ADVANCED CONTROL

Ali Karimpour

Associate Professor

Ferdowsi University of Mashhad

Reference:

Chi-Tsong Chen, "Linear System Theory and Design", 1999.

I thank my students , Mahhmodi and Samadi, for their help in making slides of this lecture.

.

Lecture 7

State feedback and state estimators

Topics to be covered include:

- Pole placement with state feedback.
- Tracking and regulator problem
- Robust tracking and disturbance rejection
- State estimation
- Reduced Dimensional state

2

آنچه پس از مطالعه این مبحث می آموزید

- State feedback idea
- Pole placement possibility
- Pole placement techniques
- Output regulating
- Robust output regulating
- State estimation
- State estimation techniques
- Reduced order state estimation
- Separation theorem

- مفهوم فیدبک حالت
- امکان تعیین محل قطبها
- روشهای تعیین محل قطب
- تنظیم دقیق خروجی(ردیابی)
- تنظیم خروجی بصورت مقاوم(ردیابی)
- تخمین حالت
- چگونگی تخمین حالت
- تخمین حالت با مرتبه کاهش یافته
- قضیه جداسازی

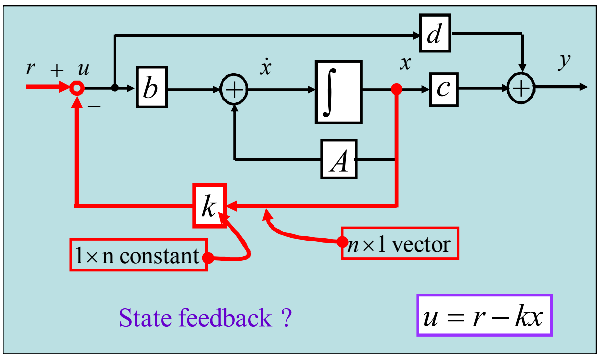
3

Pole placement with state feedback

جایابی قطب با استفاده از فیدبک حالت

$$\dot{x} = Ax + bu$$

$$y = cx + du$$



4

Pole placement with state feedback
جایابی قطب با استفاده از فیدبک حالت

$$\dot{x} = Ax + bu$$
$$y = cx + du$$

What are the eigenvalues?

roots of $|sI - A| = 0$

Let u=r-kx where k is an 1×n vector

$$\dot{x} = Ax + b(r - kx) \qquad \longrightarrow \qquad \dot{x} = (A - bk)x + br$$
$$y = cx + d(r - kx) \qquad\qquad y = (c - dk)x + dr$$

New eigenvalues? roots of $|sI - A + bk| = 0$

5

Pole placement with state feedback
جایابی قطب با استفاده از فیدبک حالت

قضیه ۷-۱

زوج (A-bk, b) برای هر بردار k با بعد 1×n کنترل پذیر است اگر و فقط اگر زوج (A, b) کنترل پذیر باشد.

اثبات: باید نشان دهیم کنترل پذیری دو سیستم زیر معادل است.

$$\dot{x} = Ax + bu \qquad \dot{x} = (A - bk)x + br$$
$$y = cx + du \qquad y = (c - dk)x + dr$$

$$C_f = [b \quad (A-bk)b \quad (A-bk)^2 b \quad \dots \quad (A-bk)^{n-1} b]$$

$$C_f = \underbrace{[b \quad Ab \quad A^2 b \quad A^3 b]}_{C} \begin{bmatrix} 1 & -kb & -k(A-bk)b & -k(A-bk)^2 b \\ 0 & 1 & -kb & -k(A-bk)b \\ 0 & 0 & 1 & -kb \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rho(C_f) = \rho(C)$$

6

Pole placement with state feedback

جایابی قطب با استفاده از فیدبک حالت

مثال ۷-۱

سیستم کنترل پذیر و رویت پذیر مقابل را در نظر بگیرید.

