جزوه ماشین‌های الکتریکی ۲

بهروز آدینه

فهرست مطالب

۲ اصول تبدیل انرژی الکترومکانیکی ۳

۲-۱ مقدمه ۳

۲-۲ انرژی ذخیره شده در میدان مغناطیسی ۳

۲-۳ پخش انرژی ۷

۲-۴ انرژی میدان مغناطیسی ۱۲

۲-۵ شبه انرژی ۱۶

۲-۶ ماشین‌های الکتریکی دوار (سیستم‌های دو تحریکه) ۲۰

مراجع ۲۶

فصل ۲

اصول تبدیل انرژی الکترومکانیکی

۲-۱ مقدمه

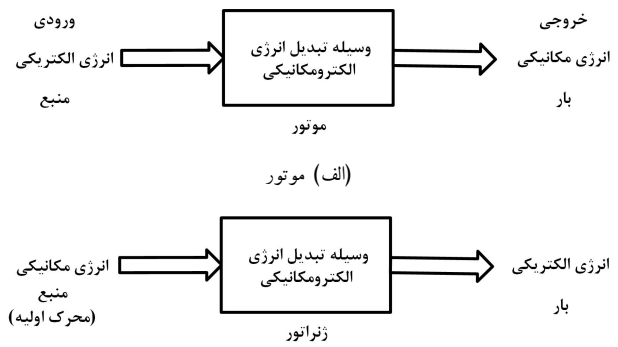
در این فصل و فصول بعدی تمرکز ما برروی مبدل‌های انرژی الکترومکانیکی [۲] است که مهم‌ترین این مبدل‌ها ژنراتورها [۳] و موتورها [۴] می‌باشند. البته مبدل‌های انرژی الکترومکانیکی دیگری از قبیل رله‌ها [۵] نیز وجود دارند که البته در این فصل قدری به مکانیسم کار آن‌ها اشاره می‌شود. در موتورهای الکتریکی اعم از جریان مستقیم (DC) یا جریان متناوب (AC) انرژی الکتریکی به انرژی مکانیکی تبدیل می‌شود. در ژنراتورهای الکتریکی اعم از جریان مستقیم (DC) یا جریان متناوب (AC) انرژی مکانیکی به انرژی الکتریکی تبدیل می‌شود. در موتورها و ژنراتورها حرکت قسمت متحرک دورانی، اما در سایر مبدل‌های انرژی الکترومکانیکی حرکت قسمت متحرک انتقالی یا خطی است. شکل‌های ۲-۱(الف) و ۲-۱(ب) نمودار جعبه‌ای [۶] موتورها و ژنراتورها را در حالت کلی نشان می‌دهند [۲].

۲-۲ انرژی ذخیره شده در میدان مغناطیسی

قانون فاراده را می‌توان به صورت زیر نوشت [۲]:

$$e = N\frac{d\phi}{dt} = \frac{(Li)}{dt} \qquad (۲-۱)$$

[2] Electro mechanical energy conversion devices
[3] Generators
[4] Motors
[5] Relays
[6] Block Diagram



(الف) موتور

(ب) ژنراتور

شکل ۲-۱: دیاگرام جعبه‌ای مبدل‌های انرژی الکترومکانیکی

در مبدل‌های انرژی الکترومکانیکی مقاومت مغناطیسی (رلوکتانس) تابعی از زمان بوده و لذا L تابعی از زمان است. پس [۲]:

$$e = L\frac{di}{dt} + i\frac{dL}{dt} \tag{۲-۲}$$

توجه کنید اگر L ثابت باشد، رابطه (۲-۲) به همان رابطه معروف درس مدارهای الکتریکی مبدل می‌شود [۲].

توان و انرژی در مدارهای مغناطیسی جهت ارزیابی عملکرد دستگاه‌های مبدل انرژی الکترومکانیکی مورد بحث در این جزوه (موتورها و ژنراتورها) از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. توان لحظه‌ای[1] را اینچنین تعریف می‌کنیم:

$$p(t) = e(t)i(t) \tag{۲-۳}$$

یعنی توان ورودی به سیستم از حاصل‌ضرب ولتاژ دور سر پایانه‌ها و جریان عبوری از سیم‌پیچ حاصل می‌شود. با توجه به قانون فاراده داریم:

$$p(t) = i(t)\frac{d\lambda}{dt} \tag{۲-۴}$$

واحد توان، وات یا ژول بر ثانیه است. از طرفی باید دانست که توان نرخ تغییرات انرژی است، یعنی [۲]:

$$p(t) = \frac{dW}{dt} \tag{۲-۵}$$

[1] Instantaneous Power

با توجه به روابط (۲-۴) و (۲-۵) داریم [۲]:

$$dW = id\lambda \tag{۲-۶}$$

از طرفی با توجه به روابط قبل داریم [۲]:

$$dW = Nid\phi \tag{۲-۷}$$

از مطالب قبلی می‌دانیم [۲]: $\phi = BA$ $Ni = Hl$ پس رابطه (۲-۶) اینچنین می‌شود [۲]:

$$dW = (lA)HdB \tag{۲-۸}$$

روابط (۲-۶)، (۲-۷) و (۲-۸) سه رابطه اساسی برای انرژی طلب شده توسط سازه مغناطیسی را نشان می‌دهند و این سه رابطه به صورت ترسیمی در شکل ۲-۲ نشان داده شده‌اند و باید دانست [۲]:

۱- شکل ۲-۲(الف) رابطه (۲-۶) را نشان می‌دهد، مشروط بر آنکه مشخصه $\lambda - i$ در دسترس باشد.

۲- شکل ۲-۲(ج) رابطه (۲-۷) را نشان می‌دهد، بشرط آنکه مشخصه $\phi - F$ در دسترس باشد.

۳- شکل ۲-۲(ه) رابطه (۲-۸) را نشان می‌دهد. مشروط بر آنکه منحنی $B - H$ در دسترس باشد.

گیریم وضعیت سازه مغناطیسی بین زمان‌های t_1 و t_2 تغییر کند. تغییر انرژی وارده به سیستم به قرار زیر است:

$$\Delta W = W(t_2) - W(t_1) \tag{۲-۹}$$

از رابطه (۲-۶) داریم:

$$\Delta W = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} id\lambda \tag{۲-۱۰}$$

از رابطه (۲-۷) داریم:

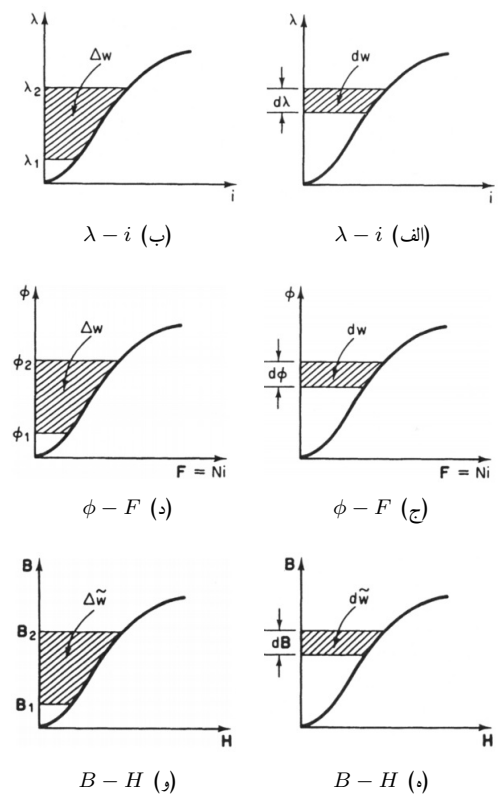
$$\Delta W = \int_{\phi_1}^{\phi_2} Nid\phi \tag{۲-۱۱}$$

