بسم ا... الرحمن الرحیم

سیستم های کنترل دیجیتال

Digital Control Systems

دکتر محمدرضا رمضانی

مراجع

1. K. Ogata, Discrete-time control systems, Prentice Hall, 1995
2- اسلایدهای درس کنترل دیجیتال دانشگاه علم و صنعت دکتر بلندی و دکتر اسمعیل زاده

- سرفصل مطالب
- روشهای آزمون پایداری مطلق
- تحلیل پایداری با استفاده از تبدیلات دوخطی معیار راث
- طراحی در سیستم های کنترل زمان پیوسته به کمک مکان ریشه ها : تدریس کنترل کننده های خطی تناسبی مشتقی، پیش فاز و پس فاز و شبیه سازی نتایج در نرم افزار MATLAB

روشهای آزمودن پایداری مطلق

1- روش شور-کان

2- روش آزمون پایداری جوری

3-بکارگیری تبدیلات دوخطی توام با معیار پایداری روث

❑ دو روش اول ، وجود ریشه های ناپایدار (ریشه هایی که بیرون دایره واحد در صفحه z قرار می گیرند) را آشکار می سازند. اما این آزمون ها بجز در حالتهای ساده سیستم های مرتبه پایین نه محل ریشه های ناپایدار را مشخص کرده و نه اثرات تغییر پارامترها را بر پایداری سیستم نشان می دهند.

❑ هر دو روش اول و دوم را می توان به معادلات چند جمله ای ، با ضرایب حقیقی یا مختلط اعمال کرد.

❑ وقتی که معادله چند جمله ای تنها شامل ضرایب حقیقی باشد، محاسبات مورد نیاز در آزمون جوری از محاسبات مورد نیاز آن در آزمون شور-کان بمراتب ساده تر است.

Jury Stability test

- The characteristic equation

$$1 + GH(z) = 0$$

- Is written as

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n = 0$$

$$\boxed{a_0 > 0}$$

Jury Stability test

- Forming the first row as

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \mathrm{K} \;\; + a_{n-1} z + a_n = 0$$

Row	z^0	z^1	z^2	z^3	□	z^{n-2}	z^{n-1}	z^n
1	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	a_{n-3}	□	a_2	a_1	a_0

Low order to higher order

Jury Stability test

- Write down the reverse order for the second row.

Row	z^0	z^1	z^2	z^3	□	z^{n-2}	z^{n-1}	z^n
1	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	a_{n-3}	□	a_2	a_1	a_0
2	a_0	a_1	a_2	a_3	□	a_{n-2}	a_{n-1}	a_n

reverse order

Jury Stability test

- Forming the b's row.

Row	z^0	z^1	z^2	z^3	□	z^{n-2}	z^{n-1}	z^n
1	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	a_{n-3}	□	a_2	a_1	a_0
2	a_0	a_1	a_2	a_3	□	a_{n-2}	a_{n-1}	a_n
3	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	b_{n-4}	□	b_1	b_0	

$$b_k = \begin{vmatrix} a_n & a_{n-1-k} \\ a_0 & a_{k+1} \end{vmatrix}, \qquad k = 0, 1, 2, \mathrm{K} \;\;, n-1$$

Jury Stability test

Row	z^0	z^1	z^2	z^3	□	z^{n-2}	z^{n-1}	z^n
1	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	a_{n-3}	□	a_2	a_1	a_0
2	a_0	a_1	a_2	a_3	□	a_{n-2}	a_{n-1}	a_n
3	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	b_{n-4}	□	b_1	b_0	
4	b_0	b_1	b_2	b_3	□	b_{n-2}	b_{n-1}	

reverse order

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n$$

ردیف	z^0	z^1	z^2	z^3	$\ldots$	z^{n-2}	z^{n-1}	z^n
۱	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	a_{n-3}	$\ldots$	a_2	a_1	a_0
۲	a_0	a_1	a_2	a_3	$\ldots$	a_{n-2}	a_{n-1}	a_n
۳	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	b_{n-4}	$\ldots$	b_1	b_0	
۴	b_0	b_1	b_2	b_3	$\ldots$	b_{n-2}	b_{n-1}	
۵	c_{n-2}	c_{n-3}	c_{n-4}	c_{n-5}	$\ldots$	c_0		
۶	c_0	c_1	c_2	c_3	$\ldots$	c_{n-2}		
$\vdots$	$\vdots$							
۲n − ۵	p_3	p_2	p_1	p_0				
۲n − ۴	p_0	p_1	p_2	p_3				
۲n − ۳	q_2	q_1	q_0					

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n$$

Jury Stability test

- The stability condition is

1 $|a_n| < a_0$

3 $P(z)\big|_{z=-1} \begin{cases} > 0 & \text{for n even} \\ < 0 & \text{for n odd} \end{cases}$

2 $P(z)\big|_{z=1} > 0$

4 $|b_{n-1}| > |b_0|$

$|c_{n-2}| > |c_0|$

M

Until order=2 $|q_2| > |q_0|$

Jury Stability test

- Example : The closed-loop characteristic equation is

$$z^4 - 1.2z^3 + 0.07z^2 + 0.3z - 0.08 = 0$$

- Test the stability of this closed-loop system.