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u \qquad \xrightarrow[\text{State feedback}]{u=r-[k_1 \quad k_2]x} \qquad \dot{x}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3-k_1 & 1-k_2\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}r$$

$$y=[1 \quad 2]x \qquad\qquad y=[1 \quad 2]x$$

$$C_f=\begin{bmatrix}0 & 2\\ 1 & 1-k_2\end{bmatrix}\to |C_f|=-2\neq 0$$

The state feedback equation is controllable for any k.

$$O_f=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 7-2k_1 & 4-2k_2\end{bmatrix}\to |O_f|=4k_1-10-2k_2$$

Observability depends on k.

7

Pole placement with state feedback

جایابی قطب با استفاده از فیدبک حالت

$$\begin{aligned}\dot{x}&=Ax+bu\\ y&=cx+du\end{aligned} \quad (I) \qquad \xrightarrow[\text{state feedback}]{u=r-kx} \qquad \begin{aligned}\dot{x}&=(A-bk)x+br\\ y&=(c-dk)x+dr\end{aligned}$$

Is it possible to assign the eigenvalues arbitrarily?

قضیه ۷-۲: اگر معادلات حالت n-بعدی (I) کنترل پذیر باشد، آنگاه با فیدبک حالت u=r-kx ، که k یک بردار ثابت 1×n می باشد، می توان مقادیر ویژه A-bk را بطور دلخواه تعیین نمود البته باید توجه نمود که مقادیر ویژه مختلط باید بصورت مزدوج انتخاب شوند.

اثبات در ادامه خواهد آمد.

8

Pole placement with state feedback

جایابی قطب با استفاده از فیدبک حالت

مثال ۷-۲: آیا می توان مقادیر ویژه سیستم زیر را بطور دلخواه جابجا کرد؟

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -8 \\ 1 & 0 & -14 \\ 0 & 1 & -7 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad \Longrightarrow \quad C = \begin{bmatrix} b & Ab & A^2 b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -16 \\ 2 & 1 & -28 \\ 0 & 2 & -13 \end{bmatrix}$$

$$|C| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -16 \\ 2 & 1 & -28 \\ 0 & 2 & -13 \end{vmatrix} = -21 \quad \Longrightarrow \quad \text{System is controllable}$$

لذا می توان مقادیر ویژه را در مکانهای دلخواه قرار داد.

9

feedback

جایابی قطب با استفاده از فیدبک حالت

مثال ۷-۳: در سیستم مقابل در صورت امکان قطبها را در نقاط دلخواه قرار دهید.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$A_{cl} = A - BK = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-k_1 & 1-k_2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det(sI - A_{cl}) = (s - 1 + k_1)(s - 2) = 0$$

s=2 is a fixed mode.

s=2 is not controllable.

10

Pole placement with state feedback

جایابی قطب با استفاده از فیدبک حالت

مثال ۷-۴: سیستم مقابل را در نظر بگیرید:

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 0\end{bmatrix}u \quad \Longrightarrow \quad \text{System is not controllable}$$

I) آیا می توان مقادیر ویژه را در مکانهای دلخواه قرار داد؟

واضح است که خیر

II) آیا می توان مقادیر ویژه را در 4- ,3- ,2- قرار داد؟

واضح است که بله

III) آیا می توان مقادیر ویژه را در 2±3j- ,13- قرار داد؟

واضح است که خیر

IV) آیا می توان مقادیر ویژه را در 2-6j- ,2+3j- ,3- قرار داد؟

واضح است که خیر

11

Pole placement with state feedback

جایابی قطب با استفاده از فیدبک حالت

1- Direct method.

۱- روش مستقیم

2- Use of similarity transformation.