از رابطه (۲-۸) داریم:

$$\Delta W = lA\int_{B_1}^{B_2} HdB \tag{۲-۱۲}$$

روابط (۲-۱۰) تا (۲-۱۲) به صورت ترسیمی در شکل‌های ۲-۲(ب)، ۲-۲(د) و ۲-۲(و) نشان داده شده‌اند. در اینجا متذکر می‌شویم که روابط مربوط به انرژی که در بالا ذکر شد کلی است و نیازی به خطی بودن مشخصه‌ها نیست. اگر مشخصه‌ها خطی باشند، می‌توان روابط دیگری بدست آورد. مثلا رابطه (۲-۱۰) را می‌توان به صورت زیر نوشت [۲]:

$$\Delta W = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{\lambda}{L} d\lambda = \frac{1}{2L}(\lambda_2^2 - \lambda_1^2) = \frac{1}{2}L(i_2^2 - i_1^2) \qquad (۲-۱۳)$$



شکل ۲-۲: نحوه محاسبه انرژی در سازه‌های مغناطیسی به روش ترسیمی

۲-۳ پخش انرژی

در این بخش برای شروع، بحث خود را با موتور شروع می‌کنیم که یک مبدل انرژی الکترومکانیکی است که در آن حرکت دورانی پدید می‌آید. حال ببینیم فرآیند تبدیل انرژی الکتریکی به مکانیکی در موتور چگونه است. شکل ۲-۳ نمودار پخش انرژی در موتورها را به صورت عام نشان می‌دهد. در اینجا متذکر می‌شویم که در تمامی مبدل‌های انرژی الکترومکانیکی اعم از آنکه حرکت دورانی پدید آید و یا حرکت انتقالی یا خطی حاصل گردد، سیم‌پیچ تحریک وجود دارد. البته در ژنراتورها نیز که عملکرد آن‌ها عکس عملکرد موتورهاست، وجود سیم‌پیچ تحریک الزامی است. در مبدل‌های انرژی با عبور جریان از این سیم‌پیچ میدان مغناطیسی درون هسته آهنی شکل می‌گیرد [۲].

با توجه به نمودار ۲-۳، گیریم در انرژی الکتریکی ورودی به موتور افزایش جزئی dW_e حاصل شود. با جاری شدن این انرژی به درون موتور سه مولفه زیر در رابطه با آن شکل می‌گیرد [۲]:

۱- dW_f که همان تغییر جزئی یا افزایش جزئی انرژی ذخیره شده در میدان مغناطیسی است و ما در رابطه با انرژی ذخیره شده در میدان مغناطیسی قبلا صحبت کردیم.

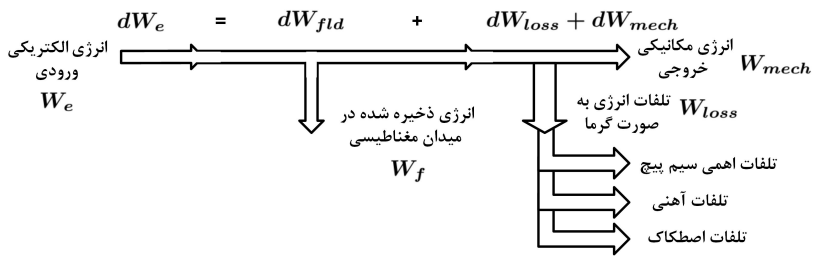
۲- dW_{loss} مولفه نشان‌دهنده افزایش جزئی یا تغییر جزئی تلفات درون دستگاه است.

۳- dW_{mech} سومین مولفه بوده که نشان‌دهنده افزایش جزئی یا تغییر جزئی انرژی مکانیکی بوده که در خروجی موتور ظاهر می‌شود.

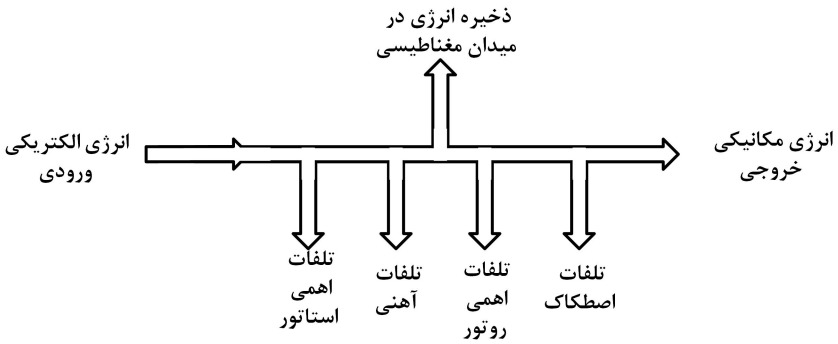
همانطور که در بالا ذکر شد، تمامی مبدل‌های انرژی الکترومکانیکی حاوی سیم‌پیچ و هسته بوده، پس قسمت اعظم dW_{mech} که به صورت گرما هدر می‌رود، شامل تلفات اهمی (مسی) و تلفات هسته است. باز می‌دانیم که تلفات هسته از دو تلف هیسترزیس و جریان گردابی حاصل می‌شود. اکثر موتورها همانطور که در فصول بعدی خواهیم دید که از دو قسمت ساکن به نام استاتور و روتور تشکیل شده‌اند. لذا در استاتور و روتور تلفات اهمی یا مسی (RI^2) وجود دارد. همچنین تلفات هسته در تمامی موتورها مشاهده می‌شود. تلفات هسته به خاطر وجود میدان مغناطیسی است که باعث بوجود آمدن تلفات هیسترزیس و جریان گردابی می‌گردد. بخش دیگری از dW_{mech} شامل اصطکاک و تهویه است که به تلفات مکانیکی موسوم است و در اثر چرخش روتور حاصل می‌گردد. پس در یک موتور می‌توان گفت [۲]:

$$\text{کل تلفات} = \text{تلفات اهمی استاتور} + \text{تلفات اهمی روتور} + \text{تلفات هسته} + \text{تلفات مکانیکی} \qquad (۲-۱۴)$$

شکل ۲-۳(ب) نمودار واقعی‌تری از پخش انرژی در یک موتور را نشان می‌دهد. گیریم انرژی الکتریکی از



(الف) حالت کلی



(ب) حالت واقعی

شکل ۲-۳: پخش انرژی در موتور

منبع وارد استاتور شود، ابتدا با تلفات اهمی یا مسی استاتور روبرو هستیم، سپس تلفات هسته را در پیش‌رو داریم و پس از آن با انرژی ذخیره شده در میدان مغناطیسی مواجه می‌شویم. حال فرض کنید از فاصله هوایی عبور کنیم و وارد قسمت دوار یا روتور شویم، در این صورت تلفات اهمی یا مسی روتور خود را ظاهر می‌کند. سپس با مساله اصطکاک و تهویه مواجه می‌گردیم تا بالاخره انرژی مکانیکی برروی محور موتور ظاهر می‌شود [۲].