Jury Stability test

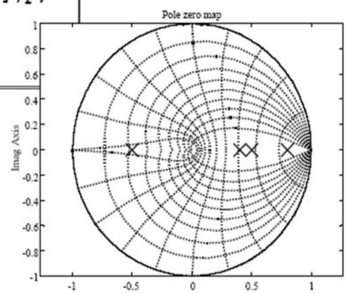
- Use command root(p) in MATLAB

```
» p=[1 -1.2 0.07 0.3 -0.08];
» roots(p)
ans =
    0.8000
    0.5000
    0.4000
   -0.5000
```

Jury Stability test

```
» pzmap([0 0 0 0 1],p)
» zgrid
» axis('equal')
```

- ALL poles are inside the unit circle



Jury Stability test

- We will now use the Jury Stability test to check the result.

$$n = 4 \longrightarrow z^4 - 1.2z^3 + 0.07z^2 + 0.3z - 0.08 = 0$$

$a_0 = 1$

$a_1 = -1.2$

$a_2 = 0.07$

$a_3 = 0.3$

$a_4 = -0.08$

Jury Stability test

- First condition, $|a_n| < a_0$
  - $|a_4| < a_0 \quad \Rightarrow \quad |-0.08| < 1$ ok
- Second condition, $P(z)\big|_{z=1} > 0$

$$1^4 - 1.2(1)^3 + 0.07(1)^2 + 0.3(1) - 0.08 = 0.09 > 0$$

ok

Jury Stability test

- Third condition, $P(z)\big|_{z=-1} \begin{cases} > 0 & \text{for n even} \\ < 0 & \text{for n odd} \end{cases}$

$$(-1)^4 - 1.2(-1)^3 + 0.07(-1)^2 + 0.3(-1) - 0.08 = 1.89 > 0$$

ok

Jury Stability test

- Set up the table for the last condition

Row	z^0	z^1	z^2	z^3	z^4
1	-0.08	0.3	0.07	-1.2	1
2	1	-1.2	0.07	0.3	-0.08

- Easier way to calculate b's row is write the table as

Jury Stability test

Row	z^0	z^1	z^2	z^3	z^4	
	-0.08				1	
	1				-0.08	$b_3=-0.994$
	-0.08			-1.2		
	1			0.3		$b_2=1.176$
	-0.08		0.07			
	1		0.07			$b_1=-0.0756$
1	-0.08	0.3				
2	1	-1.2				$b_0=-0.204$

Jury Stability test

- Write the b's rows as

Row	z^0	z^1	z^2	z^3	z^4
1	-0.08	0.3	0.07	-1.2	1
2	1	-1.2	0.07	0.3	-0.08
3	-0.994	1.176	-0.0756	-0.204	
4	-0.204	-0.0756	1.176	-0.994	

- calculate the c's rows

Jury Stability test

Row	z^0	z^1	z^2	z^3	z^4	
	-0.994			-0.204		
	-0.204			-0.994		$c_2=0.946$
	-0.994		-0.076			
	-0.204		1.176			$c_1=-1.184$
3	-0.994	1.176				
4	-0.204	-0.0756				$c_0=0.315$

Jury Stability test

- The complete table is

Row	z^0	z^1	z^2	z^3	z^4
1	-0.08	0.3	0.07	-1.2	1
2	1	-1.2	0.07	0.3	-0.08
3	-0.994	1.176	-0.0756	-0.204	
4	-0.204	-0.0756	1.176	-0.994	
5	0.946	-1.184	0.315		

Jury Stability test

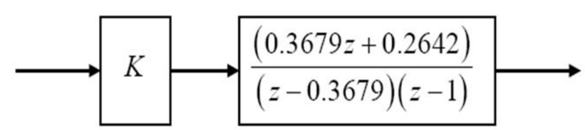
- The Fourth conditions, $|b_{n-1}| > |b_0|$
  - $|b_3| > |b_0| \quad \Rightarrow \quad |-0.994| > |-0.204|$ ok
- And $|c_2| > |c_0|$
  - $|c_2| > |c_0| \quad \Rightarrow \quad |0.946| > |0.315|$ ok

