به نام خدا

« قدم‌زنی تصادفی »
$(\boldsymbol{random\ walk})$

نویسنده: شایان عزیزی

11 th IOAA Team
I.R. IRAN

۱۳۹۶

بیان مسئله

ذره(دقیقاً یک نقطه)ای منطبق بر مبدأ یک دستگاه مختصات دل‌خواه در یک فضای k-بعدی[1] مفروض است. این ذره حرکتی مرحله به مرحله را تجربه خواهد کرد؛ به این‌صورت که با شروع از مبدأ در هر مرحله در جهتی دلخواه و به اندازه l حرکت خواهد کرد. حرکت ذره پس از N مرحله در مکان $\vec{r}_N$ پایان می‌پذیرد. $|\vec{r}_N|$ را با d نمایش می‌دهیم. می‌خواهیم نشان دهیم به‌صورت آماری[2] :
.$d^2 = Nl^2$

از این پس در این متن به رابطه بالا "رابطه‌ی قدم‌زنی تصادفی" اطلاق می‌شود.
البته درستی قضیه یک شرط دیگر هم دارد و آن این‌که هیچ‌کدام از k جهت در مسئله‌ی ما ارجح نباشد و ذره هنگام جابه‌جایی در هر کدام از جهاتی که در آن حرکت می‌کند به میزان یکسان حرکت کند.
پس از در نظر گرفتن این فرض مثلاً در بیان دوبعدی قضیه اگر ذره بخواهد در مرحله‌ای از حرکت، در هر دو جهت فضا حرکت کند(ممکن است در تنها یک جهت حرکت کند)، به‌اندازه $\frac{l}{\sqrt{2}}$ در یک جهت و $\frac{l}{\sqrt{2}}$ در جهت دیگر حرکت می‌کند. و به همین ترتیب اگر در فضای سه‌بعدی، ذره در مرحله‌ای بخواهد در هر سه جهت حرکت کند(ممکن است در مرحله‌ای در یک یا دو جهت حرکت کند)، به اندازه $\frac{l}{\sqrt{3}}$ در هر کدام از سه جهت حرکت می‌کند[3].
از این پس صرفاً برای آسودگی بیان این را "فرض همسانگردی" می‌گوییم.

***

رابطه‌ی قدم زنی تصادفی برای درک طبیعت!

معمولاً دانش‌آموزانی که برای شرکت در آزمون المپیاد نجوم و اخترفیزیک آماده می‌شوند با رابطه قدم‌زنی تصادفی آشنایی پیدا می‌کنند. می‌دانیم که همین رابطه حرکت فوتون‌ها را در خورشید پس از تولید در مرکز توصیف می‌کند. فوتون‌ها زمان بسیار زیادی پس از تولیدشان در مرکز در سفرند تا راهی به بیرون خورشید بیابند. یک فوتون خورشیدی پس از حرکت به‌اندازه متوسط l درون خورشید، توسط یک ذره مادی جذب و پس از زمان بسیار کوتاهی(آن‌قدر کوچک که در برابر l/c بتوان به‌راحتی از آن صرف‌نظر کرد)در جهتی نامعلوم بازگسیل می‌شود(یا چیزی شبیه به این!).

***

باید اثبات قضیه را شروع کنیم!

حالت یک‌بعدی مسئله را در نظر بگیرید؛ پیشامدهای آن‌که ذره به جلو یا عقب حرکت کند دارای احتمال‌های برابر $\frac{1}{2}$ هستند؛ پس به‌طور آماری مجذور اندازه بردار مکان ذره در یک مرحله‌ای از حرکت(r_i^2)برحسب مجذور اندازه بردار مکانش در مرحله‌ی قبلی حرکت(r_{i-1}^2) برابر با $\frac{1}{2}(r_{i-1}-l)^2+\frac{1}{2}(r_{i-1}+l)^2=r_{i-1}^2+l^2$ خواهد بود؛ پس مجذور اندازه بردار مکان ذره در هر مرحله حرکت به‌طور آماری با مقدار l^2 جمع می‌شود. در واقع کار با مجذور اندازه‌ی بردار مکان امکان می‌دهد رابطه چنین صریح و ساده باشد.
با شروع از $i=1$ تا $i=N$ داریم $r_N^2=r_0^2+Nl^2$ با $r_0=0$، $r_N^2=Nl^2$.