با توجه به مطالب فوق به راحتی داریم [۲]:

$$dW_e = dW_{fld} + dW_{loss} + dW_{mech} \qquad (۱۵-۲)$$

باید دانست dW_{fld} همان dW_f است. حال برای سهولت محاسبات و تشریح موضوع دو دستگاه مبدل انرژی الکتریکی به مکانیکی را در نظر می‌گیریم. یکی از آن‌ها را موتور فرض کرده که انرژی الکتریکی وارد آن می‌شود و چرخش یا دوران حاصل می‌شود۲-۴(ب). دومین دستگاه را یک مبدل انرژی الکتریکی به مکانیکی فرض می‌کنیم که ورودی آن انرژی الکتریکی است و خروجی آن حرکت خطی است (مانند رله‌ها

در شکل ۲-۴(ج)). فعلا برای سهولت امر و سادگی تحلیل، هر دو سیستم را بدون تلفات[1] در نظر گرفته و لذا نمودار پخش انرژی در هر دو دستگاه مطابق شکل ۲-۴(الف) می‌باشد. همانطور که از شکل‌ها پیداست در موتورها با سرعت دوران ω و گشتاور[2] T روبرو هستیم و در مبدل دیگر که خروجی آن حرکت خطی دارد با تغییر مکان x و نیرو F مواجه می‌باشیم. در هردو وسیله نشان داده شده در شکل ۲-۴ توان ورودی برحسب ولتاژ اعمال شده و جریان وارده به دستگاه‌ها بقرار زیر است [۲]:

$$p(t) = e(t)i(t) \tag{۲-۱۶}$$

طبق قانون فاراده ولتاژ با شار λ اینچنین مرتبط می‌شود [۲]:

$$e(t) = \frac{d\lambda}{dt} \tag{۲-۱۷}$$

پس:

$$p(t)dt = i(t)d\lambda \tag{۲-۱۸}$$

طرف سمت چپ رابطه اخیر از جنس انرژی است. پس:

$$dW_e = id\lambda \tag{۲-۱۹}$$

چون از تلفات صرفنظر کردیم، با توجه به شکل ۲-۴ داریم [۲]:

$$dW_e = dW_{fld} + dW_{mech} \tag{۲-۲۰}$$

در سیستمی که حرکت انتقالی یا خطی داریم می‌توان چنین گفت:

$$dW_{mech} = F_{fld}dx \tag{۲-۲۱}$$

در سیستمی که حرکت دورانی داریم می‌توان چنین گفت [۲]:

$$dW_{mech} = T_{fld}d\theta \tag{۲-۲۲}$$

در دو رابطه اخیر داریم [۲]:

۱- F_{fld} نیروی اعمال شده توسط میدان مغناطیسی است.

[1] Lossless
[2] Torque

۲- dx میزان جابجایی جزئی در طی حرکت انتقالی یا خطی.

۳- T_{fld} گشتاوری که توسط F_{fld} حاصل شده و دوران را پدید می‌آورد.

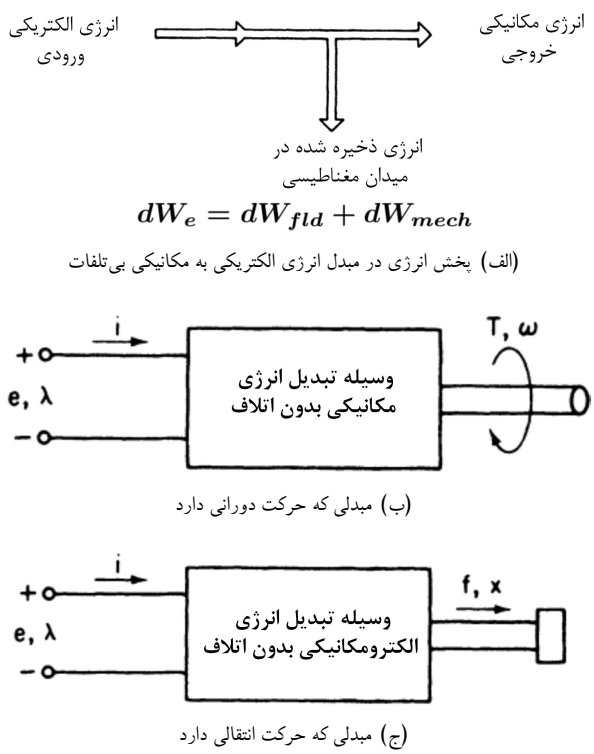
۴- $d\theta$ تغییر جزئی زاویه چرخش محور.

باید دانست در هر دو حالت انرژی مکانیکی خروجی باعث حرکت انتقالی یا دوران می‌شود [۲].

$$dW_{fld} = id\lambda - F_{fld}dx \tag{۲-۲۳}$$

و

$$dW_{fld} = id\lambda - T_{fld}d\theta \tag{۲-۲۴}$$



شکل ۲-۴: پخش انرژی

باید متذکر شد که رابطه ۲-۲۳ برای سیستم‌هایی معنبر است که [۲]:

الف- مبدل انرژی الکتریکی به مکانیکی باشند.

ب- بی‌تلفات باشند.

ج- حرکت انتقالی یا خطی در خروجی ظاهر شود.

همچنین رابطه (۲-۲۴) برای سیستم‌هایی معتبر است که [۲]:

الف- مبدل انرژی الکتریکی به مکانیکی باشند.

ب- بی‌تلفات باشند.

ج- حرکت دورانی در خروجی ظاهر شود (موتورها).

از رابطه (۲-۲۳) در می‌یابیم که انرژی ذخیره شده در میدان مغناطیسی تابع λ، i و x است. اما می‌دانیم که بین λ و i رابطه‌ای وجود دارد و به منحنی مشخصه $\lambda - i$ معروف است. لذا می‌توان انرژی ذخیره شده در میدان را تابعی از λ و x یا i و x در نظر گرفت. فرض کنید انرژی تابعی از λ و x باشد. پس [۲]:

$$dW_f(\lambda, x) = \frac{\partial W_f}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial W_f}{\partial x} dx \qquad (۲-۲۵)$$

برای هر تابع $F(x_۱, x_۲)$، دیفرانسیل کامل F نسبت به دو متغیر حالت مستقل $x۱$ و $x_۲$ به صورت زیر نوشته می‌شود [۳]:

$$dF(x_۱, x_۲) = \frac{\partial F}{\partial x_۱} dx_۱ + \frac{\partial F}{\partial x_۲} dx_۲ \qquad (۲-۲۶)$$

تشخیص اینکه مشتقات نسبی در معادله بالا، هر یک با ثابت نگه‌داشتن متغیر حالت مقابل بدست می‌آید، فوق‌العاده اهمیت دارد [۳].

