}{2}a^3 + C_3a + C_4$

$\rightarrow Pa^3\left(\frac{b+a}{6\ell}\right) - \frac{P}{2}a^3 = \frac{-1}{2}Pa^3 + C_4 \rightarrow C_4 = \frac{1}{6}Pa^3$

$(1) \rightarrow \frac{1}{3}Pa\ell^2 + C_3\ell + \frac{1}{6}Pa^3 = 0 \quad C_3 = \frac{-Pa}{6\ell}(2\ell^2 + a^2)$

$(2) \rightarrow C_3 + \frac{1}{2}Pa^2 = C_1 \Rightarrow C_1 = \frac{3Pla^2}{6\ell} - \frac{Pa}{6\ell}(2\ell^2 + a^2)$

$\rightarrow C_1 = \frac{-Pa}{6\ell}(2\ell^2 - 3\ell a + a^2)$

$$\begin{cases} v_1 = \frac{1}{EI}\left[\frac{Pb}{6\ell}x^3 - \frac{Pax}{6\ell}(2\ell^2 - 3\ell a + a^2)\right] & 0 \le x \le a \\ v_2 = \frac{1}{EI}\left[\frac{-Pa}{6\ell}x^3 + \frac{Pa}{2}x^2 - \frac{Pax}{6\ell}(2\ell^2 + a^2) + \frac{1}{6}Pa^3\right] & a \le x \le \ell \end{cases}$$

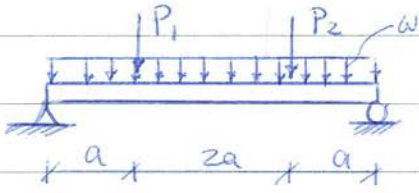
تغییر شکل تیر با استفاده از اصل سوپرپوزیسیون

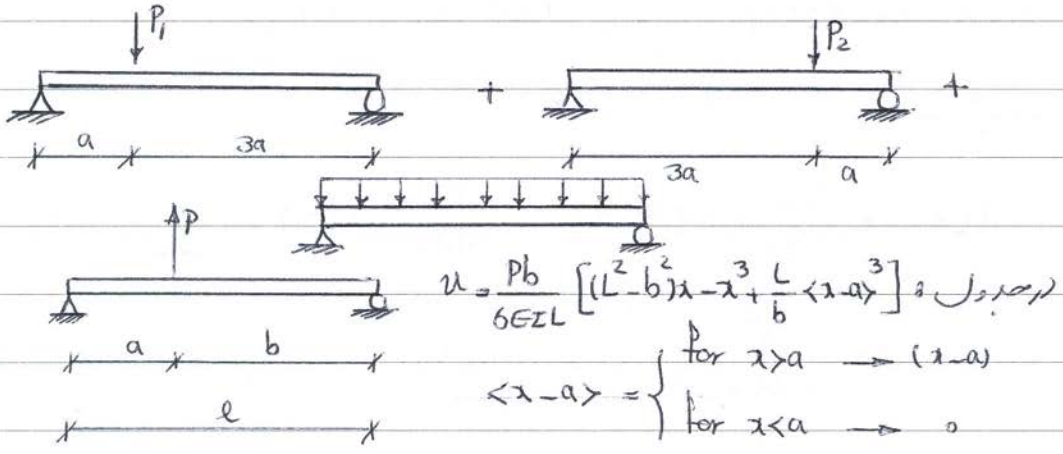
شرایط استفاده از اصل سوپرپوزیسیون:

۱) تغییر شکل حاصل از هر کدام از بارها نباید بر بقیه بارها و دیگر تأثیر بگذارد

۲) حالت بررسی حالت الاستیک خطی باشد

مثال: مطلوب است تغییر شکل تیر زیر به طریقه تغییر طول وسط آن را بدست آورید.





$$v = \frac{Pb}{6EIL}\left[(L^2-b^2)x - x^3 + \frac{L}{b}\langle x-a\rangle^3\right]$$

$$\langle x-a\rangle = \begin{cases} \text{for } x>a \rightarrow (x-a) \\ \text{for } x<a \rightarrow 0 \end{cases}$$

$$v_1(x) = \frac{-P_1(3a)}{6EI(4a)}\left[((4a)^2-(3a)^2)x - x^3 + \frac{4a}{3a}\langle x-a\rangle^3\right]$$

$$\rightarrow v_1(x) = \frac{-P_1}{8EI}\left[7a^2x - x^3 + 4/3\langle x-a\rangle^3\right]$$

$$v_2(x) = \frac{-P_2(a)}{6EI(4a)}\left[((4a)^2-a^2)x - x^3 + \frac{4a}{a}\langle x-3a\rangle^3\right]$$

$$\rightarrow v_2(x) = \frac{-P_2}{24EI}\left[15a^2x - x^3 + 4\langle x-3a\rangle^3\right]$$

$$v_3(x) = \frac{-wx}{24EI}\left(x^3 - 8ax^2 + 64a^3\right)$$

$$\Rightarrow v(x) = v_1(x) + v_2(x) + v_3(x)$$

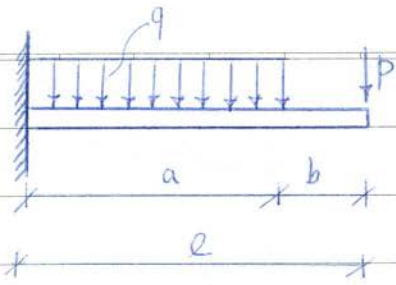
$$\Rightarrow v(x) = \frac{-P_1}{8EI}\left[7a^2x - x^3 + \tfrac{4}{3}\langle x-a\rangle^3\right] + \frac{-P_2}{24EI}\left[15a^2x - x^3 + 4\langle x-3a\rangle^3\right] - \frac{wx}{24EI}\left(x^3 - 8ax^2 + 64a^3\right)$$

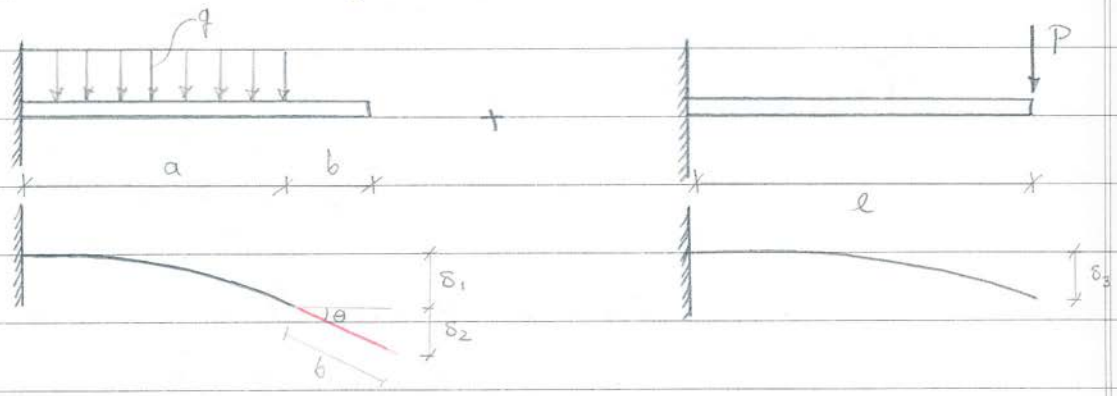
$$x = 2a \Rightarrow v(2a) = \frac{-P_1}{8EI}\left[14a^3 - 8a^3 + \tfrac{4}{3}a^3\right] - \frac{P_2}{24EI}\left[30a^3 - 8a^3\right] - \frac{wa}{12EI}\left(8a^3 - 32a^3 + 64a^3\right)$$

$$\Rightarrow v(2a) = \frac{-P_1}{8EI}\left(\frac{22}{3}a^3\right) - \frac{P_2}{24EI}\left(22a^3\right) - \frac{wa}{12EI}\left(40a^3\right)$$

$$\Rightarrow v(2a) = \frac{a^3}{24EI}\left(-22P_1 - 22P_2 - 80wa\right)$$

مثال: تغییر مکان انتهای آزاد تیر کنسولی را با استفاده از روش جمع آثار بدست آورید.





$$\delta_1 = \frac{q a^4}{8EI}$$

$$\theta = \frac{q a^3}{6EI} \quad \rightarrow \quad \sin\theta = \frac{\delta_2}{b} \quad \rightarrow \quad \delta_2 = b\theta = \frac{q a^3 b}{6EI}$$

$$\delta_3 = \frac{P\ell^3}{3EI}$$

$$\rightarrow \quad v = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = \frac{q a^3}{2EI}\left(\frac{b}{3} + \frac{a}{4}\right) + \frac{P\ell^3}{3EI}$$

تحلیل تیرهای نامعین (Indeterminate Beam Analysis)

تیر نامعین تیری است که تعداد تکیه‌گاه‌هایش بیشتر از تعداد معادلات مستقل تعادل است. این تیرها برای پایداری و ثابت نگه داشتن به تکیه‌گاه‌های اضافی نیاز دارند.

اگر تیر دارای تکیه‌گاه‌های بیش از تعداد حداقل پایداری باشد تیر نامعین می‌گردد.

دو روش برای تحلیل تیرهای نامعین استفاده می‌کنیم:

۱) روش حل معادله دیفرانسیل تغییر شکل ارتجاعی
۲) روش مبتنی بر اصل سوپرپوزیشن

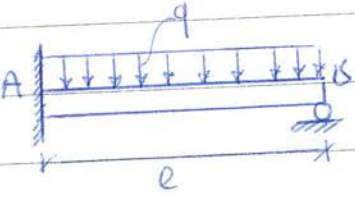
در هر دو روش مطلب مشترک است که باید درجه نامعینی را تشخیص و مقدارش را بدست آوریم.

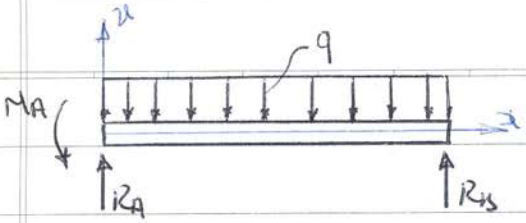
۱) روش حل معادله دیفرانسیل تغییر شکل ارتجاعی:

۱) انتخاب واکنش اضافی
۲) تشکیل معادله دیفرانسیل تغییر شکل ارتجاعی تیر برحسب واکنش اضافی
۳) حل معادله دیفرانسیل تغییر شکل
۴) اعمال شرایط مرزی و با فرض ثابت‌های انتگرال و واکنش اضافی توأماً

در تشکیل معادلات مختار هستیم از معادله درجه دوم، سوم یا چهارم استفاده نماییم.

مثال: مطلوبست محاسبهٔ عکس‌العمل‌های تیر نشان داده شده.





تیر کنسول و تیر ساده با RB و واکنش اضافی

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow R_A = q.l - R_B \qquad \Sigma M = 0 \Rightarrow M_A = \frac{ql^2}{2} - R_B l$$

$$M(x) = R_A . x - \frac{qx^2}{2} - M_A \Rightarrow EI\frac{d^2v}{dx^2} = R_A . x - \frac{qx^2}{2} - M_A$$

$$\Rightarrow EI\frac{dv}{dx} = \frac{R_A}{2}x^2 - \frac{qx^3}{6} - M_A . x + C_1$$

$$\Rightarrow EIv = \frac{R_A}{6}x^3 - \frac{q}{24}x^4 - \frac{M_A}{2}x^2 + C_1 x + C_2$$

$$\Rightarrow EIv = \frac{ql}{6}x^3 - \frac{R_B}{6}x^3 - \frac{qx^4}{24} - \frac{ql^2}{4}x^2 + \frac{R_B l}{2}x^2 + C_1 x + C_2$$

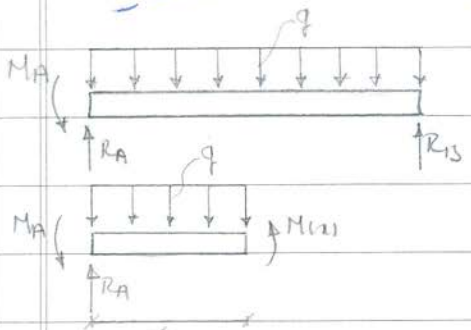
این شرط مرزی برای تیر اصلی است نه تیر ساده و شرایط مرزی

$$\begin{cases} v(0) = 0 \\ v'(0) = 0 \\ v(l) = 0 \end{cases} \Rightarrow C_1 = 0 \;,\; C_2 = 0 \;,\; R_B = \frac{3ql}{8}$$

$$\Rightarrow R_A = \frac{5ql}{8} \qquad M_A = \frac{ql^2}{8}$$

تمرین: M_A را در مثال فوق واکنش اضافی در نظر گرفته و مسئله را مجدداً حل نمایید.

تیر ساده: تیر با M_A و واکنش اضافی



$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow M_A - \frac{q}{2}l^2 + R_B l = 0$$

$$\Rightarrow R_B = \frac{q}{2}l - \frac{M_A}{l}$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow R_A + R_B = ql$$

$$\Rightarrow R_A = ql - \frac{q}{2}l + \frac{M_A}{l} = \frac{q}{2}l + \frac{M_A}{l}$$

$$M(x) + \frac{qx^2}{2} - R_A x + M_A = 0 \Rightarrow M(x) = -\frac{q}{2}x^2 + R_A x - M_A$$

$$\Rightarrow M(x) = \frac{-q}{2}x^2 + \frac{q}{2}lx + \frac{M_A}{l}x - M_A$$

$$\rightarrow EI\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{-q}{2}x^2 + \frac{q}{2}lx + \frac{M_A}{l}x - M_A$$

$$\rightarrow EI\frac{dv}{dx} = \frac{-q}{6}x^3 + \frac{q}{4}lx^2 + \frac{M_A}{2l}x^2 - M_Ax + C_1$$

$$\rightarrow EIv(x) = \frac{-q}{24}x^4 + \frac{q}{12}lx^3 + \frac{M_A}{6l}x^3 - \frac{M_A}{2}x^2 + C_1x + C_2$$

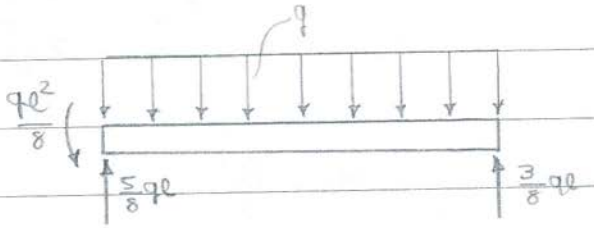
1) $v(0) = 0 \rightarrow C_2 = 0$

2) $\dot{v}(0) = 0 \rightarrow C_1 = 0$

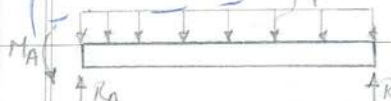
3) $v(l) = 0 \rightarrow 0 = \frac{-q}{24}l^4 + \frac{q}{12}l^4 + \frac{M_A}{6}l^2 - \frac{M_A}{2}l^2$

$$\rightarrow 0 = \frac{q}{24}l^4 - \frac{2M_A}{6}l^2 \rightarrow \frac{1}{3}M_Al^2 = \frac{q}{24}l^4 \rightarrow M_A = \frac{ql^2}{8}$$

$$\rightarrow R_B = \frac{q}{2}l - \frac{M_A}{l} = \frac{q}{2}l - \frac{q}{8}l \rightarrow \begin{cases} R_B = \frac{3}{8}ql \\ R_A = \frac{5}{8}ql \end{cases}$$



تمرین: در تیر زیر واکنش اضافی را بر حسب تغییر مکان و زاویه در انتهای سر تکیه‌گاه ساده محاسبه کنید. R_A واکنش اضافی



$\Sigma M_B = 0 \Rightarrow \frac{q}{2}l^2 - R_A l + M_A = 0$

$\rightarrow M_A = R_A l - \frac{q}{2}l^2 \qquad \Sigma F_y = 0 \Rightarrow R_A + R_B = ql \rightarrow R_B = ql - R_A$

$EI\frac{d^4v}{dx^4} = -q \Rightarrow EI\frac{d^3v}{dx^3} = -qx + C_1 \rightarrow EI\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{-q}{2}x^2 + C_1 x + C_2$

$\rightarrow EI\frac{dv}{dx} = \frac{-q}{6}x^3 + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2 x + C_3 \Rightarrow EIv = \frac{-q}{24}x^4 + \frac{C_1}{6}x^3 + \frac{C_2}{2}x^2 + C_3 x + C_4$

1) $v(0) = 0 \rightarrow C_4 = 0 \qquad$ 2) $v'(0) = 0 \rightarrow C_3 = 0$

3) $V(0) = R_A \rightarrow C_1 = R_A$

4) $M(l) = 0 \rightarrow 0 = \frac{-q}{2}l^2 + C_1 l + C_2 \Rightarrow 0 = \frac{-q}{2}l^2 + R_A l + C_2$

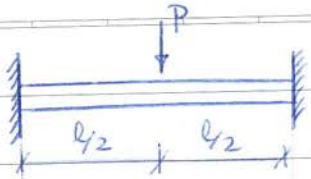
$\rightarrow C_2 = \frac{q}{2}l^2 - R_A l$

5) $v(l) = 0 \rightarrow 0 = \frac{-q}{24}l^4 + \frac{R_A}{6}l^3 + \frac{l^2}{2}\left(\frac{q}{2}l^2 - R_A l\right)$

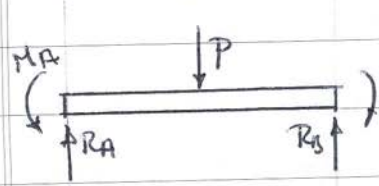
$0 = \frac{-q}{24}l^4 + \frac{R_A}{6}l^3 + \frac{q}{4}l^4 - \frac{R_A}{2}l^3 \rightarrow 0 = \frac{5q}{24}l^4 - \frac{1}{3}R_A l^3$

$\rightarrow R_A = \frac{5}{8}ql \quad , \quad R_B = \frac{3}{8}ql \quad , \quad M_A = \frac{ql^2}{8}$

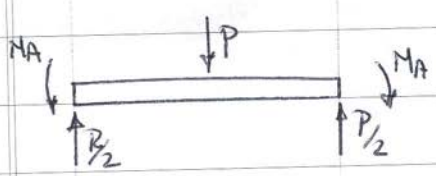
مثال: خیز انحنا را برای تیر دو سر گیردار شکل زیر بدست آورید.



* اگر تیر یک سر گیردار باشد در صورت B_x و A_x می‌توانیم بنویسیم که $A_x = 1S_1$. و چون تغییر شکل در تغییر شکل جسم تیر تنها در راستای y است در نظر می‌گیریم.



* در این مسئله مخصوص به دلیل تقارن $R_A = R_B = P/2$، $M_A = M_B$ باشد. نیز که در ادامه از آن استفاده می‌کنیم.



M_A را مجهول اضافی می‌گیریم و از معادله دیفرانسیل سه‌قطبی استفاده می‌کنیم.

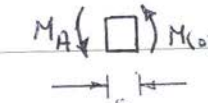
$$0 \le x \le l/2 \quad EI\frac{d^4v}{dx^4} = 0 \rightarrow EI\frac{d^3v}{dx^3} = C_1 \rightarrow EI\frac{d^2v}{dx^2} = C_1x + C_2$$

$$EI\frac{dv}{dx} = \frac{1}{2}C_1x^2 + C_2x + C_3 \rightarrow EIv = \frac{C_1}{6}x^3 + \frac{C_2}{2}x^2 + C_3x + C_4$$

ترتیب استفاده

تقارن طبیعی

$$\begin{cases} v(0) = 0 & (5) \\ v'(0) = 0 & (3) \\ v'(l/2) = 0 & (4) \\ M(0) = -M_A & (2) \\ V(0) = P/2 & (1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = P/2 \\ C_2 = -M_A \\ C_3 = 0 \\ M_A = Pl/8 \\ C_4 = 0 \end{cases}$$



$$v(x) = \frac{P}{12EI}x^3 - \frac{Pl}{16EI}x^2 \qquad 0 \le x \le l/2 \qquad M_A = \frac{Pl}{8}$$

مجهول تقارن داریم برای محاسبه تغییر شکل ناحیه دوم می‌توانیم به جای x، $l-x$ قرار دهد.

۲) روش مبتنی بر اصل سوپرپوزیسیون :

۱) تعیین واکنش های اضافی (واکنش اضافی)

۲) حذف واکنش های اضافی از تیر و تشکیل تیر پایه

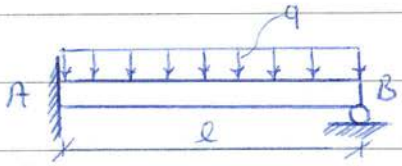
۳) محاسبه تغییر شکل یا شیب های نظیر محل واکنش های اضافی در تیر پایه در اثر بارگذاری واقعی تیر.

۴) محاسبه تغییر شکل یا شیب های نظیر محل واکنش های اضافی در تیر پایه ناشی از اعمال نقش واکنش های اضافی به عنوان بارهای خارجی روی تیر پایه.

۵) تشکیل معادلات سازگاری تغییر شکل بر اساس اصل سوپرپوزیسیون (یعنی این واقعیت که تغییر شکل یا شیب های نهایی ناشی از تأثیر همزمان بارگذاری خارجی واقعی و واکنش های اضافی برابر با مجموع تغییر شکل یا شیب های جداگانه می شود است)

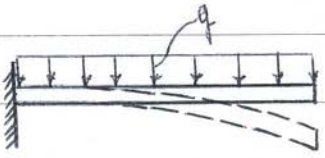
۶) یافتن واکنش های اضافی از حل معادلات سازگاری و تعیین واکنش های از تعادل

مثال : مطلوبست محاسبه عکس العمل های تکیه گاهی داده شده.



۱) واکنش R_{is} را به عنوان واکنش اضافی انتخاب می کنیم.

در مرحله ۳ تیر پایه تحت بارگذاری خارجی واقعی روی تیر قرار می گیرد.



در مرحله ۴ تیر پایه تحت واکنش اضافی به عنوان بار خارجی قرار می گیرد.

در حل تشکیل واکنش اضافی معادله سازگاری را می نویسیم همین از کجا خبر داریم.

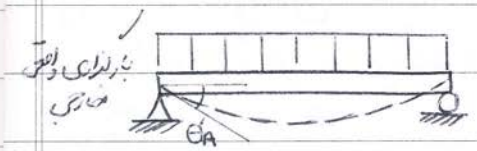
معادله سازگاری تغییر شکل

$$\delta_{is} = \delta'_{is} + \delta''_{is} = 0$$

$$\text{جداول الحاقی} \begin{cases} \delta'_{1B} = -\dfrac{ql^4}{8EI} \\ \delta''_{1B} = \dfrac{R_B l^3}{3EI} \end{cases} \quad , \quad \delta'_{1B} + \delta''_{1B} = 0 \Rightarrow R_B = \frac{3ql}{8}$$

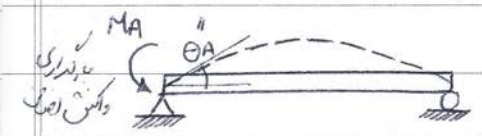
$$\Rightarrow R_A = \frac{5ql}{8} \qquad M_A = \frac{ql^2}{8}$$

۲) واکنش M_A را واکنش اضافی فرض می‌کنیم



تیر ساده ← تیر ساده

معادله سازگاری: $\theta_A = \theta'_A + \theta''_A = 0$



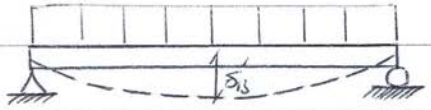
جداول الحاقی $\begin{cases} \theta'_A = -\dfrac{ql^3}{24EI} \\ \theta''_A = \dfrac{M_A \cdot l}{3EI} \end{cases}$

$$\Rightarrow \theta'_A = -\theta'_A \Rightarrow M_A = \frac{ql^2}{8}$$

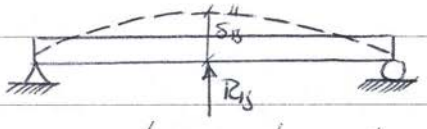
مثال: عکس العمل تکیه‌گاه‌ها در تیر زیر را بدست آورید.

B واکنش اضافی

می‌توانیم C را واکنش اضافی بگیریم که جدول نداریم.



محل واکنش اضافی برای معادله سازگاری استفاده می‌کردد.

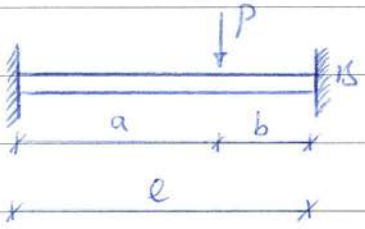


سازگاری: $\delta'_{1B} + \delta''_{1B} = 0$

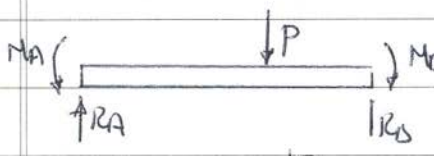
$$\delta'_{1B} = -\frac{5q(2l)^4}{384EI} = -\frac{5ql^4}{24EI}$$

$$\delta''_{1B} = \frac{R_B(2l)^3}{48EI} = \frac{R_B \cdot l^3}{6EI}$$

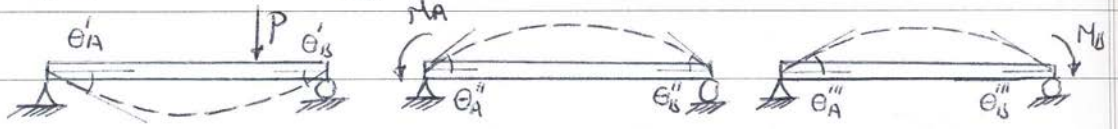
سازه‌ی نظیر → $R_B = \frac{5ql}{4}$ $R_A = R_C = \frac{3ql}{8}$



مثال: عکس العمل یکی تکیه‌گاه را برابر X در نظر می‌گیریم.
به علت عکس العمل یکی از تکیه‌گاه‌ها حرکت از آن یک سر گیردار می‌کنیم.
(تا از حرکت یک تکیه‌گاه جلوگیری کرد)



M_B , M_A ← والنش اضافی
تیر ساده ← تیر ساده



تغییرات سازه‌ای

$$\theta_A = \theta'_A + \theta''_A + \theta'''_A = 0$$

$$\theta_B = \theta'_B + \theta''_B + \theta'''_B = 0$$

$$\theta'_A = -\frac{Pab(l+b)}{6EIl} \qquad \theta'_B = \frac{Pab(l+a)}{6EIl}$$

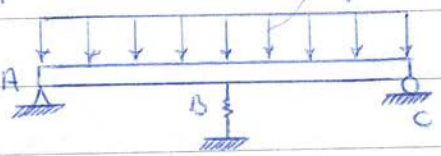
$$\theta''_A = \frac{M_A \cdot l}{3EI} \qquad \theta''_B = -\frac{M_A \cdot l}{6EI}$$

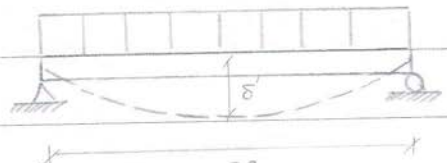
$$\theta'''_A = \frac{M_B l}{6EI} \qquad \theta'''_B = -\frac{M_B \cdot l}{3EI}$$

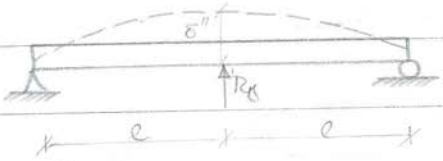
$$\rightarrow M_A = \frac{Pab^2}{l^2} \qquad M_B = \frac{Pa^2b}{l^2}$$

۲۵ $$R_A = \frac{Pb^2}{l^3}(l+2a) \qquad R_B = \frac{Pa^2}{l^3}(l+2b)$$

تمرین: فرض کنید در تیر راه عکس گذاشته شده فنری با سختی k داشته باشیم مثل قبل تغییر شکلش را حل کنید







$$\delta = \delta' + \delta'' = -\frac{R_B}{k} \quad \begin{cases} \delta' = -\frac{5q\ell^4}{24EI} \\ \delta'' = \frac{R_B\ell^3}{6EI} \end{cases}$$

$$\rightarrow -\frac{5q\ell^4}{24EI} + \frac{R_B\ell^3}{6EI} = -\frac{R_B}{k} \rightarrow R_B\left(\frac{\ell^3}{6EI} + \frac{1}{k}\right) = \frac{5q\ell^4}{24EI}$$

$$\rightarrow R_B\left(\frac{k\ell^3 + 6EI}{6kEI}\right) = \frac{5q\ell^4}{24EI} \rightarrow R_B = \frac{5qk\ell^4}{24(k\ell^3 + 6EI)}$$

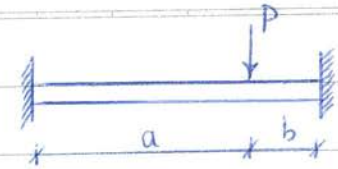
$$\Sigma M_A = 0 \rightarrow R_B\ell + 2R_C\ell - 2q\ell^2 = 0 \rightarrow R_C = \frac{-R_B}{2} + q\ell$$

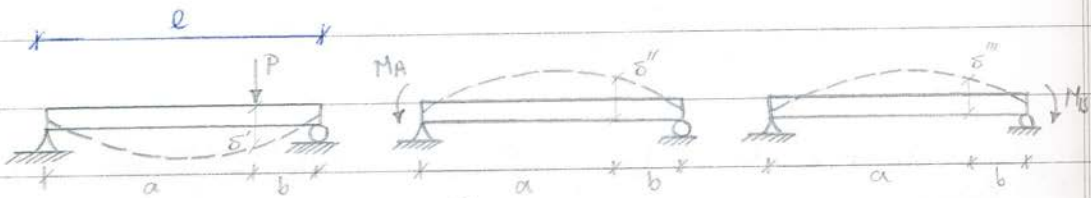
$$\rightarrow R_C = \frac{-5}{48}\left(\frac{qk\ell^4}{k\ell^3 + 6EI}\right) + q\ell$$

$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow R_A + R_B + R_C = 2q\ell \rightarrow R_A = 2q\ell - R_B - R_C$$

$$\rightarrow R_A = q\ell - \frac{5}{48}\left(\frac{qk\ell^4}{k\ell^3 + 6EI}\right)$$

تمرین: تغییر مکان محل بار متمرکز را بدست آورید.





$$M_A = \frac{Pab^2}{l^2} \qquad M_B = \frac{Pa^2b}{l^2}$$

$$\delta = \delta' + \delta'' + \delta'''$$

$$v_1 = \frac{-Pb}{6EIL}\left[(l^2-b^2)x - x^3 + (l/b)\langle x-a\rangle^3\right]$$

$$\rightarrow \delta' = v_1(a) = \frac{-Pb}{6EIl}\left[(l+b)a^2 - a^3\right] = \frac{-Pb^2a^2}{6EIl}$$

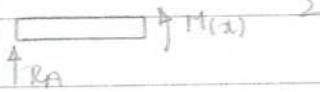
$$v_3 = \frac{M_B x}{6EIl}(l^2-x^2) \rightarrow \delta''' = v_3(a) = \frac{M_B a}{6EIl}(b(l+a))$$

$$\rightarrow \delta''' = \frac{Pa^2b^2}{6EIl^3}(l+a)$$

برای یافتن v به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\Sigma M_A = 0 \rightarrow M_A = R_B l \quad \Sigma F_y = 0 \rightarrow R_A = R_B$$

$$\rightarrow R_A = R_B = \frac{M_A}{l}$$



$$\Sigma M = 0 \rightarrow M(x) + M_A - R_A x = 0$$

$$\rightarrow M(x) = M_A(x/l - 1) = \frac{M_A}{l}(x-l)$$

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M_A}{l}(x-l) \rightarrow EI\frac{dv}{dx} = \frac{M_A}{2l}(x-l)^2 + C_1$$

$$\rightarrow EIv = \frac{+M_A}{6l}(x-l)^3 + C_1x + C_2$$

$$v(0) = 0 \rightarrow 0 = \frac{-M_A}{6l}(l)^3 + C_2 \rightarrow C_2 = \frac{+M_A l^2}{6}$$

$$v(l) = 0 \rightarrow 0 = 0 + C_1 l + \frac{M_A l^2}{6} \rightarrow C_1 = -\frac{M_A l}{6}$$

$$v = \frac{1}{EI}\left(\frac{M_A}{6l}(x-l)^3 - \frac{M_A}{6}lx + \frac{M_A}{6}l^2\right) = \frac{M_A}{6EI}\left(\frac{(x-l)^3}{l} - lx + l^2\right)$$

$$\rightarrow v_3 = \frac{M_A}{6EIl}\left((x-l)^3 - l^2x + l^3\right)$$

$$\rightarrow \delta'' = v_3(a) = \frac{M_A}{6EIl}\left((a-l)^3 - l^2a + l^3\right) = \frac{M_A}{6EIl}\left(-b^3 - l^2a + l^3\right)$$

$$= \frac{M_A}{6EIl}\left(l^2(b) - b^3\right) = \frac{M_A}{6EIl}\left(b(a)(l+b)\right) = \frac{M_A ab}{6EIl}(l+b)$$

$$\rightarrow \delta'' = \frac{Pa^2b^3}{6EIl^3}(l+b)$$

$$\delta = \frac{-Pb^2a^2}{6EIl} + \frac{Pa^2b^3}{6EIl^3}(l+b) + \frac{Pa^3b^2}{6EIl^3}(l+a)$$

$$= \frac{Pa^2b^2}{6EIl}\left(-1 + \frac{b}{l^2}(l+b) + \frac{a}{l^2}(l+a)\right) = \frac{Pa^2b^2}{6EIl}\left(-1+1+\frac{b^2+a^2}{l^2}\right)$$

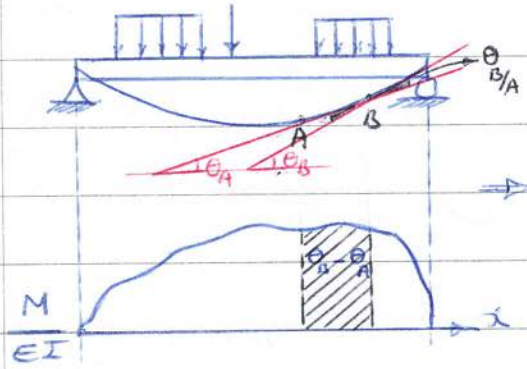
$$\rightarrow \delta = \frac{Pa^2b^2(a^2+b^2)}{6EIl^3}$$

لحضی مواقع دیگر احتیاجی به کل روند تغییر شکل نیز نداریم. در این مواقع از قضایای زیر استفاده می کنیم.

