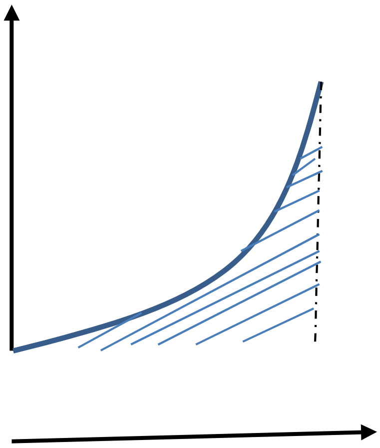
انتگرال:

حساب و دیفرانسیل – جیمز استورات ترجمه: ارشک حمیدی – قسمت اول جلد اول ویرایش ششم – انتشارت فاطمی

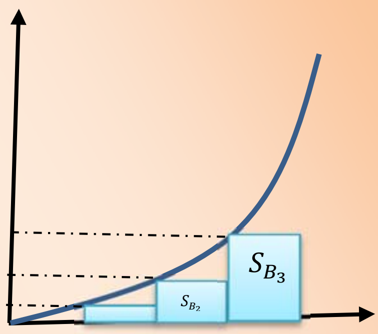
مثال: با استفاده از مستطیلها می خواهیم مساحت زیر سهمی $y=x^2$ از ۰ تا ۱ را تخمین بزنیم؟

شکل:



برای محاسبه مساحت می توانیم دو شکل زیر را داشته باشیم:

شکل:



$x = (0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1)$

$y = x^2$

$y = (0, \frac{1}{16}, \frac{1}{4}, \frac{9}{16}, 1)$

مساحت هر مستطیل= طول در عرض $S_{B_i} = f(x_i)\Delta x$

$S_B = S_{B_1} + S_{B_2} + S_{B_3}$

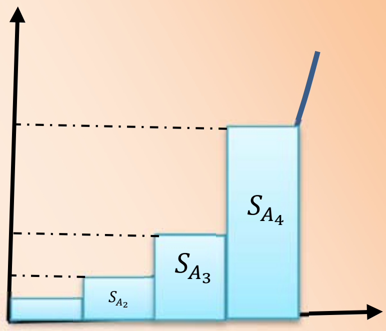
$S_B = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + f(x_3)\Delta x$

$S_B = \left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{16}\right) + \left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} \times \frac{9}{16}\right)$

$S_B = \frac{1}{64} + \frac{1}{16} + \frac{9}{64} = \frac{7}{32} = 0.21875$

$S > S_B$

شکل:



$x = (0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1)$

$y = x^2$

$y = (0, \frac{1}{16}, \frac{1}{4}, \frac{9}{16}, 1)$

مساحت هر مستطیل= طول در عرض $S_{A_i} = f(x_i)\Delta x$

$S_A = S_{A_1} + S_{A_2} + S_{A_3} + S_{A_4}$

$S_A = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + f(x_3)\Delta x + f(x_4)\Delta x$

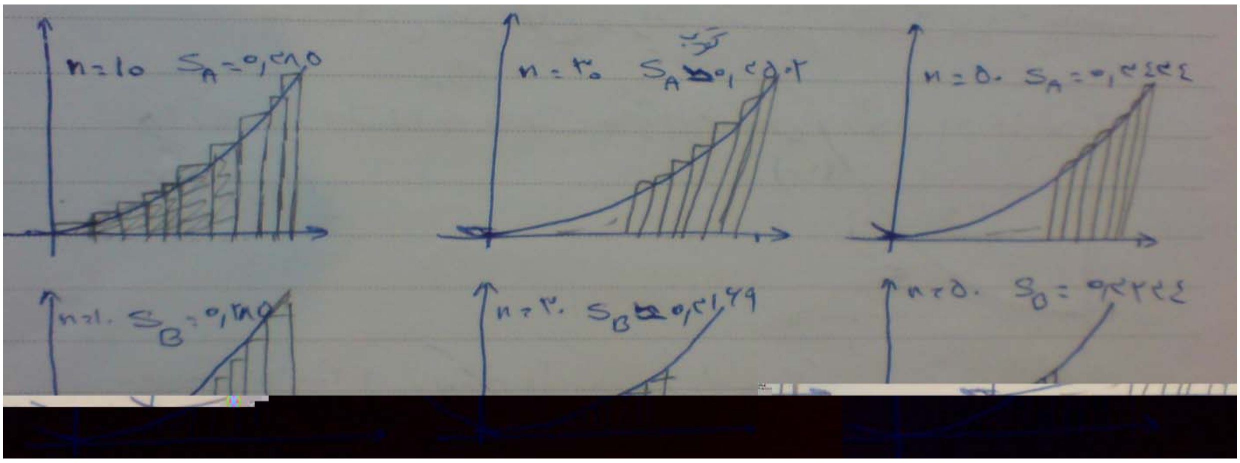
$S_A = \left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{16}\right) + \left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} \times \frac{9}{16}\right) + \left(\frac{1}{4} \times 1\right)$

$S_A = \frac{1}{64} + \frac{1}{16} + \frac{9}{64} + \frac{1}{4} = \frac{15}{32} = 0.46875$

$S < S_A$

$S_B < S < S_A$

مساحت S بین مقادیر $0.21875 < S < 0.46875$ است راه حل چیست؟



وقتی که n زیاد می شود S_A و S_B هر دو تقریب های بهتری برای مساحت S می شوند بنابراین مساحت S واحد مجموع مساحت های مستطیل تقریب زن تعریف می کنیم یعنی:

$$S = \lim_{n\to\infty} (S_A)_n = \lim_{n\to\infty} (S_B)_n = \frac{1}{3}$$

$$S = \lim_{n\to\infty} \left(f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x \right)$$

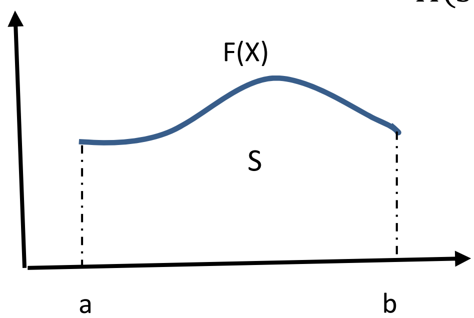
$$S = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \int_a^b f(x)dx$$

F تابعی می باشد که به ازای $a \le x \le b$ تعریف شده است و اگر حد وجود داشته باشد می گوئیم f روی $[a,b]$ انتگرال پذیر است.

