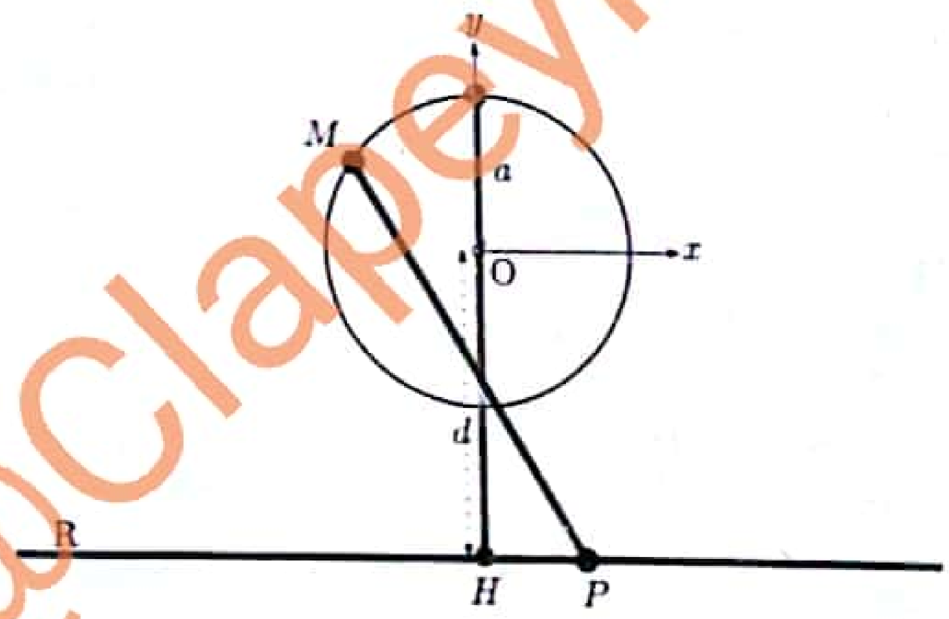
به نام خدا

باشگاه دانش پژوهان جوان

آزمون نخست المپیاد فیزیک ایران (مرحله چهل نفر)

۱. شیطونک بلاتکلیف

در شکل مقابل نقطه M بر روی لبه چرخی به شعاع a توسط میله صلبی به طول ثابت به مهره متحرک P که فقط می تواند در طول میله R حرکت کند متصل است. میله R به موازات محور x در صفحه چرخ قرار دارد و فاصله آن تا مرکز چرخ d است. چرخ با سرعت زاویه ای ثابت ω حول محوری که بر صفحه آن عمود است و از مرکز آن می گذرد، می چرخد. مبدا مختصات را مرکز دایره بگیرید. در لحظه $t = 0$ نقطه M در بالای چرخ و روی محور y قرار دارد.



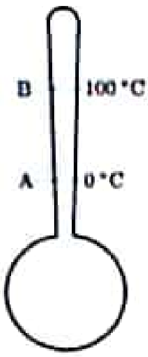
الف) مکان مهره متحرک P نسبت به مبدا H روی میله، x، را به عنوان تابعی از زمان و پارامترهای داده شده به دست آورید. همه حالت های ممکن را در نظر بگیرید.

ب) در صورت حرکت به سمت چپ یا به سمت راست، معلوم کنید که مهره P در چه بازه ای جا به جا می شود؟

ج) در لحظه ای که میله MP بر دایره چرخ مماس می شود مقدار x چقدر است؟

۲) دو قسمت a) و b) از هم مستقل‌اند.

a) مقداری مایع به حجم V_1 و دمای θ_1 را با مقدار دیگری از همان مایع به حجم V_2 و دمای θ_2 مخلوط می‌کنیم. پس از رسیدن به تعادل گرمایی حجم مایع حاصل چقدر است؟ ظرفیت گرمایی ویژه مایع و ضریب انبساط حجمی مایع، β، را در گسترهٔ دمایی مورد بررسی ثابت فرض کنید. فرض کنید در این فرایند کاری انجام نمی‌شود و گرمایی با محیط مبادله نمی‌شود.



b) مطابق شکل یک دماسنج جیوه‌ای شامل یک مخزن شیشه‌ای حاوی جیوه در نظر بگیرید. لولهٔ دماسنج، استوانهٔ یکنواخت نیست و سطح مقطع آن با افزایش ارتفاع اندکی افزایش می‌یابد. این دماسنج به این صورت درجه‌بندی شده است: در دمای ذوب یخ سطح جیوه به A می‌رسد، این مکان را با صفر علامت‌گذاری می‌کنیم. در دمای جوش آب سطح جیوه به B می‌رسد، این مکان با 100 علامت‌گذاری می‌کنیم. سپس بین A و B را به صد قسمت مساوی تقسیم و علامت‌گذاری می‌کنیم.

میزان افزایش سطح مقطع لوله با ارتفاع طوری است که قطر لوله در B ده درصد از قطر لوله در A بزرگ‌تر است. در محیطی که این دماسنج عدد 50 را نشان می‌دهد دمای واقعی چقدر است؟ از انبساط شیشه با افزایش دما صرفنظر کنید.
برای به دست آوردن مقدار عددی دمای واقعی از بسط

$$(1+\epsilon)^n = 1 + n\epsilon + n(n-1)\epsilon^2/2 + \cdots$$

استفاده کنید و جواب را در دو مرحله یک بار تا مرتبهٔ اول ϵ و یک بار تا مرتبهٔ دوم ϵ به دست آورید.

راهنمایی: حجم یک مخروط به شعاع قاعدهٔ r و ارتفاع h برابر $\pi r^2 h/3$ است.

۳) ذره کوئنتومی در جعبه - اصل طرد پائولی و گاز الکترونی

*در تمام مسئله ضرایب ثابت به دست آمده از تحلیل ابعادی را عدد یک فرض کنید و حتما دور جواب های آخر کادر بکشید

الف) یک ذره آزاد به جرم m در یک جعبه به حجم V در نظر بگیرید به علت محبوس شدن ذره در یک حجم محدود انرژی جنبشی ذره مقادیر غیر صفری می باشد این مقادیر را میتوان به فرم مضرب هایی از یک انرژی پایه نوشت با استفاده از تحلیل ابعادی این انرژی پایه را برحسب حجم و جرم و ثابت پلانک h که بعد آن تکانه در طول است به دست آورید

ب) بسیاری از رسانا ها را میتوان به صورت یک گاز متشکل از تعداد زیادی الکترون در نظر گرفت. ذرات الکترون از اصل طرد پائولی پیروی می کنند طبق این اصل فقط یک الکترون می تواند در هر تراز انرژی سیستم قرار بگیرد (البته بدون در نظر گرفتن اسپین الکترونها). به علت این اصل، الکترون ها در سیستم های چند ذره ای مجبور می شوند که در تراز های انرژی بالاتر سیستم قرار بگیرند در نتیجه سیستم های الکترونی حتی در دمای صفر، انرژی و فشار غیر صفر دارند. دمای رسانا را صفر در نظر بگیرید. به بیشینه ی انرژی جنبشی ممکن برای یک الکترون در سیستم، انرژی فرمی می گویند انرژی میانگین الکترون ها را می توان به صورت مضربی از انرژی فرمی نوشت فرض کنید تعداد کل الکترون های سیستم N باشد. به علت اصل طرد می توان هر الکترون را به صورت یک ذره محبوس در حجم V/N در نظر گرفت با استفاده از قسمت الف رابطه ای برای انرژی فرمی یک رسانا به دست آورید سپس انرژی کل رسانا را به دست آورید. در این قسمت از برهمکنش بین الکترون ها چشم بپوشید

ج) حال با استفاده از تحلیل ابعادی فشار گاز را برحسب انرژی و حجم سیستم بنویسید سپس یک رابطه برای فشار گاز الکترونی در دمای صفر برحسب تعداد ذره و حجم و بقیه ثابت ها به دست آورید نشان دهید در حالتی که ثابت پلانک صفر باشد نتیجه با فیزیک کلاسیک سازگار می شود

د) حال می توان از روی انرژی سیستم و ثابت بولتزمن، k، یک دمای مشخصه به سیستم نسبت داد به این دما، دمای فرمی گفته می شود بعد ثابت بولتزمن انرژی بر دما است با استفاده از تحلیل ابعادی این دما را به دست آورید

برای رسانا های عادی این دما از مرتبه ی ۱۰۰۰۰ کلوین است. در نتیجه در دماهای آزمایشگاهی اثر دمادار بودن سیستم با تقریب خوبی قابل چشم پوشی است و رسانا از روابط به دست آمده در دمای صفر تبعیت میکند مشابه رسانا ها اصل طرد پائولی در تعیین رفتار ماکروسکوپیک مواد در دمای آزمایشگاه بسیار موثر میباشد.

10^{-33}

10^{-2}

$$\frac{10^{25}\cdot 10^{-68}}{10^{-23}\cdot 10^{-31}}$$

و) در این قسمت می خواهیم اثر برهمکنش کولنی بین الکترون ها را در نظر بگیریم برای انرژی برهمکنش هر الکترون با سیستم فرض کنید ذره در یک محیط باردار با چگالی ثابت و حجم V قرار گرفته است ابتدا انرژی پتانسیل هر ذره و سپس انرژی پتانسیل کل سیستم را به دست آورید. با استفاده از قسمت ب نسبت این انرژی به انرژی جنبشی سیستم را به دست آورید بررسی کنید در چه حالت هایی می توان از اثر برهمکنش صرفه نظر کرد

ه) حال می خواهیم ظرفیت گرمایی رسانا ها را به دست آوریم ابتدا در دمای T با استفاده از تحلیل ابعادی یک رابطه برای انرژی سیستم به دست آورید انرژی سیستم را به صورت یک تابع از دما و دمای فرمی بنویسید دقت کنید که در دمای صفر نتایج قسمت قبل باید به دست آید پارامتر کوچک مسئله را مشخص کرده سپس تا مرتبه دو تابع را به دست آورید. ظرفیت گرمایی در حجم ثابت سیستم از مشتق انرژی نسبت به دما در حجم و تعداد ذره ثابت به دست می آید با توجه به قانون سوم ترمودینامیک ظرفیت گرمایی همه مواد در دمای صفر کلوین صفر می باشد. با استفاده از این مطلب، نتیجه نهایی را ساده کرده سپس ظرفیت گرمایی سیستم را به دست آورید

و) قسمت های (الف)، (ب) و (و) را برای یک رسانای دلخواه D بعدی حل کنید

به نام خدا

باشگاه دانش پژوهان جوان

آزمون دوم المپیاد فیزیک ایران (مرحله چهل نفر)

---

۱. الف) پاره خط AB به طول $2a$ حاوی بار خطی به چگالی طولی ثابت و مثبت λ است. محور x عمود منصف AB است و آن را در نقطه O قطع می کند. میدان الکتریکی را در نقطه P روی محور x و به فاصله x از نقطه O به دست آورید.