قضایای مساحت لنگر (Moment-area Theorems)

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{EI} \Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{dv}{dx}\right) = \frac{M}{EI} \Rightarrow \frac{d\theta}{dx} = \frac{M}{EI}$$

$$\Rightarrow d\theta = \frac{M}{EI}\,dx \qquad (\theta_A + 180 - \theta_B + \alpha = 180 \Rightarrow \alpha = \theta_B - \theta_A = \theta_{B/A})$$



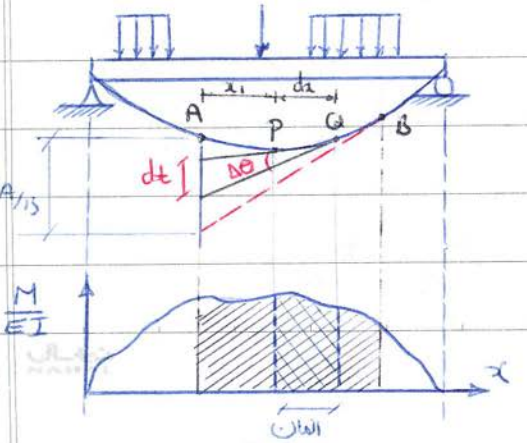
$$\int_A^B d\theta = \int_A^B \frac{M}{EI}\,dx$$

$$\Rightarrow \theta_B - \theta_A = \int_A^B \frac{M}{EI}\,dx = \theta_{B/A}$$

قضیه اول لنگر سطح

زاویه بین مماس‌های رسم شده در هر دو نقطه دلخواه برابر است با سطح زیر منحنی $\frac{M}{EI}$ بین همان دو نقطه.

اگر تغییر جهت بالا باشد لنگر مثبت است و برعکس.



$$dt = x_1\,\Delta\theta$$

$$\Rightarrow dt = x_1 \cdot \frac{M}{EI}\,dx$$

$$\Rightarrow \int_A^B dt = \int_A^B x_1 \cdot \frac{M}{EI}\,dx$$

$$t_{A/B} = \int_A^B x_1 \cdot \frac{M}{EI}\,dx$$

فاصله المان تا A

$$S_x = \int x\,dA$$

قضیه دوم تیر سطح:

درجه انحنی از تغییر شکل فاصله قائم نقطه A از مماس رسم شده بر نقطه B برابر است با لنگر اول سطح زیر منحنی $\frac{M}{EI}$ از A تا B که نسبت به محور قائم در نقطه A

$S = \int x dA \rightarrow$ لنگر اول سطح

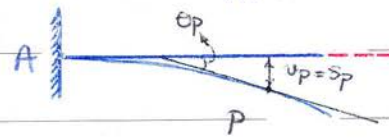
x_1: فاصله یک انتهای سطح از محور قائم در نقطه A

$t_{A/B}$: فاصله (انحراف) قائم نقطه A از مماس رسم شده نقطه B

کاربرد مستقیم قضایای تیر سطح:

اگر بتوانیم مماس مرجعی (نقطه‌ای که شیب تغییر نکرده است) را مشخص کنیم θ در نقاط دیگر برابر است با θ آن نقطه A بر روی مماس مرجع مانده و نقطه B بالای مماس مرجع قرار داشته باشد $t_{B/A} > 0$ و اگر نقطه B زیر مماس مرجع مانده باشد $t_{B/A} < 0$ است.

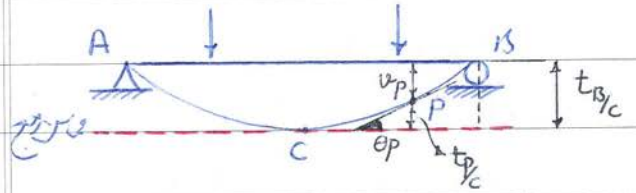
الف) تیر یکسر گیردار:



$v_P < 0$, $t_{P/A} < 0$

$\theta_P = \theta_{P/A}$ $\quad$ $v_P = \delta_P = t_{P/A}$

ب) تیر ساده تحت بارگذاری متقارن:



$t_{B/C} > 0$, $t_{P/C} > 0$

$v_P < 0$

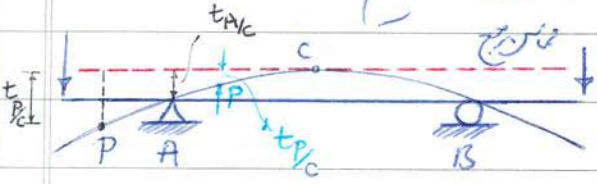
$\theta_P = \theta_{P/C}$ $\quad$ $v_P = t_{P/C} - t_{B/C}$

علامت رعایت شده ←

- فرض کنیم تیری داریم که بصورت نشان داده شده و بارگذاری متقارن داریم.

$(v_P<0 \;,\; t_{P/C}<0 \;,\; t_{A/C}<0)$

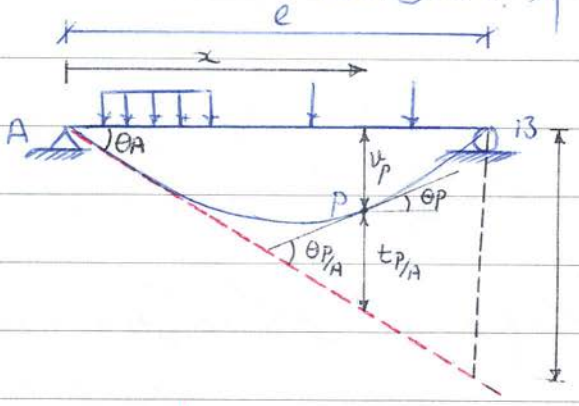
منحنی الاستیک



$t_{P/C}<0$ چون زیر خط مماس است.

$$\theta_P = \theta_{P/C} \qquad v_P = t_{P/C} - t_{A/C}$$

اگر P را بین A , C انتخاب کنیم باز هم رابطه صادق است.



ج) تیر نامتقارن:

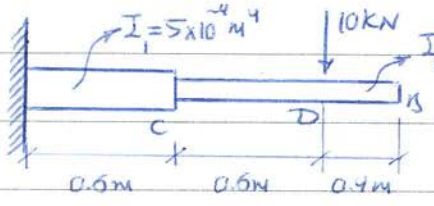
مماس مرجع را در یک تکیه گاه در نظر می گیریم.

چون بالای مماس است

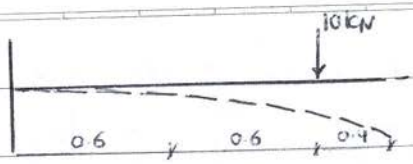
$$\theta_A = -\frac{t_{B/A}}{L} \qquad \theta_P = \theta_A + \theta_{P/A}$$

$$v_P = t_{P/A} - \frac{x}{L} t_{B/A}$$

مثال: مطلوبست حداکثر تغییر مکان و شیب انتهای آزاد تیر کنسولی در نقطه B (v_B, θ_B)



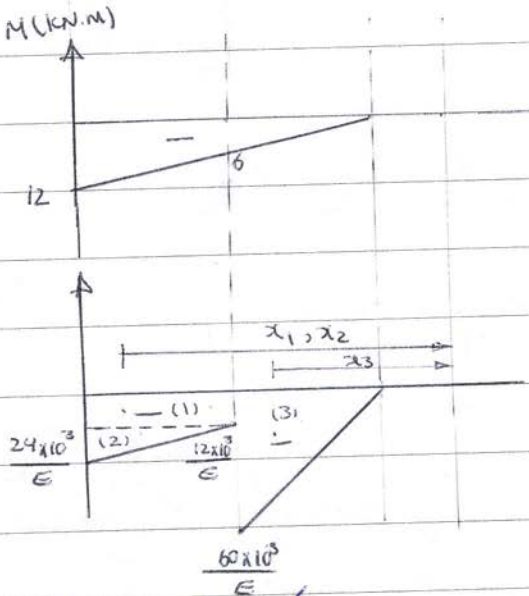
$E = 70\times10^{9}\ N/m^2$



$$\theta_B = \theta_{B/A} = \int \frac{M}{EI}\,dx$$

$$\theta_{B} = -\left[\left(\frac{1.2\times10^{3}\times10^{4}}{E}\times0.6\right) + \left(\frac{1}{2}\times\frac{1.2\times10^{3}\times10^{4}}{E}\times0.6\right) + \left(\frac{1}{2}\times\frac{6\times10^{7}}{E}\times0.6\right)\right]$$

$$\Rightarrow \theta_{B} = -\frac{2.88}{70\times10^{9}}\times10^{7} = -0.411\times10^{-3}$$



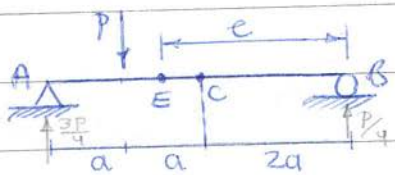
$$v_B = t_{B/A} = \int x\,\frac{M}{EI}\,dx \Rightarrow$$

$$= -\left[(1.6-0.3)\left(\frac{1.2\times10^{7}}{E}\times0.6\right) + (1.6-0.2)\left(\frac{1}{2}\times\frac{1.2\times10^{7}}{E}\times0.6\right) + (1.6-0.6-0.2)\left(\frac{1}{2}\times\frac{6\times10^{7}}{E}\times0.6\right)\right]$$

$$= -\frac{2.88}{E}\times10^{7} = -4.114\times10^{-4}$$

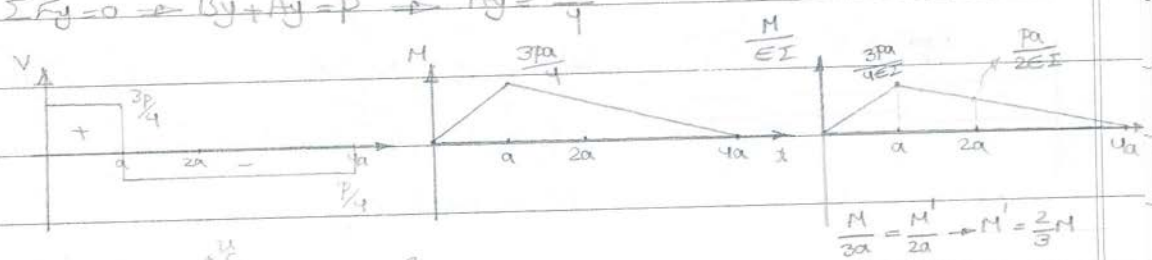
دقت: وقتی مرا آزاری دهندی کوشم روحم را بقدری بالا نگه دارم که آزار دیگران بر من نرسد.

تمرین: تیرهای معادل نقاط C و E مفصل ندارد. مطلوبست محاسبه تغییر مکان نقاط C و E.

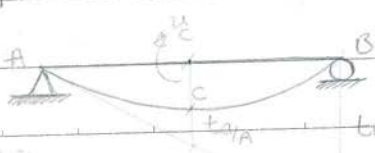


$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow -Pa + 4a\,B_y = 0 \Rightarrow B_y = P/4$$

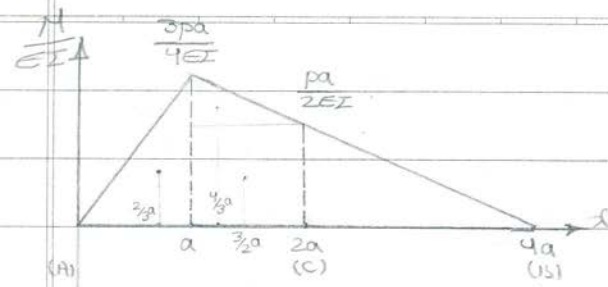
$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow B_y + A_y = P \Rightarrow A_y = \frac{3P}{4}$$



$$\frac{M}{3a} = \frac{M'}{2a} \Rightarrow M' = \frac{2}{3}M$$



$$v_C = t_{C/A} - \frac{1}{2}t_{B/A}$$



$$t_{C/A} = \int x \frac{M}{EI} dx$$

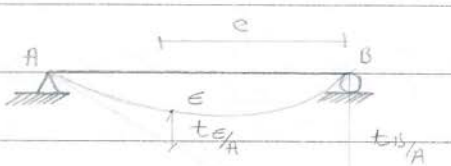
$$t_{C/A} = \frac{4}{3}a\left(\frac{1}{2}a \times \frac{3pa}{4EI}\right) + \frac{1}{2}a\left(a \times \frac{pa}{2EI}\right) + \frac{2}{3}a\left(\frac{1}{2}a \times \frac{pa}{4EI}\right)$$

$$\rightarrow t_{C/A} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1}\frac{pa^3}{EI} + \frac{pa^3}{2EI} + \frac{pa^3}{6EI}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{(12+6+2)pa^3}{12}\right] = \frac{20}{24}\frac{pa^3}{EI}$$

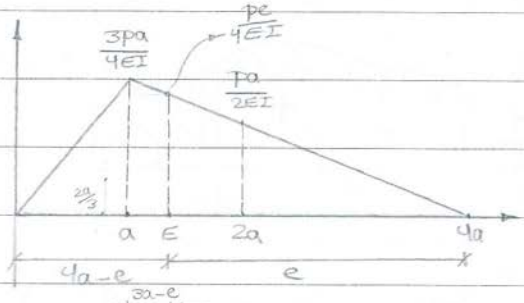
$$t_{B/A} = \frac{10}{3}a\left(\frac{1}{2}a \times \frac{3pa}{4EI}\right) + 2a \times \left(\frac{1}{2} \times 3a\left(\frac{3pa}{4EI}\right)\right)$$

$$= \frac{pa^3}{EI}\left(\frac{5}{4} + \frac{9}{4}\right) = \frac{14}{4}\frac{pa^3}{EI}$$

$$\rightarrow y_c = \left(\frac{20}{24} - \frac{14}{8}\right)\frac{pa^3}{EI} = \frac{20-42}{24}\frac{pa^3}{EI} = \frac{-11}{12}\frac{pa^3}{EI}$$



$$y_\epsilon = t_{\epsilon/A} - \frac{4a-e}{4a} t_{B/A}$$



$$\frac{\frac{3pa}{4EI}}{3a} = \frac{M}{e} \rightarrow M = \frac{3pae}{4(3aEI)} = \frac{pe}{4EI}$$

$$t_{\epsilon/A} = \left(\frac{1}{3}a + 3a - e\right)\left(\frac{1}{2}a\frac{3pa}{4EI}\right) + \left(\frac{1}{2}(3a-e)^2\frac{pe}{4EI}\right) + \frac{2}{3}(3a-e)\frac{1}{2}\left(\frac{3pa}{4EI} - \frac{pe}{4EI}\right)$$

$$= \left(\frac{10}{3}a - e\right)\left(\frac{3}{8}\frac{pa^2}{EI}\right) + (3a-e)^2\frac{pe}{8EI} + \frac{1}{3}(3a-e)^3\left(\frac{p}{4EI}\right)$$

$$= \frac{p}{4EI}\left[\left(\frac{10}{3}a - e\right)\left(\frac{3}{2}a^2\right) + (3a-e)^2\frac{e}{2} + \frac{1}{3}(3a-e)^3\right]$$

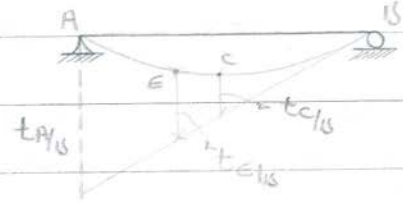
$$= \frac{p}{4EI}\left[5a^3 - \frac{3}{2}ea^2 + \frac{9}{2}ea^2 - 3e^2a + \frac{e^3}{2} + 9a^3 + ae^2 - 3a^2e - \frac{e^3}{3}\right]$$

$$= \frac{p}{4EI}\left[14a^3 - 2ae^2 + \frac{e^3}{6}\right] = \frac{7pa^3}{2EI} - \frac{pe^2a}{2EI} + \frac{pe^3}{24EI}$$

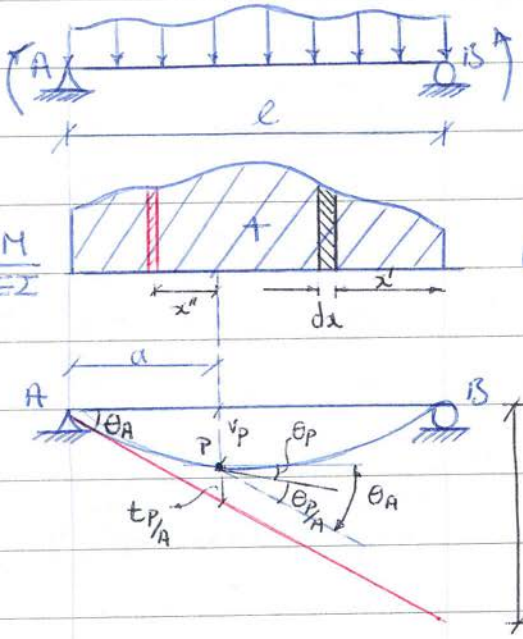
$$y_\epsilon = \frac{7pa^3}{2EI} - \frac{pe^2a}{2EI} + \frac{pe^3}{24EI} - \frac{7pa^3}{2EI} + \frac{7pa^2e}{8EI}$$

$$y_\epsilon = \frac{3pe^2a}{8EI} + \frac{pe^3}{24EI}$$

روش دوم :

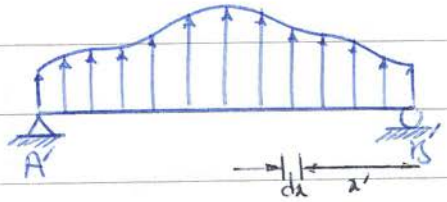


روش بار الاستیک :



$$\theta_A = \frac{t_{B/A}}{L} = \frac{1}{\ell}\int_A^B x' \frac{M}{EI}\,dx$$

فرض کنیم $\frac{M}{EI}$ یک بار گسترده خارجی بر تیر بالا باشد (فرض مجازی)



$$\sum M_{B'} = 0 \Rightarrow \theta_A = R_{A'}$$

$$-R_{A'}\ell - \int_A^B x' \frac{M}{EI}\,dx = 0$$

$$\Rightarrow R_{A'} = -\frac{1}{\ell}\int_A^B x' \frac{M}{EI}\,dx$$

θ_A : عکس العمل تکیه‌گاه A تیر مجازی بار $\frac{M}{EI}$

$$\theta_P = \theta_A - \theta_{P/A}$$

$$\Rightarrow \theta_P = \theta_A - \int_A^P \frac{M}{EI}\,dx$$

* برای بدست آوردن علامت θ_A باید V_A را به اندازه یک قطعه از نقطه A بدست آوریم .

θ_p : شیب برای برشی در تیر حمل‌زی تحت بارگذاری $\frac{M}{EI}$ در نقطه P

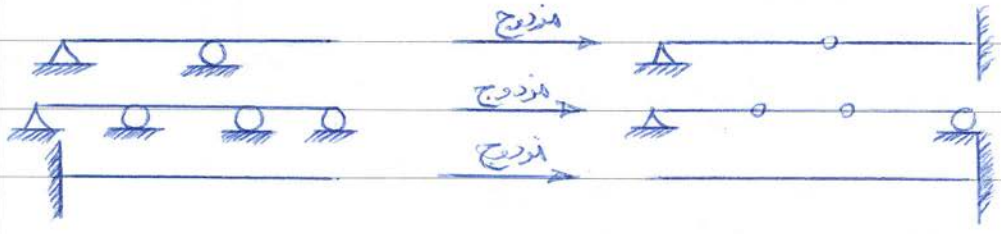
$$v_p = \theta_A \cdot a - t_{P/A} = \theta_A \cdot a - \int_A^P x'' \cdot \frac{M}{EI} dx$$

v_p : لنگر خمشی در تیر حمل‌زی تحت بارگذاری $\frac{M}{EI}$ در نقطه P

نتیجه: در تیر حمل‌زی تعریف شده تحت بارگذاری $\frac{M}{EI}$ در هر مقطع نیروی برشی معادل شیب همان نقطه در تیر اصلی است و لنگر خمشی در هر نقطه معادل تغییر مکان آن نقطه در تیر اصلی است.

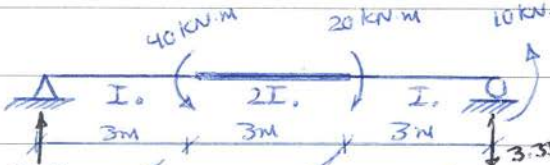
* این روش نقطه و نقطه در تیر ساده وجود دارد.

این روش برای تیرهای غیر ساده تقسیم داده می‌شود و روش تیر مزدوج وجود دارد.

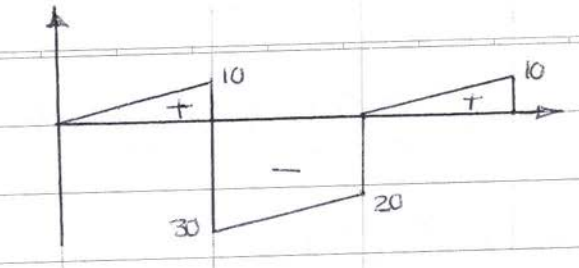


تیرهای معین مزدوشان معین است و تیرهای نامعین مزدوشان نامعین است.

مثال: تیر نشان داده شده تحت اثر سه لنگر متمرکز خارجی قرار گرفته است. شیب‌های دو انتهای تیر و تغییر شکل وسط تیر را به روش بار الاستیک حساب کنید.



$$\begin{cases} E = 2 \times 10^5 \ N/mm^2 \\ I = 3 \times 10^7 \ mm^4 \end{cases}$$



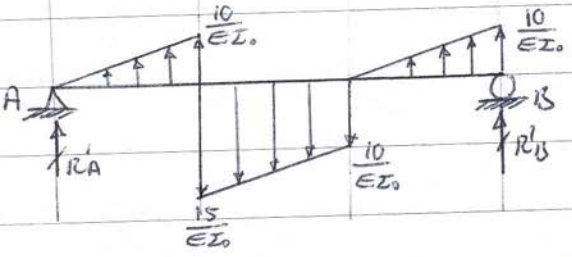
$\Sigma M_B = 0 \Rightarrow R'_A = +9.7\times10^{-4}\ rad$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow R'_B = 2.8\times10^{-4}\ rad$

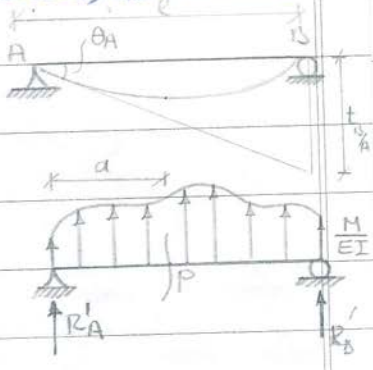
$\theta_A = +9.7\times10^{-4}\ rad$ (در جهت عقربه‌های ساعت)

$\theta_B = -2.8\times10^{-4}\ rad$ (خلاف جهت عقربه‌های ساعت)

$M_{cl} = \delta_{cl} = +7.96\ mm$



تمرین ۸: رابطات مبانی را برای تیر بالا ثابت نموده، سپس رابطات هندسی را بازیابی علامت دوباره اثبات کنید.



1) $\theta_A = -\frac{t_{B/A}}{\ell} = -\frac{1}{\ell}\int_B^A x'\frac{M}{EI}dx$ (I)

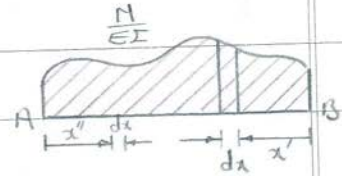
$\Sigma M_B = 0 \rightarrow -R'_A\ell - \int_B^A x'\frac{M}{EI}dx = 0$

$\rightarrow R'_A = -\frac{1}{\ell}\int_B^A x'\frac{M}{EI}dx \qquad R'_A = \theta_A$

2) $\theta_{P/A} = \theta_P - \theta_A \Rightarrow \theta_P = \theta_A + \theta_{P/A}$

$\theta_P = \int_A^P \frac{M}{EI}dx + \theta_A = \int_A^P \frac{M}{EI}dx + R'_A = V'_P$

3) $v_P = -a.\theta_A - t_{P/A} = -a.R_A - \int_P^A x'''\frac{M}{EI}dx = M'_P$



4) $\theta_B = +\frac{t_{A/B}}{\ell} = \frac{1}{\ell}\int_A^B x''\frac{M}{EI}dx$

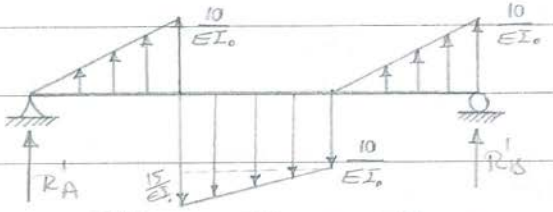
$\Sigma M_A = 0 \rightarrow \int_A^B x''\frac{M}{EI}dx + R'_B\ell = 0$

$\rightarrow R'_B = -\frac{1}{\ell}\int_A^B x''\frac{M}{EI}dx$

تمرین: اولاً جواب کدام مثال عددی را کاملاً حل کنید. آنرا با جواب کدام درست برنامه نقص عددی که شما نوشته اید مقایسه کنید.

$E = 2\times10^{5}\times10^{6}\ pa = 200\times10^{9}\ pa$

$I_0 = 3\times10^{7}\times10^{-12}\ m^4 = 3\times10^{-5}\ m^4 \rightarrow EI_0 = 600\times10^{4}$



$\sum M_A = 0$

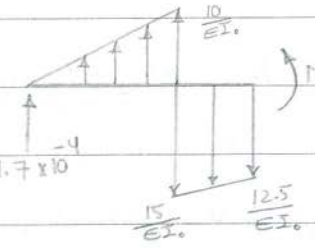
$2(\frac{1}{2}\times3\times\frac{10}{EI_0}) + 8(\frac{1}{2}\times3\times\frac{10}{EI_0}) - 4(\frac{1}{2}\times3\times\frac{5}{EI_0}) - 4.5(3\times\frac{10}{EI_0}) + 9R'_{13} = 0$

$\rightarrow 15\times\frac{10}{EI_0} - \frac{30}{EI_0} - 4.5\frac{30}{EI_0} + 9R'_{13} = 0 \rightarrow 15(\frac{1}{EI_0}) = 9R'_{13}$

$\rightarrow R'_{13} = \frac{5}{3EI_0} \rightarrow R'_{13} = \frac{5\times10^{3}}{3\times600\times10^{4}} = 2.8\times10^{-4}\ rad$

$\sum F_y = 0 \rightarrow R'_A + \frac{3}{2}(\frac{10}{EI_0}\times10^{3}) - \frac{3}{2}(\frac{25\times10^{3}}{EI_0}) + R'_{13} = 0$

$\rightarrow R'_A + \frac{3\times10^{4}}{600\times10^{4}} - \frac{75\times10^{3}}{2\times600\times10^{4}} + 2.8\times10^{-4} = 0 \rightarrow R'_A = 9.7\times10^{-4}\ rad$



$\sum M = 0 \rightarrow M - 2.5(\frac{3}{2}\times\frac{10\times10^{3}}{EI_0}) - 9.7\times10^{-4}\times4.5 + 0.75(1.5\times\frac{12.5\times10^{3}}{EI_0}) + 1(\frac{1}{2}\times1.5\times\frac{2.5\times10^{3}}{EI_0})$

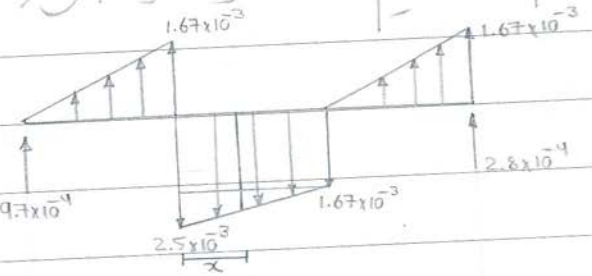
$\rightarrow M = 79.6\times10^{-4}\ N = 7.96\ mm$

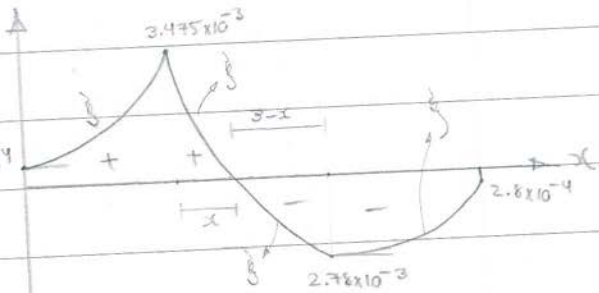
تمرین ۵: تغییر مکان Max در تیر شکل زیر را از روش سطح گشتاور بدست آورید
(EI از خصوصیات مقطع)

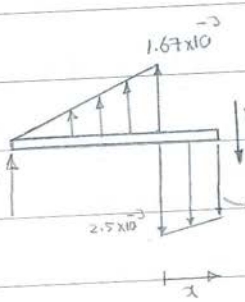
باید دنبال جایی باشم که شیب نمودار صفر شود یعنی جایی که برش صفر است.