برای درک بهتر انتگرال دو شیوه محاسبه مساحت را داریم:

رپ۲۱۷فرخو: محاسبه مساحت (۱): فرض کنید $F(x) \ge 0$ روی $[a,b]$ انتگرال پذیر باشد، مساحت ناحیه زیر منحنی F و خطوط x=a و x=b وy=0 برابر است با

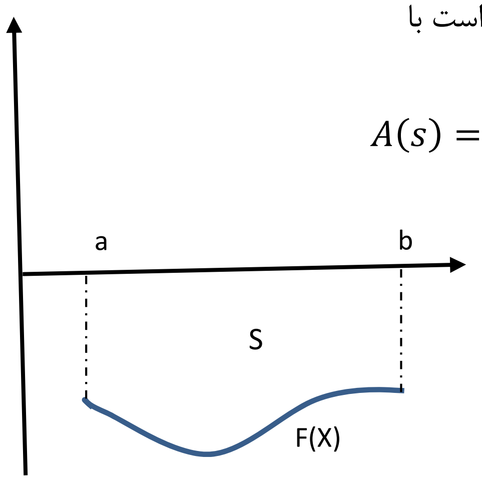
$$A(s) = \int_a^b F(x)dx$$



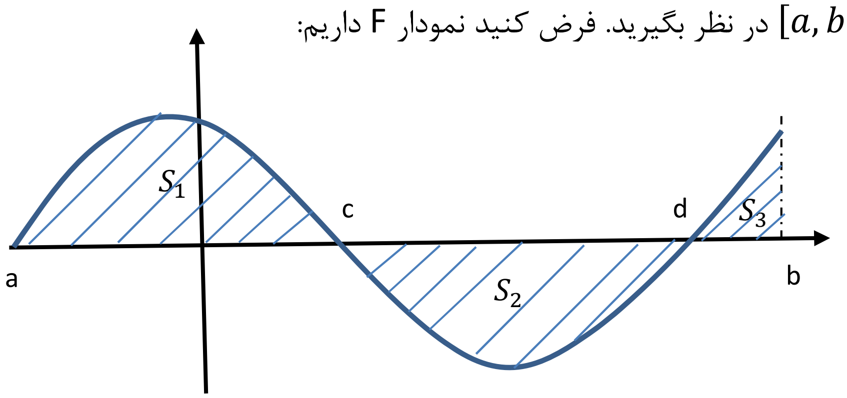
رپ۲۱۸و۲۱۹ فرخو: محاسبه مساحت (۲): فرض کنید $F(x) \le 0$ روی $[a,b]$ انتگرال پذیر باشد، مساحت ناحیه بالای منحنی F و خطوط x=a و x=b وy=0 برابر است با

$$A(s) = -\int_a^b F(x)dx$$

شکل



تابع انتگرال پذیر F را روی بازه $[a,b]$ در نظر بگیرید. فرض کنید نمودار F داریم:

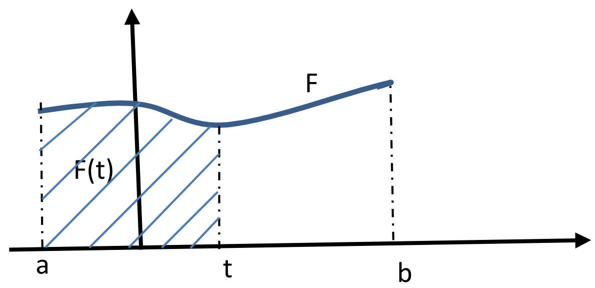


مساحت $A(s) = A(s_1) + A(s_2) + A(s_3)$

$$A(s) = \int_a^c F(x)dx - \int_c^d F(x)dx + \int_d^b F(x)dx$$

قضیه: فرض کنید F روی $[a,b]$ پیوسته باشد. در این صورت اگر $a \le t \le b$, $F(t) = \int_a^t F(x)dx$

آنگاه F مشتق پذیر است و $\acute{F}(t) = f(t)$



آیزاک بارو (۱۶۳۰-۱۶۷۷) استاد نیوتن در کیمبریج پی برد که دو مساله حساب دیفرانسیل و انتگرال به هم مربوط اند. در حقیقت او متوجه شد که مشتق گیری و انتگرال پذیری فرآیندهای عکس یکدیگرند و نیوتن و لایپ نیتس بودند که از این رابطه نهایت استفاده را بردند.

پ ز۳۴۳: مثال : فرض می کنیم $f(x)$ تابع اولیه آن $F(x) = x^2$ می باشد داریم

$$\acute{F}(x) = (\acute{x^2}) = 2x = f(x)$$

تعریف: تابع $F(x)$ را یک تابع اولیه $f(x)$ در فاصله I می نامیم هرگاه به ازای هر x از I داشته باشیم

$$\acute{F}(x) = f(x)$$

انتگرال نامعین: اگر $F(x)$ یک تابع اولیه $f(x)$ باشد عبارت $F(x) + c$ را انتگرال نامعین f می گوئیم و به صورت $\int f(x)\mathrm{dx}$ نشان می دهیم و بنابر تعریف فوق $\acute{F}(x) = f(x)$ آنگاه $\int f(x)\mathrm{dx} = F(x) +$ c (c عددی ثابت است).

انتگرال معین:

(دومین قضیه حساب دیفرانسل و انتگرال) هرگاه تابع f(x) در [a,b] پیوسته باشد و F(x) یک تابع اولیه برای f(x) باشد داریم :

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

به عبارت دیگر داریم:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

تعریف فوق را انتگرال معین یک تابع در بازه [a,b] می گویند.

روشهای انتگرال گیری

۱- انتگرال گیری با فرمول های انتگرال گیری

۲- انتگرال گیری به روش جانشینی(تغییر متغیر)

۳-انتگرال گیری توابع شامل رادیکال

۴-انتگرال گیری به روش جزء به جزء

۵-انتگرال گیری از روش های تجزیه به کسرهای جزئی (روش هویساید)

6-انتگرال گیری از انتگرال معین توابع زوج و فرد در فاصله های متقارن

۷-انتگرال گیری از توابع سینوسی و کسینوسی

قضایا و فرمولهای ریاضی ۴۶۹: قوانین و فرمولهای انتگرال:

$\int[f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$, $\int kf(x)dx = k.\int f(x)$ مقداری ثابت k

$\int dx = x + c$, $\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c \quad (n \neq 1)$

$\int \sqrt{x}dx = \frac{n}{n+1}\sqrt[n]{x^{n+1}} + c$, $\int (ax+b)^n dx = \frac{1}{(n+1)a}(ax+b)^{n+1} + c \quad n \neq 1$

*نکته * در فرمولهای زیر $du = u\'dx$

1. $\int u\,dv = uv - \int v\,du$
2. $\int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$
3. $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$
4. $\int e^u\,du = e^u + C$
5. $\int a^u\,du = \frac{a^u}{\ln a} + C$
6. $\int \sin u\,du = -\cos u + C$
7. $\int \cos u\,du = \sin u + C$
8. $\int \sec^2 u\,du = \tan u + C$
9. $\int \csc^2 u\,du = -\cot u + C$
10. $\int \sec u \tan u\,du = \sec u + C$
11. $\int \csc u \cot u\,du = -\csc u + C$
12. $\int \tan u\,du = \ln|\sec u| + C$
13. $\int \cot u\,du = \ln|\sin u| + C$
14. $\int \sec u\,du = \ln|\sec u + \tan u| + C$
15. $\int \csc u\,du = \ln|\csc u - \cot u| + C$
16. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \sin^{-1}\frac{u}{a} + C$
17. $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{u}{a} + C$
18. $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\frac{u}{a} + C$
19. $\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u+a}{u-a}\right| + C$
20. $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C$

روش های انتگرال گیری

۱- انتگرال گیری با فرمول های انتگرال گیری

$$\int \sqrt[3]{x}\;dx =$$

$$\int (3x+5)^{17} dx =$$

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{(3x+2)^2}}\, dx =$$

$$\int x \cot x^2 \, dx =$$

$$\int_2^3 (x^2-2x)\ dx =$$

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} =$$

(ارشد سیستم 82) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{4+x^2} =$

(ارشد سیستم 82) $\int_0^{1} ln(1+x) dx =$

(ارشد آمار 82) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x(x+1)} dx =$

۲- انتگرال گیری به روش جانشینی(تغییر متغیر)

در این روش ، یک متغیر مناسب را معرفی می کنیم و سپس انتگرال اصلی مان را بر حسب این متغیر جدید بازنویسی می کنیم و مساله را حل می کنیم.