ب) با انتخاب یک مبدأ مناسب، پتانسیل الکتریکی را در نقطه P به دست آورید.

$$\int \frac{d\theta}{\cos\theta} = \ln(\tan\theta + \sec\theta) + C \qquad (1)$$

ج) جرم نقطه ای m با بار مثبت q با سرعت اولیه v_0 بر روی محور x به سمت نقطه O از سیستم ذکر شده پرتاب می شود. در لحظه پرتاب، جرم m در فاصله d_1 از نقطه O است. کمترین فاصله جرم m از نقطه O را d_2 بنامید و آن را به دست آورید. فرض کنید $d_1 \ll a$

$$\ln(1 + x) \approx x + \cdots \qquad (2)$$

د) یک شش ضلعی منتظم به طول ضلع $2a$ در نظر بگیرید و مرکز آن را نقطه O بنامید. محور z عمود بر سطح شش ضلعی است و از نقطه O می گذرد. اضلاع شش ضلعی حاوی بار الکتریکی با چگالی خطی ثابت و مثبت λ هستند. میدان الکتریکی و پتانسیل الکتریکی را در هر نقطه دلخواه از محور z به فاصله z از نقطه O به دست آورید.

ه) جرم نقطه ای m با بار مثبت q از فاصله d_1 با سرعت اولیه v_0 بر روی محور z به سمت نقطه O از سیستم ذکر شده پرتاب می شود. کمترین فاصله جرم m از نقطه O را d_2 بنامید و آن را به دست آورید. فرض کنید $d_1 \ll a$

و) الکترونی با با منفی $-e$ و جرم m فقط می تواند روی محور z دستگاه فوق حرکت کند. الکترون در ابتدا در نقطه O در حال تعادل است. سپس کمی از حالت تعادل منحرف شده و روی محور z نوسان می کند. بسامد زاویه ای نوسان های کوچک این الکترون را به دست آورید.

---

۲) یک جادهٔ مستقیم در امتداد محور x در نظر بگیرید. اتومبیلی به جرم m می‌خواهد از مبدأ مختصات و در لحظهٔ $t = 0$ از حال سکون شروع به حرکت کند و پس از طی مسافتی روی محور x در نقطهٔ $x = L$ بایستد و این کار را در کوتاه‌ترین زمان ممکن در شرایط زیر انجام دهد.

فرض کنید پارامترهای معلوم در این مسئله طوری است که اتومبیل محدودیت افزایش سرعت ندارد، بنابراین بخشی از مسیر را با حداکثر نیروی رو به جلو ناشی از موتور که آن را ثابت و برابر ma در نظر می‌گیریم پیش می‌رود. برای کاستن از سرعت نهایی و توقف در مقصد، در بخش دیگر مسیر با حداکثر نیروی ناشی از ترمز که آن را نیز ثابت و دارای اندازهٔ ma' $(a' > 0)$ در نظر می‌گیریم حرکت‌اش را کند می‌کند تا سرانجام متوقف شود.

نیروی مقاومت هوا در تمام مسیر متناسب با سرعت لحظه‌ای اتومبیل، v، و به صورت $-bv$ $(b > 0)$ است.

اگر در روابط به جای a و a' از v_a و $v_{a'}$ که به صورت $v_a = ma/b$ و $v_{a'} = ma'/b$ تعریف می‌شوند استفاده کنید بهتر است.

آ) اگر T لحظه‌ای باشد که سرعت اتومبیل دارای مقدار بیشینهٔ v_m است، T را بر حسب v_m و سایر کمیت‌های معلوم به دست آورید.

ب) اگر T' مدت زمانی باشد که اتومبیل حرکت‌اش را کند می‌کند تا در مقصد متوقف شود، T' را بر حسب v_m و سایر کمیت‌های معلوم به دست آورید.

پ) زمان طی کل مسیر را بر حسب v_m و سایر کمیت‌های معلوم بنویسید.

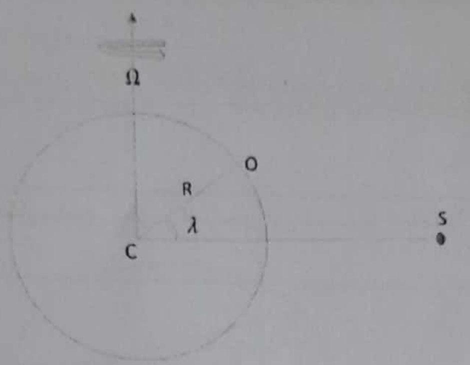
ت) v_m بر حسب کمیت‌های معلوم قابل محاسبه است. معادله‌ای که v_m را بر حسب کمیت‌های معلوم به ما می‌دهد به دست آورید. تا جایی که امکان دارد معادله‌ای که به دست می‌آورید را ساده کنید.

ث) در حالت خاص $a' = a$ بیشینه سرعت v_m، زمان کل حرکت و مسافت طی شده تا لحظهٔ T را بر حسب کمیت‌های معلوم محاسبه کنید.

در صورت نیاز:

$$\int \frac{du}{\alpha + \beta u} = \frac{1}{\beta} \ln|\alpha + \beta u|, \qquad \int \frac{u\,du}{\alpha + \beta u} = \frac{u}{\beta} - \frac{\alpha}{\beta^2} \ln|\alpha + \beta u|$$

۳. ماهواره ی S را در نظر بگیرید که در مداری دایروی با سه برابر شعاع زمین در حال گردش حول مرکز زمین است. صفحه‌ی مداری این ماهواره را منطبق بر صفحه‌ی استوای زمین بگیرید و جهت گردش آن را مخالف جهت گردش زمین بگیرید.
مطابق شکل زیر در زمان $t=0$ ناظر O در عرض جغرافیایی λ این ماهواره را در سمت جنوبی آسمان خود مشاهده می‌کند.



- جرم، شعاع و سرعت زاویه ای زمین را به ترتیب برابر با مقادیر معلوم Ω , R, M بگیرید. همچنین اندازه سرعت زاویه‌ای ماهواره را برابر با ω بگیرید.

الف-	معادله ای برای زاویه‌ی $\widehat{COS}$ بر حسب زمان و پارامترهای داده شده در مساله به دست آورید و آن را تا حد امکان ساده کنید.

ب-	پس از گذشت مدت زمان مشخصی(T) ماهواره دیگر برای ناظر قابل مشاهده نخواهد بود. معادله ای برای تعیین این زمان به دست آورید و آن را تا حد ممکن ساده کنید.

- برای ادامه‌ی مساله راهنمایی داده شده در انتهای سوال را بخوانید.

حال مدار ماهواره را یک بیضی و با نیم قطر بزرگ $3R$ و خروج از مرکز نزدیک به صفر e در نظر بگیرید. برای این حالت سرعت زاویه ای ماهواره دیگر ثابت نخواهد بود. اما همواره بین سرعت زاویه‌ای و فاصله‌ی آن از مرکز زمین رابطه ی زیر برقرار است.

$$r^2\omega(t) = \sqrt{GMa(1-e^2)}$$

که در عبارت فوق r فاصله‌ی ماهواره از مرکز زمین، a نیم قطر بزرگ مدار آن و G یک ثابت مثبت است.

پ-	سرعت زاویه‌ای ماهواره را بر حسب زمان و پارامترهای داده شده در مساله و تا مرتبه‌ی اول نسبت به e تعیین کنید. فرض کنید ماهواره در زمان $t=0$ در حداقل فاصله‌ی خود از مرکز زمین قرار دارد.

ت-	قسمت الف را برای مدار بیضوی شکل و تامرتبه‌ی اول نسبت به e مجددا حل کنید.

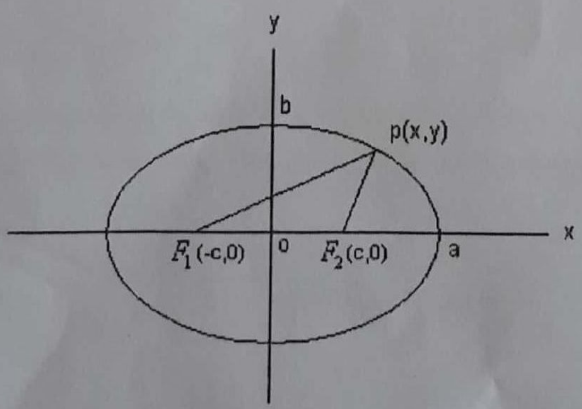
ث-	قسمت ب را برای مدار بیضوی شکل و تا مرتبه‌ی اول نسبت به e مجددا حل کنید.

راهنمایی :

- بیضی مکان هندسی نقاطی از صفحه است که مجموع فاصله‌های آن‌ها از دو نقطه ثابت (که آن ها را کانون های بیضی می نامیم) مساوی با ثابتی مثبت است. معادله ی بیضی در دستگاه مختصاتی منطبق بر مرکز بیضی که محور x و y آن به ترتیب در راستای نیم قطر بزرگ و کوچک بیضی باشند به صورت زیر است.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

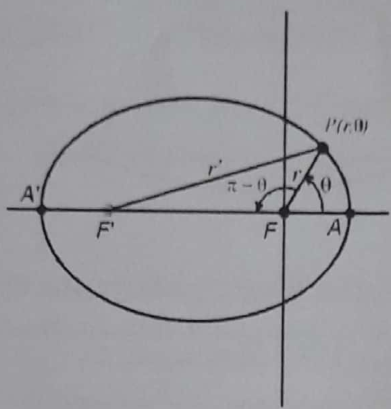
که در معادله ی فوق a و b به ترتیب برابر با نیم قطر بزرگ و کوچک بیضی می باشند.
همچنین می دانیم که بین نیم قطر بزرگ، کوچک و خروج از مرکز بیضی (e) رابطه ی $b^2 = a^2(1-e^2)$ برقرار است.