$\frac{dv}{dx} = q$

$V_2 - V_1 = \int q\,dx$







$\frac{3}{3-x} = \frac{(2.5-1.67)\times10^{-3}}{f(x)} \rightarrow f(x) = \frac{0.83(3-x)}{3}\times10^{-3}$

$f(x) = (0.83 - 0.28x)\times10^{-3}$

$F(x) = f(x) + 1.67\times10^{-3} = (2.5 - 0.28x)\times10^{-3},\ 0 \le x \le 3$

$\Sigma F_y = 0 \rightarrow 9.7\times10^{-4} + \frac{3}{2}(1.67\times10^{-3}) - \frac{x}{2}(2.5\times10^{-3} + F(x)) - V = 0$

$V = 0 \Rightarrow 3.475\times10^{-3} - \frac{x}{2}(5\times10^{-3} - 0.28x\times10^{-3}) = 0$

$\rightarrow 6.95 - 5x + 0.28x^2 = 0 \rightarrow x^2 - 17.86x + 24.82 = 0$

$\rightarrow x = \frac{17.82 \pm \sqrt{17.86^2 - 4(24.82)}}{2} = 1.5$

$x = 4.5 \rightarrow M = 79.6\ \text{mm}$

محمد کاظم

فصل دوم:

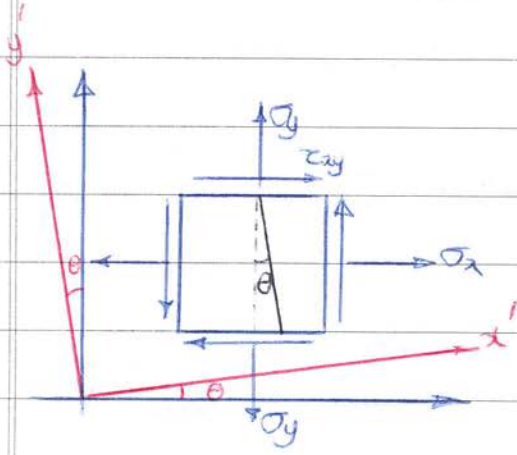
تبدیل تنش ها و کرنش ها
(Transformation of stresses & strains)

در بحث مقاومت مصالح یکی از مهمترین مباحث این بود که تنش در هر نقطه از جسم از حد مجاز تنش بیشتر نباشد. برای این کار به دنبال تنش Max می گردیم و تنش ها را با حد مجاز مقایسه می کنیم. تا اینکه محدودیت مواجه بودیم. تمام مقاطعی که برای آن تنش را بدست می آوردیم عمود بر عضو (تیر) بود. اما از کجا معلوم که تنش های Max در مقطع عمود باشد؟ بنابراین تا الان نمی دانیم که تنش Max حداکثر است در مقطع عمود نباشد. پس در این فصل بحث تنش ها را در هر مقطع مایل بحث می کنیم.

در این فصل از استفاده داریم: ۱) مبحث مقاومت

۲) محاسبات آزمایشگاهی (کنترل نتایج آزمایشگاهی)

تبدیل تنش ها در صفحه ای (دوبعدی):

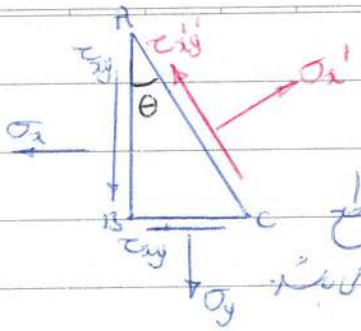


قرارداد:

۱) تنش های تمام المان در حالت کشش مثبت و در حال فشاری منفی.

۲) تنش برشی را زمانی مثبت می گیریم که روی وجهی مثبت راست در جهت بالا باشد.

۳) در جهت تنش های مختلف، جهت تنش (خلاف عقربه های ساعت (مثلثاتی)) مثبت است.



قسمت الف را بروش می کشیم:

برای این، دو رابطه تعادل می نویسیم.

از سطح مقطع وجه AC را dA فرض کنیم، سطح مقطع وجه BC، $dA.\sin\theta$ و وجه AB، $dA.\cos\theta$ می شود.

$$\sum F_{x'} = 0 \Rightarrow \sigma_{x'}.dA - \sigma_x\, dA\cos\theta.\cos\theta - \sigma_y.dA\sin\theta.\sin\theta - \tau_{xy}\, dA\cos\theta.\sin\theta - \tau_{xy}\, dA\sin\theta.\cos\theta = 0$$

$$\Rightarrow \sigma_{x'} = \sigma_x \cos^2\theta + \sigma_y \sin^2\theta + 2\tau_{xy}\sin\theta\cos\theta$$

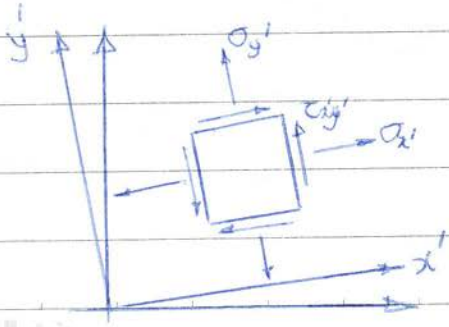
$$\Rightarrow \sigma_{x'} = \sigma_x\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right) + \sigma_y\left(\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right) + \tau_{xy}\sin 2\theta$$

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy}\sin 2\theta$$

$$\sum F_{y'} = 0 \Rightarrow \tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin 2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta$$

برای بدست آوردن $\sigma_{y'}$، در رابطه $\sigma_{x'}$ بجای θ، $\theta - 90$ قرار می دهیم.

$$\sigma_{y'} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\theta - \tau_{xy}\sin 2\theta$$

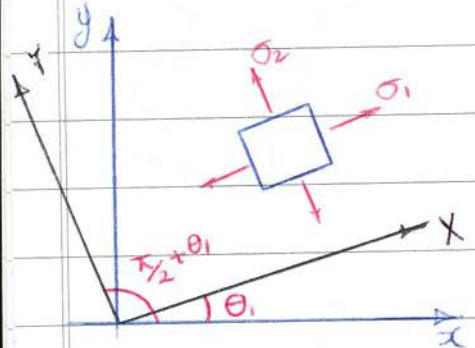


$\sigma_x + \sigma_y = \sigma_{x'} + \sigma_{y'} = Const.$ (تنش ناوردا Invarient of stress)

جمع تنش‌ها در θ تغییر نمی‌کند.

تنش‌های اصلی:

تنش‌هایی که در زاویه θ خاصی Max یا Min می‌شوند



$$\frac{d\sigma_{x'}}{d\theta} = 0$$

$$\rightarrow -(\sigma_x - \sigma_y)\sin 2\theta + 2\tau_{xy}\cos 2\theta = 0$$

$$\rightarrow tg\,2\theta_1 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad \begin{matrix} 2\theta_1 \\ \pi + 2\theta_1 \end{matrix}$$

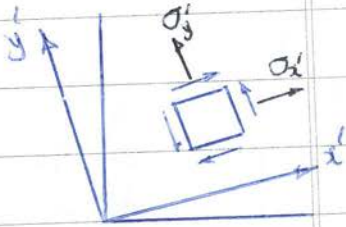
در این θ_1 ، $\frac{\pi}{2}+\theta_1$ نسبت به θ_1 برای X ، θ_1 برای Y است.

$$\begin{cases} \sigma_{\substack{Max \\ Min}} = \dfrac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \sigma_{1,2} \\ \tau_{x'y'} = 0 \end{cases}$$

* تذکر مهم: برای تعریف نام‌گذاری اصلی می‌توانیم بگوییم اندیس اول تنش برشی، همان جهت است.

تنش‌های برشی صفر و ماکزیمم

$$\frac{d\tau_{xy'}}{d\theta} = 0 \Rightarrow tg2\theta_2 = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} \quad \begin{matrix} 2\theta_2 \\ \pi + \theta_2 \end{matrix}$$

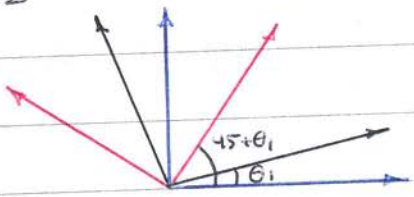


$$\theta_2 \begin{cases} \tau_{\substack{Max \\ Min}} = \pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \\ \sigma_{x'} = \sigma_{y'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \end{cases}$$

تنها زمانی $\sigma_{x'} = \sigma_{y'} = 0$ است که $\sigma_x = -\sigma_y$

$$tg2\theta_2 = -\frac{1}{tg2\theta_1} = -Ctg2\theta_1 = tg(\pi/2 + 2\theta_1) \Rightarrow 2\theta_2 = \pi/2 + 2\theta_1$$

$$\Rightarrow \theta_2 = \pi/4 + \theta_1$$



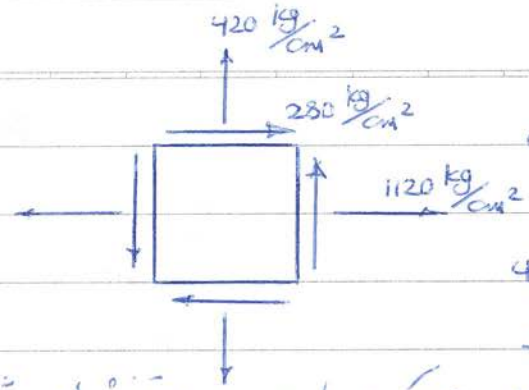
نکته: در المان اصلی دارای تنش‌های قائم σ_1 و σ_2 باشد

$$\tau_{Max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \quad \text{اگر} \ \tau_{xy} = 0$$

آسمان شو، ابر شو، باران ببار	تا دوان، آبش بی اندیشه کار
آب باران باغ صد رنگ آورد	تا دوان همسایه در چنگ آورد

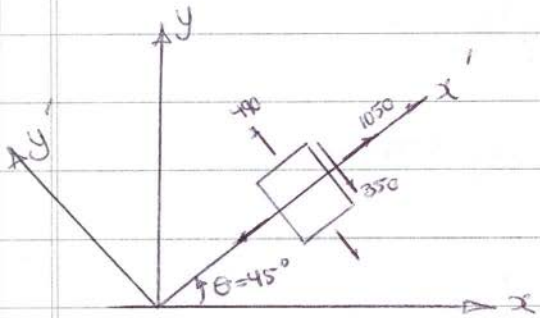
زردشت: نیکی کن خود شو باشی که اگر خواستی بر کسی منتی، منتی برادر چون درخت باش که سایه از سر خویش سکن نیز برمی دارد.

شکسپیر: بزرگی سه گونه است: یک عده بزرگ زاده می شوند (اشراف)، یک عده بزرگی را بر خود می بندند و یک عده نیز بزرگی را به دست می آورند.



مثال: المانی حالت تنش کلی نشان داده شده مفروض است. مطلوبست: الف) می‌سه تنش کلی روی المانی که با زاویه $45°$ در جهت خلاف جهت عقربه‌های ساعت حرکت کرده است. ب) می‌سه تنش کلی اصلی و محل آن‌ها. ج) می‌سه تنش کلی برشی حداکثر و محل آن‌ها. ضمناً در جهت مطلوب تنش کلی می‌سه شده را در صفحه دقیق نشان دهید.

الف)



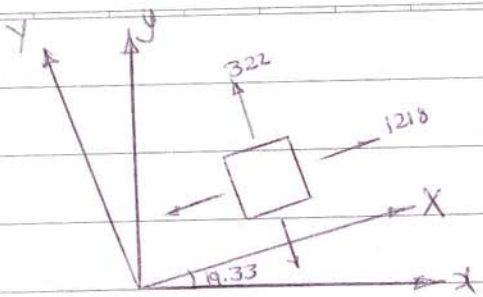
$$\begin{cases} \sigma_x = +1120 \\ \sigma_y = +420 \\ \tau_{xy} = 280 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_{x'} = \dfrac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \dfrac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy}\sin 2\theta = 1050\ \text{kg/cm}^2 \\ \sigma_{y'} = \dfrac{\sigma_x+\sigma_y}{2} - \dfrac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\theta - \tau_{xy}\sin 2\theta = 490\ \text{kg/cm}^2 \\ \tau_{x'y'} = -\dfrac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin 2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta = -350\ \text{kg/cm}^2 \end{cases}$$

ب)

$$\operatorname{tg} 2\theta_1 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x-\sigma_y} \rightarrow \theta_1 = 19.33°$$

$$\sigma_{\substack{Max\\Min}} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \begin{cases} 1218 \\ 322 \end{cases}$$

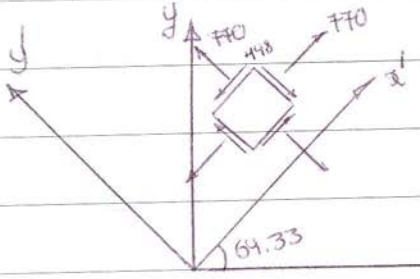


تصاویر این است که از راستای $\sigma_{x'}$ ، $\sigma_{y'}$ به میزان θ ، 19.33 درجه ساعتگرد و $\tau_{x'y'}$ به اندازه 1218 و 322 برای کدام صفر است، محاسبه کرده‌ایم.

ج)

$$\theta_2 = 45 + 19.33 = 64.33^\circ$$

$$\tau_{Max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \pm 448 \ kg/cm^2$$

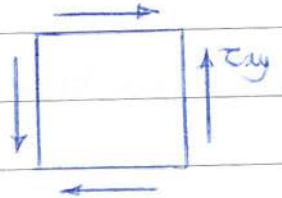


$$\sigma_{x'} = \sigma_{y'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

علامت مثبت و منفی برای $\theta = 64.33$ ،
$\theta = 90 + 64.33$ می‌باشد. برای تمام دقت
علامت بدین از رابطه اصلی $\tau_{x'y'}$ استفاده کنیم و مقدار θ را 64.33 درجه.

المان تحت برش خالص:

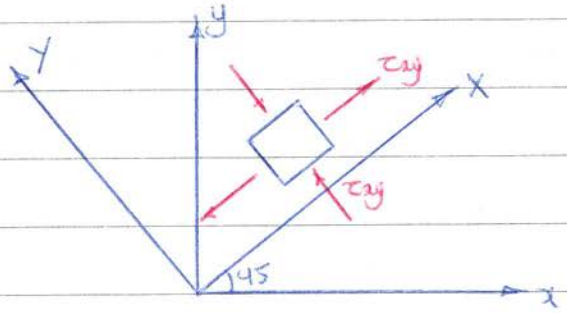
المانی است که تنها تحت برش است
و تنش‌های قائم صفر می‌باشد.
می‌خواهیم بدانیم این المان از کجای قسمت گرفته
المان اصلی را این وضعیت می‌آید.



$$\begin{cases} \sigma_x = 0 \\ \sigma_y = 0 \\ \tau_{xy} = +\tau_{xy} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta_1 = ? \\ \sigma_{Max/Min} = ? \end{cases}$$

$$tg2\theta_1 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \infty \rightarrow \theta_1 = 45^\circ$$

$$\sigma_{Max \atop Min} = \pm \tau_{xy}$$

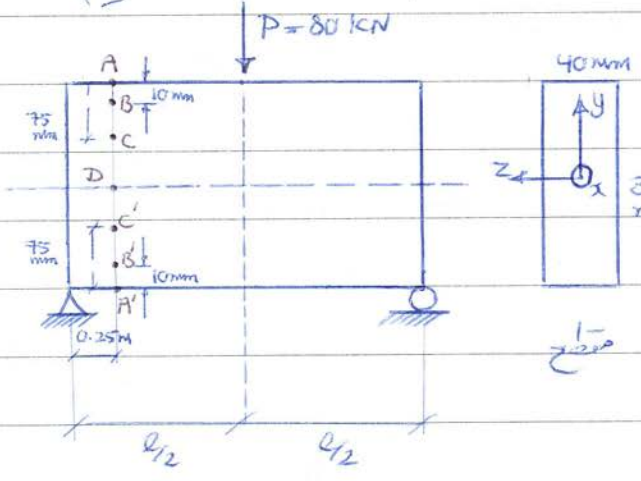


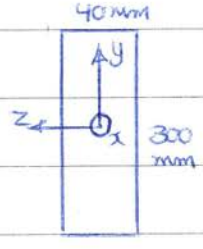
این المان، المان خاصی است که المان تحت کشش و فشار قطری نام دارد.

* در المان تحت برش خالص، انتظار دیاگرام مقابل را می‌فهمیم و دیاگرام تنشی را می‌کشیم و می‌توانیم در راستای جهت تنش‌های تنش اصلی را رسم کنیم.

مثال: تیر ساده‌ی مطابق شکل مفروض است.

مطلوبست تعیین تنش‌های اصلی در نقاط A, B, C و موقعیت A', B', C', D و تنش‌های المان.





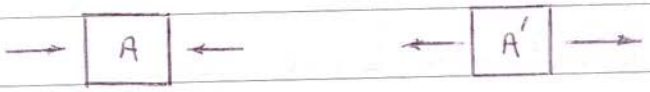
مقطع

در انتها باید نیروی برشی و لنگر خمشی را رسم کنیم.

$$\begin{cases} V = +40\,KN\,(\downarrow) \\ M = 40 \times 0.25 = 10\,KN.m \end{cases}$$

* جهت قرارداد نیروی برشی با نیروی برشی خالص یکی است.

المان‌های A , A′ :



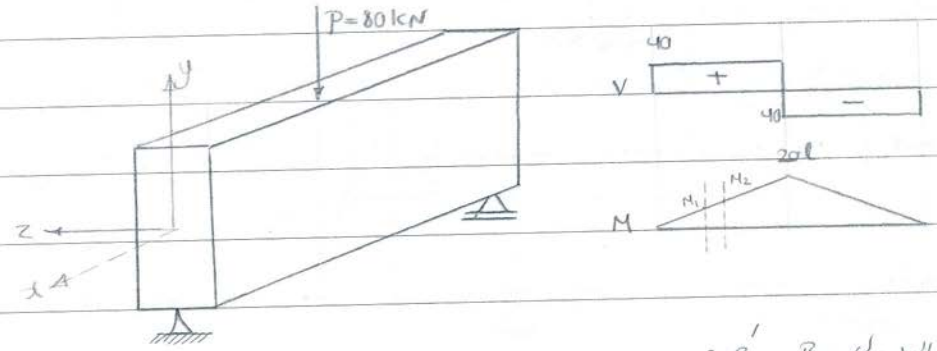
تنش‌های برشی در A , A′ صفر است چون :

$$\tau = \frac{VQ}{It} \quad Q=0 \Rightarrow \tau = 0$$

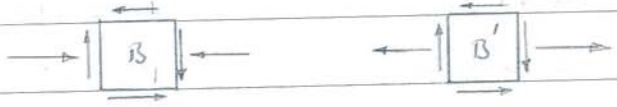
$$\sigma_x = \frac{M.y}{I} = \frac{10 \times 10^6 \times 150}{40 \times \frac{300^3}{12}} = 16.67 \text{ Mpa}$$

این المان خود المان اصلی است چون $\tau_{xy}=0$ می‌باشد.

صفحه بارگذاری و حمایت‌ها تنش σ_y ایجاد کرده و فقط σ_x ایجاد می‌کرد



المان‌های B , B′ :



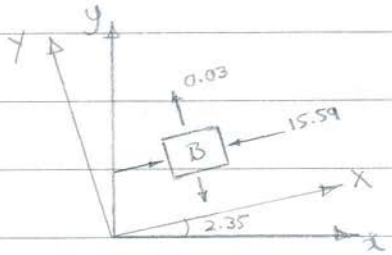
$$\sigma_x = \frac{M_z \cdot y}{I_z} = \frac{10 \times 10^3 \times 140 \times 10^{-3}}{40 \times \frac{300^3}{12} \times 10^{-12}} = 15.56 \text{ Mpa}$$

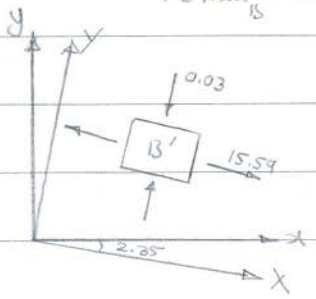
$$\sigma_y = 0$$

$$\tau_{xy} = \frac{VQ}{It} = \frac{40 \times 10^3 \times 10 \times 40 \times 145 \times 10^{-9}}{40 \times \frac{300^3}{12} \times 40 \times 10^{-15}} = 0.64 \text{ Mpa}$$

$$tg2\theta_1 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{-2(0.64)}{-15.56} \Rightarrow \theta_1 = +2.35$$

$$(\sigma_{Max,Min})_B = \frac{-15.56}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{15.56}{2}\right)^2 + (0.64)^2} = -7.78 \pm 7.81 \Rightarrow \begin{cases} \sigma_{Max_B} = -15.59 \\ \sigma_{Min_B} = +0.03 \end{cases}$$





المطلوب C, C'

$$\sigma_x = -\frac{M_z \cdot y}{I_z} = \frac{10 \times 10^3 \times 75 \times 10^{-3}}{40 \times \frac{300^3}{12} \times 10^{-12}} = -8.33 \text{ Mpa}$$

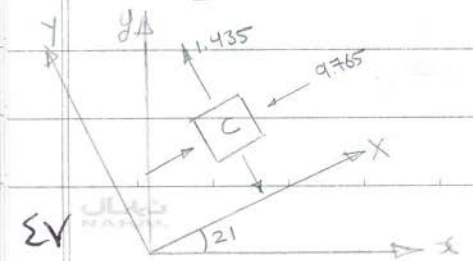
$$\sigma_y = 0$$

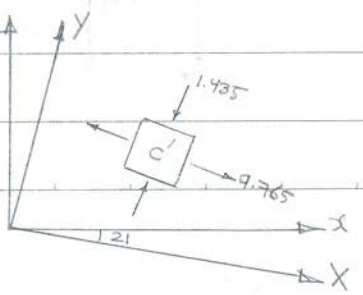
$$\tau_{xy} = \frac{VQ}{It} = \frac{40 \times 10^3 \times 40 \times 75 \times 112.5 \times 10^{-9}}{40 \times \frac{300^3}{12} \times 10^{-12} \times 40 \times 10^{-3}} = 3.75 \text{ Mpa}$$

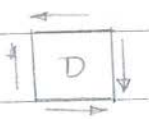
$$tg2\theta_1 = \frac{2 \times 3.75}{8.33} \Rightarrow \theta_1 = 21$$

$$\sigma_{Max,Min} = \frac{-8.33}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{8.33}{2}\right)^2 + 3.75^2} = -4.165 \pm 5.6 \Rightarrow \begin{cases} \sigma_{Max} = 1.435 \\ \sigma_{Min} = -9.765 \end{cases}$$

$$\sigma_x = \frac{-8.33}{2} + \frac{-8.33}{2} \cos 2\times 21 - 3.75 \sin 2\times 21 = -9.765$$





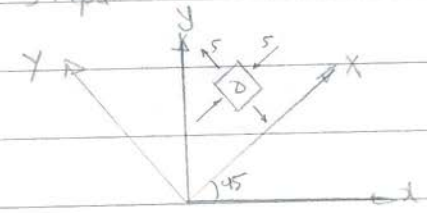


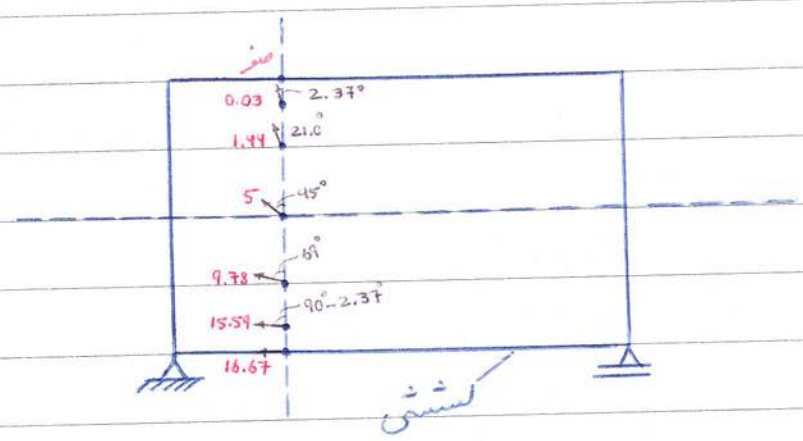
$\sigma_x = 0 \qquad \sigma_y = 0$

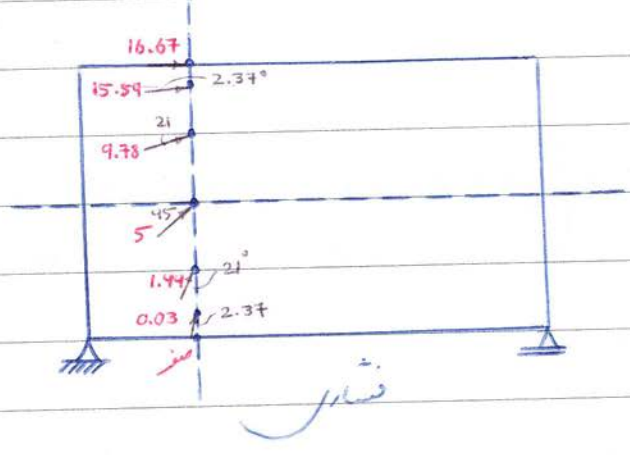
$$\tau_{xy} = \frac{VQ}{It} = \frac{40 \times 10^{3} \times 40 \times 150 \times 75 \times 10^{-9}}{40 \times \frac{300^{3}}{12} \times 10^{-12} \times 40 \times 10^{-3}} = 5\ Mpa$$

$\theta_1 = 45$

$\sigma_{Na1} = \pm 5$ (Min)







روش های مطالعه رفتار اعضای تحت تنش:

روش های مطالعه را از طریق مراحل زیر دسته بندی می کنند:

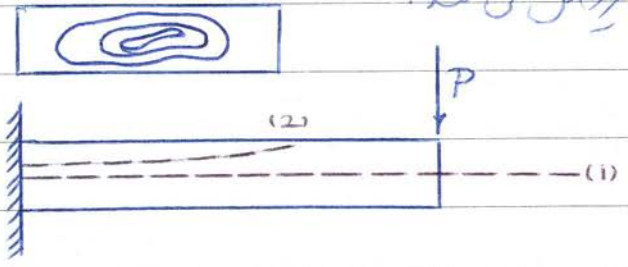
الف) بررسی تعداد نقاط زیادی در عضو

ب) روش مشترک مشخص شدن تنش ها در نقاط مذبت می باشد

ج) تفسیر از تصویرهای روش های مشترک مذبت می باشد.

۲- روش برای مطالعه وجود دارد:

۱) خطوط هم تنش (stress contour): در این روش توجه نمی شود به مقدار تنش است. تمام نقاط هم تنش را با یک خط وصل می کنند.



که همان خط هم تنش است

چون $\sigma = 0$ ، $\tau_{xy} = \frac{VQ}{It}$

ثابت است.

خط (2) در راستای شیب برای ثابت ماندن σ_{Max} باید $M \uparrow$ ، $Q \downarrow$ شود.

۲) خطوط هم امتداد (Isoclinic Contour): در این روش توجه بیشتر به امتداد و جهت تنش می باشد. تنش های اصلی که از جهت امتداد یکسان هستند را هم وصل می کنند. در یک تیر ساده تار خنثی یک خط هم امتداد است.

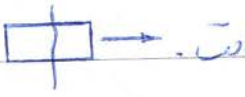
۳) دیاگرام مسیر تنش های اصلی یا خطوط ایزواستاتیک:

(principal stresses trajectory & Isostatic lines)

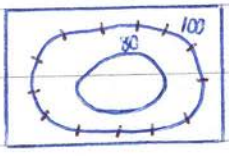
تنها مسیر تنش که برای این روش اهمیت دارد. این دیاگرام، دیاگرامی حاصل از محاط حاصل بر تنش کل می باشد.

* این روش می تواند دستخوش سلیقه گردد بنابراین سعی می شود سعی کمی بیشتر و محتاطی رسم گردد (با شکستگی کم)

* در دیاگرام مسیر تنش، امتداد ترک وارد بر سازه عمود بر محور است. برای محاسبه از این ترک که باید قبل از ترک را عمود بر ترک قرار دهیم.



نکته: محاط اصم تنش نشان می دهد کدام نقاط اول ترک خوردگی دارد.



مثال: میله ای با سطح مقطع $550\ mm^2$ تحت اثر 60kN

نیروی کششی 60kN قرار گرفته است.

الف) تنش قائم و برشی را روی صفحه مایل با زاویه 30° نسبت به محور میله بدست آورید.

ب) حداکثر تنش قائم و برشی را در میله یافته امتداد کل را دقیق مشخص کنید.

الف)

$$\sigma_x = \frac{60 \times 10^3}{850 \times 10^{-6}} = 70.59\ Mpa$$

$$\sigma_x' = \frac{1}{2}(70.59 + 0) + \frac{1}{2}(70.59 - 0)\cos 60 = 52.94\ Mpa$$

$$\sigma_y' = \frac{1}{2}(70.59 + 0) - \frac{1}{2}(70.59 - 0)\cos 60 = 17.65\ Mpa$$

$$\tau_{xy}' = -(70.59 - 0)\sin 60 = -61.13\ Mpa$$

ب)

$$\sigma_{Max} = \frac{70.59}{2} + \sqrt{\left(\frac{70.59}{2}\right)^2} = 70.59\ Mpa \qquad tg2\theta_1 = 0 \rightarrow \theta_1 = 0$$

$$\tau_{Max} = \sqrt{\left(\frac{70.59}{2}\right)^2} = 35.295\ Mpa \qquad tg2\theta_2 = \infty \rightarrow \theta_2 = 45^\circ$$

---

8 (Mohr's circle of stresses) دایره موهر تنش

$$\begin{cases} \sigma_{x'} = \dfrac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2} Cos2\theta + \tau_{xy} Sin2\theta & (1) \\ \tau_{x'y'} = \dfrac{-(\sigma_x - \sigma_y)}{2} Sin2\theta + \tau_{xy} Cos2\theta & (2) \end{cases}$$

$$(1) \rightarrow \sigma_{x'} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} Cos2\theta + \tau_{xy} Sin2\theta \qquad (1')$$

روابط (1') و (2) را توان 2 می‌رسانیم و با هم جمع می‌کنیم. داریم:

$$\left(\sigma_{x'} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{x'y'}^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2$$

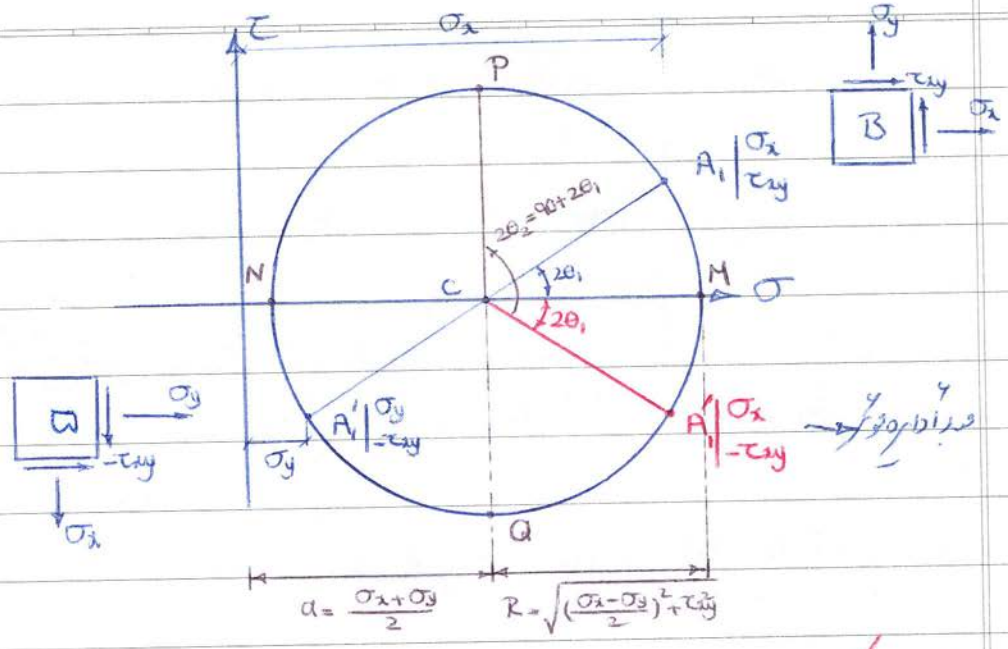
که در آن:

$$\begin{cases} \dfrac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = a \\ \left(\dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2 = R^2 \end{cases} \rightarrow (\sigma_{x'} - a)^2 + \tau_{x'y'}^2 = R^2$$

مرکز C: $a = \dfrac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$ ، 0

معادله بالا معادله‌ای است با:

شعاع $R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$



خواص وتاریخ دایره مور

۱) دایره مور مکان هندسی نقاطی است که بیانگر تنش های متعلق به زاویه صفحاتی هستند که از تعادل می باشند.