(ارشد ژئوفیزیک 78) $\int_0^{2} 2e^{2x}\, dx =$

(ارشد صنایع 79) $\int_0^{\infty} \frac{1}{e^x+e^{-x}}\, dx =$

۳-انتگرال گیری توابع شامل رادیکال

در محاسبه انتگرال های شامل رادیکال بجزء حال خاص زیر، همواره رادیکال را برابر u در نظر می گیرم.

حالت خاص: در محاسبه انتگرال های شامل تابع $\sqrt{ax^2+bx+c}$ به شرط آنکه نتوان مشتق زیر رادیکال را ایجاد کرد ، ابتدا با مربع سازی آن را به یکی از شکل های $\sqrt{u^2+a^2}$ ، $\sqrt{u^2-a^2}$ و یا $\sqrt{a^2-u^2}$ تبدیل کرده و سپس به ترتیب از جانشینی های $u=a\tan\theta$ ، $u=a\sec\theta$ و $u=a\sin\theta$ استفاده می کنیم.

چند فرمول مثلثاتی خاص :

$$\sqrt{1-\cos x}=\sqrt{2}\left|\sin\frac{\theta}{2}\right| \qquad ** \qquad \sqrt{1+\cos x}=\sqrt{2}\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|$$

$$\sqrt{1-\sin x}=\left|\sin\frac{\theta}{2}-\cos\frac{\theta}{2}\right| \qquad ** \qquad \sqrt{1+\sin x}=\left|\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}\right|$$

(ارشد عمران 83) $\displaystyle\int\frac{dx}{x-\sqrt{x}}=$

(ارشد معدن 83) $\displaystyle\int_4^9\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}dx=$

(ارشد ریاضی 78) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\sin x}\,dx=$

(ارشد ریاضی 82) $\displaystyle\int_1^3\frac{x}{\sqrt{4x-x^2}}dx=$

۴-انتگرال گیری به روش جزء به جزء

این قاعده به این صورت می باشد : $\int u\,.\,dv = uv - \int v du$

که u و v توابعی از متغیر x می باشند و برخی مواقع لازم می شود برای محاسبه یک انتگرال چند بار از روش جزء به جزء استفاده کنیم. در کلیه موارد u عضو مجموعه پائینتر انتخاب می شود. در این روش در انتخاب u و dv باید دقت لازم را داشته باشیم.

۱	۲	۳
Lnx معکوس های مثلثاتی معکوس های هذلولی	چند جمله ای ها	e^{ax} Sin bx Cos bx Sinh bx Cosh bx

روش جزء به جزء را برای انتگرال گیری از توابه زیر بکار می بریم:

۱- انتگرال گیری از توابع مجموعه ۱
۲- انتگرال گیری از حاصل ضرب های توابع مجموعه ۳
۳- انتگرال گیری از توابع مجموعه ۲ در ۳
۴- انتگرال گیری از توابع مجموعه ۲ در ۱

(ارشد ژئوفیزیک 82) $\int_0^1 x\, lnx\, dx =$

$$\int sin^2 x\, dx =$$

$$\int_0^1 x\, e^x\, dx =$$

انتگرال　　مشتق

$$\int_0^1 x^2\, e^x\, dx =$$ (ارشد ژئوفیزیک 79)

<u>انتگرال</u>   <u>مشتق</u>

۵-انتگرال گیری از روش های تجزیه به کسرهای جزئی (روش هویساید)

در ابتدای کار فرض می کنیم که درجه صورت کسر کوچکتر از مخرج هست سپس صورت و مخرج کسر را تا آن جا که ممکن است به حاصلضرب عوامل درجه اول و دوم تجزیه کرده و ساده میکنیم.

تجزیه به کسرهای ساده ، برای یک کسر گویا به صورت $f(x) = \frac{g(x)}{(x-a)^3(x-b)^n}$ که $n\epsilon N$ داریم:

$$f(x) = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \frac{A_3}{(x-a)^3} + \frac{B_1}{x-b} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \cdots + \frac{B_n}{(x-b)^n}$$

$$A_n = \lim_{x\to a}(x-a)^n f(x)$$

$$B_n = \lim_{x\to a}(x-b)^n f(x)$$

تجزیه به کسرهای ساده ، برای یک کسر گویا به صورت $f(x) = \frac{g(x)}{(ax^2+bx+c)^n}$ که $n\epsilon N$ داریم:

$$f(x) = \frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c} + \frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2} + + \cdots + \frac{A_nx+B_n}{(ax^2+bx+c)^n}$$

در ادامه با مخرج مشترک گرفتن و معادل قرار دادن صورت ، کسر حاصل با صورت اصلی تابع میتوانیم محاسبه کنیم.

$$\left(\text{ارشد ریاضی } 75\right) \int_1^2 \frac{x^2-1}{x(x^2+1)}\,dx =$$

$$\left(\text{ارشد صنایع } 78\right) \int \frac{dx}{x(1+x)^2} =$$

6-انتگرال گیری از انتگرال معین توابع زوج و فرد در فاصله های متقارن

اگر f(x) تابع فرد یعنی $f(-x) = -f(x)$ و g(x) یک تابع زوج باشد یعنی $g(-x) = f(x)$ داریم:

$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 0$ $\qquad\qquad$ $\int_{-a}^{a} g(x) dx = 2\ \int_0^a g(x)$

$$\left(\text{ارشد ژئوفیزیک } 77\right) \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{1-x^2} =$$

$$\left(\text{ارشد مهندسی هسته ای } 79\right) \int_{-1}^{1} \frac{xdx}{x^4+x^2+1} =$$

۷-انتگرال گیری از توابع سینوسی و کسینوسی

الف) انتگرال گیری از توانهای زوج sin و cos داریم:

$$\sin^2 x = \frac{1-cos2x}{2} \quad , \quad \cos^2 x = \frac{1+cos2x}{2}$$

ب) انتگرال گیری از توانهای فرد sin و cos داریم:

نکته $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$$\sin^{2+1} x = sin\, x(\sin^2 x)^n = \sin x\,(1-\cos^2 x)^n$$

$$\cos^{2+1} x = cos\, x(\cos^2 x)^n = \cos x\,(1-\sin^2 x)^n$$

ج) انتگرال گیری از فرمت $\int \sin^m x \cos^n x$ داریم:

اگر m یا n یکی فرد باشد فرض می کنیم m فرد باشد یعنی m=2k+1 :

$$\sin^m x \cos^n x = \sin x\,(1-\cos^2 x)^k \cos^n x$$

اگر m , n هر دو زوج باشد مثلا m=2k :

$$\sin^m x \cos^n x = (1-\cos^2 x)^k \cos^n x$$

د) انتگرال گیری از توابع گویا بر حسب sin و cos داریم:

$$z = tan\frac{x}{2} \quad , \quad \sin x = \frac{2z}{1+z^2} \quad , \quad \cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2} \quad , \quad dz = \frac{1}{2}(1+z^2)dx$$

***غیر از موارد فوق می توان از روش جانشینی (تغییر متغیر) نیز استفاده کرد.**

$\int sin^2x\, dx =$(برای حل این سوال به قسمت جزء به جزء توجه شود)