شاید همین رابطه را برای یک ستاره در یک فضای سه‌بعدی دیده باشید.

ممکن است اینجا سؤالی برای شما پیش بیاید.
چرا چه در فضای سه‌بعدی و چه یک‌بعدی $N=\frac{d^2}{l^2}$ ؟ حال آن‌که به‌طور شهودی در سه بعد ذره نسبت به یک بعد آزادی حرکت

۱-قصد نداریم مفهوم بعد فضا را عمیقاً بررسی کنیم. منظور فضایی است که مختصات نقاط در آن با یک k-تایی مرتب داده می‌شود؛ فضایی که k بردار یکه مستقل خطی دارد. مجذور یک بردار هم از جمع مجذورات مولفه‌های مختلف به‌دست می‌آید.

۲-به طور میانگین. در واقع می‌خواهیم نشان دهیم که $N=\frac{E(d^2)}{l^2}=E\left(\frac{d^2}{l^2}\right)$. $E(\frac{d^2}{l^2})$ مقدار انتظاری $\frac{d^2}{l^2}$ یا همان امید ریاضی آن است.

۳-درحقیقت این‌جا نیز منظور آن است که مقدار انتظاری جابه‌جایی در هر جهت در موارد ذکر شده $\frac{l}{\sqrt{2}}$و$\frac{l}{\sqrt{3}}$ می‌باشد.

بیشتری دارد و راحت‌تر ممکن است ماجراجویی کند و از هدف دور شود ولی در یک بعد ذره تنها می‌تواند عقب و جلو شود.
به‌نظر می‌رسد تعداد مراحلی که لازم است برای حرکت سه‌بعدی طی شود تا ذره به فاصله‌ی خاصی از مبدا برسد باید بیش از حرکت یک-بعدی باشد نه برابر با آن.
برای روشن‌تر شدن مسئله سعی کردم در حالت دوبعدی قضیه را اثبات کنم. این‌کار به‌راحتی انجام شد(اگر دوست دارید با کمک گرفتن از اثبات یک‌بعدی در بالا و با استفاده از فرض همسان‌گردی سعی کنید آن‌را اثبات کنید تا برای اثبات حالت کلی (k-بعدی) که در زیر می‌آید آماده‌تر باشید.)
بنابراین به این فکر افتادم که احتمالا قضیه مستقل از این‌که فضا چندبعدی باشد درست است(همان که در بالا به‌عنوان مسئله قدم‌زنی تصادفی معرفی شد). درستی این قضیه را به‌شکلی که در زیر می‌آورم نشان دادم؛ در واقع ظاهراً درستی رابطه‌ی قدم‌زنی تصادفی چندان هم چیز عجیبی نیست و با توجه به اثبات ساده‌مان باید خاصیتی بدیهی ناشی از تعریف مجذور یک بردار باشد.

در یک فضای k-بعدی ذره ممکن است در هر مرحله به‌صورت‌های زیر حرکت کند؛ احتمال هر کدام از این پیشامدها در مکان انتظاری ذره تأثیر خواهد داشت.

1) ذره تنها در یک جهت حرکت کند.
2) ذره تنها در دو جهت حرکت کند.

.

.