۲) نقطه $A_1 \mid \begin{matrix}\sigma_x \\ \tau_{xy}\end{matrix}$ روی دایره موجود است و به تعداد دایره صدق می کند. این تعادل متعلق به $\theta = 0$ می باشد.

مختصات نقطه $A'_1 \mid \begin{matrix}\sigma_y \\ -\tau_{xy}\end{matrix}$ نقطه ای قرینه نقطه A_1 نسبت به C می باشد.

۳) نقاط M و N صفر و تعادل را در تنش نشان می دهند.

$$M: \sigma_1 = a + R = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$N: \sigma_2 = a - R = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

۴) از نقطه A_1 متعلق به $\theta = 0$ به اندازه $2\theta_1$ می چرخیم تا به تنش اصلی برسیم.

$$tg\,2\theta_1 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

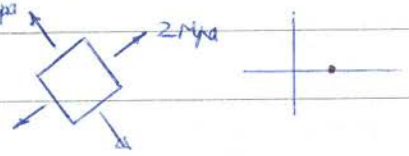
۵) از این به بعد $A\left|\begin{matrix}\sigma_x\\ -\tau_{xy}\end{matrix}\right.$ را صرفاً دایره معرفی می‌کنیم. از این نقطه به اندازه 2θ در جهت مثلثاتی می‌چرخیم تا به تنش اصلی برسیم.

۶) نقطه P دارای تنش برشی ماکزیمم است.

$$p\ \&\ \tau_{Max} = R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

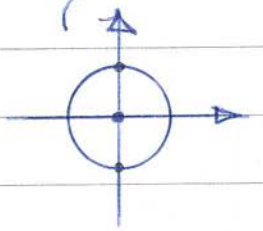
۷) در هر نقطه در دایره مور نسبت $\sigma_1+\sigma_2 = \sigma_x+\sigma_y = \sigma_{x'}+\sigma_{y'} = cte$ برقرار است که کاربرد آن را در ادامه می‌بینید.

۸) اگر $\sigma_1=\sigma_2$ شد یعنی $R=0$ است و دایره تبدیل به یک نقطه می‌شود. یعنی المان را هرگونه بچرخانیم فقط المان اولیه است و تنش برشی صفر است.



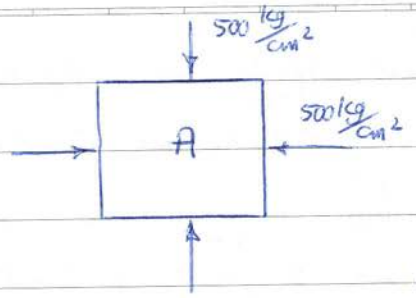
اگر حداکثر المان اولیه $\left|\begin{matrix}\sigma_x=\sigma_y\\ \tau_{xy}=0\end{matrix}\right.$

۹) اگر $\sigma_x+\sigma_y=0$ باشد مرکز دایره بر روی مبدأ مختصات می‌افتد. این حالت را تنش خالص گویند.



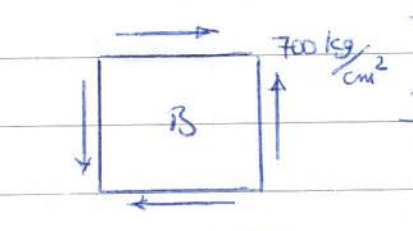
۱۰) برای یافتن تنش‌های قائم و برشی بر روی المانی که به اندازه θ از وضعیت اولیه دوران نموده است، بر روی دایره مور همین عمل می‌کنیم و از صفر دایره مور (A) به اندازه 2θ طبق قرارداد عمل می‌کنیم (چرخش مثبت موافق دوران عقربه‌های ساعت) و به نقطه B می‌رسیم. $B\left|\begin{matrix}\sigma_{x'}\\ -\tau_{x'y'}\end{matrix}\right.$ و انتهای دیگر قطر متعلق به نقطه $B'\left|\begin{matrix}\sigma_{y'}\\ \tau_{x'y'}\end{matrix}\right.$ می‌باشد

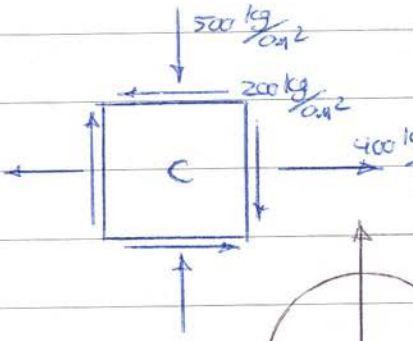
مثال: المان‌های A، B و C مطابق شکل مفروضند. برای هرکدام از المان‌ها اندازه و جهت تنش‌های اصلی را به دست آورید.



الف) تعیین مقدار و محل تنش‌های اصلی مربوط و نمایش موقعیت دقیق آن‌ها روی المان.

ب) تعیین مقدار و تنش‌های برشی حداکثر و نمایش موقعیت دقیق آن‌ها روی المان.



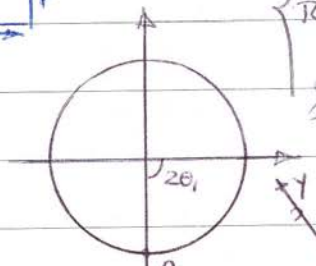


A: الف) چون فقط $\sigma_x = \sigma_y = -500$ است

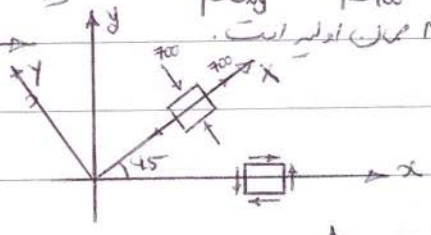
ب) تنش برشی ندارد.

B: الف)

$$\begin{cases} a = 0.5(\sigma_x + \sigma_y) = 0 \\ R = \tau_{xy} = 700 \ kg/cm^2 \\ \text{صفحات اصلی} = A\begin{vmatrix} \sigma_x \\ -\tau_{xy} \end{vmatrix} = A\begin{vmatrix} 0 \\ -700 \end{vmatrix} \end{cases}$$



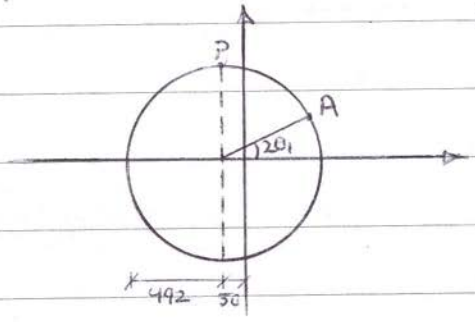
$2\theta_1 = 90 \rightarrow \theta_1 = 45^\circ$



ب) تنش برشی Max همان اولیه است.

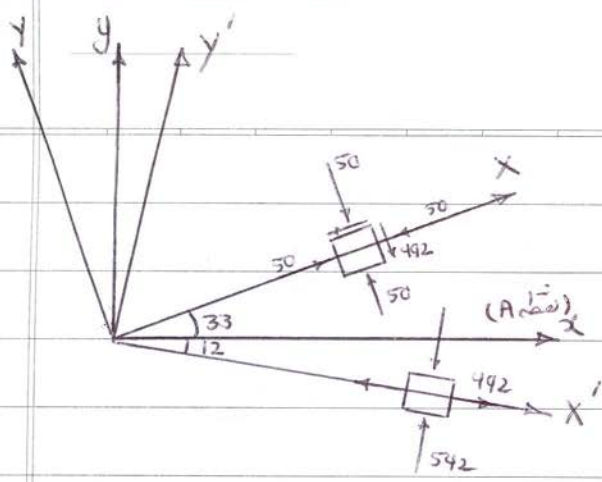
C:

$$\begin{cases} a = \dfrac{-500 + 400}{2} = -50 \\ R = \sqrt{450^2 + 200^2} = 492 \\ \text{صفحات اصلی} = A\begin{vmatrix} 400 \\ 200 \end{vmatrix} \end{cases}$$



$$\begin{cases} \sigma_1 = a + R = -50 + 492 = 442 \\ \sigma_2 = a - R = -50 - 492 = -542 \end{cases}$$

$$2\theta_1 = \sin^{-1}\frac{200}{492} \rightarrow \theta_1 = 12^\circ$$

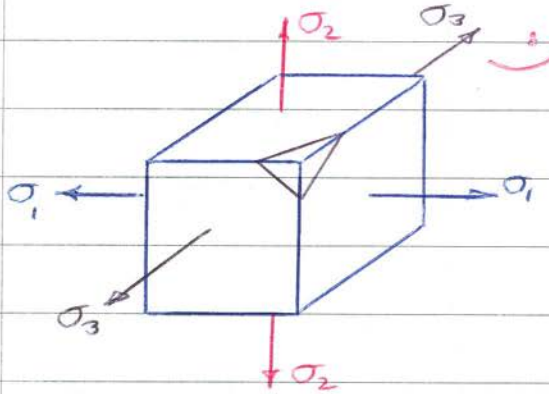


$\theta_2 = 45 + \theta_1$

$\rightarrow \theta_2 = 45 - 12 = 33^\circ$

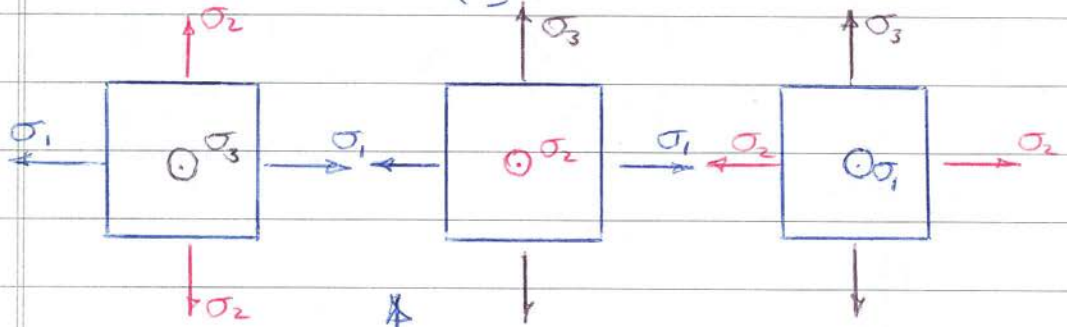
$P \begin{vmatrix} -50 \\ 492 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma_{x'} \\ -\tau_{x'y'} \end{vmatrix} \rightarrow \tau_{x'y'} = -492$

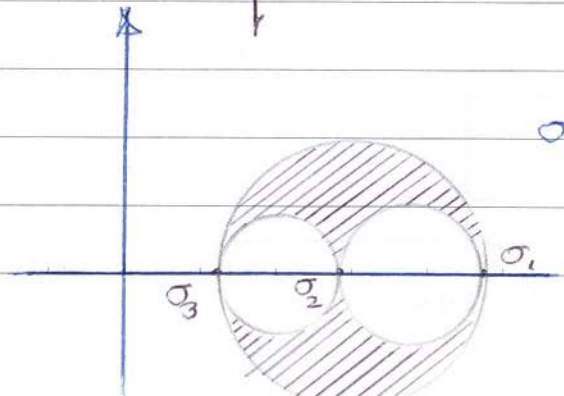
دایره موهر تنش در حالت کلی سه بعدی:



برای حالت کلی در حالت سه بعدی وضعیت خاصی در زاویه خاصی وجود دارد که تنش برشی بیشتری از این صفحه خواهد بود این همان المان اصلی است.

المان سه بعدی را به صورت کلی در دو بعدی نمایش می دهیم.

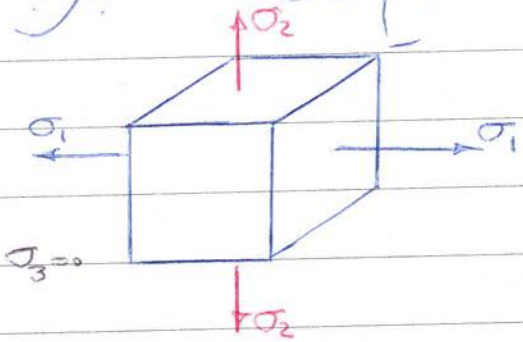


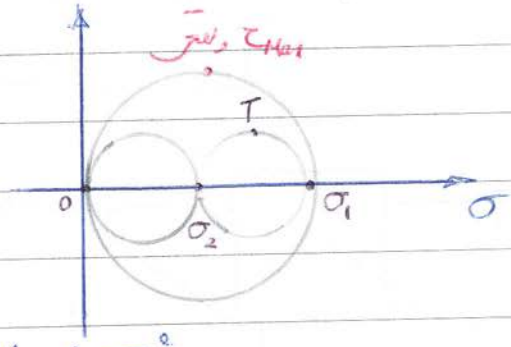


$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$:فرض

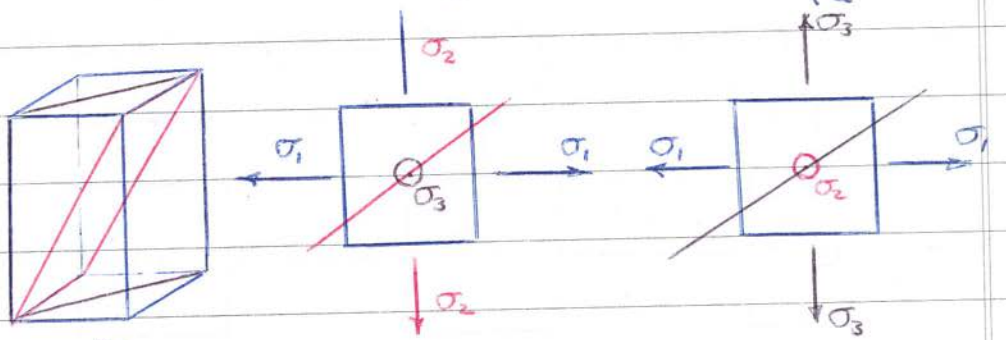
هر نقطه در ماده که مکان هندسی نقاط هستند که کدام بیشترین تنش های قائم و برشی بر صفحات اصلی برش خورده دیگر می باشد

حالت خاص: حالتی خاص که تا به حال مطالعه کرده ایم حالت سه بعدی با $\sigma_3 = 0$ می باشد.





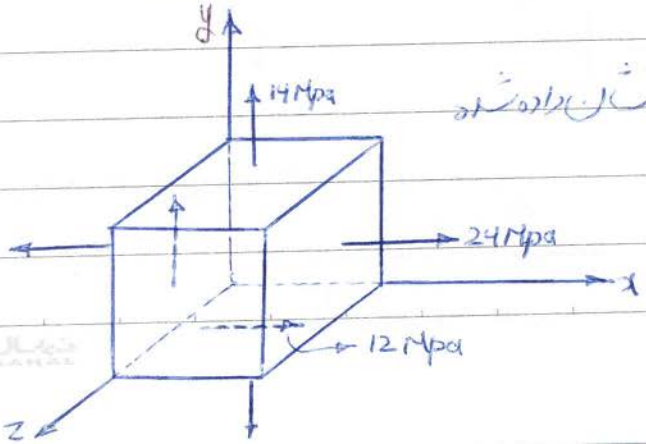
چون این سه دایره را داشتیم تنش برشی Max را نقطه T در نظر می گیریم حال آنکه این نقطه در سه بعد بر صفحه ای قرار است.



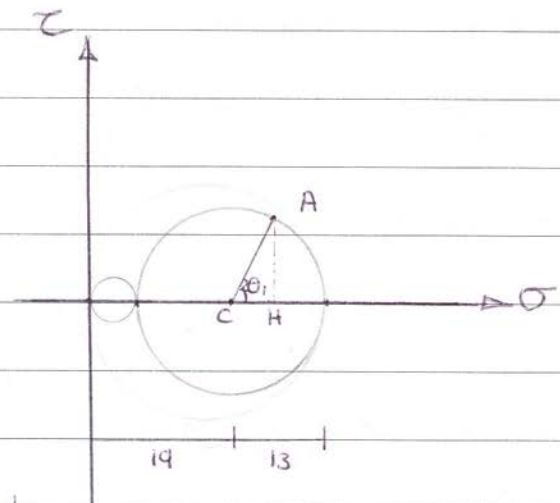
مثال: برای حالت تنش صفحه ای زیر داده شده

مطلوبست:

الف) تعیین کامل صفحات اصلی و مقدار تنش های اصلی



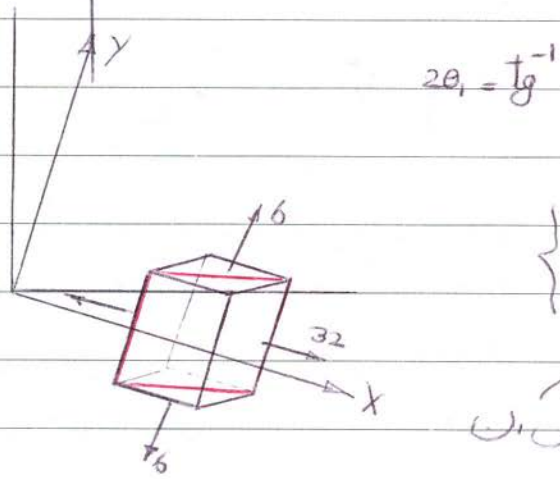
ب) تعیین مقدار Max تنش برشی.



$\sigma_x = 24\,Mpa \quad \sigma_y = 14\,Mpa \quad \sigma_z = 0$

$\tau_{xy} = 12\,Mpa$

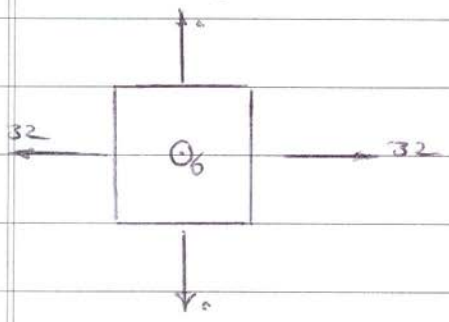
$$\begin{cases} a = \dfrac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = 19\,Mpa \\ R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + 12^2} = 13 \\ \text{مبدا} = \begin{vmatrix} x \\ 24 \\ 12 \end{vmatrix} \end{cases}$$



$$2\theta_1 = tg^{-1}\frac{AH}{CH} = 67.4 \rightarrow \theta_1 = 33.7$$

$$\begin{cases} \sigma_1 = a + R = 32 \\ \sigma_2 = a - R = 6 \end{cases}$$

تنش برشی Max در صفحاتی است که تنش‌های اصلی 32 و تنش دیگر صفر می‌شود.

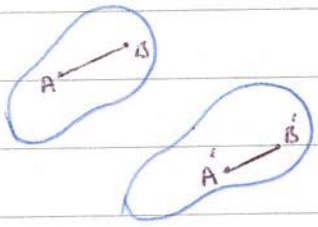


از روابط تنش صفحات برشی مختلف استفاده شده و تنش برشی Max برابر با نصف دامنه تنش‌های اصلی می‌باشد.

تبدیل کرنش‌ها (Transformation of strains)

۱) چون معمولاً کرنش‌ها در بدترین نقاط ایجاد می‌شود، بنابراین تبدیل کرنش‌ها را در دو بعد بررسی می‌کنیم.

۲) اگر $A'B' = AB$ باشد نشان می‌دهد حرکت انتقالی یا دورانی یا صرفاً دورانی انجام داده‌اند. اگر $A'B' \neq AB$ یعنی کرنش اتفاق افتاده است.



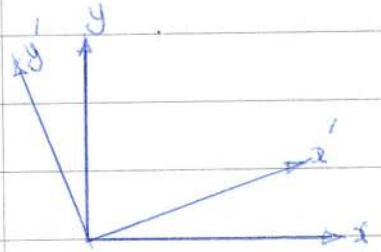
نداشتن جابجایی یک بدنی اهمیت ندارد و تنها تغییر شکل مهم است.

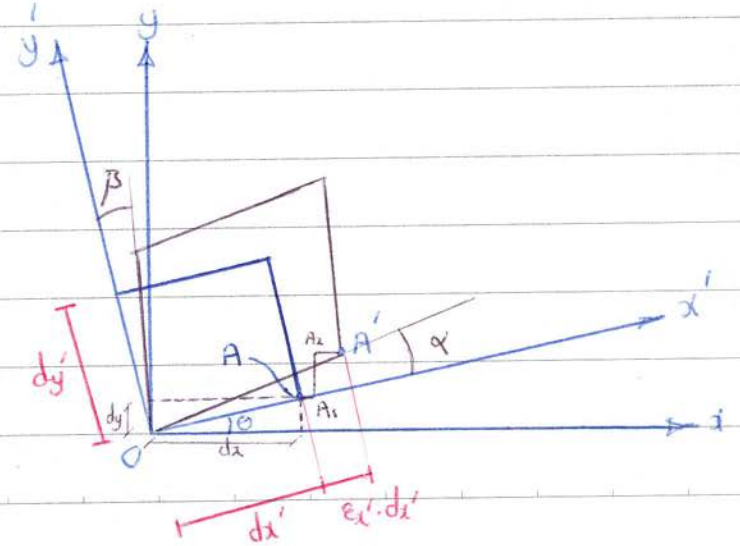
۳) تفسیر نتایج وابسته به رفتار جسم. باتوجه به ابزارهایی که از آزمایشگاه حاصل می‌شود.

روابط تبدیل کرنش‌ها برای کرنش صفحه‌ای

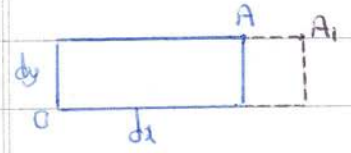
معلومات اولیه: حالت در مختصات x, y،

ε_x، ε_y، γ_{xy} است. حال می‌خواهیم در مختصات x', y'، $\varepsilon_{x'}$، $\varepsilon_{y'}$، $\gamma_{x'y'}$ را بدست آوریم.

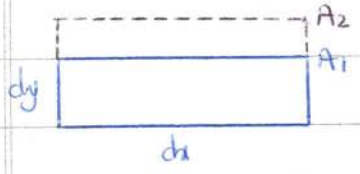




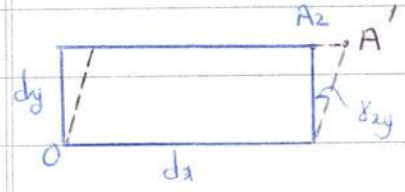
فرض می‌کنیم OA قطعه‌ای در دستگاه اولیه به طول dx و dy باشد.
A مبدأ جابجا شده به A' بوده است. در این مسیر 3 کرنش ε_x، ε_y، γ_{xy} اعمال شده است. فرض می‌کنیم A به A_1 و A_2 رفته و در نهایت به A' رسیده است.



$$AA_1 = \varepsilon_x . dx$$



$$A_1A_2 = \varepsilon_y . dy$$



$$A_2A' = \gamma_{xy} . dy$$

اگر AA_1، A_1A_2، A_2A' را تصویر کنیم بر ox' و جمع بزنیم $\varepsilon_x' . dx'$ به دست می‌آید.

$$\varepsilon_x' . dx' = AA_1 . C_1\theta + A_1A_2 \sin\theta + A_2A' C_1\theta$$

$$\rightarrow \varepsilon_x' . dx' = \varepsilon_x . dx \, C_1\theta + \varepsilon_y dy \sin\theta + \gamma_{xy} dy \, C_1\theta$$

$$\rightarrow \varepsilon_x' = \varepsilon_x . \frac{dx}{dx'} C_1\theta + \varepsilon_y \frac{dy}{dy'} \sin\theta + \gamma_{xy} \frac{dy}{dy'} C_1\theta$$

$$\rightarrow \varepsilon_x' = \varepsilon_x . C_1^2\theta + \varepsilon_y \sin^2\theta + \gamma_{xy} \sin\theta . C_1\theta$$

$$\rightarrow \varepsilon_x' = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} C_1 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\theta$$

اگر به جای θ، $\theta + \frac{\pi}{2}$ را قرار دهیم خواهیم داشت:

$$\varepsilon_{y'} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} - \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\cos 2\theta - \frac{\gamma_{xy}}{2}\sin 2\theta$$

$$\varepsilon_{x'} + \varepsilon_{y'} = \varepsilon_x + \varepsilon_y = \text{Const.}$$

می دانیم $\gamma_{x'y'} = \alpha + \beta$ لذا:

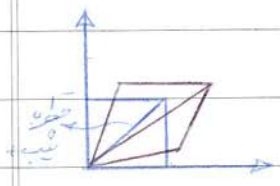
$$\gamma_{x'y'} = -\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\sin 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2}\cos 2\theta$$

* توجه کنید در این روابط $\frac{\gamma_{xy}}{2}$ ظاهر شده است.

قرارداد علامت روابط فوق:

۱) در نمایش ε_x و ε_y وقتی مثبت می باشند کشش باشد.

۲) در نمایش γ_{xy} در صورتی مثبت فرض می شود که قطعه ای از المان که دارای نیت مثبت است اختیار شود داده باشد



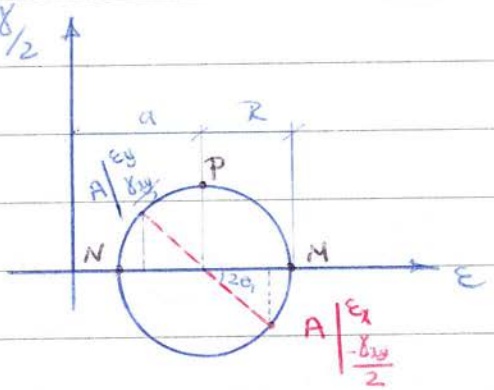
۳) θ در صورت دوران در جهت عقربه ساعت مثبت است.

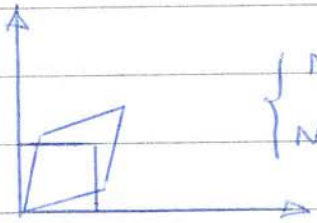
دایره موهر برای برش کله

۱) محور افقی در دایره موهر ε و محور قائم $\gamma/2$ است.

۲) $A \left| \begin{matrix} \varepsilon_x \\ -\frac{\gamma_{xy}}{2} \end{matrix} \right.$ و $B \left| \begin{matrix} \varepsilon_y \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} \end{matrix} \right.$ $\rightarrow R = \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$ ، $C \left| \begin{matrix} a = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \\ 0 \end{matrix} \right.$

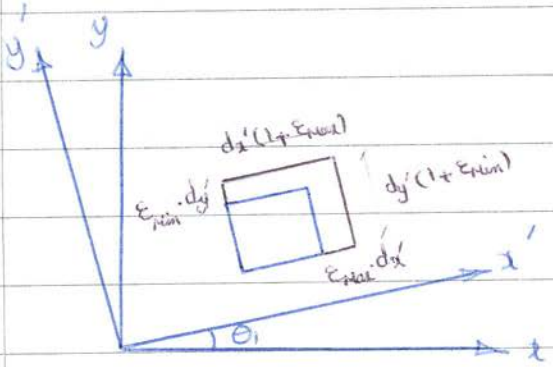
۳)





$$\varepsilon_{\substack{Max \\ Min}} = a \pm R \qquad tg2\theta_1 = \frac{\frac{\gamma_{xy}}{2}}{\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}} = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y}$$

۴) در المان مقابل چون $\gamma_{xy} = 0$ است پس $\varepsilon_{xy} = 0$ است.



۵) مقدار ماکزیمم کرنش برشی در نقطه p اتفاق می‌افتد و برابر قطر دایره مور است.

$$\gamma'_{max} = 2R$$

۶) در بحثی که کرنش ماکزیمم برشی داریم کرنش‌های ε برای a می‌باشد.

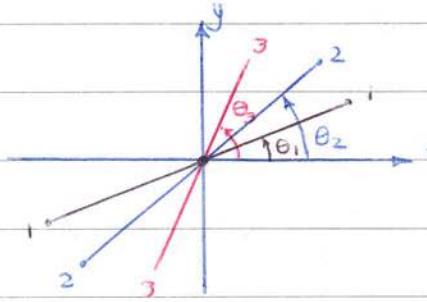
کاربرد دایره مور: برای یافتن کرنش‌ها در روی المانی که اندازه θ است به وضعیت اولیه‌اش محدود است از روی دایره مور اندازه 2θ مطابق قرارداد حرکت می‌کنیم. می‌رسیم به نقطه $B'\left|\frac{\varepsilon_{x'}}{\frac{\gamma_{x'y'}}{2}}\right.$ و سر دیگر قطر متناظر با B عبارت است از $B\left|\frac{\varepsilon_{x'}}{-\frac{\gamma_{x'y'}}{2}}\right.$

روش های اندازه گیری تغییر شکل:

۱) روش فوتوالاستیسیته (photoelasticity)

۲) روش پوشش ترد (brittle Coating Method)

۳) روش کرنش سنج الکتریکی (electrical strain gage)



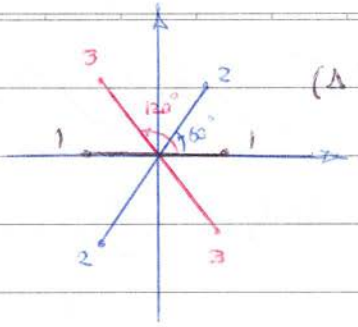
نقطه ای را روی سازه مشخص می کنیم و توسط سه کرنش سنج الکتریکی را در آن نقطه در سه جهت ۱، ۲ و ۳ اندازه می گیریم و توسط سه معادله سه مجهول ε_x، ε_y و γ_{xy} را محاسبه می کنیم.

$$\begin{cases} \varepsilon_{\theta_1} = \varepsilon_x \cos^2\theta_1 + \varepsilon_y \sin^2\theta_1 + \gamma_{xy} \sin\theta_1 \cos\theta_1 \\ \varepsilon_{\theta_2} = \varepsilon_x \cos^2\theta_2 + \varepsilon_y \sin^2\theta_2 + \gamma_{xy} \sin\theta_2 \cos\theta_2 \\ \varepsilon_{\theta_3} = \varepsilon_x \cos^2\theta_3 + \varepsilon_y \sin^2\theta_3 + \gamma_{xy} \sin\theta_3 \cos\theta_3 \end{cases}$$

در این سه عضو گلگذ کرنش یا خوشه کرنش می گویند. معادلات کرنش ساده دیگری هم وجود دارد که می شود را با استفاده ساده تر می کند. اما از نرم افزار سیستم سنج برای سادگی استفاده می کنیم.