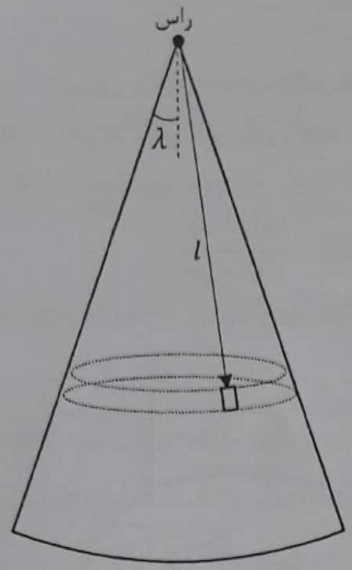
- حرکت بسته‌ی یک جسم تحت اثر نیرویی مرکزی و به فرم عکس مجذوری ($\vec{f} = -\frac{k}{r^۲}\hat{r}$) به صورت یک بیضی خواهد بود که مرکز نیرو منطبق بر یکی از کانون های بیضی خواهد بود. معادله این بیضی در دستگاه مختصاتِ منطبق بر کانون بیضی را می توان به صورت زیر بیان کرد

$$r(\theta) = \frac{a(۱ - e^۲)}{۱ + e\cos\theta}$$

که در معادله ی فوق θ زاویه ی بین بردار مکان نقطه بر روی بیضی و محور نیم قطر بزرگ بیضی(محور X) است.



۴-مطابق شکل، سطح یک مخروط فلزی توسط یک لایه حباب احاطه شده است. حباب به طور کامل به سطح مخروط چسبیده و زاویه راس مخروط λ و کشش سطحی حباب در حالت کلی **تابعی از فاصله از راس مخروط** به صورت $\sigma(l)$ است.



یادآوری: اگر یک پاره خط کوچک دلخواه روی سطح حباب به طول ds در نظر بگیریم، اندازه نیرویی که سمت چپ به راست (و برعکس) پاره خط به هم وارد می کنند، $\sigma\, ds$ است. که σ کشش سطحی در مکان آن پاره خط است.

الف. با نوشتن تعادل نیروها برای یک جز کوچک دیفرانسیلی سطح حباب، معادله ی دیفرانسیلی برای $\sigma(l)$ بدست آورید و حل کلی آن را برحسب ثوابت دلخواه بدست آورید.

ب. فشار (نیروی عمود بر واحد سطح)ی که از حباب به مخروط (و برعکس) وارد می شود را بر حسب l بدست آورید.

ج. نیروی کل وارد شده از بخشی از حباب که در فاصله ی l ، با این شرط که $l < l_0$ ، از راس قرار دارد به مخروط وارد می کند را بدست آورید.

۵) پتانسیل و میدان الکتریکی برای چند آرایش بار سطحی

الف) یک مثلث قائم الزاویه با راس های A,B,C در نظر بگیرید. بر روی مثلث یک چگالی بار سطحی ثابت و مشخص قرار داده شده است.راس A را قائم در نظرگرفته و طول AB را a و AC را b در نظر بگیرید. جهت محور Z را عمود بر صفحه مثلث بگیرید. در ارتفاع Z بالای راس B میدان الکتریکی در راستای محور را به دست آورید. میتوانید برای انتگرال گیری بر روی بار ها از دستگاه قطبی استفاده کنید.

ب) با استفاده از قسمت قبل میدان یک N ضلعی منتظم با چگالی بار ثابت با طول ضلع L را در ارتفاع Z بالای مرکز آن به دست آورید.

ج) نشان دهید در حد N های بسیار بزرگ نتیجه بخش قبل به میدان یک قرص با چگالی بار ثابت تبدیل می شود.

د) با استفاده از قسمت الف میدان الکتریکی درارتفاع Z بالای مرکز یک مستطیل با چگالی بارسطحی ثابت با اضلاع a, b را به دست آورید. محور های X و Y را در صفحه مستطیل و در راستای اضلاع a و b بگیرید.

ه) یک رابطه انتگرالی برای پتانسیل الکتریکی در ارتفاع Z بالای مرکز مستطیل بنویسید. این تابع پتانسیل را $f(a , b , Z)$ می نامیم. سپس نشان دهید این تابع تحت تعویض a و b با یکدیگر تغییر نمی کند.

پاسخ قسمت های بعدی را برحسب همین تابع با آرگومان های مناسب به دست آورید.

و) با استفاده از قسمت قبل و اصل برهم نهی پتانسیل مستطیل را در ارتفاع Z بالای رئوس مستطیل به دست آورید.

ز) با استفاده از قسمت های قبل و اصل برهم نهی پتانسیل الکتریکی مستطیل را در کل فضا به دست آورید.

انتگرال های نامعین زیر ممکن است به کارتان بیاید:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = Arcsin(\frac{x}{a})$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\sqrt{a^2 - x^2}$$

$$\int \frac{dx}{(x^2 + b^2)^{3/2}} = \frac{x}{b^2\sqrt{x^2 + b^2}}$$

$$\int \frac{x\,dx}{(x^2 + b^2)^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + b^2}}$$

آزمون سوم دوره تابستانی، تابستان ۹۸، مدت آزمون: ۴ ساعت

۱) گاز ایده‌آل گازی است متشکل از ذرات آزاد کلاسیک هر یک به جرم m با انرژی جنبشی $E_k = p^2/2m$. در وضعیتی که سرعت ذرات زیاد باشد انرژی جنبشی یک ذره به صورت $E_k = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2} - mc^2$ تعریف می‌شود که p تکانه خطی ذره، c سرعت نور و mc^2 انرژی سکون ذره است. در وضعیتی که $mc^2 \gg pc$ است اگر عبارت انرژی جنبشی نسبیتی را بسط دهیم، اولین جملهٔ غیر صفر همان $p^2/2m$ خواهد شد، و تا جملهٔ دوم غیر صفر خواهیم داشت

$$E_k \approx \frac{p^2}{2m} - \frac{1}{2mc^2}\left(\frac{p^2}{2m}\right)^2.$$

برای گازی متشکل از ذرات آزاد تک اتمی که انرژی جنبشی آن‌ها با معادلهٔ اخیر بیان می‌شود و شامل N ذره در حجم V و دمای T است انرژی آزاد هلمهولتز به صورت

$$F(T,V,N) = -NkT\left[1 + \ln\left(\frac{(\frac{mkT}{2\pi\hbar^2})^{3/2}(1 + \frac{15}{8}\frac{kT}{mc^2})}{(\frac{N}{V})}\right)\right]$$

به دست می‌آید. k ثابت بولتزمن و h $(\hbar = h/2\pi)$ ثابت پلانک است.

آ) معادلهٔ حالت گاز را به دست آورید.

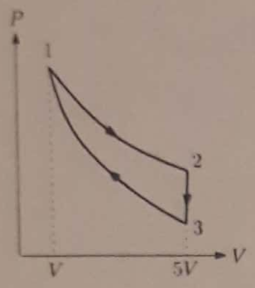
ب) آنتروپی گاز را به دست آورید.

پ) انرژی داخلی گاز را به دست آورید.

ت) ظرفیت گرمایی در حجم ثابت و ظرفیت گرمایی در فشار ثابت را (در وضعیتی که مبادلهٔ گرما به صورت برگشت‌پذیر انجام می‌شود) جداگانه به دست آورید و سپس $C_P - C_V$ را حساب کنید.

ث) حاصل $\kappa_T - \kappa_S$ را بر حسب N، V، T و کمیت‌های ثابت مانند ثابت بولتزمن به دست آورید. κ_T ضریب تراکم تک‌دما و κ_S ضریب تراکم تک‌آنتروپی است.

این گاز چرخهٔ برگشت‌پذیر زیر را طی می‌کند. فرآیند $2 \to 1$ تک‌دما در دمای T است و فرآیند $1 \to 3$ بی‌دررو است.



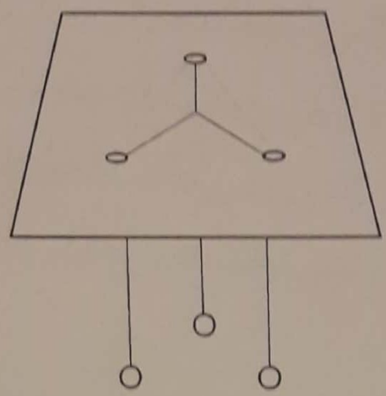
ج) دمای نقطهٔ 3، T_3، چه رابطه‌ای با T دمای نقاط 1 و 2 دارد؟

چ) بازده چرخه را بر حسب T و T_3 بنویسید. جواب را حتی‌الامکان ساده کنید.

در صورت نیاز:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S = -\left(\frac{\partial P}{\partial S}\right)_V, \quad \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P = -\left(\frac{\partial P}{\partial S}\right)_T, \quad \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_S = \left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_P, \quad \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V = \left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_T$$

۲) چینشی مطابق شکل زیر ساخته شده است. سه طناب به طول به اندازه کافی بلند ℓ بر روی یک میز در یک نقطه به هم متصل شده اند و سپس هر کدام از یکی از سه سوراخی که که روی میز تعبیه شده است رد شده و هر کدام در زیر میز به یک جسم به جرم m متصل شده اند. نیروی گرانش g عمود بر میز فعال است و هیچ گونه اصطکاکی در مساله وجود ندارد.



سه سوراخ روی میز روی سه راس یک مثلث متساوی الاضلاع به ضلع d قرار دارند. در تمام مساله از حرکت افقی سه جرم صرف نظر کنید و فقط حرکت عمودی آنها را بررسی کنید در ضمن فرض کنید طناب ها هیچگاه شل نمیشوند. ارتفاع سه جرم را به ترتیب z_1, z_2, z_3 می نامیم.

الف) در حالت تعادل مقادیر z_1, z_2, z_3 را بیابید.