یاداوری : sin 2x= 2sin x cos x

$$\int \sin^4 x\, dx =$$

$$\int \sin^3 x \cos x\, dx =$$

انتگرالهای زیر را حل کنید؟

$$\int \frac{dx}{x+a} =$$

$$\int \frac{x^2}{x^3+4} dx =$$

$$\int \frac{\cos x}{2\sin x + 5} dx =$$

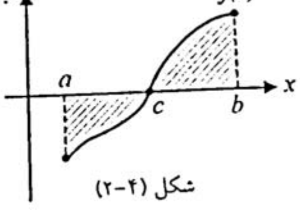
$$\int x^2\, lnx\, dx =$$

کاربردهای انتگرال

محاسبه مساحت در مختصات دکارتی :

اگر تابع f(x) در بازه [a,b] انتگرال پذیر باشد و نمودار ان به صورت زیر باشد، مساحت سطح محصور بین منحنی و محور xها ، در فاصله [a,b]به صورت زیر محاسبه می شود:

$$S = \int_a^c |f(x)| dx + \int_c^b f(x) dx$$



شکل (۴-۲)

مساحت سطح محصور بین دو منحنی:

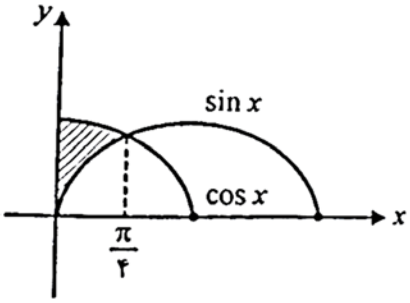
مساحت سطح محصور به منحنی های y=f(x) و y=g(x) برای a < x < b برابر است با:

$$A = \left|\int_a^b (f(x) - g(x))\, dx\right|$$

اگر a < c < b و c یک نقطه تقاطع دو خم باشد ، آنگاه مساحت برابر است با:

$$A = \left|\int_a^c (f(x) - g(x))\, dx\right| + \left|\int_c^b (f(x) - g(x))\, dx\right|$$

مساحت ناحیه محدود بین محور 4y ، خط $x = \frac{\pi}{4}$ و بالای نمودار y=sin x و زیر نمودار y=cos x کدام است؟ (ارشد ریاضی ۷۵)



محاسبه حجم:

الف) اگر f تابعی انتگرال‌پذیر و پیوسته باشد، حجم حاصل از دوران مساحت محصور بین نمودار $y = f(x)$ و محور xها و خطوط $x = a$ و $x = b$ حول محور xها از طریق فرمول زیر بدست می‌آید:

$$\text{حجم حاصل} = V = \int_a^b \pi f^{۲}(x)dx$$

ب) اگر g تابعی انتگرال‌پذیر و پیوسته باشد، حجم حاصل از دوران مساحت محصور بین نمودار $x = g(y)$ و محور yها و خطوط $y = a$ و $y = b$ حول محور yها از طریق فرمول زیر به دست می‌آید:

$$\text{حجم حاصل} = V = \int_a^b \pi g^{۲}(y)dy$$

حجم حاصل از دوران یک ناحیه حول خط افقی

حجم حاصل از دوران ناحیه بین دو خم غیرمتقاطع y=f(x) و y=g(x) و خطوط x=a و x=b حول خط y=c که ناحیه را قطع نمی کند برابر است با

$$v = \pi \left| \int_a^b ((f(x) - c)^2 - (g(x) - c)^2)\ dx \right|$$

حجم حاصل از دوران یک ناحیه حول خط قائم

حجم حاصل از دوران ناحیه بین دو خم غیرمتقاطع x=f(y) و x=g(y) و خطوط y=a و y=b حول خط x=c که ناحیه را قطع نمی کند برابر است با

$$v = \pi \left| \int_a^b ((f(y) - c)^2 - (g(y) - c)^2)\ dy \right|$$

حجم حاصل از دوران ناحیه محدود به نمودار $(x \geq 0)$ و $y=x^3$ ، خط y=1 و محور y حول محور y کدام است؟ (ارشد علوم کامپیوتر۸۳)

۱۴ـ طول خم در صفحه

طول خم هموار c در صفحه xy برابر است با:

$$L = \int_c ds = \int_c \sqrt{dx^{۲} + dy^{۲}}$$

در اینجا اگر

الف ـ c خم هموار $y=f(x)$ برای $x=a$ تا $x=b$ باشد، آنگاه:

$$L = \int_a^b \sqrt{۱ + f'^{۲}(x)}\, dx$$

ب ـ c خم هموار $x=f(y)$ برای $y=a$ تا $y=b$ باشد، آنگاه:

$$L = \int_a^b \sqrt{۱ + f'^{۲}(y)}\, dy$$

پ ـ c خم هموار $x=f(t)$ و $y=g(t)$ برای $t=t_۱$ تا $t=t_۲$ باشد، آنگاه:

$$L = \int_{t_۱}^{t_۲} \sqrt{f'^{۲}(t) + g'^{۲}(t)}\, dt$$

د) اگر منحنی C با معادله قطبی $r = f(\theta)$ تعریف شده باشد می‌توان نشان داد:

$$dS = \sqrt{f'^{2}(\theta) + f^{2}(\theta)}d\theta$$

ه) اگر منحنی C در فضا با بردار موضعی $\vec{p}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ تعریف شده باشد می‌توان نشان داد:

$$dS = \sqrt{x'^{2}(t) + y'^{2}(t) + z'^{2}(t)}dt$$

و) سطح رویه‌ی حاصل از دوران قسمتی از نمودار $y = f(x)$ که بالای محور xها بین دو خط $x = a$ و $x = b$ واقع است حول محور xها عبارتست از:

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'^{2}(x)}dx$$

۱۵ـ مساحت سطح حاصل از دوران

مساحت سطح حاصل از دوران خم c حول یک خط افقی یا قائم، برابر است با:

$$S = 2\pi \int_c R\,ds$$

در اینجا R برابر فاصله خم از محور دوران است. متغیر انتگرالگیری متناسب با شکل ds مطابق بحث بالا انتخاب می‌گردد.

۱۶ـ قضایای پاپوس

قضیه ۱ ـ حجم حاصل از دوران ناحیه D محدود به خم بسته C حول یک خط برابر حاصلضرب مساحت ناحیه D در طول مسیری است که مرکز جرم D در حین دوران می‌پیماید.

قضیه ۲ ـ مساحت حاصل از دوران ناحیه D محدود به خم بسته C حول یک خط برابر حاصلضرب محیط ناحیه D (طول C) در طول مسیری است که مرکز جرم D در حین دوران می‌پیماید.

مقدار متوسط یک تابع:

$$\overline{f(x)} = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$$

انتگرال های چندگانه

انتگرال های دوگانه روی ناحیه محدود به یک منحنی بسته، برای اولین بار در سال ۱۷۶۹ توسط اولر معرفی شد وی راه حلی ارائه داد که می توان به کمک دو انتگرال یگانه، انتگرال دوگانه را محاسبه نمود.

انتگرال مفهومی است که در محاسبه دقیق کمیتهایی مکه به حاصلضرب دوکمیت دیگر بستگی دارند مورد استفاده قرار میگیرد. مانند محاسبه حجم که برابر است با حاصلضرب مساحت قاعده در ارتفاع و یا جرم که عبارت است از حاصلضرب حجم در چگالی و یا گشتاور که برابر است با حاصلضرب جرم در مجذور فاصله.

