

آزمون ۳ آمادگی مرحله دوم - تشریحی

مدت آزمون: ۴/۵ ساعت

۱. **الگوریتم سلطانی** امتیاز ۲۰
تمام رشته‌هایی که تنها با حروف a, b ساخته می‌شوند و دست بالا n رقم دارند، در نظر بگیرید. این رشته‌ها را به ترتیب الفبایی مرتب کرده و در یک دنباله بنویسید. مثلن برای $n = ۳$ ، دنباله به صورت زیر است:

$a, aa, aaa, aab, ab, aba, abb, b, ba, baa, bab, bb, bba, bbb$

حال به روشنی قابل مشاهده است که رشته‌ی aab در دنباله‌ی بالا در مکان ۴-ام قرار دارد. حال الگوریتم زیر را در نظر بگیرید که n را به همراه رشته‌ای از ورودی دریافت می‌کند و مکان آن رشته را در دنباله تحویل می‌دهد:

۱ n و رشته‌ی S را از ورودی تحویل بگیر.

۲ تعداد حرف‌های S را در L بریز.

۳ مقدار sum را برابر با صفر قرار بده.

۴ برای هر i از ۱ تا L انجام بده:

۴-۱ اگر رقم i ام (از سمت چپ)، a بود، sum را با ۱ جمع کن و حاصل را در sum بریز.

۴-۲ در غیر این صورت، sum را با $۲^{n-i+۱}$ جمع کن و حاصل را در sum بریز.

۵. مقدار sum را به عنوان خروجی تحویل بده.

نشان دهید الگوریتم بالا درست کار می‌کند.

۲. **جدول خوشگل** امتیاز ۲۵
جدولی $m \times n$ داریم. به چند روش می‌توان خانه‌های آن را با قرمز و آبی، رنگ‌آمیزی کرد؛ طوری که هر زیرجدول ۲×۲ از آن، دقیقاً ۲ خانه از هر رنگ داشته باشد؟

۳. **سلطان دیوانه** امتیاز ۲۵
سلطان یک آپارتمان خریده است که ۱۰۰۰ طبقه دارد. می‌دانیم عدد صحیح نامنفی k وجود دارد؛ طوری که سلطان اگر از طبقه‌ی i -ام، $۰ \leq i \leq k$ بپرد، سالم می‌ماند ولی اگر از طبقات دیگر بپرد، سالم نمی‌ماند. به طبقات $k, k-۱, \dots, ۱$ ، امن می‌گوییم و به دیگر طبقات، ناامن می‌گوییم. سلطان عدد k را نمی‌داند و می‌خواهد آن را پیدا کند. اگر سلطان اولین بار از یک طبقه‌ی ناامن بپرد، دستش می‌شکند و برای بار دوم، می‌میرد. کمینه‌ی تعداد پریدن‌هایی که سلطان باید انجام دهد، طوری که عدد k را بفهمد و زنده بماند، چیست؟

۴. **حمله‌ی سلطانی** امتیاز ۳۰
در پی دشمنی دیرینه‌ی سلطان با آشازبوس، سلطان تعدادی جاسوس از سلطان‌آباد به شازکلاک‌دره فرستاد. این جاسوسان اطلاعاتی کسب کردند و باید اکنون در اختیار سلطان بگذارند. آشازبوس از حضور جاسوس‌ها مطلع می‌شود و در صدد کشتن آن‌ها برمی‌آید. سلطان بالگردی به شازکلاک‌دره می‌فرستد تا جاسوس‌ها را نجات دهد. بالگرد فرصت نشستن نداشت. به همین دلیل تا نزدیکی زمین آمد و یک نردبان n پله‌ای به پایین انداخت. جاسوس‌ها به سرعت از نردبان بالا رفتند. هنوز کسی به بالگرد نرسیده بود که آشازبوس خبردار شد. در این لحظه روی هر پله ۰، ۱ یا تعدادی

جاسوس بود. اگر حتی یک جاسوس به بالگرد برسد، بالگرد او را به نزد سلطان می‌برد و سلطان به اطلاعاتش می‌رسد. پس آشازیوس در پی کشتن تمامی جاسوس‌ها قبل از رسیدن به بالگرد است. هر جاسوس یک پیراهن دارد که این قابلیت را دارد که سیاه یا سفید شود. آشازیوس نیز دستگاهی دارد که در یک لحظه می‌تواند یک رنگ را انتخاب کند و تمام جاسوسان با لباس به آن رنگ را بکشد. هر لحظه، سلطان از راه دور، رنگ پیراهن جاسوس‌ها را به دل‌خواه خود درمی‌آورد و آشازیوس یک رنگ انتخاب می‌کند و جاسوسان را می‌کشد. تا کشتار بعدی آشازیوس، هر جاسوس یک پله از نردبان بالا می‌رود و سلطان رنگ لباس جاسوس را به دل‌خواه خود در می‌آورد و دوباره آشازیوس کشتار انجام می‌دهد و کار به همین ترتیب پیش می‌رود. تمام آرایش‌های اولیه‌ای از جاسوس‌ها روی نردبان را بباید که یکی از آن‌ها دست کم به بالگرد می‌رسند.

موفق باشید