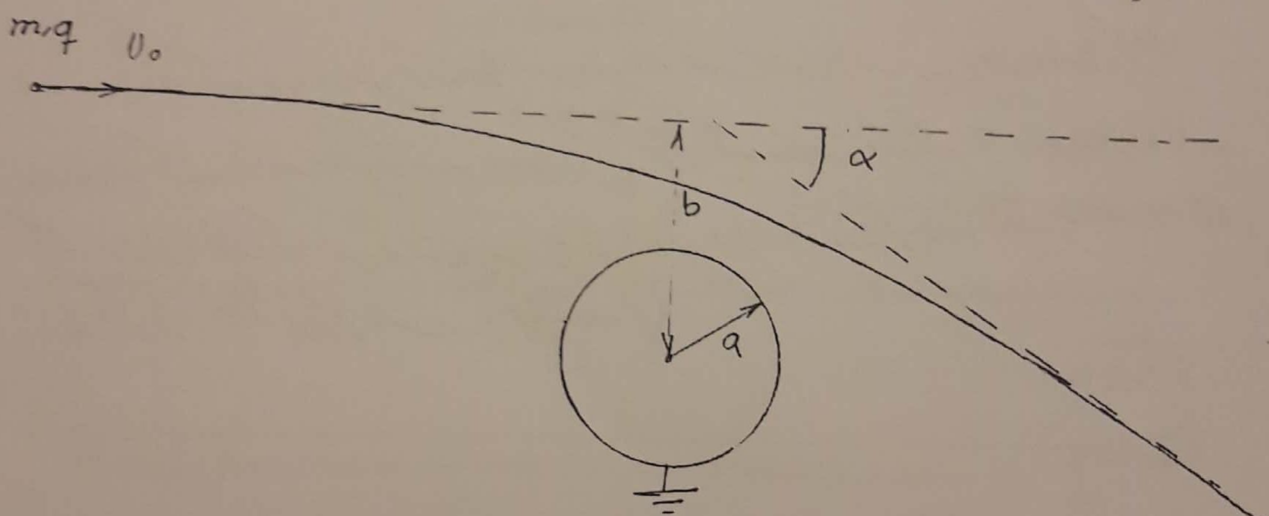
ب) اگر یکی از سه جسم را در حالت تعادل به اندازه بسیار کوچک δ به پایین بکشیم و رها کنیم آیا سیستم پایدار است؟ ارتفاع برحسب زمان سه جسم را پس از آن بدست آورید.

ج) اگر جرم یک را به اندازه δ_1 و جرم دو را به اندازه δ_2 پایین کشیده و رها کنیم که (δ_1 و δ_2 نسبت به طول های موجود در مساله بسیار کوچکند) ارتفاع بر حسب زمان هر سه جسم را بدست آورید.

مسئله 3 (این مسئله از دو بخش تشکیل شده است)

بخش اول

- یک کره‌ی رسانا که به شعاع a را که به زمین وصل شده است (پتانسیل صفر) را در نظر بگیرید. یک جسم نقطه‌ای به جرم m و بار q را از فاصله‌ی خیلی دور از مرکز کره (از بی‌نهایت) در راستایی نقش با سرعت اولیه‌ی v_0 شلیک می‌کنیم. فاصله‌ی خط گذرنده از راستای اولیه‌ی شلیک با مرکز کره‌ی رسانا b می‌باشد ($b>a$). فرض کنید شرایط روی داده‌های مسئله برقرار است که ذره‌ی شلیک شده با انحراف خیلی کمی از نزدیکی کره‌ی رسانا عبور می‌کند و به فواصل خیلی دور می‌رود. زاویه انحراف نهایی از راستای اولیه α را با فرض کوچک بودن تا اولین مرتبه‌ی غیر صفر محاسبه کنید.



پی‌نوشت:

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{x}{2a^2(x^2+a^2)} + \frac{1}{2a^3}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$\int \frac{x\,dx}{(x^2+a^2)^2} = -\frac{1}{2(x^2+a^2)}$$

بخش دوم

$(Q=0)$

- حال فرض کنید یک کره‌ی رسانای خنثی داریم. ذره‌ای به جرم m و بار الکتریکی q را از فاصله‌ی b از مرکز کره‌ی رسانای گفته شده با سرعت اولیه‌ی v_0 در راستای عمود بر شعاع کره شلیک می‌کنیم. شعاع کره‌ی رسانا را a فرض کنید.

الف) v_0 را برحسب m، b، q، a و ϵ_0 به گونه‌ای بیابید که ذره‌ای با شرایط اولیه گفته شد روی دایره‌ای با شعاع b حرکت کند.

حال فرض کنید ذره در حال حرکت روی مسیر دایره‌ای قسمت الف است و در زمان $t=0$ کره‌ی رسانا را با یک تقاومت الکتریکی به زمین وصل می‌کنیم. فرض کنید تقاومت الکتریکی R به قدری زیاد است که می‌توان فرض کرد پس گذشت زمان t شرایط زیر برای بار روی کره δQ و تغییر فاصله‌ی ذره از مرکز کره δr برقرار است: $(r=b+\delta r)$

$\delta r \ll b$

$\delta Q \ll q$

ب) معادلات حاکم بر r و δQ را به صورت دقیق بدون فرض کوچک بودن δr، δQ بنویسید.

ج) حال با فرض اختلالی بودن کمیت‌های گفته شد معادلات حاکم را تا اولین مرتبه غیر صفر برای δr، δQ ساده کنید.

د) از روی معادلات قسمت قبل δQ را تا اولین مرتبه نسبت به کمیت اختلالی برحسب زمان پیدا کنید.

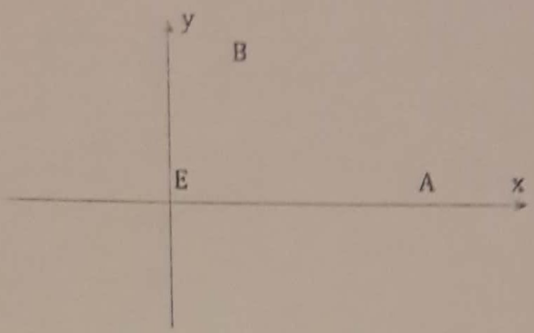
هـ) δr را نیز همانند آنچه برای δQ گفته شد برحسب زمان پیدا کنید.

پی‌نوشت:

$$\ddot{x}+\omega^2 x = \alpha t$$

$$x = A\sin(\omega t) + B\cos\omega t + \frac{\alpha t}{\omega^2}$$

۴. مطابق شکل زیر دو نقطه‌ی A و B را در اطراف زمین در نظر بگیرید. مختصات این دو نقطه در دستگاه مختصات منطبق بر مرکز زمین (E) به صورت زیر است.



$$A = R\begin{pmatrix} \text{۹٫۵} \\ \text{۰} \end{pmatrix}$$

$$B = R\begin{pmatrix} \text{۵} \\ \text{۱۳} \end{pmatrix}$$

که در روابط فوق R برابر با شعاع زمین است.

می‌خواهیم از نقطه‌ی A یک محموله را به نقطه‌ی B ارسال کنیم. برای این منظور از یک مدار سهموی حول مرکز زمین استفاده می‌کنیم.

الف-	به چند روش می‌توان عملیات گفته شده در بالا را انجام داد. جواب خود را با ذکر استدلال و روابط صحیح بیان کنید.

ب-	آیا در مدارهایی که در قسمت الف مشخص کرده‌اید امکان برخورد بسته با سطح زمین وجود دارد؟

پ-	در کدام مدار مدت زمان کمتری صرف رسیدن بسته به نقطه‌ی B می‌شود؟چرا؟ در این بخش از برخورد با سطح زمین صرف نظر کنید.

راهنمایی :

$$\int \frac{dx}{۱ + \cos x} = \frac{۱}{۲}\left(\tan\left(\frac{x}{۲}\right) + \frac{۱}{۳}(\tan^{۳}\frac{x}{۲})\right)$$

اعداد مورد نیاز برای حل مساله

$$G = ۶٫۶۷ \times ۱۰^{-۱۱} m^{۳} kg^{-۱} s^{-۲}$$
$$R = ۶۴۰۰\ Km$$
$$M_{Earth} = ۶ \times ۱۰^{۲۴} Kg$$

بسمه تعالی

آزمون نهایی المپیاد فیزیک (تابستان 98)　　　　مدت آزمون: 180 دقیقه

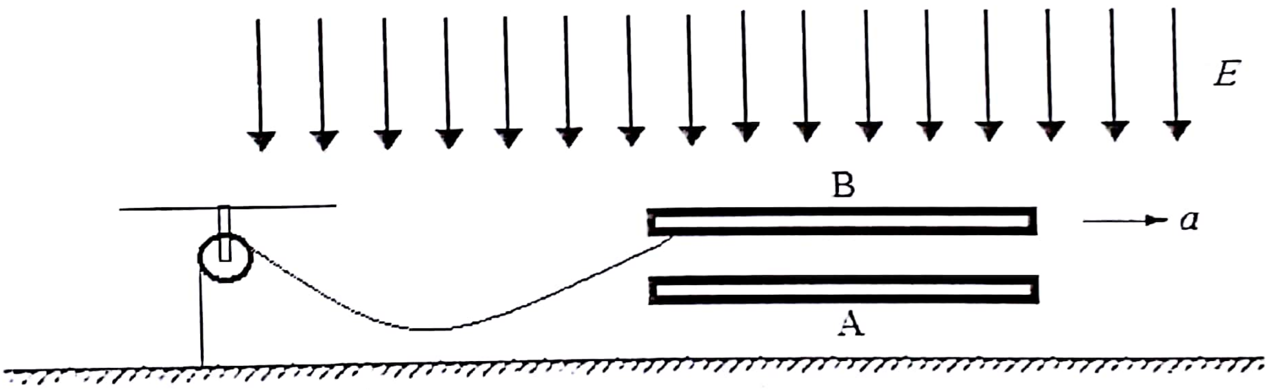
مسئله ی 1)

آ) از نظر الکتریسیته ساکن، سطح زمین را می توان رسانای خوبی در نظر گرفت. در هوای مناسب، یک میدان الکتریکی E به طرف پایین و معادل $150\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ در سطح زمین وجود دارد. بر این اساس چگالی بار سطحی و کل بار الکتریکی روی سطح زمین را به دست آورید.