فرض کنید R ناحیه بسته و متناهی در صفحه xy باشد. منظور از افراز R ، تقسیم آن به n زیر ناحیه بسته متناهی R_1 , R_2 R_3 , ... , R_n می باشد.

شکل:

همانطور که در شکل میبینید R افراز شده به R_1 , R_2 R_3 , ... , R_n .

نتیجه ۱ : اگر z=f(x,y) روی ناحیه بسته و متناهی R ، نامنفی باشد. حجم جسم صلبی که از طرف پائین بوسیله ناحیه R واقع در xy و از اطراف توسط استوانه ای که مرز R ، منحنی هادی و محور z ها محور آن باشد و از بالا بوسیله رویه z=f(x,y) محصور شود برابر است با :

$$v = \iint_R f(x, y)dA$$

یادآوری : جسم صلب به انگلیسی(Rigid body) : به سیستمی گفته می‌شود که شامل تعداد زیادی ذرات ثابت هست که فاصله ی ذرات از یکدیگر همواره ثابت است. این فاصله حتی در صورتی که به جسمنیرو وارد شود و یا حرکت کنید نیز ثابت می‌ماند. دنیای پیرامون ما سرشار از اجسام صلب می‌باشد. از پایه‌های پل گرفته تا دندانه‌های یک چنگال همگی اجسام صلب هستند. در واقع به جسمی که فاصله بین نقاط آن تغییر نکند، جسم صُلب گفته می‌شود.

نتیجه 2 : در فرمول بالا اگر 1= f(x,y) فرض شود ، در این صورت

$$R \text{ مساحت ناحیه } = \iint_R dA$$

نکته : انتگرال دوگانه ، همیشه نماینده یک حجم نیست.

نکته : انتگرال دوگانه ، تعمیم انتگرال معین است ، بنابراین تمام خواص و قضایای انتگرال معین را دارا می باشد.

قضیه : اگر تابع دو متغیره f(x,y) روی ناحیه بسته و متناهی R پیوسته باشد ، آنگاه روی R انتگرال پذیر است.

نکته : اگر f(x,y) تابعی پیوسته روی ناحیه مستطیل شکل R باشد آنگاه:

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx = \int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy$$

قابل ذکر است که اگر تابع f(x,y) در R پیوسته نباشد، تساوی فوق الزاما برقرار نیست.

هرگاه $f(x, y)$ مثبت باشد، انتگرال دوگانهٔ f روی ناحیهٔ مستطیلی R را می‌توان به‌صورت حجم منشوری تعبیر کرد که از پایین به R و از بالا به رویهٔ $z = f(x, y)$ محدود است.

قضیهٔ ۱ (صورت اول قضیه فوبینی). اگر $f(x, y)$ بر ناحیهٔ مستطیلی

$$R : a \le x \le b, \quad c \le y \le d$$

پیوسته باشد، آنگاه

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \int_c^d \int_a^b f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dy\, dx$$

توجه. قضیهٔ فوبینی بیانگر آن است که انتگرالهای دوگانه روی مستطیلها را همواره می‌توان به‌صورت انتگرالهای مکرر محاسبه کرد. یعنی می‌توان یک انتگرال دوگانه را با انتگرال‌گیری از یک متغیر در هر بار، با استفاده از روشهای انتگرال‌گیری که در مورد توابع یک متغیره می‌دانیم، محاسبه کرد. همچنین قضیه فوبینی بیانگر آن است که برای انتگرال‌گیری از انتگرال دوگانه هر ترتیبی را می‌توان برگزید.

انتگرالهای دوگانه توابع پیوسته روی نواحی غیرمستطیلی همهٔ ویژگیهای جبری راکه برای انتگرالهای روی نواحی مستطیلی برشمردیم، دارند.

قضیهٔ ۲ (صورت قویتر قضیه فوبینی). فرض کنید $f(x\,,y)$ روی ناحیه‌ای چون R پیوسته باشد. در این صورت

۱. اگر تعریف R عبارت باشد از $a \le x \le b$، $f_1(x) \le y \le f_2(x)$ با این شرط که f_1 و f_2 بر $[a\,,b]$ پیوسته باشند، داریم

$$\iint_R f(x\,,y)\,dA = \int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x\,,y)\,dy\,dx$$

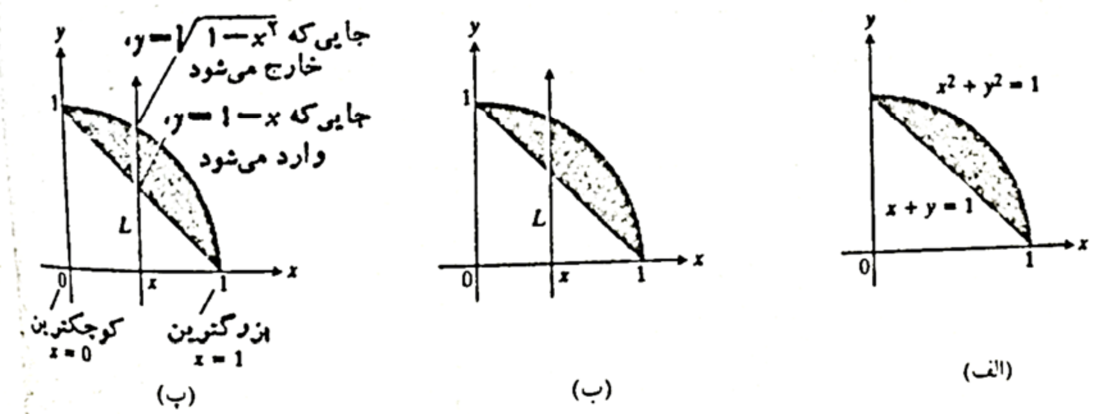
۲. اگر تعریف R عبارت باشد از $c \le y \le d$، $g_1(y) \le x \le g_2(y)$، با این شرط که g_1 و g_2 بر $[c\,,d]$ پیوسته باشند، داریم

$$\iint_R f(x\,,y)\,dA = \int_c^d \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x\,,y)\,dx\,dy$$

تعیین حدود انتگرال‌گیری

اگر بخواهیم انتگرال $\iint_R f(x\,,y)\,dA$ را روی ناحیهٔ R داده شده در شکل (الف) به این ترتیب محاسبه کنیم که نخست نسبت به y و سپس نسبت به x انتگرال بگیریم، مراحل زیر را طی می‌کنیم.

مرحلهٔ ۱. خط قائمی چون L را در نظر می‌گیریم که در جهت افزایش y ناحیهٔ R را قطع کند (شکل (ب)).



(پ) (ب) (الف)

مرحلهٔ ۲. مختص y نقطهٔ ورود L به R را حد پایینی و مختص y نقطهٔ خروج L از R را حد بالایی اختیار می‌کنیم و انتگرال می‌گیریم.

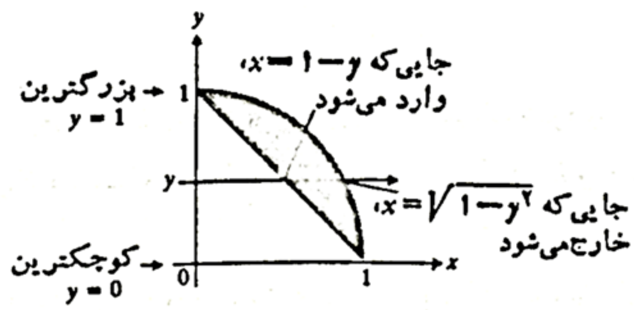
مرحلهٔ ۳. حدود x را چنان بر می‌گزینیم که همهٔ خطوط قائمی را که از R می‌گذرند، در بربگیرند (شکل (پ)).