.

k) ذره در هر k جهت حرکت کند.
نکته قابل توجه این‌که وقتی ذره در r جهت حرکت می‌کند، بنابه فرض همسانگردی میزان جابه‌جایی‌اش در هر کدام از r جهت برابر با $\frac{l}{\sqrt{r}}$ می‌باشد.
وقتی‌که ذره بخواهد در r جهت از k جهت حرکت کند، به $\binom{k}{r}$ روش می‌تواند این r جهت را انتخاب کند.
پس تعداد کل حالات حرکت ذره عبارت خواهد بود از:

$$\binom{k}{1}+\binom{k}{2}+\binom{k}{3}+\cdots+\binom{k}{k}$$

دقت کنید که جمله‌ی $\binom{k}{0}$ را نداریم زیرا که ذره نمی‌تواند در یک مرحله ساکن باشد و باید حداقل در یک جهت حرکت کند.
عبارت بالا همان تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه kعضوی منهای یک است(که یک مربوط به سهم تهی، همان زیرمجموعه‌ی صفر عضوی است.) و همان بسط $(1+1)^k-1$.
پس؛

$$\binom{k}{1}+\binom{k}{2}+\binom{k}{3}+\cdots+\binom{k}{k}=2^k-1$$

حال مقدار مولفه‌ی mام مکان ذره پس از i مرحله حرکت را با $e_{m,i}$ نشان می‌دهیم.
از این‌جا به بعد از شمارنده‌ی j در مشخص کردن تعداد جهت‌های حرکت ذره در هر حالت از حرکتش در هر مرحله کمک می‌گیریم.
توجه داریم که تعداد حالت‌هایی که ذره در $k-j$ جهت حرکت کند و مختصه‌ی e_m آن تغییر نکند(حالاتی که جهت یکه‌ی mام جزو هیچ‌کدام از آن $k-j$ جهت جابه‌جایی نباشد)، برابر $\binom{k-1}{k-j}$ می‌باشد،
بنابراین از اصل متمم؛
تعداد حالتهایی که ذره در $k-j$ جهت حرکت کند و مختصه‌ی e_m آن تغییر بکند برابر $\binom{k}{k-j}-\binom{k-1}{k-j}$ می‌باشد.
پس احتمال آن‌که e_m در حرکتی که شامل جابه‌جایی در $k-j$ جهت است تغییر بکند، $\frac{\binom{k}{k-j}-\binom{k-1}{k-j}}{2^k-1}$ و احتمال آن‌که تغییر نکند، $\frac{\binom{k-1}{k-j}}{2^k-1}$ می‌باشد.
در شمارش خود j را از 1 شروع می‌کنیم(و تا $k-1$ ادامه می‌دهیم؛ چون ذره به‌هرحال باید در حداقل یک جهت حرکت کند) و حالتی

را که ذره در هر k جهت حرکت کند جدا به‌حساب خواهیم آورد؛ دقت کنید که در این حالت هیچ امکانی وجود ندارد که e_m تغییر نکند زیرا باید ذره در همه جهات حرکت کند(به‌خاطر همین آن‌را جدا به‌حساب آورده‌ایم).
اشاره می‌کنم که استفاده از $k-j$ را به‌این خاطر انجام دادم که شهود بهتری می‌داد و در جمع هم که در پایین می‌آید، روی j و از 1 تا $k-1$ جمع بسته‌ایم.
پس با توجه به گفته‌های قبلی برای مرحله $i+1$، $e_{m,i+1}$ برابر خواهد بود با (شاید نگاه کردن به اثبات یک‌بعدی کمک‌کننده باشد):

$$e_{m,i+1}^2 = \underbrace{\frac{1}{2^k-1}\left[\frac{1}{2}\left(e_{m,i}-\frac{l}{\sqrt{k}}\right)^2+\frac{1}{2}\left(e_{m,i}+\frac{l}{\sqrt{k}}\right)^2\right]}_{A}$$

$$+\frac{1}{2^k-1}\sum_{j=1}^{k-1}\left\{\left[\binom{k}{k-j}-\binom{k-1}{k-j}\right]\left[\frac{1}{2}\left(e_{m,i}-\frac{l}{\sqrt{k-j}}\right)^2+\frac{1}{2}\left(e_{m,i}+\frac{l}{\sqrt{k-j}}\right)^2\right]+\underbrace{\binom{k-1}{k-j}e_{m,i}^2}_{B}\right\}$$