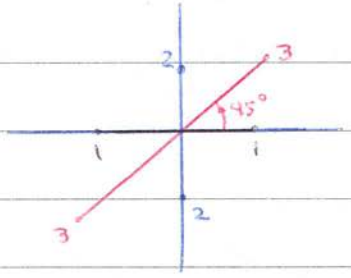
گلگذ کرنش یا خوشه کرنش (Strain Rosette)

روزت کرنش ۶۰° یا روزت کرنش Δ (Δ Rosette)



$$\begin{cases} \varepsilon_x = \varepsilon_{(\theta=0^\circ)} \\ \varepsilon_y = (2\varepsilon_{60} + 2\varepsilon_{120} - \varepsilon_0) \times \frac{1}{3} \\ \gamma_{xy} = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)(\varepsilon_{60} - \varepsilon_{120}) \end{cases}$$

روزت کرنش لنگ ۴۵ (Rectangular Rossette)

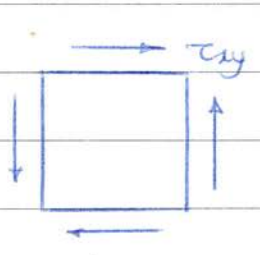


$$\begin{cases} \varepsilon_x = \varepsilon_0 \\ \varepsilon_y = \varepsilon_{90} \\ \gamma_{xy} = 2\varepsilon_{45} - (\varepsilon_0 + \varepsilon_{90}) \end{cases}$$

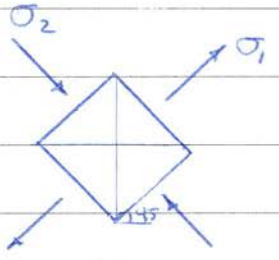
روابط بین تنش و کرنش ها:

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \nu\frac{\sigma_2}{E} \\ \varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E} - \nu\frac{\sigma_1}{E} \end{cases} \qquad \begin{cases} \sigma_1 = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2) \\ \sigma_2 = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1) \end{cases}$$

رابطه بین E, G, ν:



(1)



(2)

(1) $\rightarrow \varepsilon_{\theta=45^\circ} = \varepsilon_x \cos^2\theta + \varepsilon_y \sin^2\theta + \gamma_{xy} \sin\theta\cos\theta$

$= 0 + 0 + \frac{1}{2}\gamma_{xy}$

$\Rightarrow \varepsilon = \frac{1}{2}\gamma_{xy}$

(2) $\rightarrow \varepsilon_{45} = \frac{\sigma_1}{E} - \nu\frac{\sigma_2}{E} = \frac{\tau_{xy}}{E} + \nu\frac{\tau_{xy}}{E} = \frac{\tau_{xy}}{E}(1+\nu)$

(1), (2) $\Rightarrow \frac{1}{2}\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{E}(1+\nu) \Rightarrow \frac{1}{2}\frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{\tau_{xy}}{E}(1+\nu)$

$$\Rightarrow G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

تغییر حجم المان تحت تنش کلی:

فرض می کنیم المان اولیه مکعب dx، dy، dz دارد.

$dx \xrightarrow{\text{اعمال بار}} dx(1+\varepsilon_x)$

$dy \xrightarrow{\text{اعمال بار}} dy(1+\varepsilon_y)$

$dz \xrightarrow{\text{اعمال بار}} dz(1+\varepsilon_z)$

$V_1 = dx.dy.dz \longrightarrow V_2 = dx.dy.dz(1+\varepsilon_x)(1+\varepsilon_y)(1+\varepsilon_z)$

$\Rightarrow V_2 = dx.dy.dz(1+\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z)$

$\Delta V = V_2 - V_1 = dx\,dy\,dz(\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z)$

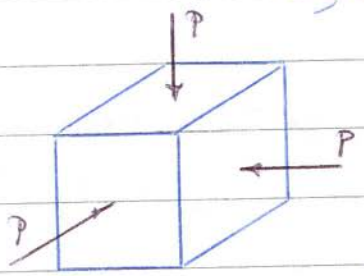
تغییر حجم نسبی $e = \frac{\Delta V}{V_1} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$ ⇝ dilatation (اتساع)

$$e = \frac{1-2\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

تغییر حجم نسبی برابر است با تغییر طول بر طول اولیه است با تغییر تنش بر

* تغییر حجم المان در تمام جهات یکسان است.

حالت خاص: المان تحت فشار هیدرواستاتیک



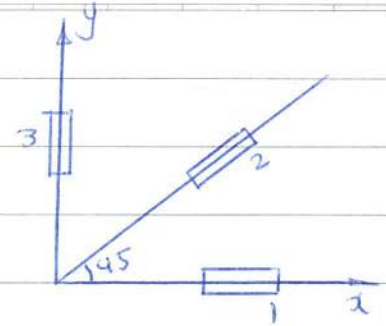
$$e = \frac{1-2\nu}{E}(-3p)$$

$$\rightarrow -p = \frac{E}{3(1-2\nu)}e$$

مدول بالک (فشار)

$$k = \frac{E}{3(1-2\nu)} \rightarrow \text{Bulk Modulus}$$

Compression Modulus



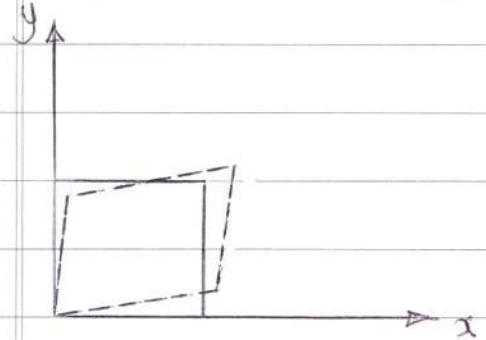
مثال: یک خوشه کرنش شامل سه کرنش سنج الکتریکی بر روی یک سطح قطری دیگ آب مجموعه‌ای از پیچ و مهره‌ها قرار دارد نشان داده شده است. شکل قرائت‌های کرنش سنج‌ها و مقادیر مشخصات مکانیکی آن است.

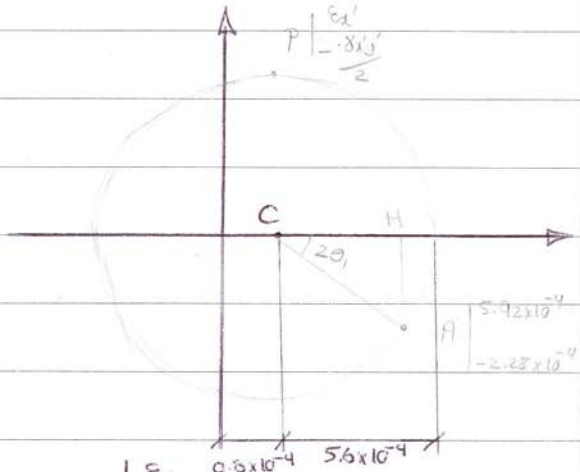
$\varepsilon_3 = -0.000432$ $\varepsilon_2 = 0.000308$ $\varepsilon_1 = +0.000592$

مطلوبست: الف) مقدار و جهت کرنش‌های اصلی. ب) مقدار و جهت تنش‌های اصلی. ج) موقعیت و مقادیر کرنش‌های برشی حداکثر.

$E = 2.03 \times 10^5$ Mpa $\nu = 0.3$

$\varepsilon_x = 0.000592$ $\varepsilon_y = -0.000432$ $\gamma_{xy} = 0.000456$



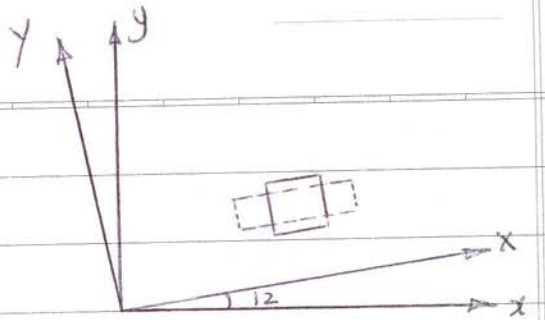


$a = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} = 0.000080$

$C(0, a)$

$R = 0.000560$

صفحه i و $A \left| \begin{matrix} \varepsilon_x \\ -\frac{\gamma_{xy}}{2} \end{matrix} \right.$

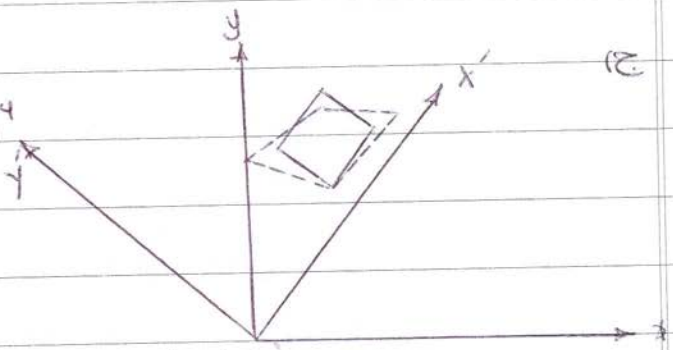


$$\begin{cases} \varepsilon_{Max} = a + R = 6.4 \times 10^{-4} \\ \varepsilon_{Min} = a - R = -4.8 \times 10^{-4} \end{cases}$$

$$2\theta_1 = \sin^{-1}\frac{AH}{R} = 24^\circ \rightarrow \theta_1 = 12^\circ \text{ ↑}$$

$$\theta_2 = \theta_1 + 45 = 57^\circ$$

$$\gamma_{Max} = -2R = -11.2 \times 10^{-4}$$



۲) لاصفی نفی قطر باشد کوچکتر، کوچک می‌شود

حمید کاظم

فصل سوم :

تئوری پایداری در اعضای تحت فشار (ستون‌ها)

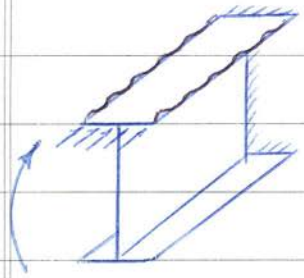
$\sigma_{Max} \leq \sigma_{all}$

$\tau_{Max} \leq \tau_{all}$

$\delta_{کل} \leq \delta_{all}$

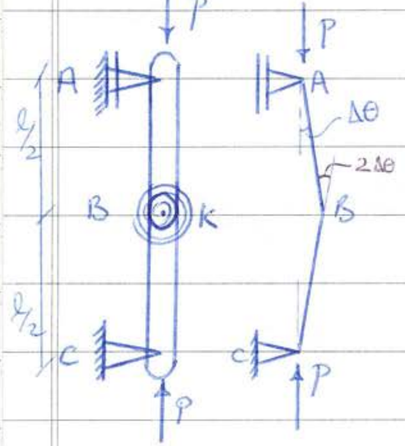
معیارهای مقاومت

به تغییر شکلی که اختصاص به اعضای تحت فشار دارد کمانش (Buckling) گویند.



به کمانش شکل (1) کمانش کلی گوییم. اما به کمانش شکل (2) کمانش جزئی گوییم.

در این فصل به کمانش کلی در ستون‌ها می‌پردازیم.

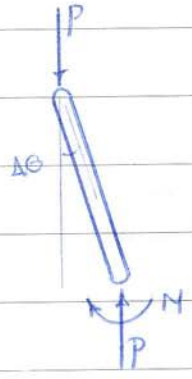


پایداری ارتجاعی اجسام صلب :

تمام راهی به پائین فرض کاملاً ایده‌آل این دو کاملاً در یک امتداد باشند به علت صلب بودن هیچ کمانشی ندارند.

به نقطه B در راستای افقی نیروی کمی وارد می‌کنیم و آن را منحرف می‌کنیم. بعد از این اتفاق نیروی افقی را حذف می‌کنیم. یا به حالت اول برمی‌گردد و یا زاویه بیشتر می‌شود. بنابراین اگر به جای خودش برگشت می‌گوییم سیستم پایدار است.

وگرنه حالت اولیه برگشت سیستم ناپایداری می باشد.

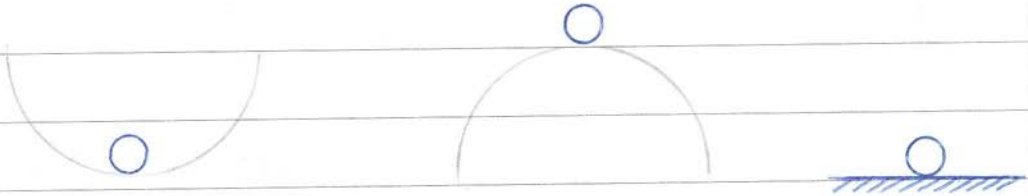


$$\begin{cases} M_1 = P\left(\frac{l}{2}\sin\Delta\theta\right) \\ M_2 = k(2\Delta\theta) \end{cases}$$

$M_1 > M_2$ ⇒ سیستم ناپایدار است.

$M_1 < M_2$ ⇒ سیستم پایدار است و به جای خودش برمی گردد

اگر P، l قابل ملاحظه باشد و K کم باشد سیستم ناپایداری گردد.



حالت مرزی وقتی است که $M_1 = M_2$ باشد یعنی:

$$P\frac{L}{2}\sin\theta = k\,2\Delta\theta$$

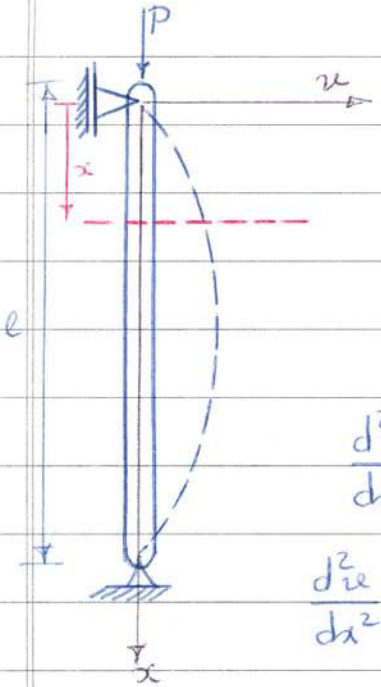
$$\Rightarrow P_{cr} = \frac{4k}{L} \quad (\text{Critical load بحرانی})$$

$P < \frac{4k}{L} \Rightarrow M_1 < M_2$ سیستم پایدار

$P > \frac{4k}{L} \Rightarrow M_1 > M_2$ سیستم ناپایدار

نکته: این بار این حالت که اگر $P_{cr}=10t$ بود و ما $P=20t$ وارد کردیم کمانش ایجاد می‌کرد. (این حالت نسبت به $P=20t$ اگر یک تکیه ساده خودش حرکت کمانش می‌شود.)

بررسی پایداری ستون دو سر مفصل:



$$M=-Pu$$

$$\frac{d^2u}{dx^2}=\frac{M}{EI}=\frac{-Pu}{EI} \Rightarrow \frac{d^2u}{dx^2}+\frac{P}{EI}u=0$$

$$\frac{d^2u}{dx^2}+\lambda^2 u=0 \quad ; \quad \frac{P}{EI}=\lambda^2 \quad \text{فرض}$$

$$\rightarrow u(x)=A\sin\lambda x+B\cos\lambda x$$

شرایط مرزی:

$$\begin{cases} u(0)=0 \Rightarrow B=0 \\ u(\ell)=0 \Rightarrow A\sin\lambda\ell=0 \end{cases}$$

A نمی‌تواند صفر شده چون آنگاه تغییر شکلی نداریم.

$$A\sin\lambda\ell=0 \Rightarrow \lambda\ell=n\pi$$

$$\Rightarrow \lambda^2\ell^2=n^2\pi^2 \Rightarrow \frac{P}{EI}\ell^2=n^2\pi^2$$

$$\Rightarrow P_{cr}=\frac{n^2\pi^2 EI}{L^2}$$

از نظر ریاضی بازای $n=1$ ، $n=2$ ، $n=k$ برای هرکدام که P کرانی داریم. یعنی برای یک بار، دو بار، سه بار ... کرانی داریم. اما ما علاقه‌مند هستیم تنها $n=1$ را در نظر می‌گیریم.

$$n=1 \rightarrow P_{cr} = \frac{\pi^2 E I}{L^2}$$ Euler's Formula (رابطه اویلر)

$$u_{(x)} = A \sin \lambda x$$

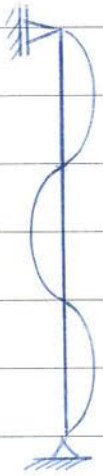
در این رابطه A مجهول است و می‌تواند بی‌نهایت باشد. در اینجا u را می‌تواند بی‌نهایت باشد، ولی چون تیر، تیر نیاز است و همینطوری تغییر شکل نمی‌دهد پس نمی‌شود

$$n=2 \Rightarrow P_{cr} = \frac{4\pi^2 E I}{L^2}$$

$$u_{(x)} = A \sin \lambda x = A \sin \sqrt{\frac{P}{EI}}\, x$$

$$\rightarrow u_{(x)} = A \sin \left(\frac{2\pi}{\ell} x\right)$$

$$\begin{cases} u(0) = 0 \\ u(\ell) = 0 \\ u(\ell/2) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} u(\ell/4) = A \\ u(3\ell/4) = A \end{cases}$$



$$n=3 \Rightarrow u(x) = A\sin\left(\frac{3\pi}{\ell}x\right)$$

$$\begin{cases} u(0)=0 \\ u(\ell)=0 \\ u(\ell/3)=0 \\ u(2\ell/3)=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} u(\ell/6)=A \\ u(\ell/2)=A \\ u(5\ell/6)=A \end{cases}$$

اگر یک تیر در $n=1$ تیر نباشد و دارد $n=2$ شد، عامل برآمدگی ایجاد شد کمانش به شکل رسم شده در $n=2$ است. این یک مد ریاضی است. لذا فاز در این حالت می‌توانیم وقتی این عامل ایجاد می‌شود که یک تکیه‌گاه میانی ایجاد کنیم.

نکته: حمال انرژی الاستیک ذخیره شده حول محور ضعیف تر است. بنابراین ضعیف‌ترین ستونی است که حمال انرژی حول محوری که I در آن کمتر باشد یعنی ضعیف‌تر و قوی نداشته باشد.

تنش کرانی:

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 E I}{L^2 \cdot A} = \frac{\pi^2 E (Ar^2)}{L^2 \cdot A}$$

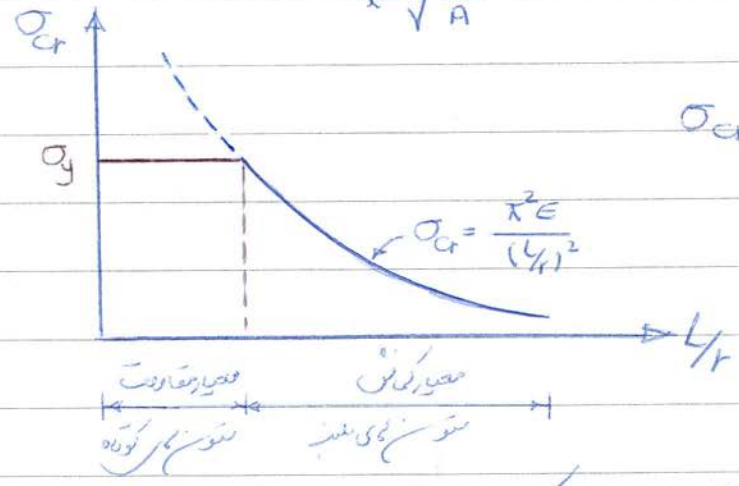
r: شعاع ژیراسیون

تنش بحرانی در ستون دو سر مفصل $\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(L/r)^2}$

$\frac{L}{r}$: نسبت لاغری (slenderness effect)

از این رابطه می فهمیم که تنش بحرانی تابعی از $\frac{L}{r}$ است و r استفاده شده شعاع ژیراسیون محور ضعیف است.

$$r_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}$$



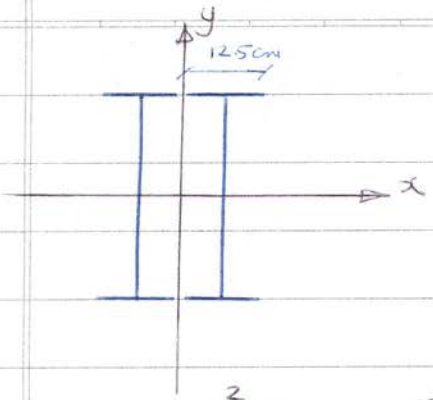
تابعی: $\sigma_{cr} < \sigma_y$

در لاغری های کم مشکل کمانش نمی تواند مشکل تسلیم به وجود آید.

مثال: ستونی دو سر مفصل به طول 6m از 2 عدد INP300 تشکیل شده که بدون تصادفی خوش شده است. با فرض $\sigma_y = 2400 \frac{kg}{cm^2}$ و $E = 2.1 \times 10^6 \frac{kg}{cm^2}$ ظرفیت باربری فشاری آن را بیابید. ضرب اطمینان را 2 در نظر بگیرید.

$I_x = 9800\ cm^4$ $A = 69\ cm^2$ $h = 30cm$

$I_y = 451\ cm^4$ $b_w = 12.5\ cm$



$I_x = 2 \times 9800 = 19600\ cm^4$

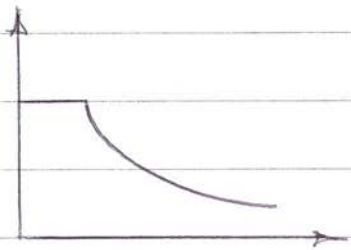
$I_y = 6293\ cm^4$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 E I}{L^2} = \frac{\pi^2 \times 2.1 \times 10^6 \times 6293}{600^2} = 362.3\ ton$$

$$\sigma_{cr} = \frac{362.3 \times 10^3}{2 \times 69} = 2625\ \frac{kg}{cm^2} > 2400\ \frac{kg}{cm^2}$$

پس عضو مقاومت کمانشی ندارد.

$$P_{all} = \frac{2400 \times 2 \times 69}{2} = 165.5\ ton$$



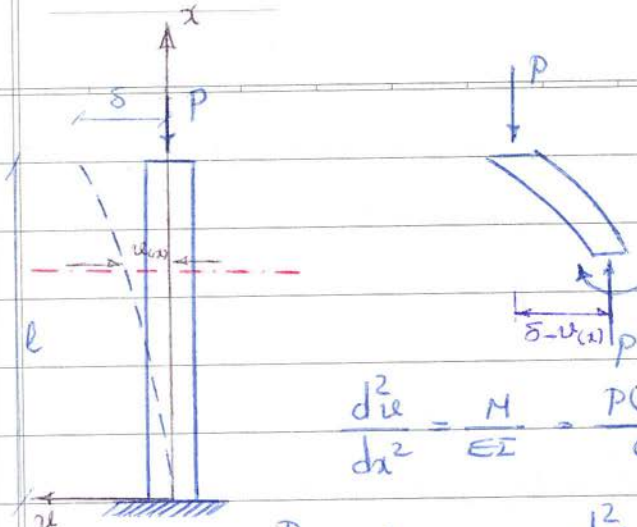
مثال: میله باریکی در دو انتها محصور شده است. با فرض شرایط ایده‌آل و رفتار ارتجاعی، به ازای چه افزایش درجه حرارتی در این میله باعث کمانش می‌شود؟ (طول میله ℓ، مدول الاستیسیته مصالح E و ضریب انبساط حرارتی α باشد)

$$\varepsilon = \alpha . \Delta t \rightarrow \sigma = E . \alpha . \Delta t \rightarrow F = E \alpha . \Delta t . A$$

$$E \alpha \Delta t . A = \frac{\pi^2 E I}{\ell^2}$$

$$\Rightarrow \Delta t = \frac{\pi^2 . I}{\alpha \ell^2 A}$$

ستون یکسر گیردار



$$M = P(\delta - u_{(x)})$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{M}{EI} = \frac{P(\delta - u)}{EI}$$

فرض : $\frac{P}{EI} = \lambda^2 \Rightarrow \frac{d^2u}{dx^2} + \lambda^2 u = \lambda^2 \delta$

$$u_{(x)} = A \sin \lambda x + B \cos \lambda x + \delta$$

شرایط مرزی:

$u_{(0)} = 0 \Rightarrow B = -\delta$

$u'_{(0)} = 0 \Rightarrow A \lambda \cos \lambda x = 0 \Rightarrow A = 0$

$$\Rightarrow u_{(x)} = \delta(1 - \cos \lambda x)$$

شرط مرزی : $u_{(l)} = \delta \Rightarrow \delta = \delta(1 - \cos \lambda x) \Rightarrow \cos \lambda l = 0$

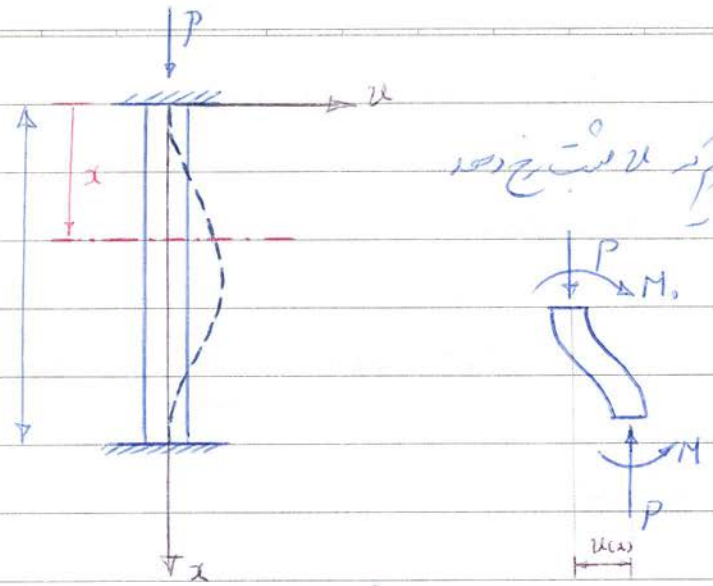
$$\Rightarrow \lambda l = (2n+1)\frac{\pi}{2}$$

$$n = 0 \Rightarrow \lambda l = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \lambda^2 l^2 = \frac{\pi^2}{4} \Rightarrow \frac{P}{EI} l^2 = \frac{\pi^2}{4}$$

$$\Rightarrow P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4l^2}$$

ستون دوسر گیردار:

محور y را طوری در نظر می‌گیریم که u مثبت رو به پایین باشد



$$M = M_0 - Pu \Rightarrow \frac{d^2u}{dx^2} = \frac{M_0 - Pu}{EI}$$

فرض: $\frac{P}{EI} = \lambda^2 \Rightarrow \frac{d^2u}{dx^2} + \lambda^2 u = \frac{M_0}{EI} \times \frac{P}{P}$

$$\Rightarrow \frac{d^2u}{dx^2} + \lambda^2 u = \frac{M_0}{P}\lambda^2$$

$$\Rightarrow u(x) = A\sin\lambda x + B\cos\lambda x + \frac{M_0}{P}$$

شرایط مرزی:

$$\begin{cases} V_0(0) = 0 \rightarrow B = \dfrac{-M_0}{P} \\ u'(0) = 0 \rightarrow A = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow u(x) = \frac{M_0}{P}(1 - \cos\lambda x)$$

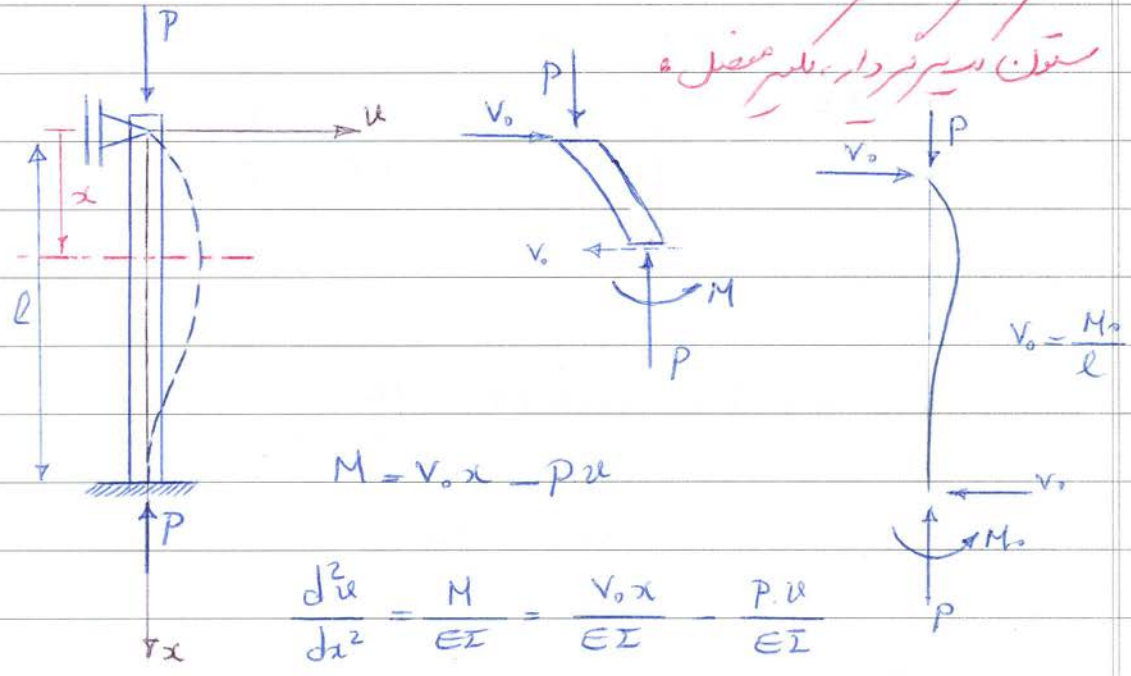
شرط : $u(l) = 0 \Rightarrow \frac{M_0}{P}(1 - C_1 \lambda l) = 0 \quad (\frac{M_0}{P} \neq 0)$

$\Rightarrow C_1 \lambda l = 1 \Rightarrow \lambda l = 2n\pi$

$n=1 \Rightarrow \lambda l = 2\pi \Rightarrow \lambda^2 l^2 = 4\pi^2 \Rightarrow \frac{P}{EI} l^2 = 4\pi^2$

$$\Rightarrow P_{cr} = \frac{4\pi^2 EI}{l^2}$$

ستون دو سر گردار، بار متمرکز



$$M = V_0 x - P u$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{M}{EI} = \frac{V_0 x}{EI} - \frac{P u}{EI}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2u}{dx^2} = \frac{V_0 x}{EI} \frac{P}{P} - \frac{P u}{EI}$$

فرض : $\frac{P}{EI} = \lambda^2 \Rightarrow \frac{d^2u}{dx^2} + \lambda^2 u = \frac{V_0}{P} x \lambda^2$

$$v(x) = A\sin\lambda x + B\cos\lambda x + \frac{V_0}{P}x$$

شرایط مرزی:

$$\begin{cases} v(0) = 0 \longrightarrow B = 0 \\ v(l) = 0 \longrightarrow A\sin\lambda l + \frac{V_0}{P}l = 0 \quad (1) \\ v'(l) = 0 \longrightarrow A\lambda\cos\lambda l + \frac{V_0}{P} = 0 \quad (2) \end{cases}$$

