

باسمه تعالی

## دوره‌ی تابستانی المپیاد کامپیوتر

### آزمون نظری پایانی دوم

پنج‌شنبه ۱۳ شهریور ۱۳۹۳

زمان آزمون: ۵ ساعت

#### پرومیشی نخست به یاد استاد! ..... ۲۵ امتیاز

یک جدول  $(n-1) \times (n-1)$  داریم.  $k$  پلیس و ۱ دزد با هم بازی می‌کنند. در هر مرحله، پلیس‌ها  $k$  نقطه از  $n^2$  نقطه‌ی جدول را انتخاب می‌کنند و در این  $k$  نقطه مستقر می‌شوند و سپس دزد با دیدن مکان پلیس‌ها، یک نقطه انتخاب می‌کند و به آن‌جا می‌رود. توجه کنید در هیچ مرحله‌ای، پلیس‌ها نمی‌دانند دزد کجاست. فرض کنید در مرحله‌ای دزد نقطه‌ی  $P$  و پلیس‌ها مجموعه‌ی  $A$  از نقاط را انتخاب کنند. هم‌چنین در مرحله‌ی قبل، دزد در نقطه‌ی  $Q$  و پلیس‌ها در مجموعه‌ی  $B$  بوده باشند. دزد تنها در صورتی می‌تواند از نقطه‌ی  $Q$  به نقطه‌ی  $P$  برود که مسیری از  $Q$  به  $P$  با استفاده از یال‌های جدول وجود داشته باشد، طوری که از نقاط  $A \cap B$  نگذرد؛ در غیر این صورت دزد دست‌گیر می‌شود. در صورتی که پلیس‌ها به طور تضمینی بتوانند در متناهی حرکت، دزد را دست‌گیر کنند، می‌برند و در غیر این صورت می‌بازند.

(ا) ثابت کنید اگر  $k \geq n+1$  باشد، پلیس‌ها می‌برند. (۱۲ امتیاز)

(ب) ثابت کنید اگر  $k \leq n-1$  باشد، دزد می‌برد. (۱۳ امتیاز)

#### پرومیشی دوم Dota ی من! ..... ۳۵ امتیاز

یک گراف ساده‌ی  $n$ -رأسی داریم. در هر مرحله می‌توانیم یال‌های یک مسیر از گراف را حذف کنیم.

(ا) ثابت کنید در حداکثر  $O(n\sqrt{n})$  مرحله می‌توانیم تمام یال‌های گراف را حذف کنیم. (۱۰ امتیاز)

(ب) ثابت کنید در حداکثر  $O(n \lg n)$  مرحله می‌توانیم تمام یال‌های گراف را حذف کنیم. (۲۵ امتیاز)

## پروستش سیوم رضایی رفت، شماها موندین | : ۴۰ امتیاز

در شهر تهران متولد شد. مادرش او را علی‌رضا نام نهاد. از همان بدو جوانی، به علم، علاقه داشت. پس از کسب مدال المپیاد کامپیوتر، تحصیلات عالی را در دانش‌گاه شریف، در دو رشته‌ی ریاضی محض و مهندسی نرم‌افزار با معدل بالای ۱۹ به پایان رساند. اما وی تنها در علم موفق نبود... در تمام دوران تحصیل خود در دانش‌گاه، کمک شایانی به پیش‌برد المپیاد کامپیوتر داشت؛ از جمله مسئولیت امتحان مرحله دوم، تدریس دروس گراف و ترکیبیات و...  
تواضع از ویژگی‌های بارز ایشان بود. ایشان درست همین دیشب، ایران را به مقصد آمریکا ترک کرد که برای ما، بسیار دردناک بود.  
جا داشت با این متن، هر چند کوتاه، از زحمات بزرگ ایشان قدردانی کنیم.

یک گراف ساده‌ی جهت‌دار  $n$ -رأسی داریم که درجه‌ی خروجی هر رأس در آن، دست کم  $\frac{n}{4}$  است. ثابت کنید در این گراف،  $C_3$  جهت‌دار یا  $C_4$  جهت‌دار وجود دارد.  
توجه: می‌توانید فرض کنید در گراف ما، علاوه بر این که درجه‌ی خروجی هر رأس، دست کم  $\frac{n}{4}$  است، درجه‌ی ورودی هر رأس نیز، دست کم  $\frac{n}{4}$  باشد. در صورتی که حکم را برای چنین گرافی ثابت کنید، اما سوال اصلی را حل نکنید، ۱۵ نمره می‌گیرید.