با مقایسه روابط (۲-۲۳) و (۲-۲۵) داریم [۲]: (چون معادله (۲-۲۶) برای هر تابع F معتبر است، به وضوح برای W_f نیز معتبر خواهد بود، پس [۳]:)

$$i = \frac{\partial W_f(\lambda, x)}{\partial \lambda} \qquad (۲-۲۷)$$

$$F_{fld} = -\frac{\partial W_f(\lambda, x)}{\partial x} \qquad (۲-۲۸)$$

در معادله (۲-۲۷) مشتق نسبی، با ثابت نگه‌داشتن x بدست می‌آید و می‌توان به صورت زیر نوشت [۳]:

$$i = \frac{\partial W_f(\lambda, x)}{\partial \lambda} \Big|_{x=\text{ثابت}} \qquad (۲-۲۹)$$

همچنین، در معادله (۲-۲۸) مشتق نسبی، با ثابت نگه‌داشتن λ بدست می‌آید و می‌توان به صورت زیر نوشت [۳]:

$$F_{fld} = -\frac{\partial W_f(\lambda, x)}{\partial x}\bigg|_{\lambda=\text{ثابت}} \tag{۲-۳۰}$$

عین همین استدلال را می‌توان برای مبدل‌های با حرکت دورانی انجام داد و چنین نوشت:

$$T_{fld} = -\frac{\partial W_f(\lambda, \theta)}{\partial \theta} \tag{۲-۳۱}$$

این همان نتیجه‌ای است که به دنبال آن بودیم. وقتی توانستیم W_f را بعنوان تابعی از λ و x بدست آوریم، می‌توان از معادله (۲-۲۷) برای رسیدن به نسبتی برای $i(\lambda, x)$ استفاده کرد. مهمتر این‌که از معادله (۲-۲۸) می‌توان برای حل نیروی مکانیکی $F_{fld}(\lambda, x)$ استفاده کرد. نیاز به تاکید بیشتر نداریم که مشتق نسبی معادله (۲-۲۸)، با ثابت نگه‌داشتن شارهای پیوندی λ محاسبه می‌شود. این کار براحتی انجام می‌شود، به شرط اینکه W_f، بعنوان تابعی از λ و x معلوم باشد. این یک شرط ریاضی محض است و کاری با این که λ در یک دستگاه واقعی، ثابت نگه‌داشته شده باشد، نداریم [۳].

۲-۴ انرژی میدان مغناطیسی

همانطور که در بالا دیدیم برای پیدا کردن نیروی میدان مغناطیسی باید رابطه‌ای برای $W_f(\lambda_p, x_p)$ در وضعیت مشخص λ_p و x_p بدست آورد. برای انجام این مهم باید از رابطه (۲-۲۳) انتگرال گرفت [۲].

از آنجائیکه فعلا سیستم‌ها را بی‌تلفات فرض کرده‌ایم، بنابراین مسیر انتگرال‌گیری تاثیری در جواب نهایی ندارد. لذا همانند شکل ۲-۵ مسیر انتگرال‌گیری را OAP در نظر می‌گیریم و حدود انتگرال بشرح زیر است [۲]:

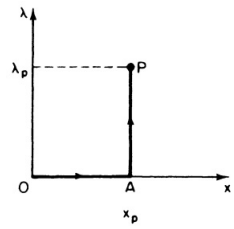
۱- حد بالایی انتگرال λ_p و x_p می‌باشد.

۲- حد پایینی انتگرال $\lambda = ۰$ و $x = ۰$ است.

حال می‌توان با توجه شکل ۲-۵ چنین گفت [۲]:

الف- در مسیر OA مقدار λ صفر بوده و لذا $d\lambda = ۰$ می‌شود. همچنین $F_{fld} = ۰$ است، زیرا λ صفر است.

ب- در مسیر AP مقدار x ثابت بوده و لذا $dx = ۰$ است.



شکل ۲-۵: مسیر انتگرال‌گیری dW_f برای رسیدن از نقطه O به نقطه P

پس:

$$W_f(\lambda_p, x_p) = \int_{۰}^{A} dW_f + \int_{A}^{P} dW_f$$

با توجه به شرایط فوق‌الذکر داریم [۲]:

$$W_f(\lambda_p, x_p) = \int_{A}^{P} dW_f = \int_{A}^{P} i d\lambda = \int_{۰}^{\lambda_p} i(\lambda, x_p) d\lambda \qquad (۳۲\text{-}۲)$$

اگر مشخصه $\lambda - i$ خطی باشد، داریم:

$$\lambda = Li \qquad (۳۳\text{-}۲)$$

پس رابطه ۲-۳۲ این چنین می‌شود:

$$W_f(\lambda_p, x_p) = \int_{۰}^{\lambda_p} i(\lambda, x_p) d\lambda = \frac{۱}{L} \int_{۰}^{\lambda_p} \lambda d\lambda = \frac{\lambda_p^{۲}}{۲L} \qquad (۳۴\text{-}۲)$$

در اینجا باید گفت L (اندوکتانس) تابعی از x است و مثال زیر موضوع را روشن می‌کند. قبل از ذکر مثال متذکر می‌شویم که مطالب فوق مربوط به سیستمی است که حرکت خطی یا انتقالی در آن پدید می‌آید [۲].

انرژی را می‌توان برحسب چگالی انرژی میدان مغناطیسی که روی حجم V میدان مغناطیسی، انتگرال‌گیری شده باشد نیز بیان کرد. در این مورد [۳]:

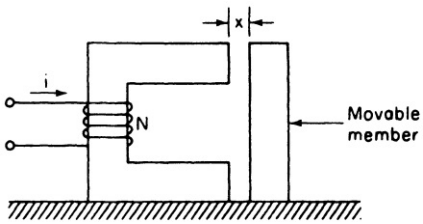
$$W_f = \int_V \left(\int_{۰}^{B.} H.dB \right) dV$$

این معادله برای یک محیط مغناطیسی با ضریب نفوذپذیری ثابت ($B = \mu H$) به این شکل ساده می‌شود [۳]:

$$W_f = \int_V \left(\frac{۱}{۲} \frac{B^{۲}}{\mu} \right) dV$$

مثال ۲-۱ شکل ۲-۶ یک مبدل الکترومکانیکی است که انرژی الکتریکی را به انرژی مکانیکی تبدیل می‌کند و از یک قسمت ساکن و یک قسمت متحرک تشکیل شده است. اگر ولتاژ اعمالی به سیم‌پیچ به قرار زیر باشد، رابطه‌ای برای نیروی حاصله توسط میدان بدست آورید [۲].

$$e(t) = E_m \cos \omega t$$



شکل ۲-۶: سازه مغناطیسی مثال ۲-۱

حل: مقاومت مغناطیسی (رلوکتانس) این سازه مغناطیسی به قرار زیر است:

$$R = R_c + \frac{۲x}{\mu_۰ A}$$

R_c مقاومت مغناطیسی هسته آهنی است. از فصل قبل داریم:

$$L = \frac{N_۲}{R}$$

از رابطه (۲-۳۴) انرژی ذخیره شده در میدان مغناطیسی این چنین می‌شود:

$$W_f(\lambda, x) = \frac{\lambda^۲ R}{۲N^۲} = \frac{\lambda^۲}{۲N^۲}\left(R_c + \frac{۲x}{\mu_۰ A}\right)$$

نیرو نیز به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$F_{fld} = -\frac{\partial W_f}{\partial x} = -\frac{\lambda^۲}{N^۲ \mu_۰ A}$$