تمرین

- 1- پایدرای معادله مشخصه داده شده زیر را بررسی نمایید
- الف) $P(z) = z^3 - 1.1z^2 - 0.1z + 0.2 = 0$
- ب) $P(z) = z^3 - 1.3z^2 - 0.08z + 0.24 = 0$

Jury Stability test

- Example 2: the open-loop transfer function is



Jury Stability test

- Find range of K which make the closed-loop stable.
- The unity feedback closed loop transfer function is

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{K\left(0.3679z + 0.2642\right)}{z^2 + (0.3679K - 1.3679)z + 0.3679 + 0.2642K}$$

Jury Stability test

- The characteristic equation is

$$n = 2$$

$$z^2 + (0.3679K - 1.3679)z + 0.3679 + 0.2642K = 0$$

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = (0.3679K - 1.3679)$$

$$a_2 = 0.3679 + 0.2642K$$

Jury Stability test

- First condition, $|a_n| < a_0$
  - $|a_2| < a_0 \quad \Rightarrow \quad |0.3679 + 0.2642K| < 1$

$$2.3925 > K > -5.1775$$

Jury Stability test

- Second condition, $P(z)\big|_{z=1} > 0$

$$1^2 + (0.3679K - 1.3679)1 + 0.3679 + 0.2642K > 0$$

$$0.6321K > 0$$

$$K > 0$$

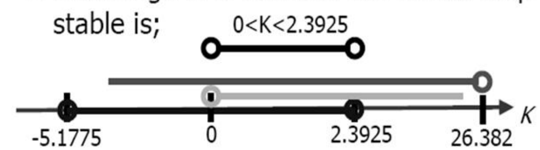
Jury Stability test

- Third condition, $P(z)\big|_{z=-1}\begin{cases}>0 & \text{for n even}\\ <0 & \text{for n odd}\end{cases}$

$$(-1)^2+(0.3679K-1.3679)(-1)+0.3679+0.2642K>0$$
$$2.7358-1.037K>0$$
$$K<26.382$$

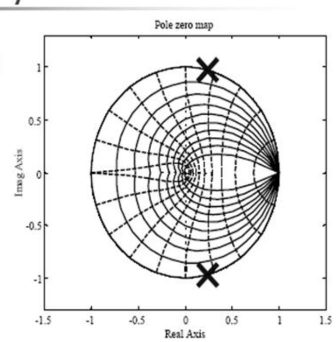
Jury Stability test

- The order is=2 no need to test the fourth condition.
- The range of K to make the closed-loop stable is;



Jury Stability test

- With K=2.3925, the closed-loop poles are ON the unit circle.



Summary

- The condition for stability in the z-plane is all poles must lie inside the unit circle.
- We can test the characteristic polynomial for the closed-loop stability without actually finding the pole locations.

تحلیل پایداری با استفاده از تبدیلات دوخطی و معیار پایداری روث

$$z = \frac{w+1}{w-1} \Rightarrow w = \frac{z+1}{z-1}$$

تبدیل فوق درون دایره واحد صفحه Z را به نیمه چپ صفحه w می نگارد.

$$w = \sigma + j\omega$$

از آنجاییکه درون دایره واحد در صفحه z چنین است :

$$|z| = \left|\frac{w+1}{w-1}\right| = \left|\frac{\sigma + j\omega + 1}{\sigma - j\omega - 1}\right| < 1$$

به دست می آوریم :

$$\frac{(\sigma+1)^2 + \omega^2}{(\sigma-1)^2 + \omega^2} < 1$$

$$(\sigma+1)^2 + \omega^2 < (\sigma-1)^2 + \omega^2$$

$$\Downarrow$$

$$\sigma < 0$$

- درون دایره واحد در صفحه z با نیمه چپ صفحه w متناظر است.
- دایره واحد در صفحه z به محور موهومی در صفحه w و بیرون دایره واحد در صفحه z به نیمه راست صفحه w نگاشته می شود.

تحلیل پایداری با استفاده از تبدیلات دوخطی و معیار پایداری روث

- ابتدا جایگزینی زیر را در معادله مشخصه انجام می دهیم : $z = \frac{w+1}{w-1}$

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n = 0$$

$$\Downarrow$$

$$a_0 \left(\frac{w+1}{w-1}\right)^n + a_1 \left(\frac{w+1}{w-1}\right)^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\left(\frac{w+1}{w-1}\right) + a_n = 0$$

- از ضرب کردن هر دو طرف معادله قبل در $(w-1)^2$ و حذف مخرج ها :

$$Q(w) = b_0 w^n + b_1 w^{n-1} + \ldots + b_{n-1} w + b_n = 0$$

- اکنون می توانیم معیار پایداری روث را به همان روش سیستم های زمان پیوسته اعمال کرد.