که جمله‌ی A مربوط به حالت حرکت در همه جهات و جمله‌ی B مربوط به حالتی است که $e_{m,i}$ تغییری نکند. توجه کنید که وقتی ذره مثلاً در $k-j$ جهت حرکت می‌کند، ممکن است mام رو به جلو یا رو به عقب حرکت کند که جمله‌ی $\frac{1}{2}\left(e_{m,i}-\frac{l}{\sqrt{k-j}}\right)^2+\frac{1}{2}\left(e_{m,i}+\frac{l}{\sqrt{k-j}}\right)^2$ این را نشان می‌دهد(شبیه همان اثبات یک‌بعدی).
با ساده کردن عبارت بالا:

$$e_{m,i+1}^2 = \frac{1}{2^{k}-1}\left(e_{m,i}^2+\frac{l^2}{k}\right)+\frac{1}{2^k-1}\sum_{j=1}^{k-1}\left[\binom{k}{k-j}\left(e_{m,i}^2+\frac{l^2}{k-j}\right)-\frac{\binom{k-1}{k-j}l^2}{k-j}\right]$$

$$=\frac{1}{2^k-1}\left(e_{m,i}^2+\frac{l^2}{k}\right)+\frac{1}{2^k-1}\sum_{j=1}^{k-1}\binom{k}{k-j}e_{m,i}^2+\frac{1}{2^k-1}\sum_{j=1}^{k-1}\left[\binom{k}{k-j}-\binom{k-1}{k-j}\right]\frac{l^2}{k-j}$$

داریم:

$$\binom{k}{k-j}-\binom{k-1}{k-j}=\frac{k!}{(k-j)!\,j!}-\frac{(k-1)!}{(k-j)!(j-1)!}=\frac{(k-1)!}{(k-j)!j!}(k-j)$$

پس با جای‌گذاری در عبارت آخر:

$$e_{m,i+1}^2=\frac{1}{2^k-1}\left(e_{m,i}^2+\frac{l^2}{k}\right)+\frac{1}{2^k-1}\sum_{j=1}^{k-1}\binom{k}{k-j}e_{m,i}^2+\frac{l^2}{2^k-1}\sum_{j=1}^{k-1}\frac{(k-1)!}{(k-j)!j!}$$

$$=\frac{1}{2^k-1}\left(e_{m,i}^2+\frac{l^2}{k}\right)+\frac{1}{2^k-1}e_{m,i}^2\left(2^k-2\right)+\frac{l^2}{2^k-1}\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k-1}\frac{k!}{(k-j)!\,j!}$$

$$=\frac{1}{2^k-1}\left(e_{m,i}^2+\frac{l^2}{k}\right)+\frac{1}{2^k-1}e_{m,i}^2(2^k-1)-\frac{1}{2^k-1}e_{m,i}^2+\frac{l^2}{2^k-1}\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k-1}\binom{k}{j}$$

$$=\frac{1}{2^k-1}\frac{l^2}{k}+e_{m,i}^2+\frac{l^2}{2^k-1}\frac{1}{k}\left(2^k-1-1\right)$$

$$=\ e_{m,i}^2+\frac{l^2}{k}$$

برای محاسبه‌ی $|\vec{r}_{i+1}|^2$ باید عبارت بالا را برای تمام k جهت جمع زد:

$$|\vec{r}_{i+1}|^2 = \sum_{m=1}^{k} e_{m,i+1}^2 = \sum_{m=1}^{k} (e_{m,i}^2 + \frac{l^2}{k}) = k\frac{l^2}{k} + \sum_{m=1}^{k} e_{m,i}^2 = |\vec{r}_i|^2 + l^2$$

با شروع از $i = 0$ تا $i = N - 1$ و با شروع از مبدأ($|\vec{r}_0|^2 = 0$) و با نام‌گذاری $d^2 := |\vec{r}_N|^2$،

$$d^2 = Nl^2$$

که همان نتیجه مطلوب ماست.