شعاع زمین = 6400 km ،　$\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}\mathrm{C^2N^{-1}m^{-2}}$

ب) با افزایش ارتفاع از سطح زمین، اندازه میدان الکتریکی (به طرف پایین) کم می شود و در ارتفاع 100 متری به $100\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ می رسد. بار الکتریکی خالصی که به طور متوسط در هر مترمکعب فضای بین سطح زمین و ارتفاع 100 متری وجود دارد را حساب کنید.

- یک راه پیدا کردن میدان الکتریکی جوّ در نزدیکی سطح زمین، مطابق شکل است.

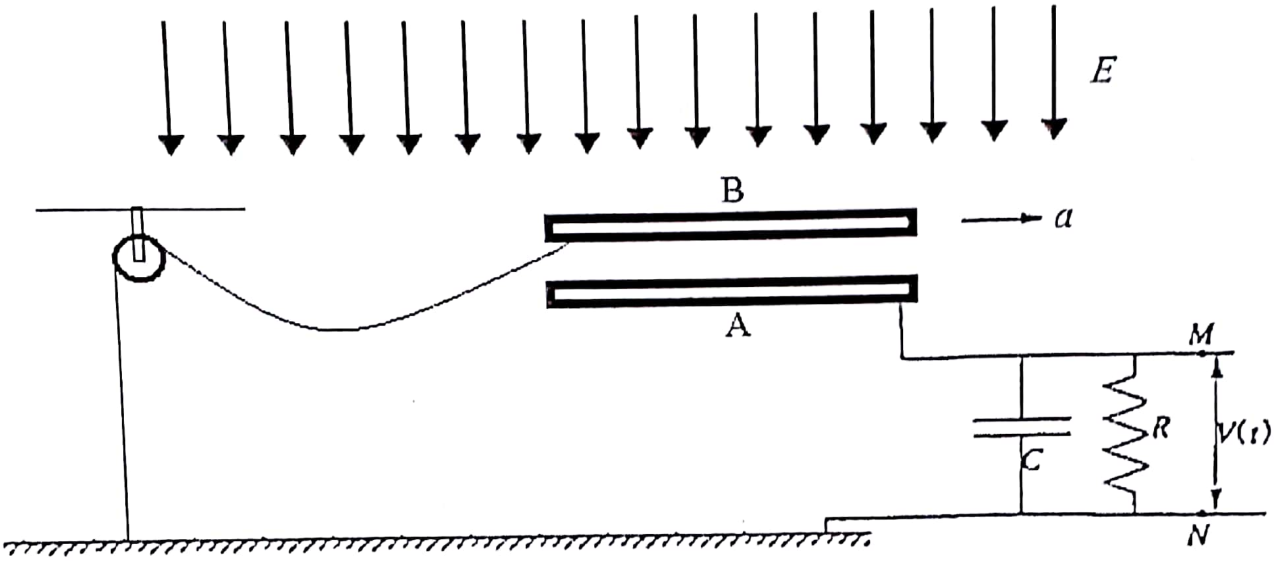


یک صفحه فلزی مربعی با ضلع l نزدیک سطح زمین و کاملاً منزوی در نظر بگیرید (صفحه A). صفحه فلزی مربعی مشابهی که به زمین متصل است (صفحه B) در $t = 0$ درست بالای سر آن است و آن را کاملاً می پوشاند. صفحه فلزی B از حالت سکون با شتاب تندشونده a در راستای افقی حرکت می کند و سپس با همان شتاب کُندشونده a متوقف می شود به طوری که به محض عبور صفحه B از روی سطح A متوقف شود. در این حالت صفحه B مجدداً با شتاب تندشونده a و سپس کُندشونده a به روی صفحه A برمی گردد به طوری که وقتی مجدداً آن را کاملاً می پوشاند متوقف می شود و دوباره این حرکت تکرار می شود.

ب) دوره نوسان صفحه B را برحسب l و a به دست آورید. ($T=?$)

ت) بار الکتریکی القایی، $q(t)$ ، روی سطح بالایی صفحه A را در یک نوسان کامل صفحه B به دست آورید.
نمودار $q(t)$ را برحسب زمان در یک دوره تناوب صفحه B رسم کنید.

ث) فرض کنید صفحه های A و B مطابق شکل زیر به مداری شامل یک خازن با ظرفیت c و یک مقاومت R متصل باشند.



فرض کنید ظرفیت c از ظرفیت ناشی از دو صفحه A و B خیلی بیشتر است.

اختلاف پتانسیل $V(t)$ بین دو نقطه M و N را برحسب تابعی از زمان در یک نوسان کامل صفحه B در شرایط زیر به دست آورید.

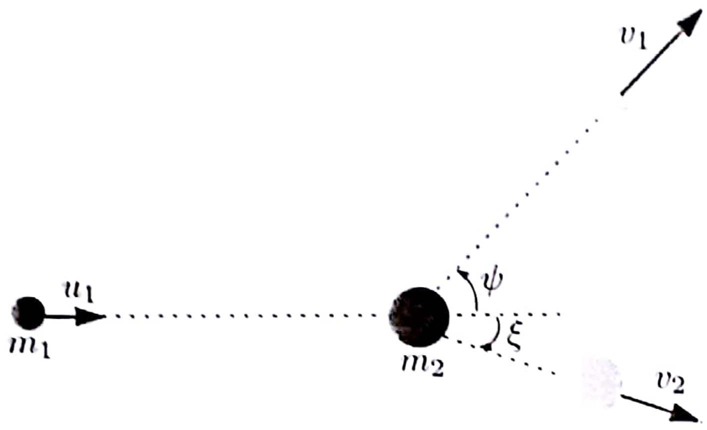
ث 1) $T << RC$

ث 2) $T >> RC$

ج) فرض کنید $E= 150\,\frac{\text{V}}{\text{m}}$ ، $l= 10cm$ ، $a= 0.4\frac{cm}{s^2}$ ، $c= 10^{-8}$ F ، $R = 2 \times 10^7\Omega$.
بیشترین مقدار $V(t)$ در یک نوسان کامل صفحه B چیست؟

مسئله ۲ ــ پراکندگی

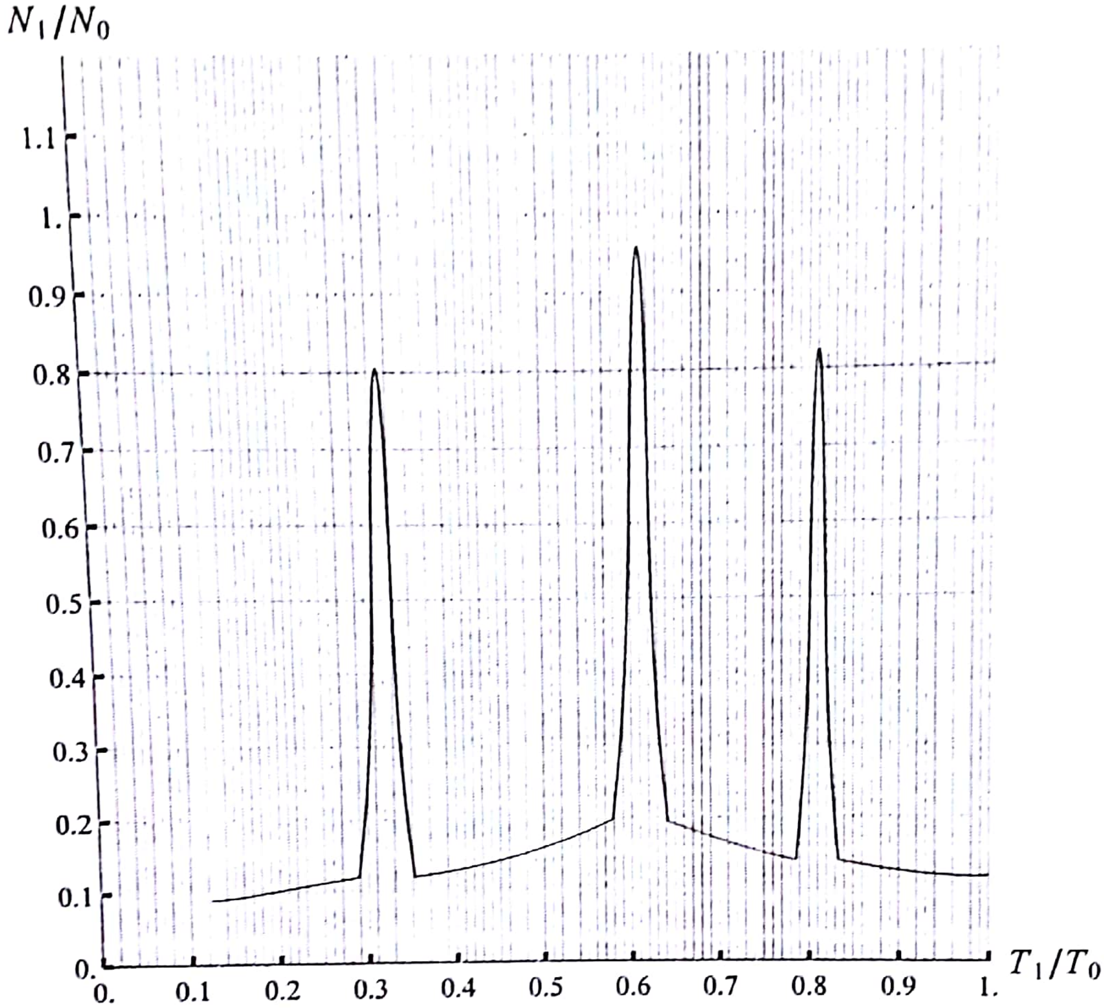
ذره ای به جرم m_1 با سرعت u_1 به سمت ذره ساکنی به جرم m_2 می تابد و با آن برهمکنش می کند. پس از برهمکنش ذره m_1 با سرعت v_1 و زاویه ψ نسبت به امتداد تابش پراکنده می شود و ذره m_2 با سرعت v_2 و زاویه ξ نسبت به امتداد تابش پس زده می شود. کمیت های T_0 و T_1 را به ترتیب انرژی جنبشی ذره m_1 قبل و بعد از برخورد و کمیت T_2 را انرژی جنبشی ذره m_2 بعد از برخورد بنامید.