پس از طی مراحل بالا مشاهده می‌شود که

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_{x=0}^{x=1}\int_{y=1-x}^{y=\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx$$

برای محاسبهٔ همین انتگرال دوگانه به‌صورت یک انتگرال مکرر اما با ترتیب انتگرال‌گیری معکوس، مطابق شکل زیر از خطوط افقی استفاده نموده و نتیجه می‌گیریم که

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_{y=0}^{y=1}\int_{x=1-y}^{x=\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx\,dy$$



انتگرال های چند گانه زیر را حل کنید؟

$$\int_3^4\int_1^2 \frac{1}{(x+y)^2}\,dydx =$$

$\iint_R \ sinx\ \ dA$ به طوری که ناحیه R محصور است بوسیله خطوط $y = 2x\ , y = \frac{x}{2}\ , x = \pi$ ؟

مساحت ناحیه محصور بین منحنی های داده شده را حساب کنید؟

$$y = x^3 \;, \qquad y = x^2$$

فرض کنید R ناحیه محدود به نمودارهای $Y=X^2$ و Y=X+6 باشد. انتگرال دوگانه زیر را محاسبه کنید؟

$$\iint_R (\mathrm{x} + 4\mathrm{x})dA =$$

ص۴۲۲ پیام نور

* بررسی نتیجه دو ص۳۷ جزوه * مساحت ناحیه محدود به نمودارهای $y = 8 - \frac{x^2}{2}$ و $y = 2 - \frac{\mathrm{x}}{2}$ را با استفاده از انتگرال دوگانه محاسبه کنید؟ ص ۴۲۶ پیام نور

تغییر ترتیب انتگرال گیری

گاهی محاسبه یکی از دو انتگرال مکرر مشکل یا غیر ممکن است در حالی که انتگرال مکرر دوم را به آسانی می توانندمحاسبه کرد. تعویض یک انتگرال مکرر به دیگری را "تغییر ترتیب انتگرال گیری" می گوئیم. زیرا یکی از dydx وdxdy به دیگری تغییر می یابد.

انتگرال زیر را محاسبه کنید؟

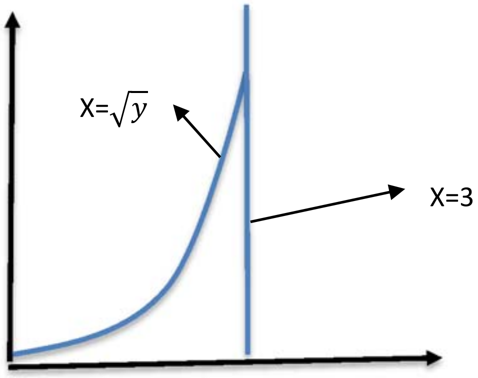
$$\int_0^9 \int_{\sqrt{\mathrm{y}}}^3 \sin\pi x^3 \, dxdy =$$

محاسبه $\sin\pi x^3$ آسان نیست همانور که از تابع فوق و حدود انتگرال ها مشخص است داریم:

$$0 \le y \le 9 \quad , \qquad x = 3 \;\;, \;\; x = \sqrt{y}$$

شکل را داریم و با توجه به شکل می توانیم ناحیه R و حدود انتگرال گیری را مشخص کنیم (طبق تعاریف هایی که در ص ۳۹ جزوه داشتیم) :

$$0 \le y \le 3 \quad , \quad x = 3 \ , \ x = \sqrt{y}$$



$$\int_0^3 \int_{\sqrt{y}}^3 \sin\pi x^3 \, dxdy =$$

تغییر متغیر (جانشینی) در انتگرال های دوگانه:

۳ـ جانشینی‌ها در انتگرال‌های دوگانه

برای استفاده از جانشینی $x = g_1(u,v)$ و $y = g_2(u,v)$ در انتگرال دوگانه $\iint\limits_D f(x,y)\,dA$ بترتیب زیر عمل می‌کنیم:

۱. ابتدا $f(x,y)$ را برحسب u و v می‌نویسیم تا $F(u,v)$ نتیجه شود.

۲. مقدار $j = \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$ را محاسبه کرده و به‌جای dA مقدار $|j|\,du\,dv$ را جانشین می‌کنیم.

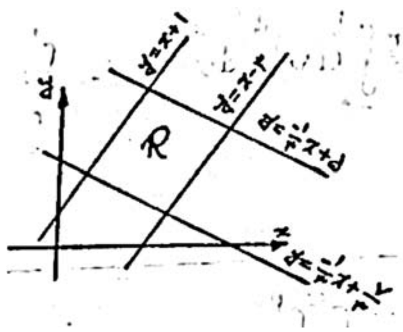
۳ـ مرزهای ناحیه برحسب x و y را برحسب u و v بدست آورده و $\iint\limits_{D'} F(u,v)\,|j|\,du\,dv$ را که در آن D' تبدیل ناحیه D است، محاسبه می‌کنیم.

j را ژاکوبی تبدیل می‌نامند.

توجه کنید که اگر تبدیل به‌صورت $u = g_1(x,y)$ و $v = g_2(x,y)$ داده شده باشد، آنگاه بهتر است برای تعیین ژاکوبی، مقدار $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$ را محاسبه کنیم. در این صورت $j = \dfrac{1}{\partial(u,v)/\partial(x,y)}$.

انتگرال دوگانه زیر را حل کنید؟

$$\iint_R (y-x)dA = ? \qquad R: \begin{cases} y-x=-3 \\ y-x=1 \\ y+\frac{x}{3}=\frac{7}{3} \\ y+\frac{x}{3}=5 \end{cases}$$



مرحله ۱ : f(x,y) را بر حسب u , v می نویسیم

$$u = y - x$$

$$v = y + \frac{x}{3}$$

مرحله 2 : بدست آوردن مقدار ژاکوبی j

$$|j| = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \frac{1}{\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}} =$$

مرحله 3 : بدست آوردن مرزهای R برحسب u و v

$$u = y - x = 3 \quad , \quad u = -3$$

$$u = y - x = 1 \quad , \quad u = 1$$

$$v = y + \frac{x}{3} = \frac{7}{3} \quad , \quad v = \frac{7}{3}$$

$$v = y + \frac{x}{3} = 5 \quad , \quad v = 5$$

حال به ادامه حل انتگرال می پردازیم: یادآوری : $u = y - x$

$$\iint\limits_R (y-x)dA \xrightarrow{\text{تبدیل به } v,u} \int_{\frac{7}{3}}^{5}\int_{-3}^{1} u\, dudv =$$

انتگرال دوگانه زیر را حل کنید؟

$$\int_0^1 \int_0^{1-y} \cos\frac{x-y}{x+y}\,dx\,dy =$$

مرحله ۱ : f(x,y) را بر حسب u , v می نویسیم

$u = x - y$

$v = x + y$

با حل دستگاه فوق داریم :

$u + v = 2x \quad , \quad x = \frac{1}{2}(u+v)$ با جایگذاری داریم $y = \frac{1}{2}(u-v)$

مرحله 2 : بدست آوردن مقدار ژاکوبی j

$$|j| = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \frac{1}{\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}} =$$