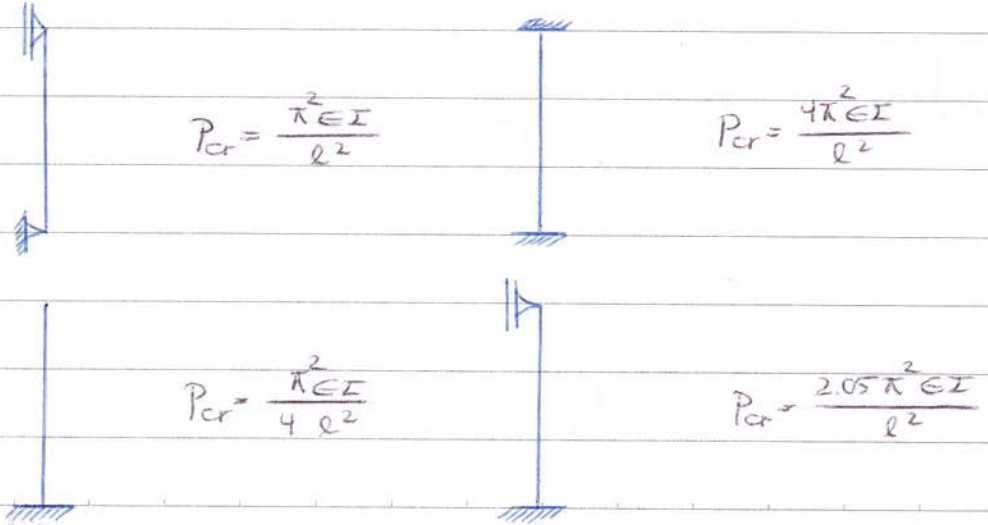
رابطه (1) را بر (2) تقسیم می‌کنیم

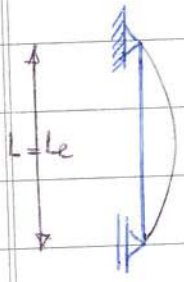
$$\frac{1}{\lambda}\tan\lambda l = l \Rightarrow \tan\lambda l = \lambda l$$

بنابراین $\longrightarrow \lambda l = 4.4934$

$$\frac{P}{EI} = \lambda^2 l^2 = (4.4934)^2 \Rightarrow P_{cr} = \frac{20.19EI}{l^2}$$

$$\Rightarrow P_{cr} = \frac{2.05\pi^2 EI}{l^2}$$

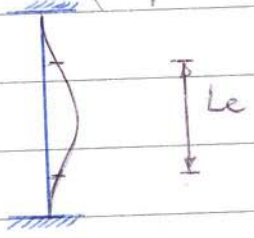




$$P_{cr} = \frac{\pi^2 E I}{L^2} \qquad (L = L_e)$$

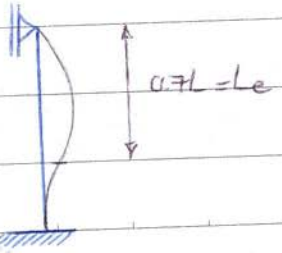
$$P_{cr} = \frac{\pi^2 E I}{4L^2} = \frac{\pi^2 E I}{(L_e)^2}$$

$$(2L = L_e)$$



$$P_{cr} = \frac{4\pi^2 E I}{L^2} = \frac{\pi^2 E I}{(L_e)^2}$$

$$\left(\frac{1}{2}L = L_e\right)$$

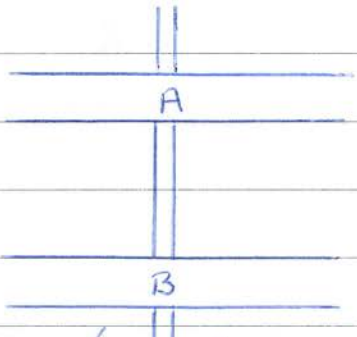


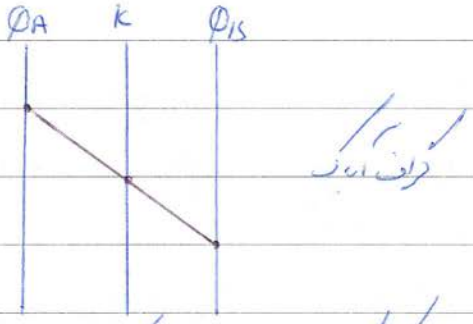
$$P_{cr} = \frac{2.05\,\pi^2 E I}{L^2} = \frac{\pi^2 E I}{(L_e)^2}$$

طول موثر (Le) ← effective length

$Le = k L$

k ← ضریب طول موثر





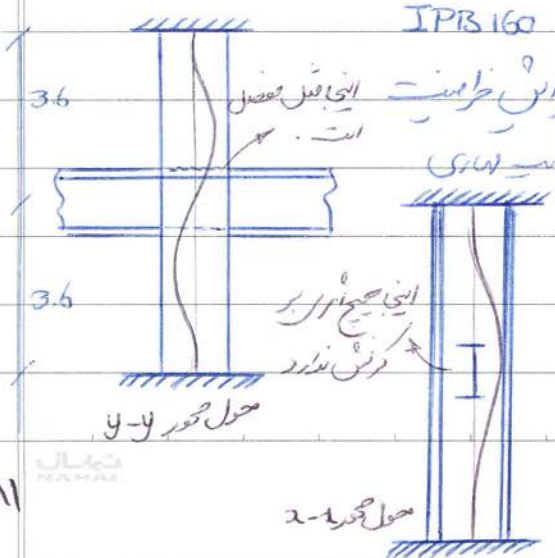
گراف آبک

در اینجا بلکه ستون AB نسبت به گره دارای سختی بیشتری است و در نتیجه سختی بیشتری دارد و مقدار اجازه چرخش در ستون می دهد.

در فولاد ←

$$\Phi = \frac{\sum (\frac{EI}{L})_{\text{تیر}}}{\sum (\frac{EI}{L})_{\text{ستون}}}$$

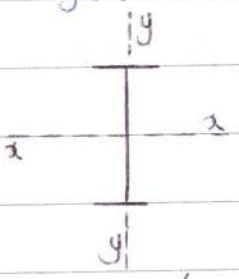
مثال: ستونی به طول 7.2m از مقطع IPB160 با دو انتهای گیردار مفروض است. جهت افزایش ظرفیت باربری آن، بوسیله ارتباط ستون با ایجاد دیگ بندی افقی دارای اتصال مفصلی طول آن را برای کمانش حول محور ضعیف مقطع نصف کردیم. با این کار ضریب لاغری آن را برابر با 2 خواهیم



باربری محور ضعیف ستون را بدست آورید. $E = 2.1 \times 10^6 \ kg/cm^2$ $\sigma_y = 2400 \ kg/cm^2$

IPB160 $A = 54.3 cm^2$ $I_x = 2490 cm^4$ $I_y = 889 cm^4$

$r_x = 6.78 cm$ $r_y = 4.05 cm$



الف) کمانش حول محور x:

$L = 7.2m$ $Le = \frac{1}{2}L = 3.6$

$\lambda_x = \frac{Le}{r_x} = \frac{360}{6.7} = 53.1$

ب) کمانش حول محور y:

$L = 3.6m$ $Le = 0.7L = 2.52m$

$\lambda_y = \frac{Le}{r_y} = \frac{252}{4.05} = 62.2$

کنترل شده کمانش محور y است چون λ آن بیشتر است.

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda_y^2} = 5102 \ \frac{kg}{cm^2}$$

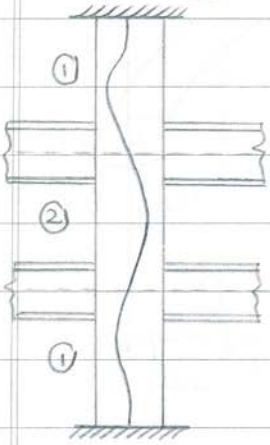
چون $\sigma_{cr} > 2400$ است پس مقاومت حاکم است. پس:

$$P_{all} = \frac{2400 \times 54.2}{2} = 65.2 \times 10^3 \ kg$$

* اگر این را حساب می‌کنیم $\sigma_{cr} = 2498$ می‌شد که دوباره از σ_y بیشتر است و همان مقاومت حاکم خواهد بود.

σ_{cr} 2400

تمرین ۵: اگر به جای یک مهاری، دو مهاری در دو فاصله $\frac{1}{3}$ از کاهش طول مؤثر ستون محور ضعیف تر آن در هر دو جهت بازوی ستون به میزان تغییر می‌کند.



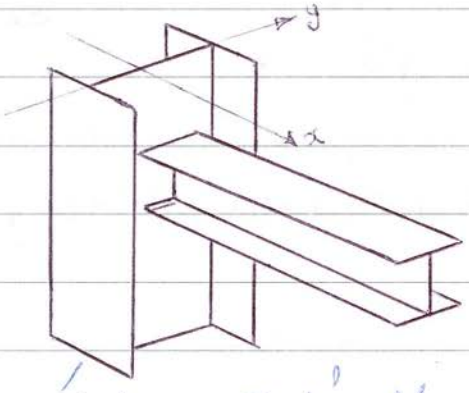
$$L = \frac{1}{3}(7.2) = 2.4$$

$$L_{e_1} = 0.7(L) = 1.68 \rightarrow \lambda_1 = \frac{1.68}{4.05\times10^{-2}} = 41.48$$

$$L_{e_2} = L = 2.4 \rightarrow \lambda_2 = \frac{2.4}{4.05\times10^{-2}} = 59.26$$

$$\sigma_{cr} = \frac{3.14^2(2.1\times10^6)}{59.26^2} = 5895.97$$

چون $\sigma_{cr} > 2400$ می‌باشد پس تغییر مقاومت مسلم است.

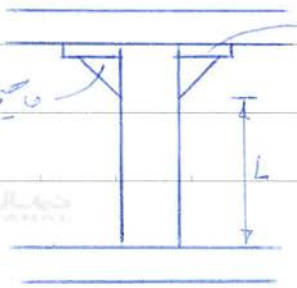


مهم‌ترین کار برای ناکشش طول مؤثر است. برای این کار در $L_e = kL$ باید k را کاهش داد و یا L.

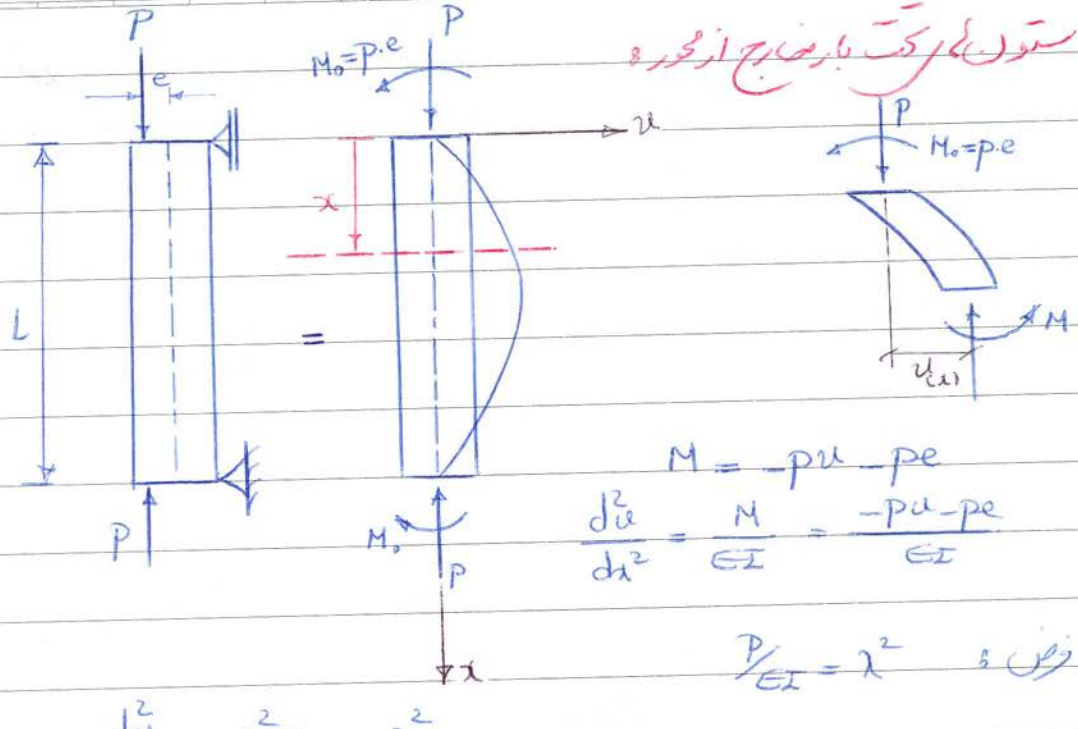
کاهش k با سخت‌تر کردن تکیه‌گاه است.

راه کاهش L این است که از سه ستون دو ستون استفاده کرد (فاصله دو ستف را کمی شود تغییر داد) با به ستون طول L را کم می‌کنیم.

اگر هم خواستیم L را کم کنیم باز ناچیز تغییر می‌کنیم



ستون‌های لاغر تحت بار خارج از محور



$$M = -Py - Pe$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI} = \frac{-Py - Pe}{EI}$$

فرض کنید $\frac{P}{EI} = \lambda^2$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} + \lambda^2 y = -\lambda^2 e$$

$$\Rightarrow \text{جواب کلی: } y_{(x)} = A\sin\lambda x + B\cos\lambda x - e$$

شرایط مرزی:

$$y_{(0)} = 0 \Rightarrow B = e$$

$$y_{(l)} = 0 \Rightarrow A\sin\lambda l + e\cos\lambda l - e = 0$$

$$\Rightarrow A = \frac{e(1-\cos\lambda l)}{\sin\lambda l}$$

$$\Rightarrow A = \frac{e \times 2\sin^2\frac{\lambda l}{2}}{2\sin\frac{\lambda l}{2}\cdot\cos\frac{\lambda l}{2}} = e\,tg\frac{\lambda l}{2}$$

$$\Rightarrow y_{(x)} = e\,tg\frac{\lambda l}{2}\sin\lambda x + e\cos\lambda x - e$$

این رابطه برعکس رابطه قبل تغییر شکل را در هر نقطه می دهد.
اینجا هم دنبال کمانش نیستیم. می خواهیم تنش ماکزیمم را برای طراحی بدست آوریم.

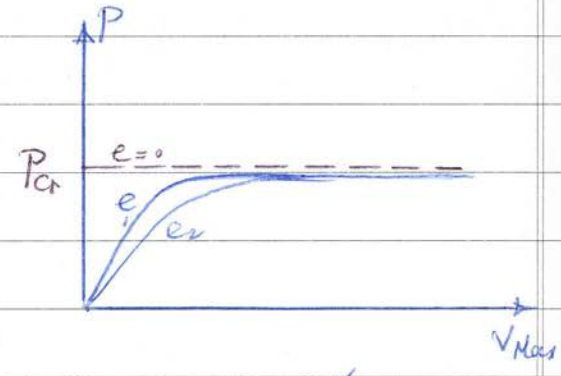
$$v_{Max}\Big|_{x=l/2} = e\left(\tg \tfrac{\alpha l}{2} \sin \tfrac{\alpha l}{2} + C_1 \tfrac{\alpha l}{2} - 1\right)$$

$$= e\left(\frac{\sin^2 \frac{\alpha l}{2} + C_1^2 \frac{\alpha l}{2}}{C_1 \frac{\alpha l}{2}} - 1\right) = e\left(\frac{1}{C_1 \frac{\alpha l}{2}} - 1\right)$$

$$\Rightarrow \quad v_{Max} = e\left(\sec \tfrac{\alpha l}{2} - 1\right)$$

if $P = 0 \rightarrow v_{Max} = 0$

if $C_1 \frac{\alpha l}{2} = 0 \rightarrow v_{Max} = \infty$



P معمولا برسد دیگر کار نمی کند، v_{Max} بزرگ شده و P بسیار کوچکی باعث خرابی اجزاء می شود.

برای e_1 و e_2 و ... و e_n در حالت $C_1 \frac{\alpha l}{2} = 0$ ، $v_{Max} = \infty$ است. پس P برابر می باشد

$$C_1 \tfrac{\alpha l}{2} = 0 \Rightarrow \frac{\alpha l}{2} = (2n+1)\frac{\pi}{2} \xrightarrow{n=0} \alpha l = \pi$$

$$\rightarrow \alpha^2 l^2 = \pi^2 \Rightarrow \quad P_{cr} = \frac{\pi^2 E I}{L^2}$$

محاسبه بار کمانشی ستون دوسر مفصل بدون خروج از مرکزیت می باشد.

در اینجا رابطه P و y غیرخطی است. اما در کمانش حتی فصل اول نیز رابطه خطی بود.

$$y_{Max} = e\left[\sec\left(\frac{L}{2}\sqrt{\frac{P}{EI}}\right) - 1\right]$$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \rightarrow EI = \frac{L^2}{\pi^2} P_{cr}$$

$$y_{Max} = e\left[\sec\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{P}{P_{cr}}}\right) - 1\right]$$

حال بیشترین σ_{Max} در ستون:

$$\sigma_{Max} = \frac{P}{A} + \frac{M \cdot c}{I} = \frac{P}{A} + \frac{P(e + y_{Max})c}{I} \qquad (I = Ar^2)$$

$$\rightarrow \sigma_{Max} = \frac{P}{A}\left[1 + \frac{(e + y_{Max})c}{r^2}\right]$$

$$\rightarrow \sigma_{Max} = \frac{P}{A}\left[1 + \frac{\left(e + e\left(\sec\left(\frac{L}{2}\sqrt{\frac{P}{EI}}\right) - 1\right)\right)c}{r^2}\right]$$

$$\sigma_{Max} = \frac{P}{A}\left[1 + \frac{ec}{r^2}\sec\left(\frac{Le}{2}\sqrt{\frac{P}{EI}}\right)\right] \qquad (1)$$

$$\rightarrow$$

$$\sigma_{Max} = \frac{P}{A}\left[1 + \frac{e.c}{r^2}\sec\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{P}{P_{cr}}}\right)\right]$$

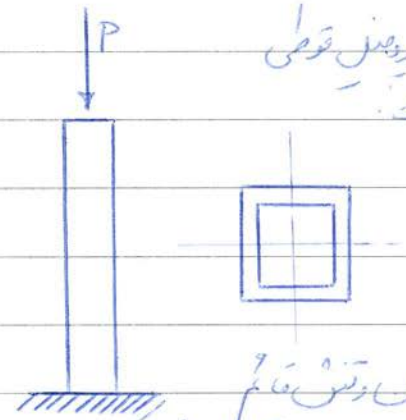
در رابطه (1) به جای $I = Ar^2$ قرار می دهیم.

$$\sigma_{Max} = \frac{P}{A}\left[1 + \frac{e.c}{r^2}\,Sec\left(\frac{L_e}{2r}\sqrt{\frac{P}{EA}}\right)\right]$$

این رابطه را Secant formula گویند. ($\sigma_{Max} > P/A$ یعنی)

در این حرکت کمانشی برای تمام ستون ها در این رابطه به جای L، L_e قرار می دهیم.

مثال: ستون بتنی زیر دارای طول 2.45 متر است و بر روی آن نیروی محوری P وارد می شود. مشخصات ستون داده شده است. $100 \times 100\ mm^2$



$A = 2284\ mm^2$ $\quad E = 2.1 \times 10^5\ Mpa$

$I = 3.33 \times 10^5\ mm^4$ $\quad \sigma_y = 240\ Mpa$

$r = 38.18\ mm$

محاسبات: الف) نیروی بار گذاری که باعث کمانش ستون می شود را محاسبه کنید.

ب) تنش متوسط مربوط به بالاترین مقدار را از رابطه اولر و ضریب اطمینان 2 محاسبه کنید. ج) بار مجاز را در حالتی که بار گذاری با خروج از محوریت $e = 19\ mm$ اعمال می شود را محاسبه کنید.

الف)
$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{Le^2} = \frac{\pi^2 \times 2.1 \times 10^5 \times 3.33 \times 10^6}{(2 \times 2450)^2} = 287.5\ KN$$

ب) محاسبه تنش کمانشی

$$\sigma_{cr} = \frac{287.5 \times 10^3}{2284} = 126\ Mpa < 240$$

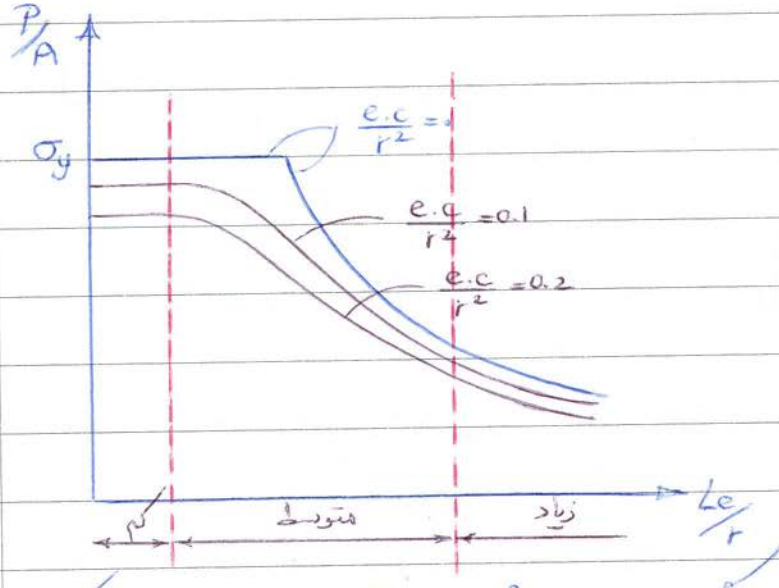
$$P_{all} = \frac{287.5}{2} = \underline{143.75\ KN} \qquad \sigma_{مجاز} = \frac{126}{2} = \underline{63\ Mpa}$$

ب)
$$\sigma_{Max} = \frac{P}{A}\left[1 + \frac{e.c}{r^2}\,Sec\,\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{P}{P_{cr}}}\right] = 155.32\ Mpa$$

حالت ب) با شرط بحرانی $\bar{\lambda}$ ، 180 درجه بدست می‌آید.

رابطه مماسی را به شکل مقابل داریم.

$$\frac{P}{A} = \frac{\sigma_{Max}}{1 + \frac{e.c}{r^2}\,Sec\left(\frac{Le}{2r}\sqrt{\frac{P}{\epsilon A}}\right)} \qquad (\sigma_{Max} = \sigma_y)$$



۱) برای $\frac{Le}{r}$ های کم P_{cr} نزدیک را خواهیم داشت و در نتیجه Sec به درجه اصل کرده رابطه مماسی به شکل زیر است.

$$\sigma_{Max} = \frac{P}{A}\left(1 + \frac{e.c}{r^2}\right)$$

در $\frac{Le}{r}$ کوچک اثر لاغری تبدیل شود ولی اثر خروج از مرکزیت داریم.

۲) برای $\frac{Le}{r}$ های زیاد مقدار $\bar{\lambda}$ بیشتر شود. پس در $\frac{Le}{r}$ های زیاد

از خروج از مرکزیت آن کم می‌شود.

نتیجه: پس کاربرد رابطه سکانت برای لاغری‌های متوسط است.

- $\frac{Le}{i} < 60$ → کم
- $60 < \frac{Le}{r} < 100$ → متوسط → رابطه سکانت
- $\frac{Le}{r} > 100$ → زیاد → رابطه اویلر

* باید مقدار خروج از مرکزیت معلوم باشد تا بتوان از رابطه سکانت در محدوده متوسط استفاده نمود.

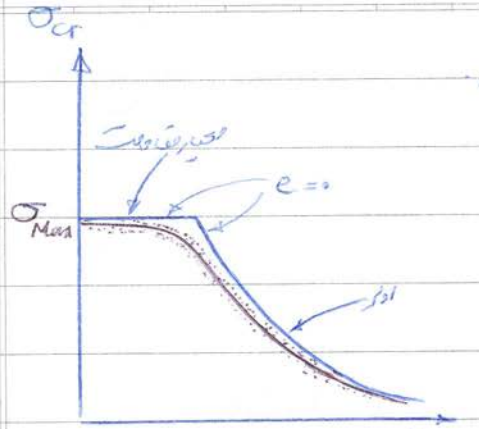
طرح ستون بتنی

الف) ستون بتنی تحت بار محوری (بدون خروج از مرکزیت):

(روابط بین مصالح، بر هم خطی بودن و مستقیم بودن محور تنش کنترل می‌شود. بنابراین عموماً تمام روابط استفاده شده در طراحی ستون‌ها براساس روابط خطی است.)

۱) انحنای اولیه و خروج از مرکزیت اولیه باعث تأثیر قابل ملاحظه‌ای بر ظرفیت باربری ستون دارد.

۲) برای لاغری‌های زیاد ($\frac{Le}{r} > 120$) رابطه اویلر می‌تواند مقاومت نهایی ستون را تقریباً نشان دهد.



فعلی نمودار مقاصل از آزمایشات می باشد.

۱) برای $\frac{L_e}{r}$ های کمی زیاد ظرفیت باربری ستون (σ_{cr}) تقریباً $\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(L/r)^2}$ می باشد.

۲) برای $\frac{L_e}{r}$ های کم ظرفیت باربری ستون تقریباً σ_y تشکیل دارد.

۳) برای $\frac{L_e}{r}$ های متوسط ظرفیت باربری ستون هم تقریباً E و هم تقریباً σ_y تشکیل دارد.

برای ستون های بلند و کوتاه تقریباً روابط تجربی نداریم. لذا برای ستون های $\frac{L_e}{r}$ های متوسط داریم:

نمونه روابط تجربی:

۱) رابطه رانکین - گوردون (Rankin-Gordon):

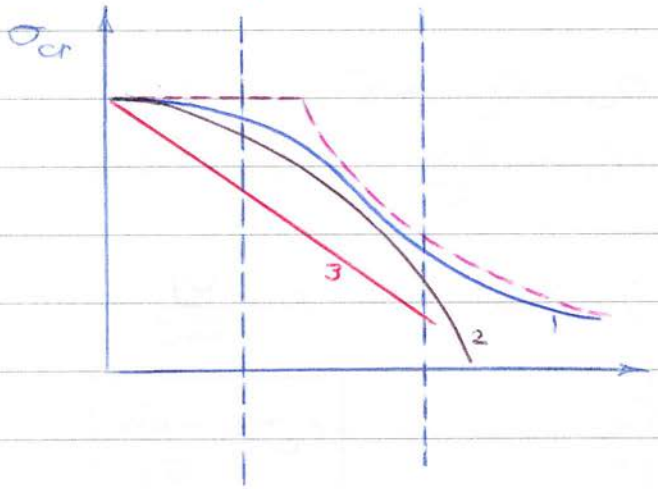
$$\sigma_{cr} = \frac{\sigma_{Max}}{1 + k\left(\frac{L_e}{r}\right)^2}$$

۲) رابطه جانسون (Johnston):

$$\sigma_{cr} = \sigma_{Max}\left[1 - k\left(\frac{L_e}{r}\right)^2\right]$$

۳) روابط خطی:

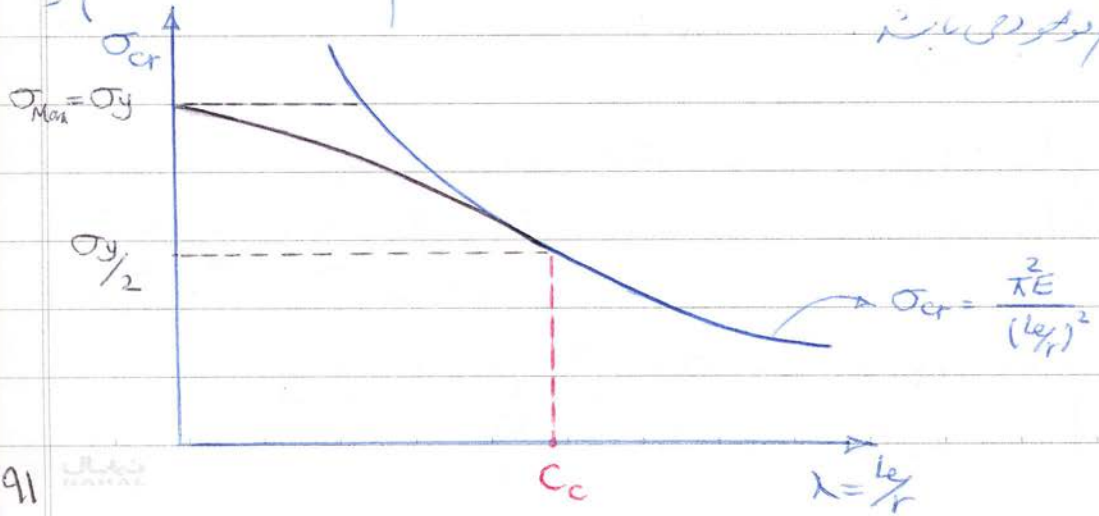
$$\sigma_{cr} = \sigma_{Max} - k\left(\frac{Le}{r}\right)$$



روابط آیین نامه ای برای طراحی ستون کمر فولادی:

AISC: American Institute of steel Construction

روابط ارائه شده در AISC می باشد که در مبحث دهم مقررات ملی ساختمان ایران نیز مورد بحث می باشد.



برای ستون‌های کوتاه و متوسط که بیشتر دچار کمانش غیرالاستیک می‌شوند، این روش که بر مبنای اولرمی‌شود، نقطه‌ی عملی فقط $\sigma_y/2$ می‌باشد. لذا برای شکل‌پذیری $\sigma_y/2$ و C_c تعریف شده است.

$$\begin{cases} \text{کمانش غیرالاستیک:} & \sigma_{cr} = \sigma_y - k\lambda^2 \quad \text{for } \lambda \leq C_c \\ \text{کمانش اولر:} & \sigma_{cr} = \dfrac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad \text{for } \lambda \geq C_c \end{cases}$$

از رابطه‌ی ۱: $\sigma_y/2 = \sigma_y - k C_c^2 \Rightarrow K = \dfrac{\sigma_y}{2C_c^2}$

از رابطه‌ی ۲: $\dfrac{\sigma_y}{2} = \dfrac{\pi^2 E}{C_c^2} \Rightarrow \boxed{C_c^2 = \dfrac{2\pi^2 E}{\sigma_y}}$

$$\begin{cases} \text{for } \lambda \leq C_c & \sigma_{cr} = \sigma_y\left[1 - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\lambda}{C_c}\right)^2\right] \\ \text{for } \lambda \geq C_c & \sigma_{cr} = \dfrac{\pi^2 E}{\lambda^2} \qquad C_c \leq \lambda \leq 200 \end{cases}$$

ضریب اطمینان:

$$\sigma_{all} = \frac{\sigma_{cr}}{F.S.}$$

$$\begin{cases} \text{for } \lambda \geq C_c \longrightarrow F.S. = 1.92 & \text{ستون‌های بلند} \\ \text{for } \lambda \leq C_c \longrightarrow F.S. = \dfrac{5}{3} + \dfrac{3}{8}\left(\dfrac{\lambda}{C_c}\right) - \dfrac{1}{8}\left(\dfrac{\lambda}{C_c}\right)^3 & \text{ستون‌های کوتاه و متوسط} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{for } \lambda \leq C_c \longrightarrow \sigma_{all} = \dfrac{\sigma_y}{F.S.}\left[1 - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\lambda}{C_c}\right)^2\right] \\ \text{for } \lambda \geq C_c \longrightarrow \sigma_{all} = \dfrac{\pi^2 E}{1.92\lambda^2} \end{cases}$$

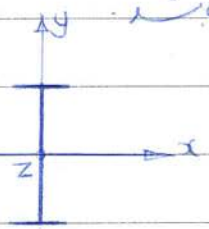
$A_{req} \geq \frac{P}{\sigma_{all.}}$ ، σ ، A را بدانیم آنگاه می‌توانیم سطح مقطع مورد استفاده کنیم.