الف) با فرض معلوم بودن جرمها، سرعت اولیه ذره تابیده و زاویه پراکندگی، کمیت های v_1، v_2 و ξ را بر حسب آنها به دست آورید.

ب) نسبت T_2/T_0 را بر حسب جرمها و زاویه پس زدگی ξ به دست آورید. به ازای m_1/m_2 معین، ξ چه باشد تا نسبت T_2/T_0 بیشینه شود؟ همچنین به ازای ξ معین، نسبت m_1/m_2 چه باشد تا نسبت T_2/T_0 بیشینه شود؟

ج) در یک آزمایش پراکندگی شاری از ذرات m_1 با انرژی جنبشی T_0 به سمت هدفی که شامل ذرات ساکن مختلفی به جرم های متنوع m_2 است $(m_2 > m_1)$ گسیل می شوند. یک آشکارساز در زاویه $\psi = 90$ مستقر شده و انرژی جنبشی ذرات پراکنده شده و فراوانی آنها را اندازه گیری می کند. نتیجه اندازه گیری مطابق شکل زیر است. محور عمودی در این نمودار نسبت ذرات شمارش شده به یک تعداد معین است و پهنای قله ها در این شکل به دلیل ارتعاش کوچک ذرات هدف است. با توجه به اعداد نمودار، معلوم کنید در هدف یاد شده جرم ذرات مختلف نسبت به ذره تابیده چه مقادیری است؟ فرض کنید جرم ذرات هدف مضرب های صحیحی از جرم ذره تابیده است.



د) اگر سرعت ذرات تابیده، پراکنده و پس زده قابل مقایسه با سرعت نور c باشد، به ناچار باید از روابط نسبیتی استفاده کنیم. در این حالت تکانه نسبیتی ذره ای به جرم m و سرعت $\vec{u}$ برابر است با $p = m\gamma\vec{u}$ که در آن $\gamma = (1 - u^2/c^2)^{1/2}$ و انرژی نسبیتی ذره برابر است با $\mathcal{E} = T + mc^2 = m\gamma c^2$ که در آن T انرژی جنبشی و mc^2 انرژی سکون ذره است. همچنین به سهولت می توانید نشان دهید $\mathcal{E}^2 = p^2c^2 + m^2c^4$. شرایط برخورد را مشابه فرض الف بگیرید و نسبت T_1/T_0 را در این حالت بر حسب $\alpha = m_1c^2/T_0$، $\beta = m_2c^2/T_0$ و زاویه پراکندگی به دست آورید. (کافی است به یک معادله مشخص با ضرایب معلوم برسید. حل آن معادله ضروری نیست.)

۳) معادلهٔ حالت یک جسم کشسان ایده‌آل مثلاً یک نوار استوانه‌ای از جنس لاستیک به صورت

$$\tau = KT\left(\frac{L}{L_0(T)} - \frac{L_0^2(T)}{L^2}\right)$$

است که در آن K ثابت، T دما، τ کشش، L طول و $L_0(T)$ مقدار L در کشش صفر است و تابع دما است. به ازای یک جرم معینی از لاستیک این دستگاه ترمودینامیکی دستگاهی با دو متغیر مستقل (مانند یک گاز با جرم ثابت) است.

آ) ضریب انبساط طولی نوار در کشش ثابت، α_τ، را به عنوان تابعی از T، L و $L_0(T)$ بر حسب ضریب انبساط طولی در کشش صفر، α_0، به دست آورید که $\alpha_0 = \frac{1}{L_0}(\frac{dL_0}{dT})$.

ب) نمودار τ و α_τ بر حسب L/L_0 را در یک دمای ثابت رسم کنید.

در ادامهٔ مسئله فرض کنید ظرفیت گرمایی نوار در طول ثابت، C_L، کمیتی ثابت است. همچنین با توجه به این که $\alpha_0 \sim 10^{-4}\,\mathrm{K}^{-1}$، تا قسمت خ) فرض کنید $\alpha_0 = 0$ است و $L_0(T) = L_0$. فرآیندها را برگشت پذیر در نظر بگیرید.

پ) انرژی آزاد هلمهولتز نوار را به عنوان تابعی از T، L، L_0 و سایر کمیت‌های معلوم بر حسب $U(T_0, L_0)$ و $S(T_0, L_0)$ به دست آورید.

ت) آنتروپی نوار را به عنوان تابعی از T، L، L_0 و سایر کمیت‌های معلوم بر حسب $S(T_0, L_0)$ به دست آورید.

ث) انرژی داخلی نوار را به عنوان تابعی از T، L، L_0 و سایر کمیت‌های معلوم بر حسب $U(T_0, L_0)$ به دست آورید.

ج) C_τ ظرفیت گرمایی نوار در کشش ثابت را به عنوان تابعی از T، L، L_0 و سایر کمیت‌های معلوم به دست آورید.

چ) نوار را در یک فرآیند تک‌آنتروپی (بی دررو و برگشت‌پذیر) از حالت اولیهٔ (T_0, L_0) در امتداد طولش می‌کشیم تا طول آن به L برسد. در این وضعیت دمای نوار چقدر است؟ دما نوار از T_0 کمتر می‌شود یا بیشتر؟ کار انجام شده در این فرآیند چقدر است؟ اگر نوار را در امتداد طولش متراکم کنیم دمای نوار از T_0 کمتر می‌شود یا بیشتر؟

ح) در یک فرآیند تک‌دما در دمای T_0 نوار را در امتداد طولش از L_0 تا L می‌کشیم. تغییر انرژی داخلی و کار و گرمای مبادله شده را به دست آورید.

خ) یک چرخهٔ کارنو در نظر بگیرید که با این نوار کار می‌کند. دمای منبع گرم و سرد را به ترتیب T_h و T_l فرض کنید. در فرآیند تک‌دمای T_h طول نوار از L_1 به L_2 و در فرآیند تک‌دمای T_l طول نوار از L_3 به L_4 تغییر می‌کند. در فرآیندهای بی‌دررو طول نوار از L_2 به L_3 و از L_4 به L_1 تغییر می‌کند. Q_h و Q_l را به طور صریح محاسبه کنید و نشان دهید بازده چرخه $1 - T_l/T_h$ است.

اکنون در نظر بگیرید $\alpha_0 \neq 0$ و فرض کنید $L_0(T) = L_0(1 + \alpha_0(T - T_0))$. می‌توان همه موارد فوق را تا مرتبهٔ اول α_0 محاسبه کرد. به عنوان نمونه:

د) جواب قسمت پ)، ت) و ث) را تا مرتبهٔ اول α_0 تصحیح کنید.

ادامه آزمون نهایی (تابستان 98)   مدت آزمون: 3 ساعت

4) آونگ با طناب جرم دار

یک آونگ متشکل از یک جرم M و طنابی به طول l و چگالی خطی λ در نظر بگیرید. مطابق شکل طناب از سقف در میدان گرانشی g آویزان شده است. می‌خواهیم نوسانات این سیستم را به دست آوریم.

مطابق شکل پارامتر s، طول طناب از هر نقطه روی طناب تا نقطه‌ی اتصال به سقف می‌باشد. کمیت‌های $\theta(s,t)$ را مطابق شکل زاویه‌ی بردار مماس بر طناب و راستای گرانش در هر نقطه تعریف می‌کنیم. همچنین کشش در هر نقطه $T(s,t)$ می‌باشد.

الف) برای هر نقطه از طناب در طول s کمیت‌های $x(s,t)$ و $y(s,t)$ را به صورت انتگرالی بر حسب $\theta(s,t)$ بنویسید. به بازه‌های انتگرال دقت کنید.

ب) مطابق شکل برای المان طول در نظر گرفته شده معادلات حرکت را بنویسید. سپس با مشتق گیری نسبت به s از معادله‌ها یک معادله‌ی دیفرانسیل برای $\theta(s,t)$ و $T(s,t)$ به دست آورید.

ج) معادلات حرکت حاکم بر دینامیک جسم M را بنویسید.

د) با فرض کوچک بودن $\theta(s,t)$ تا مرتبه‌ی اول معادلات به دست آمده را ساده کنید. سپس $T(s,t)$ را به دست آورید.

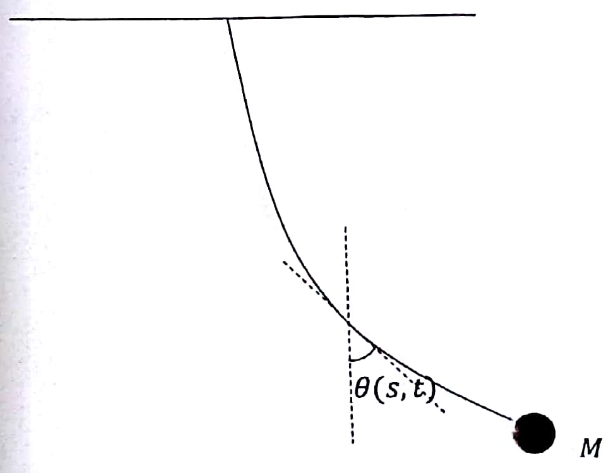
ه) حال می‌خواهیم جواب‌های نوسانی را برای سیستم به دست آوریم. کمیت $\theta(s,t)$ را به صورت

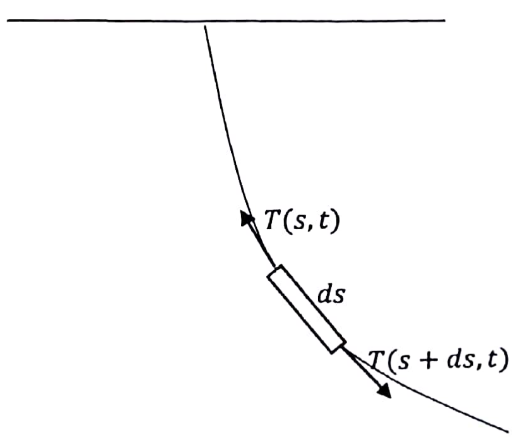
$$\theta(s,t) = f(s)\cos(\omega t)$$

در نظر بگیرید. سپس معادلات بخش‌های قبل را ساده کنید. با حل معادلات می‌توان همه‌ی فرکانس‌های سیستم را به دست آورد.