مرحله 3 : بدست آوردن مرزهای R برحسب u و v

1.x=1-y پس داریم x+y=1 با توجه به بند مرحله اول داریم v=1 بنابراین u=v

2.x=0 با جایگذاری در فرمول بدست امده مرحله اول

$\begin{cases} u = 0 - y \\ v = 0 + y \end{cases} \to \ u = -v$ قرینه یکدیگرند

3.y=0

$\begin{cases} u = x - 0 \\ v = x + 0 \end{cases} \to \ u = v$ برابرند

با فرمول بدست آمده $y = \frac{1}{2}(u-v)$ داریم y=0

4. با توجه به بند ۱ داریم v=1

حال به ادامه حل انتگرال می پردازیم:

$$\int_0^1 \int_0^{1-y} \cos\frac{x-y}{x+y}\,dx\,dy = \xrightarrow{\text{تبدیل به v,u}} \frac{1}{2}\int_0^1 \int_{-v}^{v} \cos\frac{u}{v}\,du\,dv =$$

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{v}\sin\frac{\mathrm{u}}{\mathrm{v}}\Big|_{-\mathrm{v}}^{\mathrm{v}}\,\mathrm{dv} =$$

مثال: محاسبه مساحت ناحیه محصور به منحنی های زیر را حل کنید؟

$xy = 4$, $xy = 8$, $xy^3 = 5$, $xy^3=15$

-1 $u=xy$, $v=xy^3$

- 2

$$|j| = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \frac{1}{\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} y & x \\ y^3 & 3xy^2 \end{vmatrix}} =$$

-۳

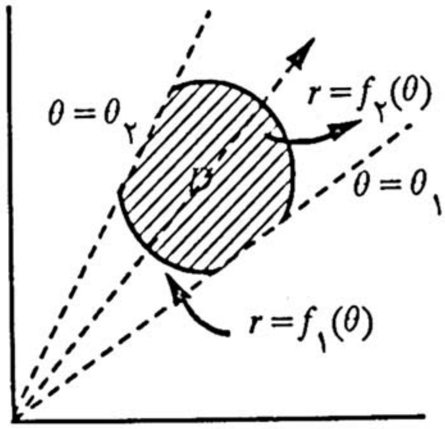
$u=xy = 4$ $\underline{u=4}$, $u=xy = 8$ $\underline{u=8}$

$v=xy3 = 5$ $\underline{v=5}$, $v=xy3=15$ $\underline{v=15}$

$$\int_5^{15}\int_4^8 \frac{1}{2xy^3}\,\mathrm{du\,dv}$$ $xy^3 = \mathrm{v}$ با توجه به بند یک $$\int_5^{15}\int_4^8 \frac{1}{2v}\,\mathrm{du\,dv} =$$

انتگرال های دوگانه در مختصات قطبی:

اگر ناحیه انتگرال گیری دایره باشد و یا عامل $x^2 + y^2$ ، می توان از تبدیل قطبی $y = r\cos\theta$ و $x = r\sin\theta$ استفاده کرد. در این حالت ابتدا تابع زیر انتگرال را برحسب r و θ نوشته و به جای $dydx$ ، مقدار $r\,dr\,d\theta$ را جانشین می کنیم. سپس از رسم ناحیه نیم خطی از مبداء به سمت خارج چنان رسم میکنیم تا مرزهای ناحیه را در $r = f_1(\theta)$ و $r = f_2(\theta)$ قطع کند. این دو مرزهای انتگرال داخلی و حداقل و حداکثر مقدار θ در ناحیه حدود انتگرال خارجی است.



$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_{f_1(\theta)}^{f_2(\theta)} F(r,\theta)\,r dr d\theta$$

مثال: مساحت ناحیه درون دلنمای $r = 1+\cos\theta$ و بیرون دایره $r = 1$ را پیدا کنید؟

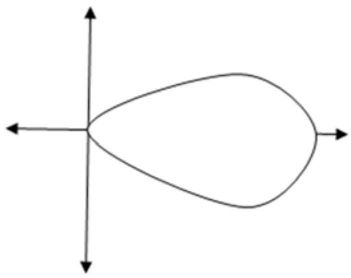
ابتدا محل تلاقی دو منحنی را پیدا می کنیم

$$1 = 1+\cos\theta \quad \rightarrow \quad \cos\theta = 0 \quad , \quad \theta = \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}$$

$$\iint_D f(x,y)\,dA \xrightarrow{\text{تبدیل به مختصات قطبی}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{1}^{1+\cos\theta} r\,dr d\theta =$$

مساحت یکبرگ گل از کل $r = a\cos 2\theta$ را پیدا کنید؟

$$r = 0 \quad , \quad \cos 2\theta = 0 \; , \theta = \frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}$$



$$\iint_D f(x,y)\,dA \xrightarrow{\text{تبدیل به مختصات قطبی}}$$

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\int_{0}^{a+\cos 2\theta} r\,drd\theta =$$

مطلوبست محاسبه حجم جسم صلبی که از بالا به صفحه $z = 2r\sin\theta$ و از پائین به سهمی گون $z= r^2$ محصور می باشد؟

ابتدا فصل مشترک صفحه با سهمی گون را پیدا می کنیم انها را مساوی هم قرار می دهیم.

$$r^2 = 2r\sin\theta \quad \rightarrow \quad r = 2\sin\theta \;\rightarrow\; 2\sin\theta = 0 \;\;,\;\; \theta = 0\,,\pi$$

$$\int_{0}^{\pi}\int_{0}^{2\sin\theta}(2r\sin\theta - r^2)r\;drd\theta =$$

انتگرال های سه گانه

انتگرال سه گانه

تعریف انتگرال سه‌گانه و ویژگیهای آن شبیه به حالت دوگانه بوده لذا، بدون ذکر آنها به بحث در بارهٔ روش محاسبهٔ انتگرالهای سه‌گانه می‌پردازیم.

محاسبهٔ انتگرالهای سه‌گانه در مختصات قائم

برای محاسبهٔ انتگرالهای سه‌گانه صورت سه‌بعدی قضیهٔ فوبینی را به‌کار می‌بریم و با استفاده از انتگرال‌گیر یگانهٔ (سادهٔ) مکرر، انتگرال سه‌گانه را محاسبه می‌کنیم. روش فوق در چند سطر زیر توضیح داده شده است.

ناحیه‌ای چون D داریم که از پایین به رویهٔ $z = f_1(x, y)$ و از بالا به رویهٔ $z = f_2(x, y)$ محدود است و می‌خواهیم از تابع پیوسته‌ای چون $F(x, y, z)$ در این ناحیه انتگرال بگیریم.

فرض کنید R سایهٔ ناحیهٔ D (تصویر قائم) روی صفحهٔ xy باشد. در این صورت انتگرال F روی D برابر است با

$$\iiint_D F\,dv = \iint_R \left(\int_{z=f_1(x,y)}^{z=f_2(x,y)} F(x, y, z)\,dz\right) dy\,dx \qquad (۱)$$

انتگرال سه گانه $f(x,y,z) = xy^3z^2$ را روی ناحیه زیر محاسبه کنید؟

$D = \{(x,y,z) | -1 \le x \le 3 \;, \quad 1 \le y \le 4 \;, \quad 0 \le z \le 2\}$

$$\iiint_D xy^3z^2 \, dv = \int_1^4 \int_{-1}^3 \int_0^2 xy^3z^2 \; dz\, dx\, dy =$$

سوال فوق را نیز می توانیم از طریق روش های دیگر نیز حل نمود انترگال نسبت به dx dz dy و روش های دیگر.