***

بررسی مجدد متناقض‌نمای حل نشده

اما به پرسشی که پیش‌تر مطرح کردیم بازمی‌گردیم؛

چرا تعداد مراحل لازم برای رسیدن به فاصله d برای همه‌ی فضاها دقیقاً برابر است و با افزایش بعد افزایش نمی‌یابد؟

پاسخ پرسش این است که ما به‌نظر شهود نادرستی را دنبال می‌کنیم، پاسخ به‌همین سادگی است که بگوییم یک بردار با اندازه و جهتش مشخص می‌شود، یعنی علاوه بر توجه به اندازه بردار مکان در انتهای قدم‌زنی باید به جهت‌گیری این بردار هم توجه کرد.

فرض کنید ذره تنها بتواند عقب و جلو شود(شهودی از مسئله یک‌بعدی)، چقدر احتمال دارد که ذره در نهایت از سمت مثبت محور حرکت سردربیاورد؟ $\frac{1}{2}$.

حال اگر یک ستاره را درنظر بگیریم، چقدر احتمال دارد که ذره از یک جهت خاص از ستاره خارج شود؟

درواقع با افزایش تعداد ابعاد فضا، آشفتگی به جهت‌گیری نهایی ذره منتقل می‌شود و تأثیری بر فاصله آماری ذره تا مرکز بعد از تعداد مرحله مشخص ندارد.

البته این به‌خودی‌خود چندان هم بدیهی نیست که افزایش آزادی حرکت ذره با افزایش تعداد بعد تنها روی جهت‌گیری ذره تأثیر بگذارد و خارج شدن ذره را سخت‌تر نکند.

اگر هدف تنها خارج شدن ذره باشد نتیجه مسئله‌ی یک‌بعدی و دوبعدی و سه‌بعدی و ... کاملاً یکسان است.

افزایش تعداد ابعاد تنها پیش‌بینی جهت خروج ذره را برای ما سخت‌تر می‌کند؛ اما مدت زمان خروج ذره برای فضاهای با بعدهای مختلف یکسان خواهد بود!

***

تمرین

یک)حرکت قدم‌زنی تصادفی را در دو بعد در نظر بگیرید. ذره‌ای با شروع از مبدأ مختصات پس از N برخورد در فاصله‌ی d از مبدأ قرار می‌گیرد. طول همه‌ی بردارهای جابه‌جایی(بردارهای واصل بین نقاط برخورد) برابر l می‌باشد و جهت‌گیری هرکدام از آن‌ها از توزیع یکنواخت ($uniform$) پیروی می‌کند.

الف) ابتدا سعی داریم برنامه‌ای بنویسیم که این حرکت را شبیه‌سازی کند. می‌توانیم به‌سادگی از نرم‌افزار $MATLAB$ استفاده کنیم.(درصورتی‌که به کارهایی نظیر ویژوآل کردن حرکت قدم‌زنی تصادفی علاقه داشته باشید استفاده از متلب کافی و کمک‌کننده خواهد بود) برای ایجاد تابع توزیع و اعداد تصادفی در $MATLAB$ در قسمت $Help$ ، $makedist$ و $random$ را جست‌وجو کنید.

می‌خواهیم n بار حرکت را اجرا کنیم و خروجی‌های $r^2 := d^2/l^2$ را ذخیره کنیم. ضمن این‌که همین کار را هم m بار انجام می‌دهیم؛ یعنی بخشی از خروجی برنامه‌ی شما یک آرایه‌ی $n \times m$ است که هر ستون آن حاوی خروجی‌های هر یک از m آزمایش می‌باشد. کمیت دیگری که نیاز داریم زاویه‌ی بردار مکان نهایی ذره با محور ایکس (θ) در هر بار اجرای حرکت است که آن را هم در یک آرایه $n \times m$ ذخیره می‌کنیم.

برنامه را برای مقادیر دلخواه آرگومان (n, m, l, N) مثلاً $n = 50$، $m = 25$، $l = 1$ و $N = 100$ اجرا کنید.
پس از آن‌که برنامه اجرا شد خروجی‌ها را به نرم افزار $EXCEL$ منتقل کنید. ماتریس مربوط به r^2 ها را در یک کاربرگ و ماتریس مربوط به θ ها را در کاربرگی دیگر قرار دهید.