طبق صورت مساله ولتاژ اعمال شده به سیستم سینوسی است. پس طبق قانون فاراده داریم:

$$e(t) = \frac{d\lambda}{dt} = E_m \cos \omega t$$

پس:

$$\int_{\lambda(۰)}^{\lambda} d\lambda = \int_۰^t E_m \cos \omega t dt \Rightarrow \lambda(t) = \lambda(۰) + \frac{E_m}{\omega} \sin \omega t$$

یا

$$F_{fld}(t) = \frac{-۱}{N^۲\mu_۰ A}\left[\lambda(۰) + \frac{E_m}{\omega}\sin\omega t\right]^۲$$

گیریم: $\lambda(۰) = ۰$

پس:

$$F_{fld}(t) = \frac{-E_m^۲}{N^۲\mu_۰ A\omega^۲}\sin^۲\omega t$$

می‌دانیم:

$$\sin^۲(x) = \frac{۱-\cos ۲x}{۲}$$

لذا:

$$F_{fld} = \frac{-E_m^۲}{۲N^۲\mu_۰ A\omega^۲}(۱-\cos ۲\omega t)$$

پس نیرو یک مولفه سینوسی دارد که فرکانس آن دو برابر فرکانس منبع تغذیه است. رابطه بالا را این‌چنین می‌نویسیم:

$$F_{fld} = -F_۰(۱-\cos ۲\omega t), \quad F_۰ = \frac{E_m^۲}{۲N^۲\mu_۰ A\omega^۲}$$

از این مثال نتیجه می‌گیریم که نیروی حاصله طوریست که با افزایش x (افزایش رلوکتانس) مخالفت می‌ورزد.

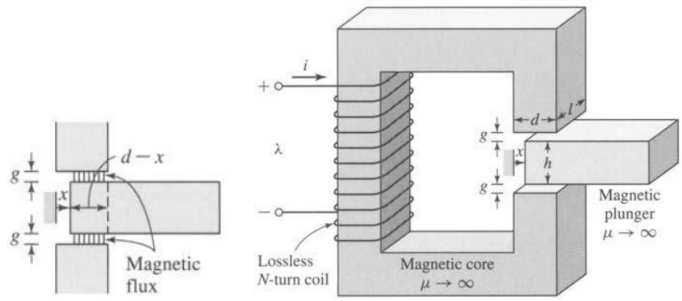
مثال ۲-۲ رله شکل ۲-۷(الف) از ماده مغناطیسی با ضریب نفوذپذیری بی‌نهایت با یک قطعه متحرک، که آن نیز ماده‌ای با نفوذپذیری بی‌نهایت است، ساخته شده است. ارتفاع زبانه متحرک، بسیار بیشتر از طول فاصله هوایی است ($h \gg g$). انرژی مغناطیسی ذخیره شده W_f را بعنوان تابعی از موقعیت زبانه متحرک ($۰ < x < d$) برای $N = ۱۰۰$ دور، $g = ۰/۰۰۲\mathrm{m}$، $d = ۰/۱۵\mathrm{m}$، $l = ۰/۱\mathrm{m}$ و $i = ۱۰\mathrm{A}$ محاسبه کنید [۳].

حل: وقتی λ معلوم باشد، از معادله (۲-۳۴) می‌توان برای بدست آوردن W_f استفاده کرد. برای این وضعیت، i ثابت نگه‌داشته می‌شود و لذا داشتن عبارتی برای W_f بشکل تابعی از i و x مفید خواهد بود. این کار، با جایگزینی به صورت زیر بسادگی بدست خواهد آمد:

$$W_f = \frac{۱}{۲}L(x)i^۲$$

اندوکتانس به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$L = \frac{N^۲}{R},\ R = \frac{۲g}{\mu_۰ A_g} \Rightarrow L(x) = \frac{N^۲\mu_۰ A_g}{۲g}$$



(الف) رله با زبانه متحرک

(ب) جزئیات مربوط به شکل فاصله هوایی که در آن زبانه متحرک، کمی عقب رفته است.

شکل ۲-۷: شکل مثال ؟؟

از شکل ۲-۷(ب) می‌توان دید که:

$$A_g = l(d-x) = ld(۱-\frac{x}{d})$$

بنابراین:

$$L(x) = \frac{N^۲\mu_۰ ld(۱-\frac{x}{d})}{۲g} \Rightarrow W_f = \frac{۱}{۲}\frac{N^۲\mu_۰ ld(۱-\frac{x}{d})}{۲g}i^۲$$
$$= \frac{۱}{۲}\frac{(۱۰۰۰^۲)(۴\pi\times ۱۰^{-۷})(۰/۱۵)(۰/۱)}{۲(۰/۰۰۲)}\times ۱۰^۲(۱-\frac{x}{d}) = ۲۳۶(۱-\frac{x}{d}) \quad \mathrm{J}$$

۲-۵ شبه انرژی

در مبحث قبل λ و x را بعنوان متغیرهای اصلی در نظر گرفتیم. حال ببینیم اگر i و x بعنوان متغیرهای اصلی مد نظر قرار گیرند، روابط به چه صورت خواهند بود. برای رسیدن به این مقصود، باید λ به عنوان تابعی از i و x معرفی گردد. لذا [۲]:

$$d\lambda(i,x) = \frac{\partial\lambda}{\partial i}di + \frac{\partial i}{\partial x}dx \qquad (۲-۳۵)$$

با جایگزینی رابطه اخیر در رابطه (۲-۲۴) داریم [۲]:

$$dW_f = \Big(\frac{\partial\lambda}{\partial i}di + \frac{\partial i}{\partial x}dx\Big)i - F_f dx \qquad (۲-۳۶)$$

پس [۲]:

$$dW_f = i\frac{\partial \lambda}{\partial i}di + \Big(i\frac{\partial \lambda}{\partial x} - F_{fld}\Big)dx \tag{۲-۳۷}$$

از طرفی اگر انرژی میدان مغناطیسی را تابعی از i و x بگیریم، داریم [۲]:

$$dW_f = \frac{\partial W_f}{\partial i}di + \frac{\partial W_f}{\partial x}dx \tag{۲-۳۸}$$

با مقایسه دو رابطه اخیر داریم [۲]:

$$\frac{\partial W_f}{\partial i} = i\frac{\partial \lambda}{\partial i} \tag{۲-۳۹}$$

$$\frac{\partial W_f}{\partial x} = i\frac{\partial \lambda}{\partial x} - F_{fld} \tag{۲-۴۰}$$

رابطه (۲-۴۰) را این‌چنین می‌نویسیم [۲]:

$$F_{fld} = \frac{\partial(i\lambda - W_f)}{\partial x} \tag{۲-۴۱}$$

عبارت موجود در پرانتز رابطه (۲-۴۱) را به مثابه شبه انرژی[۱] یا $W'_f(i,x)$ تعریف می‌کنیم [۲] (گاهی از آن به عنوان کو انرژی و با نماد $W_c(i,x)$ نیز یاد می‌شود.) [۲]:

$$W'_f = i\lambda(i,x) - W_f(i,\lambda) \tag{۲-۴۲}$$

پس می‌توان رابطه نیرو را برحسب شبه انرژی این‌چنین نوشت [۲]:

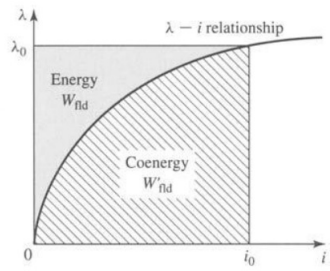
$$F_{fld} = \frac{\partial W'_f}{\partial x} \tag{۲-۴۳}$$

با توجه به مطالب قبلی واضح است که برای مبدل‌های انرژی الکترومکانیکی دوار می‌توان چنین نوشت [۲]:

$$T_{fld} = \frac{\partial W'_f(i,\theta)}{\partial \theta} \tag{۲-۴۴}$$

با توجه به رابطه (۲-۴۲) در می‌یابیم که شبه انرژی یا W'_f سطح زیر منحنی در مشخصه $\lambda - i$ می‌باشد(شکل ۲-۸)، با توجه به تعریف سطح زیر منحنی داریم [۲]:

$$W'_f(i_p,x_p) = \int_{0}^{i_p} \lambda(i,x_p)di \tag{۲-۴۵}$$



شکل ۲-۸: تعبیر گرافیکی انرژی و شبه انرژی برای یک سیستم تک تحریکه

اگر مشخصه $\lambda - i$ خطی باشد، داریم [۲]:

$$W'_f(i_p, x_p) = \int_{۰}^{i_p} Lidi = \frac{۱}{۲}Li_p^۲ \qquad (۴۶-۲)$$

و نیرو به صورت زیر محاسبه می‌شود [۳]:

$$F_{fld} = \frac{۱}{۲}i^۲\frac{dL(x)}{dx} \qquad (۴۷-۲)$$

توجه کنید که W_f و W'_f از نظر مقدار در سیستم‌های خطی برابر هستند. باید دانست که هنگام محاسبه نیرو یا گشتاور به روش انرژی و یا شبه انرژی به یک جواب خواهیم رسید [۲]. در عمل این ترجیح فردی و سهولت محاسبه است که روش کار را حکم می‌کند [۳].

همچنین، شبه انرژی را می‌توان برحسب میدان بیان کرد [۳]:

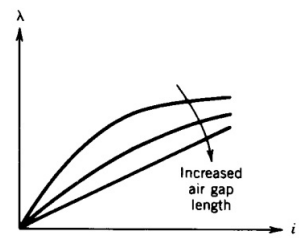
$$W'_f = \int_V \left(\int_{۰}^{H.} B.dH \right) dV \qquad (۴۸-۲)$$

این رابطه برای محیطی با ضریب نفوذپذیری ثابت μ، به این شکل تقلیل می‌یابد [۳]:

$$W'_f = \int_V \frac{۱}{۲}\mu H^۲ dV \qquad (۴۹-۲)$$

شکل ۲-۹ سه مشخصه $\lambda - i$ برای فواصل گوناگون مربوط به شکاف هوایی را نشان می‌دهد. هر چه طول شکاف هوایی بیشتر باشد، منحنی $\lambda - i$ خطی‌تر می‌گردد. به سخنی دیگر هرچه طول شکاف هوایی کمتر می‌گردد، مشخصه $\lambda - i$ غیرخطی‌تر می‌گردد [۱].

[1] Co-Energy



شکل ۲-۹: مشخصه‌های $\lambda - i$ برای فواصل مختلف شکاف هوایی [۱]

شبه انرژی مفهوم فیزیکی ندارد ولی همانطور که بعدا می‌بینیم، برای معرفی روابط نیرو و گشتاور در سیستم‌های الکترومغناطیسی کاربرد فراوان دارد. از شکل ۲-۸ داریم [۱]:

$$W'_f + W_f = \lambda i \qquad (۵۰-۲)$$

باید گفت [۱]:

الف- اگر مشخصه $\lambda - i$ خطی باشد، در این صورت: $W_f = W'_f$

ب- اگر مشخصه $\lambda - i$ غیرخطی باشد، در این صورت: $W_f < W'_f$

مثال ۲-۳ مشخصه $\lambda - i$ یک سیستم الکترومغناطیسی به قرار زیر است:

$$i = \left(\frac{\lambda g}{۰/۰۹}\right)^۲$$

این مشخصه تحت شرایط زیر صادق است:

$$۰ < i < ۴ \quad \mathrm{A}$$

$$۳ < g < ۱۰ \quad \mathrm{cm}$$

g طول شکاف هوایی است. اگر: $i = ۳\,\mathrm{A}, \quad g = ۵ \quad \mathrm{cm}$

نیروی مکانیکی اعمال شده به قسمت متحرک را بیابید. برای حل این مساله از انرژی و شبه انرژی استفاده کنید [۱].

حل: انرژی در این سیستم به قرار زیر است:

$$W_f = \int_۰^\lambda i d\lambda = \int_۰^\lambda \left(\frac{\lambda g}{۰/۰۹}\right)^۲ d\lambda = \frac{g^۲}{۰/۰۹^۲}\frac{\lambda^۳}{۳}$$

برای نیرو داریم:

$$F_{fld} = -\frac{\partial W_f}{\partial g}\bigg|_{\lambda=\text{ثابت}} = -\frac{\lambda^{۳}۲g}{۳ \times ۰/۰۹^{۲}}$$

با جایگزین مقادیر جریان و طول شکاف هوایی داریم:

$$\lambda = \frac{۰/۰۹i^{\frac{۱}{۲}}}{g} = \frac{۰/۰۹ \times ۳^{\frac{۱}{۲}}}{۰/۰۵} = ۳/۱۲\,\text{Wb-turn}$$

و نیرو به صورت زیر خواهد بود:

$$F_{fld} = -\frac{۳/۱۲^{۳} \times ۲ \times ۰/۰۵}{۳ \times ۰/۰۹^{۲}} = -۱۲۴/۷\,\text{N.m}$$

شبه انرژی در این سیستم به صورت زیر است:

$$W'_f = \int_{۰}^{i} \lambda di = \int_{۰}^{i} \frac{۰/۰۹i^{\frac{۱}{۲}}}{g} di = \frac{۰/۰۹}{g}\frac{۲}{۳}i^{\frac{۳}{۲}}\,\text{J}$$

نیرو به صورت زیر بدست خواهد آمد:

$$F_{fld} = \frac{\partial W'_f}{\partial g}\bigg|_{i=\text{ثابت}} = -۰/۰۹ \times \frac{۲}{۳}i^{\frac{۳}{۲}}\frac{۱}{g^{۲}}$$

با جایگذاری مقادیر جریان و طول شکاف هوایی داریم:

$$F_{fld} = -۰/۰۹ \times \frac{۲}{۳} \times ۳^{\frac{۳}{۲}} \times \frac{۱}{۰/۰۵^{۲}} = -۱۲۴/۷\,\text{N.m}$$

می‌بینیم که از هر دو روش انرژی و شبه انرژی به یک جواب رسیدیم و باید همین‌طور نیز باشد.