مثال: ستونی از یک نیمرخ فولادی IPB220 با دو انتهای مفصلی و به طول 7.3 m موجود است. بار مجاز P را در دو حالت زیر محاسبه کنید.

الف) هر دو انتهای مفصلی، ستون در طول خود هیچگونه مهاری نداشته باشد.

ب) تنها مهاری با تکیه‌گاه مفصلی در وسط ارتفاع ستون از حرکت نقطه وسط در صفحه xz جلوگیری نماید. فرض می‌کنیم این مهاری هیچ تأثیری در حرکت نقطه وسط در صفحه yz نداشته باشد.

$$\begin{cases} A = 91\,cm^2 \\ r_x = 9.42\,cm \\ r_y = 5.59\,cm \end{cases} \qquad \begin{cases} \sigma_y = 2500\ kg/cm^2 \\ E = 2\times10^6\ kg/cm^2 \end{cases}$$



الف)

$$\begin{cases} \lambda_x = \frac{730}{9.42} = 77.49 \\ \lambda_y = \frac{730}{5.59} = 130.6 \ \surd \end{cases}$$

$$C_c^2 = \frac{2\pi^2 E}{\sigma_y} \rightarrow C_c = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{\sigma_y}} = 125.7$$

$$\lambda_y \geq C_y \xrightarrow{\text{اویلر}} \sigma_{all} = \frac{\pi^2 E}{1.92\,\lambda^2} = 602.8\ \frac{kg}{cm^2} \rightarrow P_{all} = 54.85\ ton$$

ب)

$$\begin{cases} \lambda_x = \frac{730}{9.42} = 77.49 \surd \\ \lambda_y = \frac{365}{5.59} = 65.3 \end{cases}$$

$C_c = 125.7 \rightarrow \lambda_x < C_c$

$$\sigma_{all} = \frac{\sigma_y}{F.S.}\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{C_c}\right)^2\right] \qquad \lambda/C_c = 0.62$$

$$F.S. = 5/3 + \frac{3}{8}\left(\frac{\lambda}{C_c}\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{\lambda}{C_c}\right)^3$$

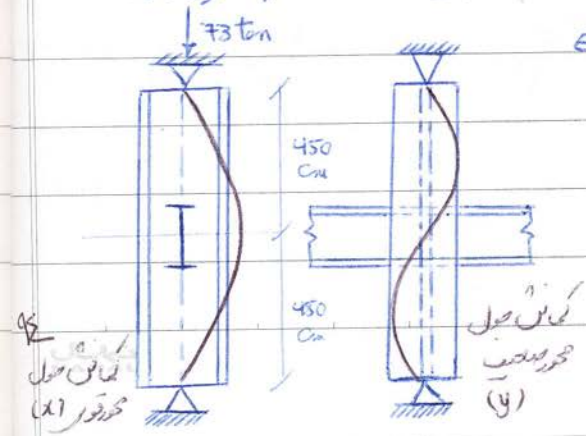
$$\rightarrow F.S. = 1.87 \Rightarrow \sigma_{all} = 1083\ kg/cm^2$$

$$P_{all} = 1083 \times 91 = 9855\ ton$$

* با استفاده از روابط بدست آمده می‌توانیم تنش فشاری مجاز برای هر نوع فولاد و هر مقدار $\lambda = l_e/r$ بدست آوریم. روش کار بدین صورت است که ابتدا با استفاده از σ_y مقدار C_c را محاسبه می‌کنیم. برای مقادیر $\lambda = l_e/r$ بزرگتر از C_c و کوچکتر از C_c تنش مجاز را از روابط اثبات شده بدست می‌آوریم.

مثال: مطلوبست طراحی ستونی به طول 9m از پروفیل IPB از فولاد نرمه با $\sigma_y = 2400\ kg/cm^2$. این ستون در بالا و پایین مفصلی بوده و توسط تیرهایی از کناس آن محل کوچکی از ارتفاع حذف شده است. انتهای این تیرهای به ستون مفصلی بوده و ستون تحت بارگذاری $P = 73\ ton$ قرار دارد.

$E = 2.1 \times 10^6\ kg/cm^2$



$$\begin{cases} (L_e)_x = k \cdot L_x = 900\,cm \\ (L_e)_y = k \cdot L_y = 450\,cm \end{cases}$$

۱) فرض تنش مجاز اولیه:

$$\sigma_{all} = 800\ \frac{kg}{cm^2}$$

۲) انتخاب مقطع ستون:

$$A_{req} = \frac{P}{\sigma_{all}} = \frac{73\,ton}{800} = 91.25\,cm^2$$

Use IPB240 ($A_{مقطع} = 106\,cm^2$)

۳) محاسبه تنش مجاز برای IPB240:

$$\begin{cases} A = 106\,cm^2 \\ r_x = 10.3\,cm \\ r_y = 6.08\,cm \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda_x = \dfrac{(L_e)_x}{r_x} = \dfrac{900}{10.3} = 87.38 \\ \lambda_y = \dfrac{(L_e)_y}{r_y} = \dfrac{450}{6.08} = 74.01 \end{cases}$$

$$C_c = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{\sigma_y}} = 131.4 \qquad C_c > \lambda_x$$

$$F.S. = \frac{5}{3} + \frac{3}{8}\left(\frac{\lambda}{C_c}\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{\lambda}{C_c}\right)^3 = 1.88$$

$$\rightarrow \sigma_{all} = \frac{\sigma_y}{F.S.}\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{C_c}\right)^2\right] = 994\ \frac{kg}{cm^2}$$

۴) انتخاب مقطع:

$$A_{req} = \frac{73 \times 10^3}{994} = 73.44\,cm^2$$

Use IPB 200 $\begin{cases} A = 78.1\,cm^2 \\ r_x = 8.54\,cm \\ r_y = 5.07\,cm \end{cases}$

$\lambda_x = 105.4$ ✓ $\quad C_c > \lambda_x$

$\lambda_y = 88.8$

$$F.S = \frac{5}{3} + \frac{3}{8}\left(\frac{\lambda}{C_c}\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{\lambda}{C_c}\right)^3 \Rightarrow \sigma_{all} = 859 \ kg/cm^2$$

۴) انتخاب مقطع:

$$A_{req} = \frac{73 \times 10^3}{859} = 85 \ cm^2$$

Use IPB 220 $\begin{cases} A = 91 \ cm^2 \\ r_x = 9.43 \ cm \\ r_y = 5.59 \ cm \end{cases}$

۷) کنترل می‌کنیم:

$\sigma_{all} = 931 \ kg/cm^2$

۸) انتخاب مقطع:

$A_{req} = 78.4$

Use IPB 220 $\Rightarrow$ O.K.

این مراحل را تا حالتی ادامه می‌دهیم که اختلاف تنش محاسبه‌ای و تنش مجاز بدست آمده خیلی کم باشد.

800 , 990 ✗

859 , 931 ✓

ب) ستون با بار با خروج از مرکزیت

$$\sigma_{Max} = \frac{P}{A} + \frac{M.c}{I} = \frac{P}{A} + \frac{P(e+y_{Max})c}{I}$$

این رابطه برای ستون کوتاه و لاغر استفاده می‌کنیم تا σ_{Max} شود. اگر ستون دارای لاغری زیاده شد تیر ستون نویسد. تیر ستون از مرکز خارج است.

روش برای تعیین σ_{all}

۱) σ_{all} برای ستون مرکز بارگذاری بدون خروج از مرکزیت. برای λ_{Max} ستون ($\frac{Le}{r_{min}}$) بدون توجه به صفحه خمش $\frac{P}{A} + \frac{M.c}{I} \leq (\sigma_{all})_a$

۲) $\frac{P}{A} + \frac{M.c}{I} \leq \sigma_{all}$

$$\rightarrow \frac{P/A}{(\sigma_{all})_a} + \frac{\frac{M.c}{I}}{(\sigma_{all})_b} \leq 1$$

a: axial → محوری
b: bending → خمش

* شماره ۱ محافظه کارانه است لی غیر اقتصادی می‌باشد.

برای خمش کج

$$\frac{P/A}{(\sigma_{all})_a} + \frac{\frac{M_z \cdot y_{Max}}{I_z} + \frac{M_y \cdot z_{Max}}{I_y}}{(\sigma_{all})_b} \leq 1$$

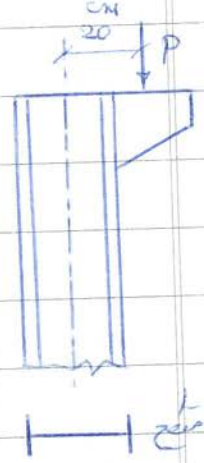
* برای شماره ۱ و ۲ λ برابر $\frac{Le}{r_{min}}$ می‌باشد. بدون توجه به صفحه خمش.

مثال: ازیک پروفیل فولادی با مشخصات زیر ستونی با طول موثر 4.5m ساخته شده است. حداکثر بار P که می‌تواند با خروج از مرکزیت 20cm حول محور قوی وسط این ستون کار کند چقدر است؟

$\sigma_y = 2500 \frac{kg}{cm^2}$
$E = 2 \times 10^6 \frac{kg}{cm^2}$

$A = 94.8 cm^2$
$r_x = 13.16 cm$
$r_y = 4.98 cm$
$S_x = 1058 cm^3$

$(\sigma_{all})_{\text{خمش}} = 1500 \frac{kg}{cm^2}$



$$\lambda_y = \frac{Le}{r_y} = \frac{4.5 \times 10^2}{4.98} = 90.36$$

$$C_c^2 = \frac{2\pi^2 E}{\sigma_y} = \frac{2\pi^2 \times 2 \times 10^6}{2500}$$

$$\rightarrow C_c = \frac{2\pi \times 10^3}{50} = 125.66 \rightarrow C_c > \lambda_y$$

$$\sigma_{all} = \frac{\sigma_y}{F.S.}\left[1 - \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{\lambda}{C_c}\right)^2\right] \qquad \lambda/C_c = 0.719$$

$$F.S. = 5/3 + \tfrac{3}{8}\left(\tfrac{\lambda}{C_c}\right) - \tfrac{1}{8}\left(\tfrac{\lambda}{C_c}\right)^3 = 1.89$$

$$\rightarrow \sigma_{all} = \frac{2500}{1.89}\left[1 - \tfrac{1}{2}(0.719)^2\right] = 980.85 \frac{kg}{cm^2}$$

روش حل:

$$\frac{P}{A} + \frac{Mc}{I} \leq \sigma_{all} \rightarrow \frac{P}{A} + \frac{20P}{S_x} \leq \sigma_{all}$$

$$\rightarrow \frac{P}{94.8} + \frac{20P}{1058} \leq 980.85 \rightarrow P \leq 33303 kg$$

نقطه (a):

$$\frac{P/A}{(\sigma_{all})_a} + \frac{Mc/I}{(\sigma_{all})_b} \leq 1$$

$$\rightarrow \frac{P}{980.85 \times 94.8} + \frac{20P}{1500 \times 1058} \leq 1$$

$$\rightarrow P \leq 92813.96 \text{ kg}$$

مقدار P در نقطه اول حداقل کار را می‌کند.

بسمه کاظم

فصل چهارم:

معیارهای شکست طی مصالح (تسلیم و شکست)
failure Criterias (Yield & Fracture)

وقتی سازه را طراحی می‌کنیم همیشه این سؤال پیش می‌آید که حداکثر تنش چقدر است؟

به معیارهایی نیاز داریم تا به این سؤال جواب دهند.

این معیارها را به ۳ صورت داریم:

۱) آنالیز انجام در حالت کرنش

۲) طراحی انجام در حالت کرنش

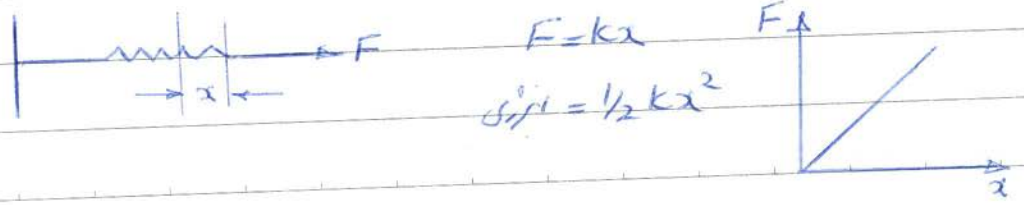
۳) تقسیم‌بندی آنالیز و طراحی

تأسفانه یا خوشبختانه معیار کلیتی واحد وجود ندارد. تأسفانه این معیارها انطباق کاملی هم ندارند.

انرژی کرنشی ارتجاعی (elastic strain energy):

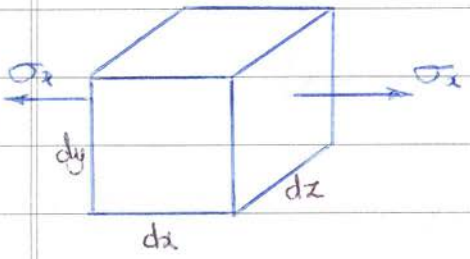
انرژی: توانایی انجام کار

انرژی کرنشی: انرژی ناشی از تغییر شکل جسم است. ناشی از کرنش جسم است.



کرنش ضربدر طول می‌شود تغییر شکل و تنش ضربدر سطح می‌شود نیرو. ضرب نیرو در تغییر شکل انرژی را می‌دهد.

الف) المان تحت تنش تک محوری:

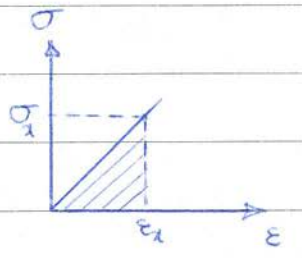


$$dU = \tfrac{1}{2}(\sigma_x . dy . dz)(\varepsilon_x . dx)$$

(تغییر شکل / نیرو)

$$= \tfrac{1}{2}\sigma_x \varepsilon_x . dx dy . dz$$

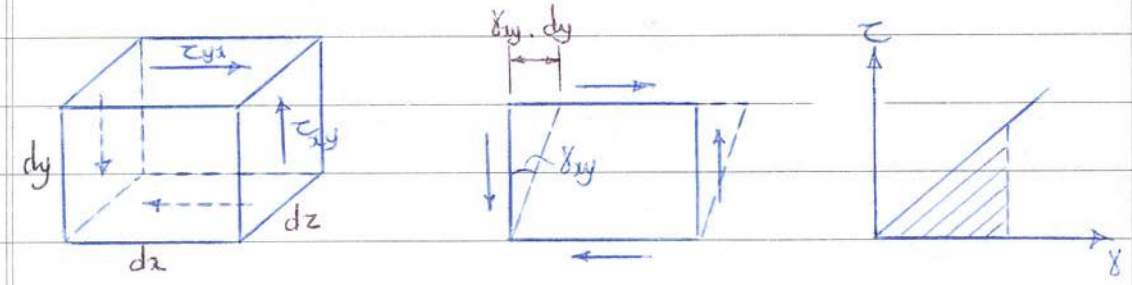
$$U_0 = \frac{dU}{dV} \rightarrow$$ چگالی انرژی کرنشی ارتجاعی



$$\rightarrow U_0 = \frac{dU}{dV} = \tfrac{1}{2}\sigma_x . \varepsilon_x = \frac{\sigma_x^2}{2E}$$

چگالی انرژی کرنشی ارتجاعی، مساحت زیر سطح زیر نمودار $\sigma - \varepsilon$.

ب) المان تحت تنش برشی:



$$dU = \tfrac{1}{2}(\tau_{xy} . dx . dz)(\gamma_{xy} . dy) = \tfrac{1}{2}\tau_{xy} . \gamma_{xy} . dV$$

$$U_0 = \frac{dU}{dv} = \frac{1}{2}\tau_{xy}\cdot\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}^2}{2G}$$

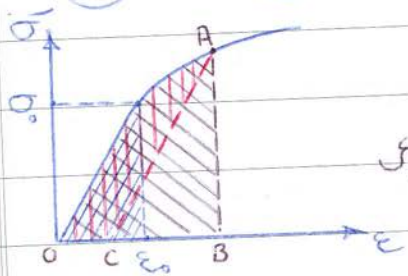
ج) تنش برای چند محور:

$$U_0 = \frac{1}{2}(\sigma_x\cdot\varepsilon_x + \sigma_y\cdot\varepsilon_y + \sigma_z\cdot\varepsilon_z) + \frac{1}{2}(\tau_{xy}\cdot\gamma_{xy} + \tau_{yz}\cdot\gamma_{yz} + \tau_{zx}\cdot\gamma_{zx})$$

$$U_0 = \frac{1}{2E}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{\nu}{E}(\sigma_x\cdot\sigma_y + \sigma_y\cdot\sigma_z + \sigma_z\cdot\sigma_x) + \frac{1}{2G}(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)$$

ضریب فنریت مصالح (Modulus of Resilience)

قابلیت مصالح برای جذب یا ذخیره انرژی بدون ایجاد تغییر شکل دائمی را ضریب فنریت گویند. (σ_0 حداکثر تنش مصالح تا حد تناسب)



$$U_0 = \frac{\sigma_0^2}{2E}$$ ضریب فنریت ارتجاعی

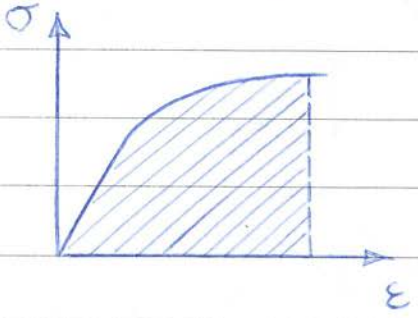
از نقطه A با بارداری نیم برحسب سطح زیر نمودار انرژی (سیاه رنگ) درجسم ذخیره می‌شود. نیروبرداری نیم برگشت سطح فنریت انرژی تلف می‌شود. از دوباره بارداری نیم حالت خطی حدود تسلیم می‌شود و ضریب فنریت مقدارش بیشتر می‌گردد که اندازه‌اش سطح Abc می‌باشد.

برای ضریب فنریت ضریب فنریت عرف ارتجاعی نویند.

چقرمگی (چغرمگی) Toughness

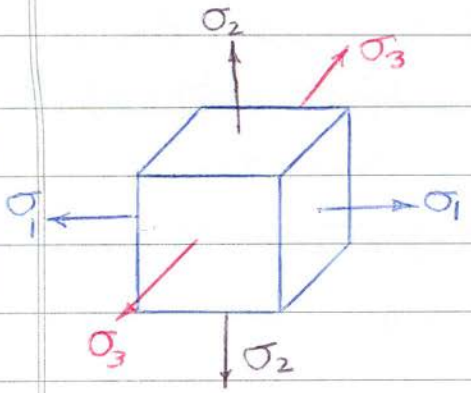
عبارت است از کل انرژی جذب شده توسط واحد حجم مصالح هنگامی که نمونه آزمایشگاهی بارگذاری شود.

* (برابر است با سطح زیر نمودار واحد حجم محاسبه شده)



انرژی کرنشی تغییر حجمی و تغییر شکل برشی

$$U_0 = \frac{1}{2E}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{\nu}{E}(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x) + \frac{1}{2G}(\tau_{xy}^2 + \tau_{yx}^2 + \tau_{xz}^2)$$



$$U_0 = \frac{1}{2E}\left[(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3)\right]$$

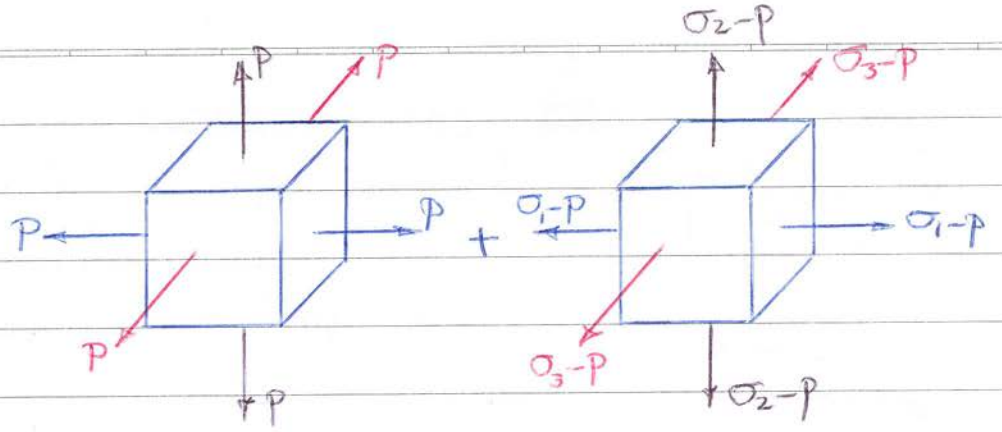
انرژی موجود در المان را به دو بخش تقسیم می‌شود:

۱) بخشی صرف تغییر حجم المان می‌شود.

۲) بخشی صرف تغییر شکل برشی می‌باشد.

حال باید ببینیم سهم هر بخش از انرژی چقدر است!

المان بالا را با هم دو صفحه برش آن می‌دهیم.



شماره (1) فقط دارای تغییر حجم است حول دایره مورس نقطه است. اما شماره (2) هم می‌تواند تغییر شکل برشی و هم می‌تواند تغییر شکل حجمی داشته باشد. اما ما می‌خواهیم تغییر شکل حجمی آن صفر باشد.

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & P \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_1-P & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2-P & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3-P \end{bmatrix}$$

تانسور تنش تغییر حجم (اتساع) dilatational stress tensor

تانسور تنش کروی spherical stress tensor

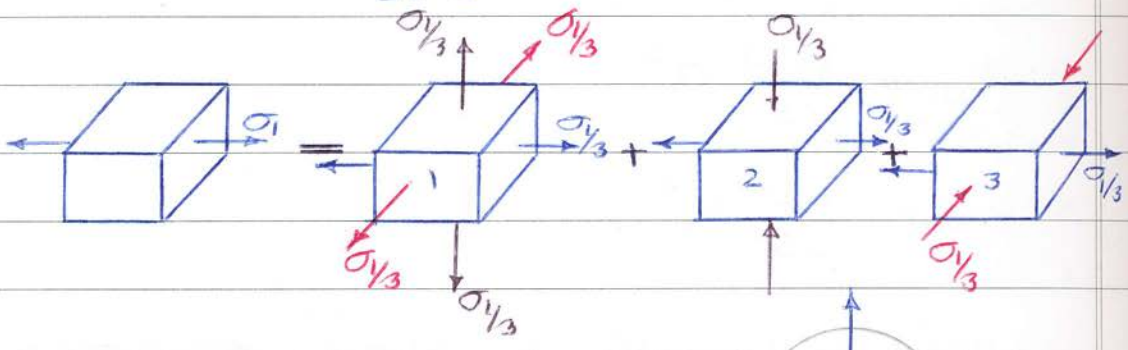
تانسور تنش انحرافی (تغییر شکل) deviation (distorsion) stress tensor

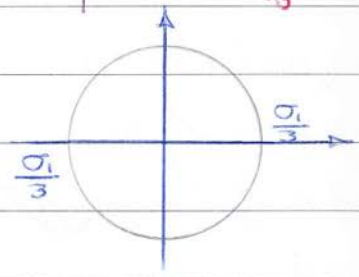
$$(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)_{dis} = 0 \rightarrow \frac{1-2\nu}{E}(\sigma_1-P+\sigma_2-P+\sigma_3-P) = 0$$

$$\Rightarrow \quad P = \frac{\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3}{3}$$

بنابراین P این 2 تغییر شکل حجمی تحواهد داشت.

* می‌توان تانسور P تانسور تنش را به صورت زیر نوشت:





$$\Delta V_2 = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)$$
$$= \frac{1-2\nu}{E}\left(\frac{\sigma_1}{3} - \frac{\sigma_1}{3}\right) = 0$$

$$U_{0(dil.)} = \frac{1}{2E}\left[(P^2+P^2+P^2) - 2\nu(P\cdot P + P\cdot P + P\cdot P)\right]$$

$$= \frac{3(1-2\nu)}{2E} P^2$$

$$\rightarrow U_{0(dil.)} = \frac{1-2\nu}{6E}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)^2$$

انرژی تغییر حجم

$$U_{0(dis.)} = U_{0کل} - U_{0(dil.)}$$

انرژی تغییر شکل برشی

$$= \frac{1+\nu}{6E}\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2 + (\sigma_2-\sigma_3)^2 + (\sigma_1-\sigma_3)^2\right]$$

مثالت محاسبه (الاول کت تنش تسلیم)

$$U_{0,tot} = \frac{1}{2E}\sigma_1^2$$

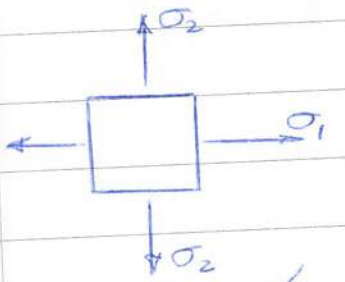
$$U_{0,dil} = \frac{1-2\nu}{6E}\sigma_1^2$$

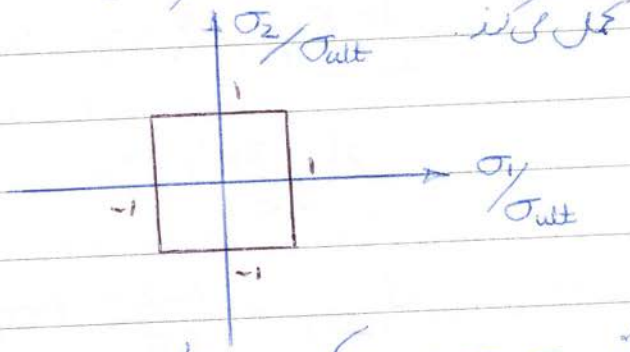
$$U_{0,dis} = \frac{1+\nu}{3E}\sigma_1^2$$

۶ (Maximum Normal stress Theory) نظریه تنش قائم حداکثر

توسط آقای رانکین بیان شده است.

می گوید هرگاه بزرگترین تنش قائم اصلی به حد کرانی رسد آن گسیختگی خواهد شد مقدار کرانی عبارت است از حداکثر تنشی که در آزمایش کشش یا فشار در آن تحمل می کند.





اگر σ_1 و σ_2 با علامت جبری وارد شوند، نقطه در داخل مرز نقاط سالم گسیختگی نمی شود. اگر روی مرز یا خارج آن قرار گیرد گسیختگی (استاتیکی) است.

اگر بیرون مرز بود گسیخته می شود.

* آزمایش نشان داده است که در مورد مصالح شکننده (در حالت کشش) این فرضیه صادق است.

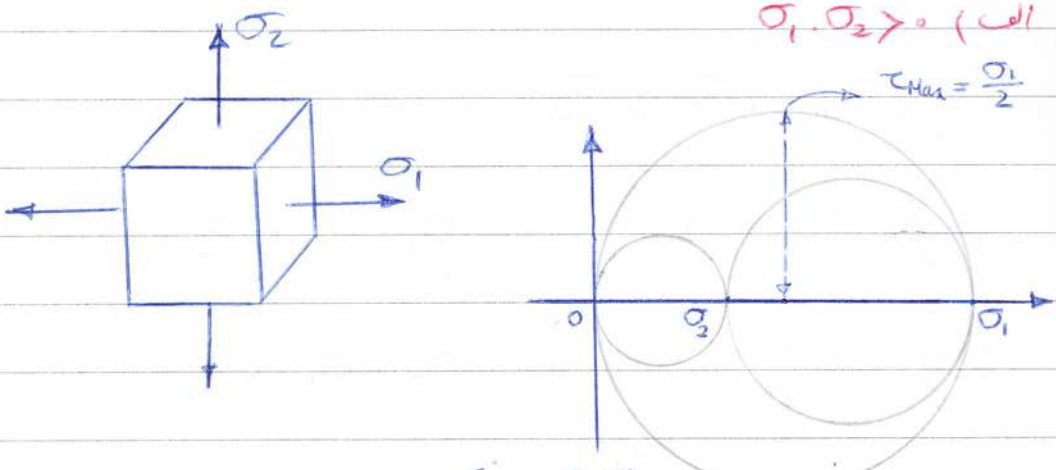
نظریه تنش برشی حداکثر (Maximum shearing stress Theory)

توسط آقای Treska بیان شده است.

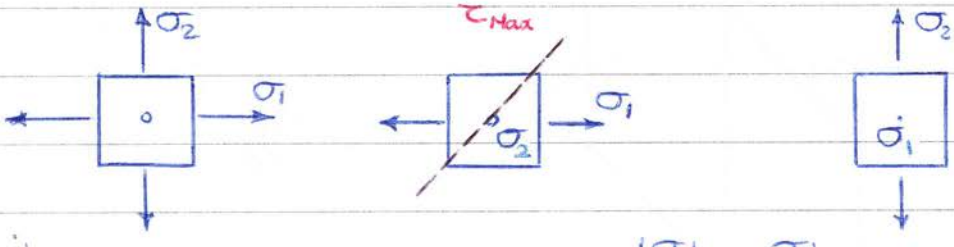
در مورد مصالح شکل پذیر تنش برشی ماکزیمم (τ_{Max}) برحسب کرانی برای مصالح کشسانی دارد.

مقدار کرانی تنش برشی، تنش برشی ماکزیمم در حضور حالت تنش ساده در لحظه کشسانی می باشد.

الف) $\sigma_1 . \sigma_2 > 0$

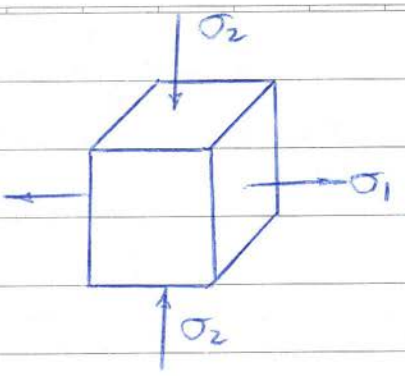


در τ_{Max} در صفحه σ_1 و σ_2 اتفاق می افتد.

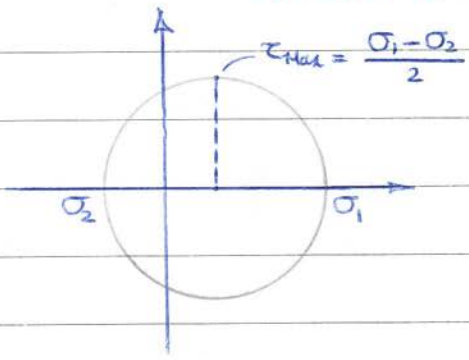


if $|\sigma_1| > |\sigma_2| \longrightarrow \tau_{Max} = \frac{|\sigma_1|}{2} \leq \frac{\sigma_y}{2} \rightarrow |\sigma_1| \leq \sigma_y$

if $|\sigma_1| < |\sigma_2| \longrightarrow \tau_{Max} = \frac{|\sigma_2|}{2} \leq \frac{\sigma_y}{2} \rightarrow |\sigma_2| \leq \sigma_y$



$\sigma_1 \cdot \sigma_2 < 0$ (ب

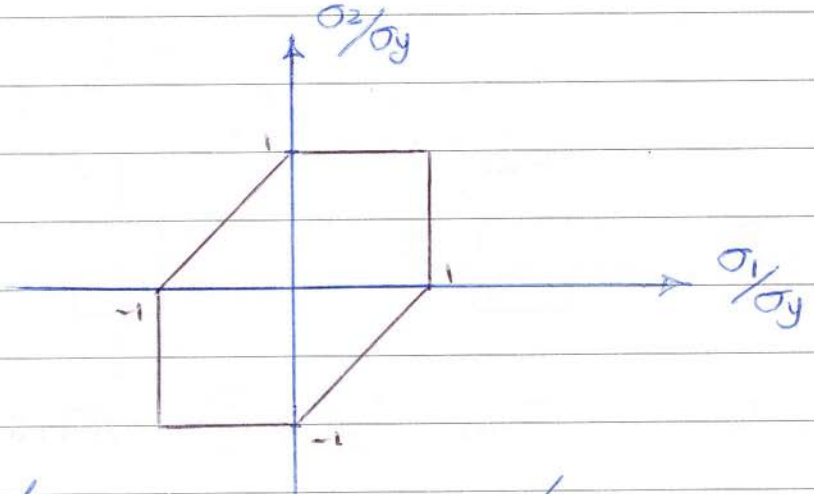


$$\tau_{Max} = \frac{|\sigma_1| + |\sigma_2|}{2} \leq \frac{\sigma_y}{2}$$

$$\rightarrow |\sigma_1| + |\sigma_2| \leq \sigma_y$$

if $\sigma_1 > 0, \sigma_2 < 0 \Rightarrow \sigma_1 - \sigma_2 < \sigma_y$

if $\sigma_1 < 0, \sigma_2 > 0 \Rightarrow \sigma_2 - \sigma_1 < \sigma_y$



* حرجی سطح تنش بود فقط به دو تنش اصلی بستگی دارد و حالت سه تنش اصلی τ_{Max} تحت تاثیر قرار دارد.