و) حال با فرض کوچک بودن جرم طناب نسبت به جرم آونگ، کمیت $f(s)$ را تا مرتبه‌ی اول $\frac{\lambda l}{M}$ پیدا کرده و سپس با استفاده از شرایط مرزی فرکانس سیستم را تا مرتبه‌ی اول از $\frac{\lambda l}{M}$ پیدا کنید.

ز) محاسبات بخش قبل را تا مرتبه‌ی دوم از $\frac{\lambda l}{M}$ تکرار کنید.





(5

الف) میدان و پتانسیل یک دو قطبی $\vec{P}$ را که در مکان $\vec{r}$ قرار دارد را در مبدا مختصات بنویسید.
یادآوری: دو قطبی $\vec{P}$ در مکان $\vec{r}$ عبارت است از یک بار $-q$ در مکان $\vec{r}$ و یک بار q در مکان $\vec{r}+\vec{\delta}$ به طوری که: $\vec{P}=q\vec{\delta}$ و $\delta \to 0$ و $q \to \infty$.

حال فرض کنید یک منحنی در صفحه داریم که معادله‌ی آن در مختصات قطبی به صورت: $r=r(\theta)$ است که در آن $\theta \in [0,2\pi]$ و روی این منحنی چگالی دو قطبی $\vec{P}(\theta)$ وجود دارد که یعنی اگر طول ds ازین منحنی که در مختصه θ قرار دارد را در نظر بگیریم، این جز شامل دو قطبی $ds\vec{P}(\theta)$ است.
بردار مماس بر خم را $\hat{T}(\theta)$ و بردار عمود بر آن را $\hat{N}(\theta)$ می نامیم. فرض کنید:

$$\vec{P}(\theta)=\left(\hat{T}(\theta)cos\alpha+\hat{N}(\theta)sin\alpha\right)p$$

که در آن p و α ثوابت معلومند.
ب) فرض کنید:

$$r(\theta)=\frac{r_0}{1+\epsilon cos(\theta)}$$

پتانسیل الکتریکی را در مبدا مختصات: $r=0$ بیابید.
ج) دو حلقه دایره‌ای هم‌مرکز و هم‌صفحه را در نظر بگیرید، یکی در شعاع R و با چگالی بار خطی $-\lambda$ و دیگری در شعاع $R+\delta$ با چگالی بار خطی λ مساله را در حد:

$$\lambda\delta=const. \text{ و } \delta\to 0 \text{ و } \lambda\to\infty$$

حل کنید. یک بار نقطه‌ای q به جرم m را در مرکز این دو حلقه قرار می‌دهیم. فرض کنید این بار نمی‌تواند از صفحه‌ی حلقه‌ها خارج شود، نقطه‌ی مرکز حلقه‌ها برای این بار یک نقطه‌ی تعادل پایدار است یا ناپایدار؟ (تحت چه شرایطی؟) در صورت پایدار بودن، فرکانس نوسانات کوچک آن چه قدر است؟

به نام خدا

باشگاه دانش پژوهان جوان

ادامه آزمون های نهایی المپیاد فیزیک ایران (مرحله چهل نفر)

۲۸ مرداد ۱۳۹۸

مسئله ۶ نیروی عکس مکعبی

الف) ذره ای به جرم m تحت اثر نیروی مرکزی $F(r)$ قرار دارد. با استفاده از تغییر متغیر $u = 1/r$ ثابت کنید $d^2u/d\theta^2 + g(u) = 0$ و تابع $g(u)$ را به دست آورید.

ب) با استفاده از روش بخش الف برای نیروی مرکزی عکس مکعبی $F = k/r^3$، r را به صورت تابعی از θ، m، k، l و r_m به دست آورید که در آن l تکانه زاویه ای ذره و r_m کمترین فاصله ذره از مرکز نیرو است. فرض کنید محور x محور تقارن مسیر باشد و شکل مسیر را در هر دو حالت $k > 0$ و $k < 0$ رسم کنید، به گونه ای که مجانبها و محل تقاطع آنها مشخص باشد. همچنین زاویه انحراف نهایی پراکندگی ذره، ψ را تعیین کنید.

ج) تحت چه شرایطی ممکن است مسیر ذره دایره باشد؟ آیا این حرکت پایدار است؟

د) همین مسئله را این بار می خواهیم از روش پتانسیل موثر حل کنیم. پتانسیل موثر دستگاه را رسم کنید و حرکت های مجاز نوعی را تحلیل کنید. شکل پتانسیل موثر برای حرکت دایره ای چگونه است؟ سپس برای حالت کلی $d\theta/dr$ را به عنوان تابعی از r، ثابت های حرکت و پارامترهای m و k به دست آورید و با انتگرال گیری از آن θ را به عنوان تابعی از r و کمیت های ذکر شده حساب کنید. از طریق رابطه اخیر نیز زاویه پراکندگی کلی را به دست آورید. همچنین فاصله کمینه ذره از مرکز نیرو، r_m را بر حسب کمیت های m، k، l و v_0 به دست آورید که v_0 سرعت ذره در فواصل بسیار دور از مرکز نیرو است. اطلاعات زیر ممکن است به کار آید

$$\cosh y = \frac{e^y + e^{-y}}{2} \qquad \sinh y = \frac{e^y - e^{-y}}{2} \qquad \int \frac{dy}{\cosh y} = \tan^{-1}\left(\tanh \frac{y}{2}\right) + C$$

$$\cosh^2 y - \sinh^2 y = 1 \qquad 2\cosh^2 y = \cosh 2y + 1 \qquad 2sinh^2 y = \cosh 2y - 1$$

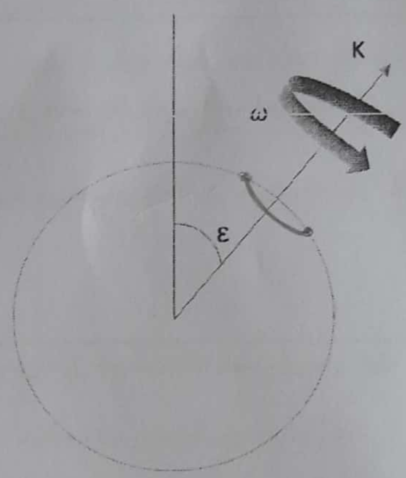
ه) رابطه بین پارامتر برخورد، b و زاویه انحراف دره را به دست آورید. این رابطه می تواند شامل کمیت های m، k و v_0 باشد.

و) سطح مقطع دیفرانسیلی برخورد، $d\sigma/d\Omega$ را به دست آورید. . این رابطه نیز می تواند شامل کمیت های m، k و v_0 باشد.

توجه: جواب هر قسمت را تا جایی که ممکن است ساده کنید و در کادر مشخص نمایش دهید. دقت کنید که به همه چیزهایی که در هر بخش خواسته شده جواب دهید.

---

۷. در این مساله می‌خواهیم یک بررسی برای گذر فصل‌های سال داشته باشیم. می‌دانیم که زمین در یک مدار(به تقریب دایروی) به مرکزیت خورشید می گردد. علاوه بر این زمین یک حرکت وضعی نیز با دوره تناوب ۲۴ ساعت نیز حول مرکز خود دارد. محور دوران زمین به دور خود را k و محور دوران زمین به دور خورشید را k' می نامیم. این دو محور موازی نیستند و با یکدیگر زاویه ای برابر با ۲۳.۵ درجه (که آن را ε می‌نامیم) دارند.



به دلیل وجود زاویه بین دو محور یاد شده، زاویه تابش خورشید بر سطوح زمین و درنتیجه‌ی آن میزان انرژی دریافتی در زمان‌های مختلف سال بر سطح زمین متفاوت است. بنابراین شاهد تغییر دما و درنتیجه تغییر فصول هستیم. زاویه بین بردار K وبردار مکان خورشید که از مرکز زمین رسم می شود را γ می‌نامیم. برای ناظران در نیم‌کره‌ی شمالی زمین هرچه زاویه γ به صفر نزدیک‌تر باشد میزان انرژی دریافتی بیشتر و هرچه زاویه γ بزرگتر باشد میزان انرژی دریافتی کمتر خواهد بود. حالتی که زاویه γ در کمینه‌ی خود باشد را انقلاب تابستانی و حالتی که γ در بیشینه‌ی خود باشد را انقلاب زمستانی می‌نامیم.

- در تمامی طول مساله فاصله خورشید از زمین را در برابر شعاع آن بسیار زیاد بگیرید. در واقع فرض می کنیم پرتوهای خورشید به صورت موازی به تمامی نقاط زمین برخورد می کنند.

الف-	مقدار بیشینه و کمینه γ را تعیین کنید. در چند روز از سال مقدار γ برابر با ۹۰ درجه خواهد بود؟

حال فرض کنید که مقدار زاویه γ در زمان $t=0$ برابر با ۹۰ درجه است و شیب آن بر حسب زمان منفی است. این لحظه را اول بهار می‌نامیم

ب-	رابطه ای برای زاویه γ بر حسب زمان، ε و سرعت زاویه‌ای زمین حول خورشید (Ω) بدست آورده و رابطه خود را تا حد امکان ساده کنید. نمودار مربوط به تغییرات γ را به صورت کیفی و با مشخص کردن کمینه و بیشینه آن رسم کنید.

دایره عظیمه‌ی بر روی سطح زمین و عمود بر محور K را استوا می‌نامیم. ناظری در نیم‌کره‌ی شمالی و در عرض جغرافیایی φ(نسبت به صفحه‌ی استوا) در نظر بگیرید.

پ-	مدت زمانی را که خورشید در آسمان ناظر قرار دارد را طول روز می‌نامیم. برای یک روز از سال (t) رابطه‌ای برای این مدت زمان برحسب φ و γ بدست آورید.

گرمای رسیده از خورشید در فاصله ای که زمین از خورشید دارد W ژول بر زمان بر واحد سطح عمود بر راستای تابش است .

ت-	برای شرایط توصیف شده در قسمت قبل کل انرژی دریافتی در طول یک روز در واحد سطح مماس بر زمین این ناحیه را بدست آورید.