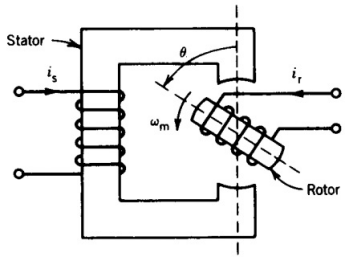
۲-۶ ماشین‌های الکتریکی دوار (سیستم‌های دو تحریکه)

در بخش‌های قبل راجع به حرکت انتقالی[1] در سیستم‌های الکترومغناطیسی صحبت کردیم، اما اکثر مبدل‌های انرژی الکترومکانیکی بخصوص در قدرت و توان‌های بالا، حرکت دورانی و چرخشی دارند. شکل ۲-۱۰ قسمت‌های اساسی یک سیستم الکترومغناطیسی دوار را نشان می‌دهد و عمدتا این سیستم‌ها از دو قسمت اصلی زیر تشکیل شده‌اند [۱]:

[1] Translational-Motion

۱- قسمت ساکن که به استاتور[1] معروف است.

۲- قسمت دوار که به روتور[2] موسوم است.



شکل ۲-۱۰: شمای ساده‌ای از سیستم الکترومغناطیسی دوار [۱]

روتور برروی محور[3] نصب شده و آزادانه می‌تواند بین قطب‌های استاتور بچرخد. در این بخش حالت کلی مورد بررسی قرار می‌گیرد و این بدان معنی است که استاتور و روتور هر دو حاوی سیم‌پیچ حامل جریان هستند. تغذیه جریان به روتور توسط جاروبک‌های ساکن[4] و حلقه‌های لغزان استوار برروی محور امکان‌پذیر است. ارزیابی انرژی ذخیره شده در میدان مغناطیسی در این سیستم با برقراری جریان‌های i_s و i_r و نگه‌داشتن سیستم در حالت ایستا امکان‌پذیر است. i_s جریان سیم‌پیچ استاتور و i_r جریان سیم‌پیچ روتور است. منظور از حالت ایستا آن است که، در سیستم انرژی مکانیکی خروجی وجود ندارد. لذا [۱]:

$$dW - f = e_s i_s dt + e_r i_r dt = i_s d\lambda_s + i_r d\lambda_r \qquad (۲-۵۱)$$

در سیستم الکترومغناطیسی خطی داریم [۱]:

$$\lambda_s = L_{ss} i_s + L_{sr} i_r \qquad (۲-۵۲)$$

$$\lambda_r = L_{rs} i_s + L_{rr} i_r \qquad (۲-۵۳)$$

باید دانست L_{ss} و L_{rr} اندوکتانس‌های خودی[5] سیم‌پیچ استاتور و روتور بوده و L_{rs} و L_{sr} اندوکتانس‌های متقابل[6] این دو سیم‌پیچ است. این چهار اندوکتانس تابعی از زاویه θ بوده و θ زاویه بین محور مغناطیسی

[1] Stator
[2] Rotor
[3] Shaft
[4] Fixed Brushes
[5] Self Inductances
[6] Mutual Inductance

استاتور و محور مغناطیسی روتور است. در سیستم‌های خطی داریم [۱]:

$$L_{sr} = L_{rs} \tag{۲-۵۴}$$

پس رابطه (۲-۵۲) و (۲-۵۳) این چنین می‌شود [۱]:

$$\begin{bmatrix} \lambda_s \\ \lambda_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{ss} & L_{sr} \\ L_{sr} & L_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_s \\ i_r \end{bmatrix} \tag{۲-۵۵}$$

همچنین طریقه بدست آوردن رلوکتانس‌های خودی و متقابل به صورت زیر است:

$$L_{ss} = \frac{N_s^۲}{R_s} \quad L_{rr} = \frac{N_r^۲}{R_r} \quad L_{sr} = \frac{N_r N_s}{R_{sr}} \tag{۲-۵۶}$$

از روابط (۲-۵۲) و (۲-۵۳) در می‌یابیم که اندوکتانس‌ها اینچنین بدست می‌آیند [۲]:

$$L_{ss} = \frac{\lambda_s}{i_s}\bigg|_{i_r=۰} \tag{۲-۵۷}$$

$$L_{sr} = \frac{\lambda_s}{i_r}\bigg|_{i_s=۰} = \frac{\lambda_r}{i_s}\bigg|_{i_r=۰} \tag{۲-۵۸}$$

$$L_{rr} = \frac{\lambda_r}{i_r}\bigg|_{i_s=۰} \tag{۲-۵۹}$$

باید توجه داشت که اگر $i_r = ۰$ شود، این سیستم فقط توسط سیم‌پیچ استاتور تحریک می‌شود [۲].

از روابط (۲-۵۱)، (۲-۵۲) و (۲-۵۳) داریم [۱]:

$$\begin{aligned} dW_f &= i_s d(L_{ss} i_s + L_{sr} i_r) + i_r d(L_{sr} i_s + L_{rr} i_r) \\ &= L_{ss} i_s di_s + L_{rr} i_r di_r + L_{sr} d(i_s i_r) \end{aligned} \tag{۲-۶۰}$$

انرژی ذخیره شده در میدان مغناطیسی به قرار زیر است [۱]:

$$\begin{aligned} W_f =& L_s s \int_۰^{i_s} i_s di_s + L_{rr} \int_۰^{i_r} i_r di_r + L_{sr} \int_۰^{i_r i_s} d(i_s i_r) \\ =& \frac{۱}{۲} L_{ss} i_s^۲ + \frac{۱}{۲} L_{rr} i_r^۲ + L_{sr} i_s i_r \end{aligned} \tag{۲-۶۱}$$

با توجه به نحوه محاسبه نیرو در سیستم‌های با حرکت انتقالی، می‌توان به گشتاور حاصله در سیستم‌های با حرکت دورانی پی برد و داریم [۱]:

$$T = \frac{\partial}{\partial W_f'(i,\theta)}\bigg|_{i=\text{ثابت}} \tag{۲-۶۲}$$

در سیستم‌های خطی انرژی و شبه‌انرژی با هم برابرند ($W'_f = W_f$)، لذا از روابط (۲-۶۱) و (۲-۶۲) داریم [۱]:

$$T = \frac{1}{2} i_s^2 \frac{dL_{ss}}{d\theta} + \frac{1}{2} i_r^2 \frac{dL_{rr}}{d\theta} + i_s i_r \frac{dL_{sr}}{d\theta} \qquad (۲-۶۳)$$

در رابطه بالا دو جمله اول به خاطر تغییر اندوکتانس خودی نسبت به وضعیت مکانی روتور (θ) بوده و به مجموع این دو جمله، گشتاور رلوکتانسی[1] گفته می‌شود. جمله سوم در رابطه بالا بخاطر تغییرات اندوکتانس متقابل بین روتور و استاتور حاصل می‌شود [۱].

مثال ۲-۴ سیستم شکل ۲-۱۰ را در نظر می‌گیریم و فرض می‌نماییم روتور سیم‌بندی ندارد. به عبارت دیگر در حقیقت یک موتور رلوکتانسی در دسترس داریم. در این سیستم داریم (طبق شکل ۲-۱۱):

$$L_{ss} = L_0 + L_2 \cos 2\theta$$

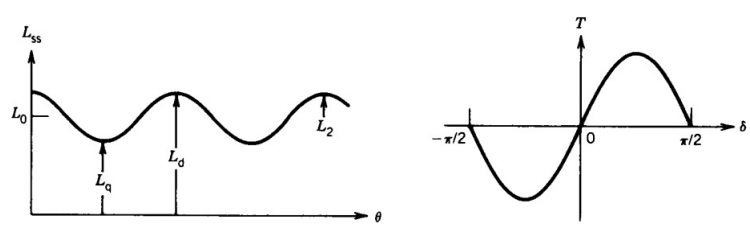
θ زاویه مکانی روتور را نشان می‌أهد. جریان استاتور این چنین است:

$$i_s = I_{sm} \sin \omega t$$

الف- گشتاور اعمال شده بر روتور را بیابید.