فرضیه انرژی برشی حداکثر در تغییر شکل برشی (Max. distortional energy Theory)

این فرضیه توسط آقای فون-مییس (Von-Mises) بیان شده است.
تعیار تسلیمی از نظر این فرضیه است که: اگر بخشی از انرژی که مربوط به تغییر شکل برشی است به حد کرانی برسد المان تسلیم می‌گردد. حد کرانی انرژی تغییر شکل برشی، انرژی تغییر شکل برشی Max در عضو تحت فشار یکنواخت در لحظه تسلیمی می‌باشد

$$U_{0,dis} = \frac{1+\nu}{6E}\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_1-\sigma_3)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2\right] \quad (1)$$

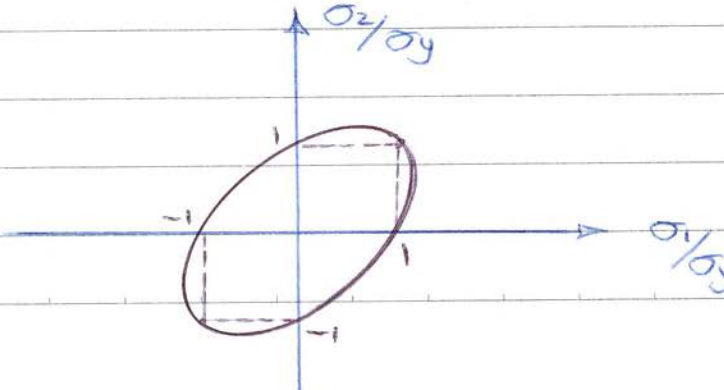
برای المان تسلیمی $U_{0,dis} = \frac{1+\nu}{3E}\sigma_y^2$ (2)

این نتایج برای مصالح شکل پذیر، همگن و ایزوتروپیک بیان شده است.

(1) و (2)، برای حجم فرازی دهم (برای صفحات دوبعدی $\sigma_3 = 0$)

$$\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_y}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_1\sigma_2}{\sigma_y^2}\right) + \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_y}\right)^2 = 1$$

معادله بیضوی $(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_1-\sigma_3)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2 = 2\sigma_y^2$



فرضیه (تئوری) کرنش طولی حداکثر (Maximum Normal Strain Theory)

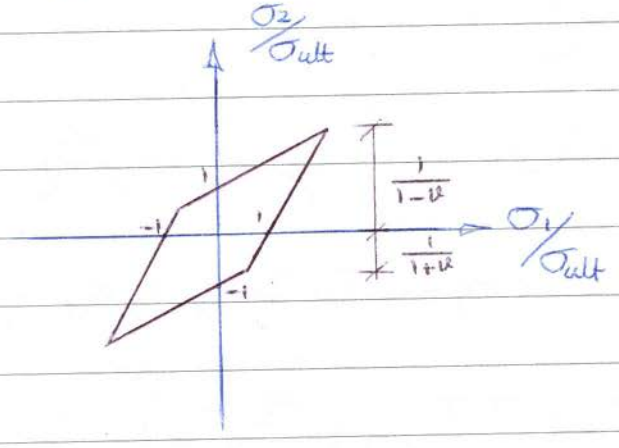
این فرضیه توسط سن ونان (St. Venan) بیان شده است.

اگر کرنش طولی حداکثر مقدار بحرانی برسد تسلیم رخ می‌دهد.

مقدار بحرانی کرنش طولی، کرنش طول Max در عضو کشش ساده تسلیم شده است.

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \dfrac{\sigma_1}{E} - \nu\dfrac{\sigma_2}{E} \\ \varepsilon_2 = \dfrac{\sigma_2}{E} - \nu\dfrac{\sigma_1}{E} \end{cases}$$

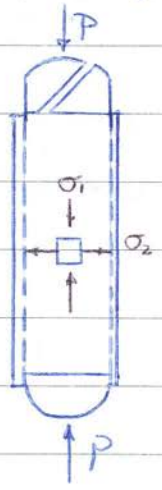
این تست محور $\varepsilon = \dfrac{\sigma_y}{E}$:



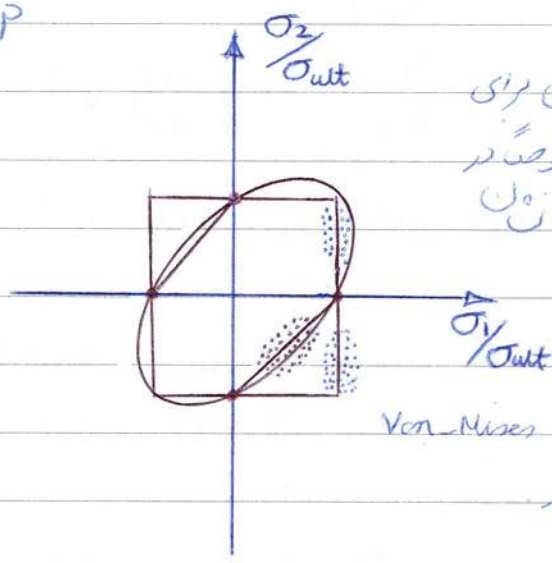
آزمایشات این نتایج را نشان نداده‌اند.

مقالسه فرضیه ی

مقالسه فرضیه ی برای این نوع از مسائل صورت می گیرد. که ابتدا به صورت نزدیک از محل مورد نظر شروع می شود. و دو المان تعریف می کنند. روی یک المان تنش اصلی و در راستای قرار می دهند و حول محور اصلی فشرده وارد می کنند. برای این حالت المان ها تحت کشش قرار می گیرند. حال عضو تحت کشش باید در ساده قرار می دهند. در این حالت المان هم تحت فشار و هم تحت کشش.



استفاده از تئوری رانش برای مصالح شکل پذیر خصوصاً در ناحیه 2 و 4 بسیار محافظه کار می دهد.



• ← فولاد، آلومینیوم، مس

• ← چدن

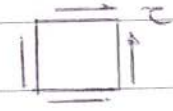
* روش های Von_Mises , Tresca بسیار پرکاربرد هستند.

همه فرضیات در حالت نقطه ای محور مختصات (تنش تک محوری) دارای نتیجه مشترک هستند. چون تمام فرضیات مقدار آن را معیاری قرار دادند که تحت تنش تک محوری است.

اگر المانی تحت تنش دو محوری داشتیم که یکی صفر باشد چون برگشت پذیر می شود پس از این حالت هم می توان استفاده نمود.

مثال: یک شفت توپر به قطر $d = 10mm$ را در نظر بگیرید.
الف) حالت تسلیم بر اساس حداکثر تنش برشی مطلق
ب) حالت تسلیم بر اساس توری حداکثر انرژی تغییر شکل برشی
تنش حدی برای شدن فولاد را $140\ Mpa$ در نظر بگیرید.

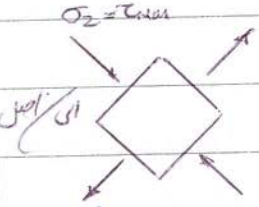
الف)



$$\tau_{Max} = \frac{T.c}{J} = \frac{T \times 5^{mm}}{\frac{\pi}{2} \times 5^4} = \frac{16T}{\pi d^3}$$

$$\text{در تسلیم: } \tau_{Max} \leq \frac{\sigma_y}{2} \Rightarrow \frac{16T}{\pi d^3} \leq \frac{140}{2} \Rightarrow T = 13.74\ N.m$$

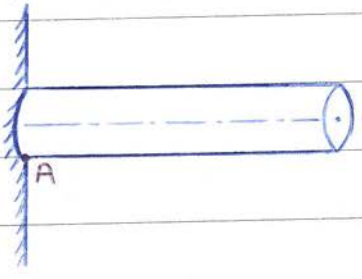
$$\text{فون میزز: } (\sigma_1-\sigma_2)^2 + (\sigma_2-\sigma_3)^2 + (\sigma_1-\sigma_3)^2 = 2\sigma_y^2$$



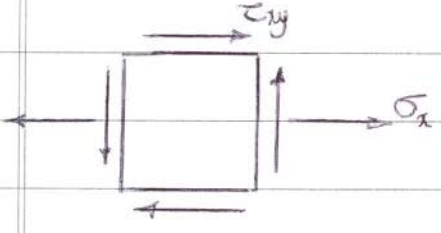
$$\Rightarrow \tau_{Max} = 0.577\sigma_y$$

$$\Rightarrow T = 15.86\ N.m$$

مثال: میله فولادی را مقطع دایروی با شعاع ۲ cm تحت اثر گشتاور پیچشی T و نیروی محوری N قرار دارد. حالت تسلیم این فولاد را برای ترکیبات مختلف T و N بر اساس تئوری تغییر شکل برشی فون میسس تعیین نمایید. تنش حدی تسلیم فولاد σ_y می‌باشد.



تنش نرمال ناشی از N و تنش برشی ناشی از T در مقطع A ایجاد می‌شود.



$$\sigma_x = \frac{M.c}{I} = \frac{M.\frac{R}{2}}{\frac{\pi}{4}R^4} = \frac{2M}{\pi R^3}$$

$$\tau_{xy} = \frac{T.c}{J} = \frac{T.R}{\frac{\pi}{2}R^4} = \frac{2T}{\pi R^3}$$

الف) معیار ترسکا:

$$\tau_{Max} \leq \frac{\sigma_y}{2}$$

$$\tau_{Max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \sigma_y/2$$

$$\rightarrow 16\left(\frac{M}{\sigma_y}\right)^2 + 16\left(\frac{T}{\sigma_y}\right)^2 = (\pi R^3)^2 \quad \rightarrow \text{دایره}$$

M و T موجود در این رابطه مربوط به حالتی است که هر دو

ب) معیار فون میسس:

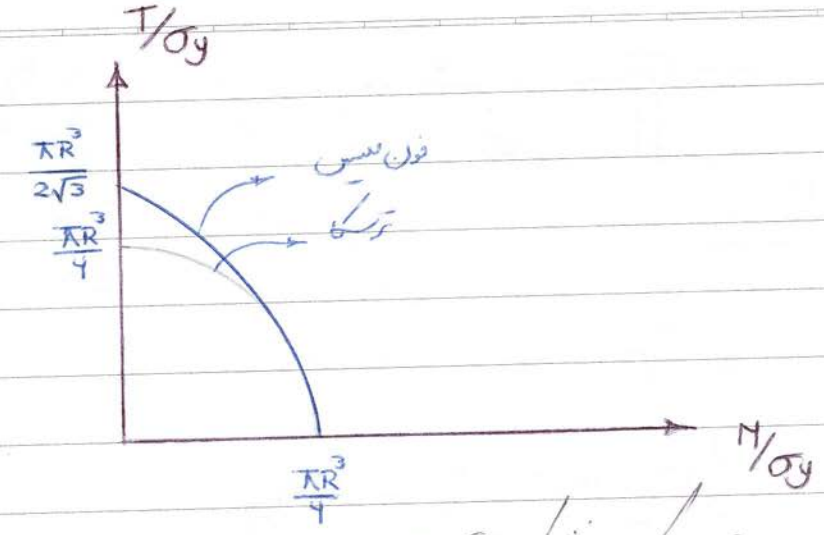
$$U_{o,dis} = \frac{1+\upsilon}{6E}\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2 + (\sigma_2-\sigma_3)^2 + (\sigma_1-\sigma_3)^2\right]$$

$$U_{o,dis} = \frac{1+\upsilon}{3E}\sigma_y^2$$

تنش اصلی

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

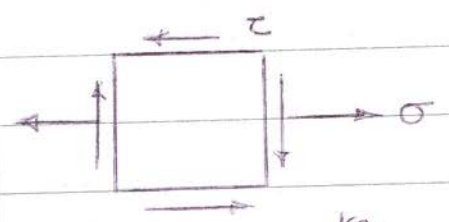
$$\rightarrow 16\left(\frac{M}{\sigma_y}\right)^2 + 12\left(\frac{T}{\sigma_y}\right)^2 = (\pi R^3)^2 \quad \rightarrow \text{بیضی}$$



نس تعیین تسلیم می‌شود یا نه تراکت.

مثال: عضوی با مقطع دایره‌ای از فولاد با تنش تسلیم $\sigma_y = 4000\ kg/cm^2$ ضروف است. تحت اثر بارگذاری نشان داده شده، ضریب اطمینان کار رفته در طراحی عضو را از لحاظ تسلیم برشی تعیین کنید. قطر $d = 1.5\ cm$

$P = 600\ kg$ $\quad T = 800\ kg.cm$ $\quad N_z = 500\ kg.cm$



σ محوری $= \frac{P}{A} = 340\ kg/cm^2$

σ خمشی $= \frac{Mc}{I} = 1509\ kg/cm^2$

$\tau = \frac{T.c}{J} = 1207\ kg/cm^2$

$\rightarrow \begin{cases} \sigma = 1849\ kg/cm^2 \\ \tau = 1207\ kg/cm^2 \end{cases}$

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \begin{cases} +2445\ kg/cm^2 \\ -596\ kg/cm^2 \end{cases}$$

الف) معیار ترسکا:

$$\sigma_1 \cdot \sigma_2 < 0 \rightarrow \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \leq \frac{\sigma_y}{2}$$

$$\rightarrow \sigma_1 - \sigma_2 \leq \sigma_y$$

رابطه بدست آمده و ضریب اطمینان در نظر گرفته شده است. پس رابطه مقابل برقرار است.

$$\sigma_1 - \sigma_2 \leq \frac{\sigma_y}{F.S.}$$

$$\rightarrow 2445 + 596 = \frac{4000}{F.S.} \rightarrow F.S. = 1.32$$

ب) معیار فون مایسس:

$$\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_y}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_1 \cdot \sigma_2}{\sigma_y^2}\right) + \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_y}\right)^2 \leq 1$$

$$\rightarrow \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_2 \leq \sigma_y^2$$

برای طراحی و اعمال ضریب اطمینان:

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_2 \leq \left(\frac{\sigma_y}{F.S.}\right)^2$$

$$\rightarrow F.S. = 1.43$$

*پس معیار ترسکا محافظه کارانه تر است.

طراحی با کدام یک تفاوت دارد.

ساختمانی داریم. طبق معیار ترسکا 1.32 برابر بار وارد کنیم سازه خراب می شود. اما براساس معیار فون مایسس اگر 1.43 برابر بار وارد کنیم سازه خراب می گردد. بنابراین ترسکا محافظه کارانه تر (Conservative) می باشد.

محمد کاظم

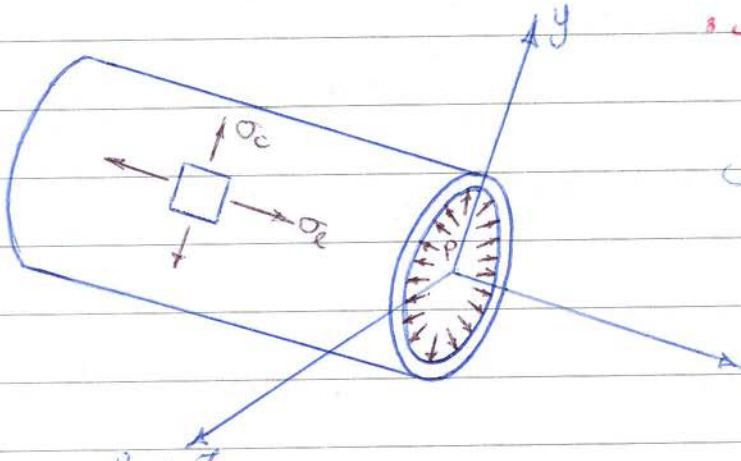
فصل پنجم:
پوسته‌ها و مخازن جدار نازک تحت فشار

پوسته چیست؟

پوسته‌ها عناصری سازه‌ای هستند که از یک صفحه‌ی سطحی با انحنای یک یا دو بعدی تشکیل شده‌اند. ضخامت آن‌ها نسبت به سایر ابعاد آن‌ها بسیار کم است.

اگر r شعاع داخلی و t ضخامت سازه باشد، با شرط $\frac{r}{t} \geq 10$ سازه را جدار نازک در نظر می‌گیریم.

استوانه‌ای جدار نازک:

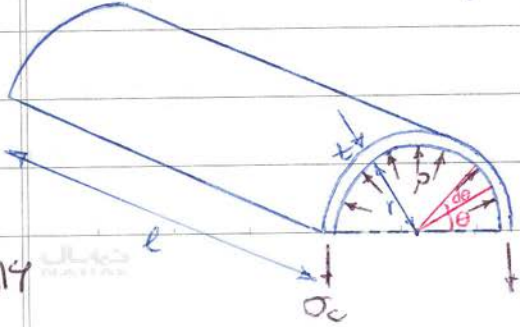


استوانه‌ای است و داخلش فشار وجود دارد.

σ_c → circular حلقوی

σ_l → longitudinal طولی

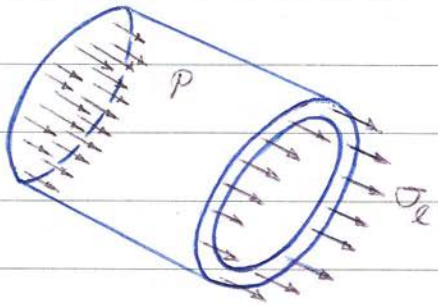
حجم بارگذاری متقارن است و استوانه نیز نهایت محور تقارن دارد. پس از وسط المان یک برش عمود بر محور تقارن رسم کنیم باید در دو طرف هم جهت باشد که با هم خنثی شوند پس $\tau = 0$



$$\Sigma F_y = 0$$

$$\rightarrow 2\sigma_c \cdot l \cdot t = 2r \cdot l \cdot p$$

$$\sigma_c = \frac{P.r}{t}$$ ← تنش طولی



$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow$$

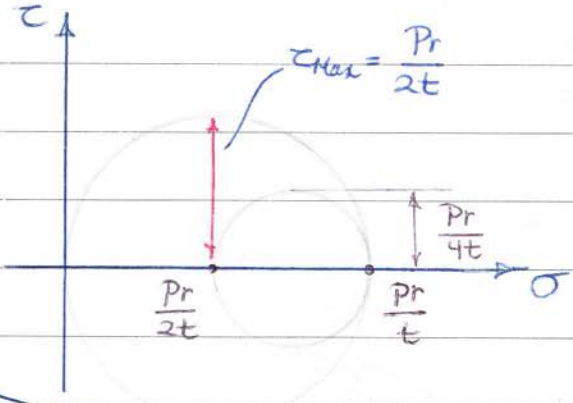
$$P.\pi r^2 = \sigma_\ell . 2\pi r.t$$

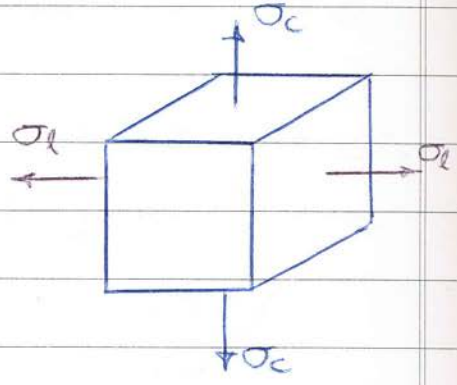
$$\sigma_\ell = \frac{P.r}{2t}$$ ← تنش محیطی

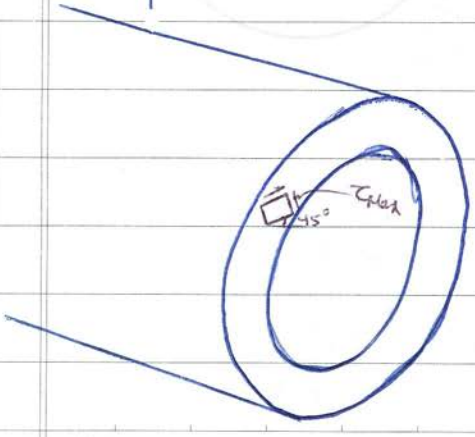
پس هوپ کی در طولی (بیچ کی در بیچ لی) باید محکم تر از هوپ کی محیطی باشد.

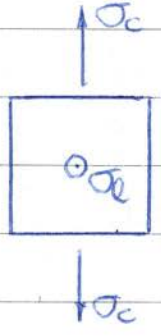
$$\sigma_c = 2\sigma_\ell$$

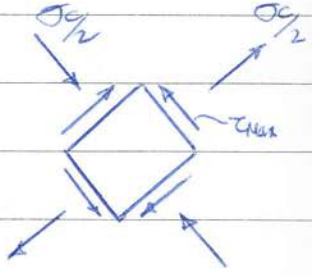
محاسبه تنش کی برشی در راستای



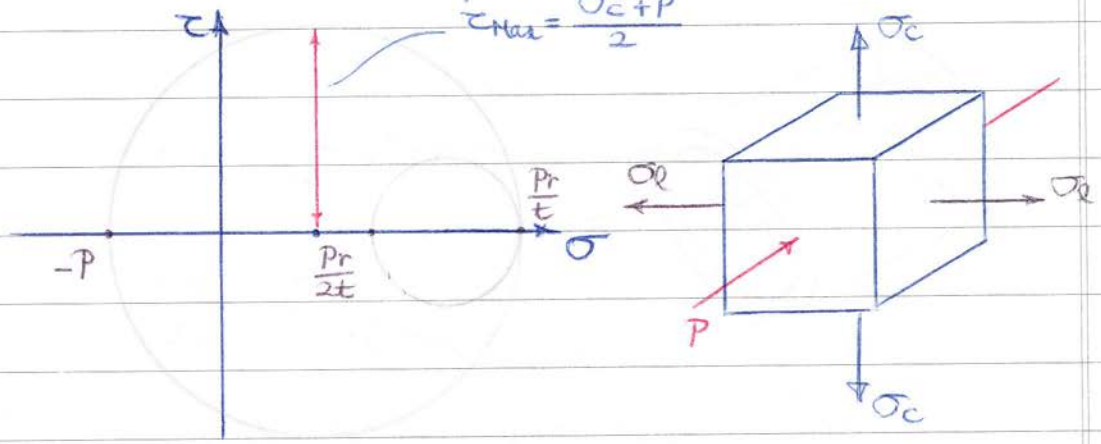








المانی که از سطح جداره ی داخلی تحت تنش شعاعی $\sigma_3 = -P$ قرار دارد.

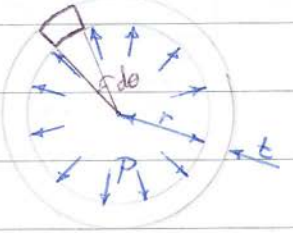


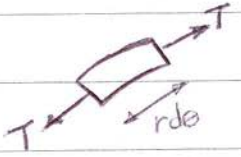
$$\tau_{Max} = \frac{\sigma_c + P}{2} = \frac{P.r}{2t} + \frac{P}{2} \rightarrow \tau_{Max} = \frac{P.r}{2t}\left(1 + \frac{t}{r}\right)$$

$$\frac{t}{r} \simeq 0 \rightarrow \tau_{Max} = \frac{P.r}{2t}$$

مثال: لوله ی استوانه ای جداره نازکی به شعاع داخلی r و ضخامت t با دو انتهای باز تحت فشار داخلی P قرار دارد. تغییرات در شعاع لوله را در این حالت بیابید.

(طول استوانه واحد)





$$d\delta = \frac{T.r.d\theta}{\epsilon.A} = \frac{\frac{P.r}{t}.t \times 1 \times r d\theta}{\epsilon(t \times 1)} = \frac{P.r^2.d\theta}{\epsilon.t}$$

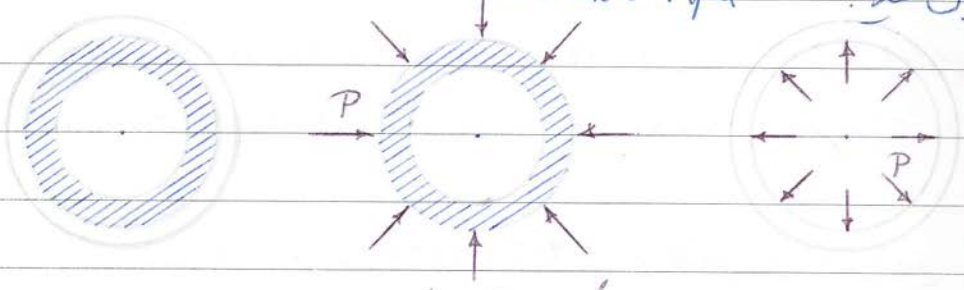
$$\rightarrow \text{تغییر شعاع} = \delta = \oint d\delta = \int_0^{2\pi} \frac{P.r^2.d\theta}{\epsilon t} = \frac{Pr^2(2\pi)}{\epsilon.t}$$

$$\delta_{\text{شعاعی}} = \frac{P.r^2}{E.t} \rightarrow \varepsilon_{\text{شعاعی}} = \frac{\delta}{r} = \frac{P.r}{E.t}$$

$$\begin{cases} \sigma_c = \dfrac{P.r}{t} \\ \varepsilon_{\text{شعاعی}} = \dfrac{P.r}{Et} \end{cases}$$

باشد، با بارگذاری دو طرف استوانه

مثال: مخزن یک تست فشاری از دو استوانه هم محور ساخته شده است. محیط استوانه داخلی بزرگ بوده و در ضخامت های بعدی کوچک، ابتدا استوانه خارجی حرارت داده شده و روی استوانه داخلی ها داده شده است. اگر هر دو استوانه از فولاد و قطر متوسط مجموعه‌شان 100mm باشد، تنش‌های محیطی ایجاد شده در هر یک از استوانه‌ها پس از سرد شدن استوانه خارجی چقدر است؟ ضخامت اولیه دیواره استوانه داخلی 2.5mm و خارجی 2mm است. اضافه طول اولیه قطر استوانه داخلی را 0.25mm فرض کنید. $E = 2\times10^5$ Mpa



یک راه حل نامعین است پس رابطه‌ای از تغییر شکل‌ها می‌خواهیم.

$$\Delta r_i + \Delta r_e = \frac{0.25}{2}$$

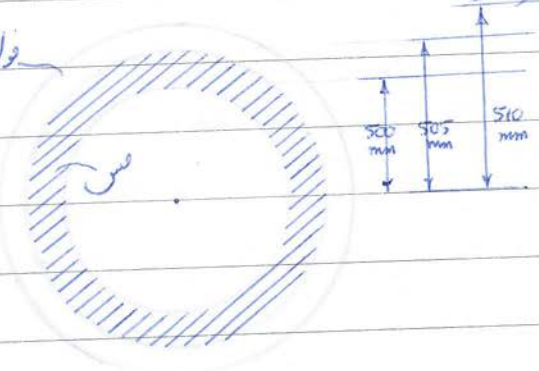
$$\rightarrow \left(\frac{Pr^2}{Et}\right)_i + \left(\frac{Pr^2}{Et}\right)_e = 0.125$$

$$\rightarrow P = 11.1 \text{ Mpa}$$

$$\sigma_t \text{ داخلی} = \frac{P.r}{t} = 222\ Mpa$$

$$\sigma_t \text{ خارجی} = \frac{P.r}{t} = 277\ Mpa$$

مثال: استوانه فولادی جدارنازک تحت فشار داخلی جدارنازک قرار دارد. اگر دما و فشار مجموعه $30^\circ C$ اضافه شود تنش‌های محیطی ایجاد شده در جوشکاری از استوانه را بدست آورید. از تاثیرات تنش‌های ناشی از انتهای استوانه صرفنظر کنید.



مس: $\alpha = 18 \times 10^{-6}\ 1/^\circ C$, $E = 9 \times 10^4\ Mpa$

فولاد: $\alpha = 12 \times 10^{-6}\ 1/^\circ C$, $E = 2 \times 10^5\ Mpa$

$$\text{تغییر محیط استوانه مسی} = \alpha . l . \Delta T = \alpha \times 2\pi (502.5) \Delta T = 1.705\ mm$$

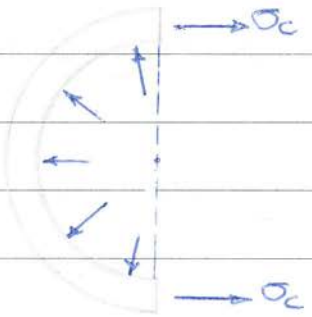
$$\text{تغییر محیط استوانه فولادی} = \alpha . l . \Delta T = \alpha \times 2\pi (507.5) \Delta T = 1.148\ mm$$

$$\text{اختلاف بین تغییر شعاع} = \frac{1.705 - 1.148}{2\pi} = 0.089\ mm$$

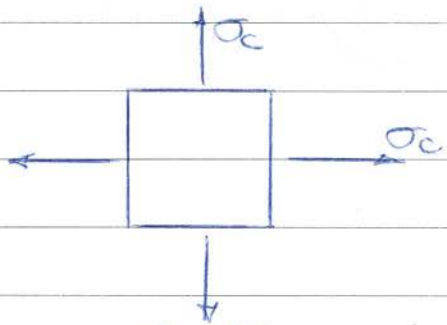
$$(\delta r)_{st} + (\delta r)_{cu} = 0.089\ mm$$

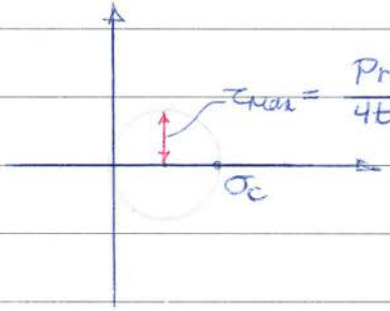
$$\rightarrow P = 0.109\ Mpa \rightarrow \begin{cases} \sigma_s = 11.06\ Mpa & \text{کششی} \\ \sigma_{cu} = 10.95\ Mpa & \text{فشاری} \end{cases}$$

کره تحت فشار داخلی



$$\sigma_c = \frac{P.r}{2t}$$





$$\tau_{max} = \frac{Pr}{4t}$$

دایره مور المان دو بعدی نقطه است

اما برای المان سه بعدی می توان

دایره موری رسم نمود که از τ_{max}

تشکیل شده است.

در رئالیسم سوسیالیستی چشم‌انداز و الگوی در زندگی شخص دیده شده است.

محوری رفتاری و ویژه از عمر نیست، بلکه بخشی از ذهن است. پدیده‌ای برخوردار از اراده و گزینش از تخیل است.