فرض کنید R مثلث محدود به نمودارهای y=0 و y=x و x=1 و D بین دو رویه $Z=-y^2$ و $z=x^2$ به ازای (x,y) در R ، واقع باشد. انترگال سه گانه زیر را محاسبه کنید؟

$$\iiint_D (x+1)\, dv = \int_0^1 \int_0^x \int_{-y^2}^{x^2} (x+1) \; dz\, dy\, dx =$$

مطلوبست محاسبه $\iiint_D (xz+3z)\, dv$ ، D *ناحیه محصور به استوانه* $x^2+z^2=9$ *و صفحات* x+y=3 ، z=0 ، y=0 *و بالای صفحه* xy *می باشد.*

$$\iiint_D (xz+3z)\, dv = \int_{-3}^3 \int_0^{3-x} \int_0^{\sqrt{9-x^2}} (xz+3z) \; dz\, dy\, dx =$$

پس از محاسبهٔ $\int_{z=f_1(x,y)}^{z=f_2(x,y)} F(x, y, z)\, dz$ عبارت سمت راست تساوی (۱) به‌صورت یک انتگرال دوگانه روی ناحیهٔ R در خواهد آمد که روش محاسبهٔ آن قبلاً توضیح داده شده است. تشخیص ناحیهٔ R و تعیین حدود آن اساسی‌ترین مرحلهٔ محاسبهٔ انتگرالهای سه‌گانه می‌باشد.

حجم یک ناحیهٔ در فضا

حجم ناحیه‌ای محصور و بسته در فضا مانند D برابر است با

$$V_D = \iiint_D dv = \iiint_D dx\, dy\, dz$$

تغییر متغیر در انتگرالهای سه‌گانه

فرض کنید ناحیه‌ای چون G از فضای uvw با معادلات مشتق‌پذیری به‌صورت زیر به ناحیهٔ R واقع در فضای xyz تبدیل شوند

$$x = g(u, v, w) \quad , \quad y = h(u, v, w) \quad , \quad z = k(u, v, w)$$

در این صورت هر تابعی چون $F(x, y, z)$ راکه بر R تعریف شده باشد می‌توان به‌صورت تابع

$$F(g(u, v, w), h(u, v, w), k(u, v, w)) = H(u, v, w)$$

که بر G تعریف شده است در نظر گرفت. رابطهٔ زیر انتگرال $F(x, y, z)$ روی R را به انتگرال $H(u, v, w)$ روی G مربوط می‌سازد.

$$\iiint_R F(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iiint_G H(u, v, w)\, |J(u, v, w)|\, du\, dv\, dw$$

$J(u, v, w)$ که قدر مطلقش در این رابطه آمده است، برابر است با

$$J(u, v, w) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

تذکر مهم. از مهمترین تغییر متغیرها برای محاسبهٔ انتگرالهای سه‌گانه تغییر متغیرهای استوانه‌ای و کروی و یا به عبارتی تبدیل انتگرالهای دکارتی به انتگرالهای استوانه‌ای و کروی می‌باشند.

تبدیل انتگرال دکارتی به انتگرال استوانه‌ای

تبدیل یک انتگرال دکارتی مانند $\iiint_D F(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$ به یک انتگرال استوانه‌ای

دو مرحله دارد.

مرحلهٔ ۱. در انتگرال دکارتی جانشانیهای زیر را انجام می‌دهیم

$$dx\,dy\,dz = dz\,r\,dr\,d\theta \quad , \quad x = r\cos\theta \,, y = r\sin\theta$$

مرحلهٔ ۲. حدود r، z و θ را چنان تعیین می‌کنیم که تصویر G (ناحیهٔ مشخص شده توسط این حدود در دستگاه مختصات استوانه‌ای) تحت تبدیل

$$x = r\cos\theta\,, \quad y = r\sin\theta\,, \quad z = z$$

برابر ناحیهٔ D در دستگاه مختصات دکارتی باشد. در این صورت داریم

$$\iiint_D F(x\,,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_G F(r\cos\theta\,, r\sin\theta\,, z)\,dz\,r\,dr\,d\theta$$

تبدیل انتگرال دکارتی به انتگرال کروی

تبدیل یک‌انتگرال دکارتی‌مانند $\iiint_D F(x\,,y,z)\,dx\,dy\,dz$ به یک انتگرال کروی دومرحله‌دارد.

مرحلهٔ ۱. در انتگرال دکارتی جانشانیهای زیر را انجام می‌دهیم

$$x = \rho\,\sin\phi\,\cos\theta \quad , \quad y = \rho\,\sin\phi\,\sin\theta \quad , \quad z = \rho\,\cos\phi$$

$$dx\,dy\,dz = \rho^2\,\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$$

مرحلهٔ ۲. حدود ρ، ϕ و θ را چنان تعیین می‌کنیم که تصویر G (ناحیهٔ مشخص شده در دستگاه مختصات کروی) تحت تبدیل

$$x = \rho\,\sin\phi\,\cos\theta\,, \quad y = \rho\,\sin\phi\,\sin\theta\,, \quad z = \rho\,\cos\phi$$

برابر ناحیهٔ D در دستگاه مختصات دکارتی باشد. در این صورت داریم

$$\iiint_D F(x\,,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_G H(\rho\,,\phi\,,\theta)\,\rho^2\,\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$$

که

$$H(\rho\,,\phi\,,\theta) = F(\rho\,\sin\phi\,\cos\theta,\ \rho\,\sin\phi\,\sin\theta\,,\ \rho\,\cos\phi)$$

انتگرال دوگانه روی بیضی ها (مختصات بیضوی)

برای محاسبه $\iint_D f(x,y)\,dA$ که در آن D بیضی $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$ است از تغییر متغیر $x-\alpha = ar\,cos\theta\,, y-\beta = br\,sin\theta$ استفاده می کنیم در نتیجه $dA = ab\,r\,dr\,d\theta$ خواهد بود که خواهیم داشت:

$$\iint_D \mathrm{f(x,y)}\, dA = \int_0^{2\pi}\int_0^1 F(r,\theta) abr\, dr\, d\theta$$

سوال مقدار انتگرال $\iint_D x^2\, dx\, dy$ که در آن D ناحیه محصور به بیضی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ می باشد را حسا ب کنید؟ (ارشد عمران ۸۰ و ۸۲)

$$x-\alpha = ar\, cos\theta \quad \rightarrow \quad x = ar\, cos\theta \quad \rightarrow \quad x^2 = a^2r^2\, cos^2\theta$$

$$y-\beta = br\, sin\theta$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 x^2\ abr\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^1 a^2r^2\, cos^2\theta\ abr\, dr\, d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 a^3r^3b\, cos^2\theta\, dr\, d\theta$$

بردار و هندسه تحلیلی

بسیاری از کمیتها دارای اندازه هستند هر یک از این کمیت ها را می توان توسط یک عدد حقیقی مشخص کرد. به عنوان مثال طول ، حجم ، قیمت ، سود ، جرم. این کمیت ها را اسکالر می نامیم.

کمیت های دیگری هستند که با یک عدد حقیقی مشخص نمی شوند این کمیتها علاوه بر اندازه ، جهتشان نیز مورد نیاز است. این پدیده ها را کمیت های برداری می نامند.به عنوان مثال سرعت یک جسم متحرک و نیروی وارد بر یک جسم.

بردار در صفحه

یک بردار به طور هندسی پاره خطی جهت دار است.