ب)مقادیر $r = \frac{d}{l}$ را در یک کاربرگ جدید قرار دهید.

پ)با استفاده از همه‌ی داده‌ها توزیع $r = \frac{d}{l}$ را رسم کنید(می‌توانید از $histogram$ استفاده کنید.)

ت)میانگین و انحراف معیار ماتریس مربوط به r را محاسبه کنید.

ث) با استفاده از کل داده‌های ماتریس r^2 میانگین و انحراف معیار r^2 ها را به‌دست آورید.

ج)با استفاده از کل داده‌های ماتریس r^2 توزیع r^2 را رسم کنید.

چ)برای هر آزمایش(ستون)، میانگین و انحراف معیار r^2 ها را رسم کنید.

ح)حال میانگین و انحراف معیار m داده‌ی مربوط به میانگین در بخش قبل و m داده‌ی مربوط به انحراف معیار در بخش قبل را محاسبه کنید.

خ)توزیع جهت‌گیری بردارهای جابه‌جایی که در توضیحات ابتدای سؤال معرفی شد $uniform$ بود.انتظار دارید توزیع θ چگونه باشد؟ برای این‌که شهود دقیق‌تری داشته باشید، با توجه به این حقیقت که توزیع جمع دو متغیر که از توزیع یک‌نواخت پیروی می‌کنند، یک-نواخت است، نشان دهید که اگر جهت‌گیری‌های دو بردار که اندازه برابر دارند، یک‌نواخت باشد، جهت‌گیری حاصل جمع آن‌ها هم یک-نواخت است؛ سپس سعی کنید برای حدس‌تان از این راه دلیلی شهودی پیدا کنید.

اثبات می‌شود که r برای فضای دوبعدی از توزیع رایلی به‌صورت زیر پیروی می‌کند.

$$PDF(r): f(r) = \frac{2r}{N} e^{-\frac{r^2}{N}}$$

د)نشان دهید تابع توزیع بالا نسبت به 1 بهنجار است.

ذ)تابع بالا را رسم و با نتیجه‌ی قسمت پ) مقایسه کنید.

ر) میانگین و انحراف معیار r را با توجه به توزیع داده شده به‌دست آورید و با قسمت ت) مقایسه کنید.

ز)تابع توزیع r^2 را به‌دست آورید.

ژ)تابع توزیع به‌دست آمده در بخش قبل را رسم کرده و با بخش ج) مقایسه کنید.

س) میانگین و انحراف معیار r^2 را محاسبه و با نتیجه‌ی بخش ث) مقایسه کنید.

ش)تابع توزیع θ را با استفاده از ماتریسی که ذخیره کرده بودید رسم کنید و نتیجه را با بخش خ) مقایسه کنید.

دو) (کتاب $The\ physical\ universe$ نوشته‌ی $Frank\ Shu$ با تغییر جزیی)
برای خورشید با شعاع $6.96 \times 10^8\ m$ و $l \sim 0.5cm$ مدت زمانی که طول می‌کشد فوتون تولید شده در مرکز از خورشید خارج شود را تخمین بزنید. دمای متوسط خورشید را از قضیه‌ی ویریال تخمین بزنید(خورشید را تماما هیدروژنی و با جرم $1.99 \times 10^{30} kg$ فرض کنید).حال با استفاده از درخشندگی خورشید $L = 3.85 \times 10^{26}\ w$ و زمانی که محاسبه کردید، دمای متوسط خورشید را تخمین بزنید(راهنمایی: به این فکر کنید که چه‌قدر انرژی تابشی درون خورشید با توجه به تعریف زمانی که محاسبه کرده‌اید ذخیره شده‌است.) و با دمای متوسط ویریالی مقایسه نمایید.

سربلند باشید!
shayan6azizi@gmail.com