ب- گیریم: $\theta = \omega_m t + \delta$

ω_m سرعت زاویه‌ای[2] روتور و δ وضعیت روتور در لحظه $t = 0$ است. شرایطی را بیاورید که گشتاور متوسط صفر نباشد و آن را مشخص کنید [۱].



شکل ۲-۱۱: تغییرات اندوکتانس خودی استاتور و زاویه [۱]

[1] Reluctance Torque
[2] Angular Velocity

حل:

الف- چون $i_r = ۰$ است، لذا از رابطه (۲-۶۳) داریم:

$$T = \frac{۱}{۲} i_s^۲ \frac{dL_{ss}}{d\theta} = \frac{۱}{۲} I_{sm}^۲ \sin^۲ \omega \frac{d}{d\theta}(L_۰ + L_۲ \cos ۲\theta) = -I_{sm}^۲ L_۲ \sin ۲\theta \sin^۲ \omega t \,\mathrm{N.m}$$

ب- براحتی داریم:

$$\begin{aligned} T &= -I_{sm}^۲ L_۲ \sin ۲(\omega_m t + \delta) \frac{۱ - \cos ۲\omega t}{۲} \\ &= \frac{۱}{۲} I_{sm}^۲ L_۲ [\sin ۲(\omega_m t + \delta) - \frac{۱}{۲} \sin ۲\{(\omega_m + \omega)t + \delta\} - \frac{۱}{۲} \sin ۲\{(\omega_m - \omega)t + \delta\}] \end{aligned}$$

می‌بینیم با سه جمله سینوسی روبرو هستیم و علی‌القاعده متوسط هر جمله سینوسی صفر است. برای آن که متوسط گشتاور صفر نباشد، باید ضریب t در یکی از این جملات سینوسی صفر باشد. برای این منظور باید دو شرط زیر رخ دهد:

۱- $\omega_m = ۰$

پس گشتاور متوسط در سرعت زاویه‌ای صفر به قرار زیر است:

$$T_{avg} = -\frac{۱}{۲} I_{sm}^۲ L_۲ \sin ۲\delta$$

از شکل ۲-۱۱ داریم:

$$L_۲ = \frac{L_d - L_q}{۲} \Rightarrow T_{avg} = -\frac{۱}{۴} I_{sm}^۲ L_۲ (L_d - L_q) \sin ۲\delta$$

۲- $\omega_m = \pm\omega$

در این شرایط داریم:

$$T_{avg} = \frac{۱}{۴} I_{sm}^۲ L_۲ \sin ۲\theta = \frac{۱}{۸} I_{sm}^۲ (L_d - L_q) \sin ۲\theta \qquad (۲\text{-}۶۴)$$

لذا ماشین رلوکتانسی بشرطی گشتاور متوسط تولید می‌کند که در یکی از دو جهت عقربه ساعت (CW[1]) یا خلاف عقربه ساعت (CW[2]) بچرخد و سرعت چرخش با سرعت زاویه‌ای جریان که به سرعت سنکرون معروف است مساوی باشد. گشتاور تابعی از $\sin ۲\theta$ بوده و δ وضعیت روتور در زمان $t = ۰$ را نشان می‌دهد و به آن زاویه توان یا زاویه گشتاور نیز گفته می‌شود.

[1] ClockWise
[2] CounterClockWise

مثال ۲-۵ در سیستم شکل ۲-۱۲، اندوکتانس‌ها برحسب هانری به صورت زیر داده شده‌اند:

$$L_{۱۱} = (۳ + \cos ۲\theta) \times ۱۰^{-۳} \quad L_{۱۲} = ۰/۱ \cos\theta \quad L_{۲۲} = ۳۰ + ۱۰ \cos ۲\theta$$

گشتاور $T_f(\theta)$ را به ازای جریان

$$i_۱ = ۱ \text{ A}, \quad i_۲ = ۰/۰۱ \text{ A}$$

بدست آورید.

حل: داریم:

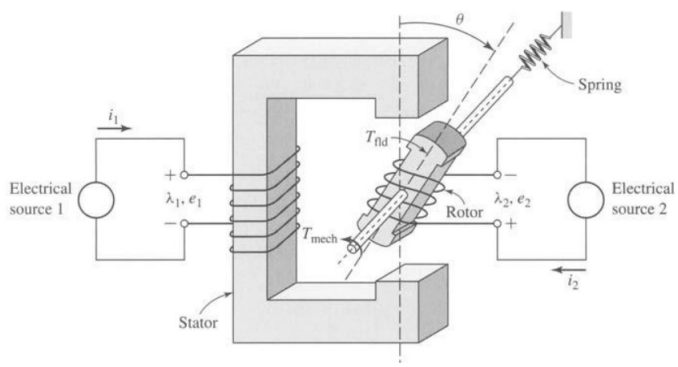
$$W_f = \frac{۱}{۲} L_{۱۱} i_۱^۲ + L_{۱۲} i_۱ i_۲ + \frac{۱}{۲} L_{۲۲} i_۲^۲$$

گشتاور به صورت زیر بدست می‌آید:

$$T_f = \frac{\partial W_f}{\partial \theta} = -۱ \times ۱۰^{-۳} i_۱^۲ \sin ۲\theta - ۰/۱ i_۱ i_۲ \sin\theta - ۱۰ i_۲^۲ \sin ۲\theta$$

در جریان‌های گفته شده، گشتاور برابر است با:

$$T_f = -۲ \times ۱۰^{-۳} \sin ۲\theta - ۱۰^{-۳} \sin\theta$$



شکل ۲-۱۲: شکل مثال ۲-۵ [۱]

مراجع

[۱] پی.سی.سن. ماشین‌های الکتریکی تحلیل- بهره‌برداری- کنترل. ترجمه‌ی دکتر عابدی و محمدتقی نبوی. چاپ سوم، انتشارات بصیر، ویرایش پنجم، ۱۳۸۵.

[۲] دکتر محمد ال هاواری. اصول ماشین‌های الکتریکی با کاربردهایی از الکترونیک قدرت. ترجمه‌ی دکتر مهرداد عابدی و جلال نظرزاده. چاپ اول، انتشارات دماوند، ۱۳۷۰.

[۳] فیتزجرالد، کینگسلی، اومنس. ماشین‌های الکتریکی. ترجمه‌ی دکتر بهزاد قهرمان. چاپ سوم، انتشارات نما، ویرایش پنجم، ۱۳۸۴.

[۴] بیم بهارا. ماشین‌های الکتریکی: تئوری، عملکرد و کاربردها. ترجمه‌ی دکتر سلطانی و لسانی، جلد اول از چاپ سوم. موسسه انتشارات قائم، ویرایش اول، ۱۳۸۵.

[۵] مهندس مهدوی، "جزوه ماشین ۲،" ۱۳۸۷.

[۶] دکتر ساده، "جزوه ماشین ۲،" ۱۳۹۰.