عبور از بیابان
مساله اکتشاف

حسین نادری

۱۰ اردیبهشت ۱۳۹۵

چکیده

مساله عبور از بیابان، مساله ای ریاضی است که می خواهد حداکثر مسافتی را که یک ماشین جیپ با مقدار مشخص سوخت سفر کند را به دست آورد. جیپ می تواند مقدار محدودی سوخت را با خود حمل کند ولی می تواند سوختش را در هر جایی از بیابان رها کرده و بعدا از آن حا سوخت گیری کند. در ۱۹۴۷، ان. جی. فاین، ریاضی دان آمریکایی، این مساله را حل کرد.

۱ صورت سوال

n بشکه سوخت در یک پایگاه انباشته شده اند. باک هر جیپ گنجایش حداکثر یک بشکه سوخت دارد و جیپ با یک بشکه سوخت، می تواند به اندازه یک کیلومتر مسافت را طی کند (مصرف سوخت در طول مصرف همگن است). در هر نقطه از مسیر جیپ می تواند، مقدار دلخواهی از سوختی را که حمل می کند رها کند، یا سوختی که از سفر قبل رها کرده است را بردارد به شرطی که بیشتر از ظرفیت باک جیپ نشود. مساله به دو صورت مطرح می شود:

بیابان گردی جیپ باید در انتهای هر سفر به پایگاه برگردد.

عبور از بیابان جیپ باید در انتهای هر سفر به پایگاه برگردد به جز سفر آخر، که جیپ باید تا جایی که سوخت دارد سفر کند و از پایگاه فاصله بگیرد.

در هر دو صورت، هدف بیشینه کردن مسافتی است که جیپ در سفر پایانی طی می کند. همچنین هدف می تواند یافتن کمترین تعداد بشکه سوخت لازم مورد نیاز برای یک سفر با مسافت داده شده باشد.

در مساله کلاسیک همه ی مقدار ها پیوسته می باشند ولی صورت های دیگری نیز مطرح شده اند که تنها مقادیر گسسته ای از سوخت می تواند رها شود یا در فاصله های گسسته ای از پایگاه رها شود.

۲ راه حل

راهبرد زیر مسافت طی شده در سفر پایانی «بیابان گردی» را بیشینه می کند.

- جیپ n بار سفر می کند. هر سفر با یک بشکه سوخت از پایگاه آغاز می شود.
- در سفر اول جیپ مسافت $۱/(۲n)$ کیلومتر را طی کرده و $(n-۱)/n$ بشکه سوخت رها می کند و با سوخت باقی مانده اش به پایگاه بر می گردد.
- در $n-۱$ سفر بعدی، جیپ به اولین جایی که بنزین رها شده که می رسد $۱/(۲n)$ بشکه سوخت گیری می کند، در نتیجه با باک کامل ادامه مسیر را طی می کند. همچنین در راه برگشت به نزدیکترین ذخیره موقت پایگاه که می رسد $۱/(۲n)$ بشکه سوخت گیری می کد و سوخت لازم برای برگشت به پایگاه را به دست می آورد.
- در سفر دوم جیپ پس از این که به اولین ذخیره موقت سوخت رسید، $۱/(۲n-۱)$ کیلومتر مسیر طی می کند و در دومین ذخیره گاه $(n-۲)/(n-۱)$ واحد سوخت رها می کند. جیپ هنوز $۱/(۲n-۱)$ واحد سوخت دارد که برای برگشت به اولین ذخیره گاه کافی است. آن جا $۱/(۲n)$ سوخت بر می دارد و به پایگاه بر می گردد.
- در $n-۲$ سفر بعدی جیپ هنگام رسیدن به دومین جایگاه سوخت رها شده، $۱/(۲n-۲)$ واحد سوخت گیری می کند و با باک کامل ادامه مسیر را طی می کند. همچنین در راه برگشت وقتی به آن جا می رسد $۱/(۲n-۲)$ سوخت می گیرد که برای بازگشت به سوخت ذخیره شده در جایگاه اول کافی است.
- جیپ همین رویه را ادامه می دهد، به این ترتیب که که سفر kام kامین جایگاه سوخت با $(n-k)/(n-k+۱)$ واحد سوخت را در $۱/(۲n-۲k+۲)$ کیلومتری از جایگاه قبلی ایجاد می کند. در هر کدام از $n-k$ سفر بعدی $۱/(n-k+۱)$ سوخت در راه رفت و برگشت از جایگاه kام برداشته می شود.