حال سیاره X را در نظر بگیرید که در منظومه ای دور قرار دارد .تغییرات فصول در این سیاره دینامیکی متفاوت با زمین دارد که می‌خواهیم آن را بررسی کنیم.

این سیاره مشابه زمین در حین چرخش حول یک ستاره مرکزی با سرعت دورانی (Ω_s) است، و با سرعت دورانی ω_s حول یک محور خود می گردد. مجددا همانند زمین زاویه بین این دو محور دوران(ε) مخالف صفر است. برای این سیاره علاوه بر چرخش های گفته شده شاهد دو دینامیک دیگر نیز هستیم.

1. برای این سیاره محور K حول محور k' و با سرعت زاویه ای ω_k در حال گردش است.
2. زاویه ε برای این سیاره ثابت نبوده و به صورت زیر در حال تغییر است.

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + A\sin(\omega_\varepsilon t)$$

که در عبارت فوق ω_ε, A و ε_0 سه ثابت مثبت هستند.

زاویه بین بردار K وبردار واصل از مرکزسیاره به ستاره مرکزی را مجدد γ می‌نامیم. مقدار این زاویه را در زمان صفر برابر با ۹۰ درجه در نظر بگیرید. دو قسمت ث و ج را با فرض صفر بودن ضریب A حل کنید.(در واقع زاویه ε را ثابت بگیرید)

ث-	به ازای چه رابطه ای بین Ω_s و ω_k هیچ گاه شاهد تغییر فصل در این سیاره نخواهیم بود.

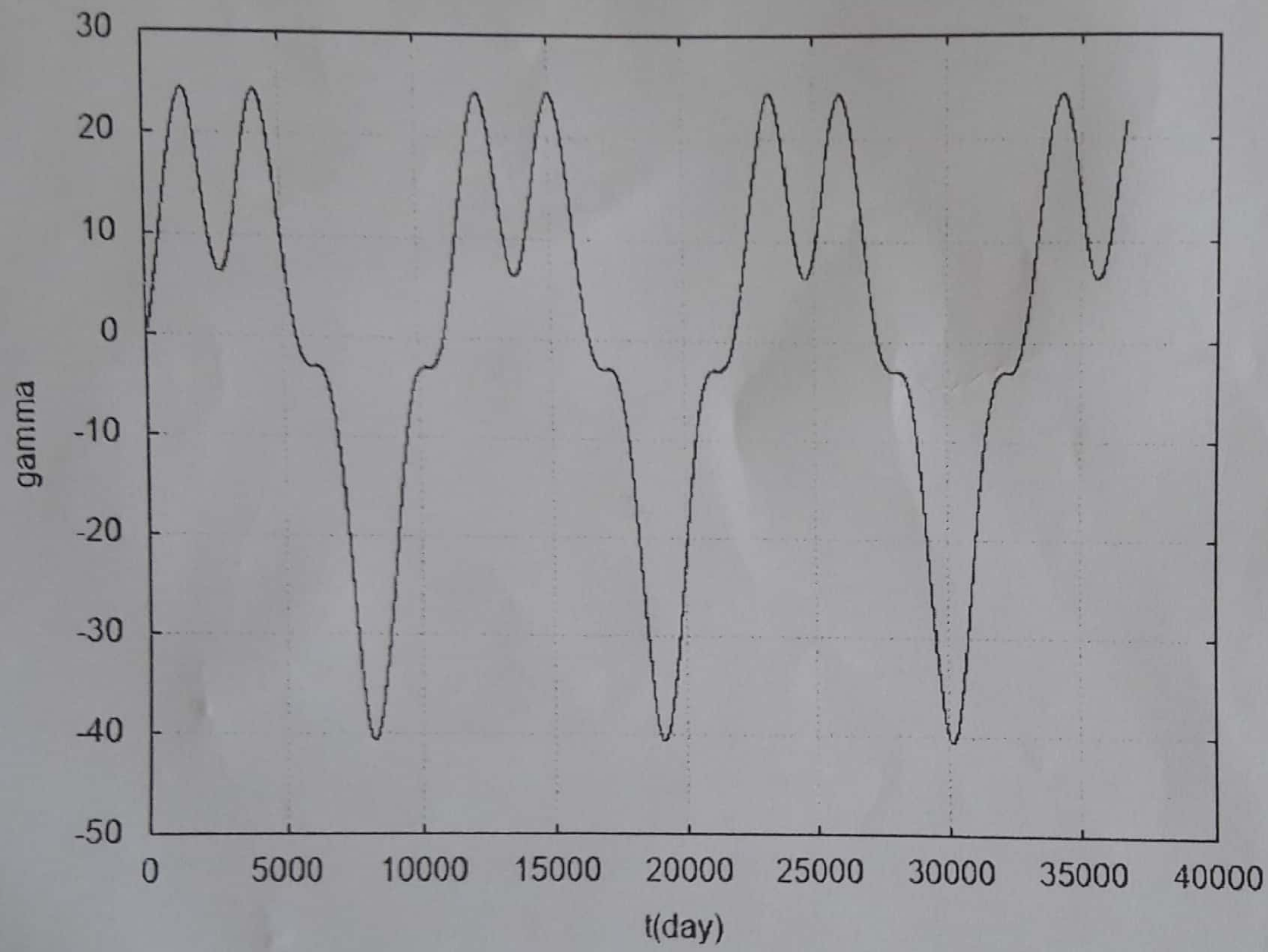
ج-	رابطه ای برای زاویه γ بر حسب زمان و سایر پارامترهای داده شده در مساله تعیین کنید. این رابطه را تا حد امکان ساده کنید.

حال مقدار ضریب A را مخالف صفر بگیرید. در ادامه می خواهیم مقادیر عددی پارامترهای مساله را بدست آوریم. دوره تناوب گردش این سیاره حول مرکز خود را برابر با یک شبانه روز این سیاره و ۲۴ ساعت در نظر می‌گیریم. همچنین مقدار عددی ε_0 و A را به ترتیب برابر با ۲۳.۵ درجه و ۰.۳ رادیان بگیرید.

چ-	رابطه ای به صورت پارامتری برای زاویه γ بر حسب زمان و سایر پارامترهای داده شده در مساله تعیین کنید. این رابطه را تا حد امکان ساده کنید.

ه-	با توجه به نمودار داده شده در انتهای سوال مقادیر عددی مربوط به Ω_s و ω_k و ω_ε را بدست آورید. در این بخش نیازی نیست خطای مربوط به پاسخ خود را برآورد کنید. به اعدادی که بدون راه حل نوشته شده باشند نمره ای تعلق نخواهد گرفت.

در نمودار زیر زاویه γ (درجه) به صورت تابعی از زمان رسم شده است.



8) ترمودینامیک سیاه‌چاله ی Reissner-Nordstrom

سیاه‌چاله‌ها موجوداتی هستند که برخلاف بقیه‌ی سیستم‌های ترمودینامیکی از قوانین فزونوری در ترمودینامیک تبعیت نمی کنند. هاوکینگ و بکن‌اشتاین نشان دادند که با اعمال مکانیک کوانتومی بر سیاه‌چاله، می‌توان سیاه‌چاله را بصورت سیستم‌های ترمودینامیکی در نظر گرفت که آنتروپی آن‌ها متناسب با سطح‌شان می‌باشد. همچنین هاوکینگ نشان داد که سیاه‌چاله‌ها، برخلاف فیزیک کلاسیک، یک تابش گرمایی در دمای هاوکینگ انجام می‌دهند. در این مساله می‌خواهیم به بررسی بعضی از خواص ترمودینامیکی سیاه‌چاله ها بپردازیم. سیاه‌چاله‌های R-N سیاه‌چاله‌هایی هستند که بار الکتریکی و جرم و تقارن کروی دارند. آنتروپی بکن‌اشتیان- هاوکینگ و شعاع سطح سیاه‌چاله‌های R-N از روابط زیر تبعیت می‌کنند:

$$S = \frac{k_B c^3}{4\,\hbar\, G}\, A$$

$$R = \frac{MG}{c^2} + \sqrt{\left(\frac{MG}{c^2}\right)^2 - \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 c^2}\right)^2}$$

می‌توان قانون اول ترمودینامیک را برای این سیستم به صورت زیر نوشت:

$$dU = TdS + \Phi\, dQ$$

که در آن Φ پتانسیل الکتریکی و U انرژی کل سیستم است. طبق رابطه اینشتین انرژی سیستم برابر با انرژی جرم سکون سیاهچاله: $U = Mc^2$ است.

الف) با استفاده از روابط فوق شرطی برای حقیقی بودنR ، وجود داشتن سیاهچاله، بدست آورید.

ب) پتانسیل الکتریکی و دمای سیستم را بدست آورید.

ج) ظرفیت گرمایی بار ثابت و پتانسیل ثابت را بدست آورید.

د) رفتار ظرفیت‌های گرمایی و آنتروپی سیستم را در حد $T \to 0$ بررسی کنید.

طبق قانون سوم ترمودینامیک به بیان سایمون، ظرفیت‌های گرمایی سیستم های ترمودینامیکی در دمای صفر باید صفر باشد. آیا این سیستم از این قانون پیروی می‌کند؟

ه) حال دو سیاه‌چاله‌ی R-N با بارها و جرم‌های Q_1 , M_1 و Q_2 , M_2 در نظر بگیرید. این دو سیاه‌چاله با هم ترکیب می‌شوند و یک سیاه‌چاله‌ی جدید بوجود می‌آورند. در حین این فرآیند مقداری از انرژی سیستم از طریق امواج گرانشی و الکترومغناطیسی از سیستم تابیده می‌شود. با استفاده از قانون دوم ترمودینامیک، بیشینه‌ی مقدار انرژی تابیده شده از این سیستم را بدست آورید.

و) قسمت اول را در حالت $Q_1 = Q_2 = 0$ و $M_1 = M_2$ بررسی کنید.

ز) حال فرض کنید یک سیاه‌چاله با $Q = 0$ داریم. سطح این سیاه‌چاله با دمای T تابش جسم سیاه می‌کند، این تابش را تابش هاوکینگ می‌گوییم. برای یک سیاهچاله با جرم اولیه‌ی M_0 ، $M(t)$ و عمر آن را حساب کنید.