هنگامی که جیپ سفر پایانی اش را شروع می کند، $n-۱$ جایگاه سوخت در راهش قرار دارند. دورترین آن ها حاوی $۱/۲$ واحد سوخت است، دومین دورترین $۱/۳$ سوخت دارد و نزدیکترین جایگاه $۱/n$ سوخت دارد. با احتساب ۱ واحد سوخت اولیه در ابتدای مسیر، جیپ می تواند سفری به مسافت زیر داشته باشد:

$$۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+\ldots+\frac{۱}{n}=\sum_{i=۱}^{n}\frac{۱}{i}$$

بیشینه مسافت سفر طی شده در بیابان نصف این مقدار است. جیپ در راه به هر جایگاه سوخت که می رسد نیمی از سوخت آن را بر می دارد، که باک را کاملا پر می کند. پس

از گذر کردن از دورترین جایگاه سوخت ذخیره شده، جیپ نیم کیلومتر در بیابان سفر می کند و به سمت پایگاه بر می گردد. در راه برگشت به هر جایگاه سوخت که می رسد، سوخت باقی مانده را بر می دارد. مجموع مقدار های برداشته شده برای رسیدن به پایگاه کافی است.

مسافت طی شده در سفر آخر برابر عدد nام سری همساز است. از آنجایی که سری همساز کران ندارد، در سفر آخر با سوخت کافی می توان به هر اندازه ای سفر کرد. مقدار سوخت مورد نیاز و تعداد ذخیره گاه ها هر دو نسبت به مسافت سفر آخر، نهایی رشد می کنند.

«عبور از بیابان» نیز راه حلی مشابه دارد، با این تفاوت که در سفر آخر جیبپ نیاز به سوخت برای برگشت ندارد. پس جیپ در سفر kام $(۲n-۲k+۱)(۲n-۲k-۱)$ سوخت در فاصله ی $۱/(۲n-۲k+۱)$ از جایگاه سوخت قبلی می ریزد. در هر یک از $n-k-۱$ سفر بعدی جیپ از جایگاه kام $۲/(۲n-۲k+۱)$ سوخت مجموعا در راه رفت و برگشت بر می دارد.

وقتی که جیپ سفر پایانی اش را شروع می کند، $n-۱$ جایگاه سوخت وجود دارد. دورترین جایگاه ۱/۳ واحد سوخت ، دومین دورترین ۱/۵ واحد سوخت دارد و به همین ترتیب در نزدیکترین جایگاه $۱/(۲n-۱)$ واحد سوخت رها شده است. با شروع از پایگاه با باک پر در سفر آخر می توان مسافت زیر را طی کرد:

$$۱+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۵}+\cdots+\frac{۱}{۲n-۱}=\sum_{k=۱}^{n}\frac{۱}{۲k-۱}=H_{۲n-۱}-\frac{۱}{۲}H_{n-۱}$$

جیپ به هر جایگاهی که می رسد همه ی سوخت باقی مانده را بر می دارد و باکش پر می شود. پس از گذر از آخرین جایگاه ۱ کیلومتر دیگر هم سفر می کند.

توجه کنید:

$$\sum_{k=۱}^{n}\frac{۱}{۲k-۱}>\sum_{k=۱}^{n}\frac{۱}{۲k}=\frac{۱}{۲}H_n$$

پس می توان به هر مسافت دلخواهی از پایگاه دور شد. مانند قبل سوخت مورد نیاز نسبت به مسافت خواسته شده نمایی رشد می کند.

۳ کاربردها

مساله کاربردهای عملی در موقعیت های جنگی دارد، به خصوص زمانی که کارآیی سوخت مهم باشد. در زمینه بمباران ژاپن در جنگ جهانی دوم ، رابرت مک نمارا در فیلم «مه در جنگ» می گوید بهینه مصرف کردن سوخت باعث شد سوخت به جایگاه های جلوتر منتقل شود، زیرا پرتاب بمب در خشکی چین غیر ممکن بود؛ به خاطر استراتژیک بودن جزیره فعال:

«ما مجبور بودیم هواپیماها را از پایگاه های کانزاس به هند ببریم. سپس آنها را به سمت چین به پرداز در آوریم. ...قرار بود B-۲۹ ها را به آن جا ببریم در حالی که هیچ

هواپیمای تانکری نبود. آن هارا از هند به چنتگو به پرواز در آوریم؛ آن جا سوخت رها کردیم و به سمت هند برگشتیم. به مقدار کافی برای پرواز به یاواتا در ژاپن، در چنگتو سوخت رها کردیم. کارخانه ها را بمباران کردیم و به هند برگشتیم.»

همچنین در عملیات بلک باک کاربرد دیگری از این ایده را ببینید. در این ماموریت نیروی هوایی مجبور بود سوخت گیری هوایی برای رسیدن به هدف بمب گذاری بکند.

حسین نادری
دانشجوی علوم کامپیوتر شریف

hnaderi268.blog.ir
hnaderi268@gmail.com