۲- استفاده از تبدیلات همانندی

3- Use of Lyapunov Equation

۳- استفاده از معادله لیاپانوف

12

feedback

جایابی قطب با استفاده از فیدبک حالت

۱- روش مستقیم تعیین محل قطبها

$$\dot{x} = Ax + bu$$
$$y = cx + du$$

Let $u = r - [k_1 \;\; k_2 \;\ldots\; k_n]x$

Find : $|sI - A + bk|$ = Desired characteristic equation

Polynomial of Degree n — Polynomial of Degree n

Then determine $k_1, k_2, \ldots, k_n$ from above equation

13

Pole placement with state feedback

جایابی قطب با استفاده از فیدبک حالت

۲- استفاده از تبدیلات همانندی در تعیین محل قطبها **(اثبات قضیه ۷-۲)**

$$\dot{x} = Ax + bu \qquad w = Px \qquad \dot{w} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \ldots & -a_{n-1} \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ .. \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$P^T = [q \quad qA \quad \cdots \quad qA^{n-1}] \quad q = [0 \quad 0 \cdots 1]C^{-1}$$

Characteristic equation of system is : $s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \ldots + a_1 s + a_0$

$$\hat{A} - \hat{b}\hat{k} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -a_0 - \hat{k}_0 & -a_1 - \hat{k}_1 & -a_2 - \hat{k}_2 & \ldots & -a_{n-1} - \hat{k}_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$-b_0 \qquad -b_1 \qquad -b_2 \qquad -b_{n-1}$$

Desired characteristic equation is : $s^n + b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \ldots + b_1 s + b_0$

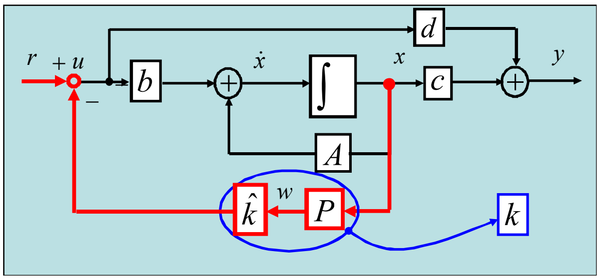
14

Pole placement with state feedback

جایابی قطب با استفاده از فیدبک حالت

$$\hat{A}-\hat{b}\hat{k}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \underset{-b_0}{-a_0-\hat{k}_0} & \underset{-b_1}{-a_1-\hat{k}_1} & \underset{-b_2}{-a_2-\hat{k}_2} & \cdots & \underset{-b_{n-1}}{-a_{n-1}-\hat{k}_{n-1}} \end{bmatrix}$$

$$\hat{k}=\begin{bmatrix} b_0-a_0 & b_1-a_1 & b_2-a_2 & \ldots & b_{n-1}-a_{n-1} \end{bmatrix}$$



$$u=r-\hat{k}w=r-\hat{k}Px=r-kx \longrightarrow k=\hat{k}P$$

15

Pole placement with state feedback

جایابی قطب با استفاده از فیدبک حالت

مثال ۷-۵: در سیستم مقابل در صورت امکان قطبها را در -2±j قرار دهید.

$$\dot{x}=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}x+\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}u \qquad C=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

روش اول: $|C|=-1\neq 0$

System is controllable

So it is possible to assign the poles on -2±j .

$$A-bk=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k_0 & k_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1-k_0 & -1-k_1 \\ -k_0 & -1-k_1 \end{bmatrix}$$

$$|sI-A+bk|=\begin{vmatrix} s-1+k_0 & 1+k_1 \\ k_0 & s+1+k_1 \end{vmatrix}=s^2+(k_0+k_1)s-1-k_1$$

$$s^2+(k_0+k_1)s-1-k_1=(s+2+j)(s+2-j)=s^2+4s+5 \rightarrow k=[10 \quad -6]$$

Pole placement with state feedback

جایابی قطب با استفاده از فیدبک حالت

مثال ۷-۵: در سیستم مقابل در صورت امکان قطبها را در -2±j قرار دهید.

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & -1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}u \qquad C=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{bmatrix} \qquad |C|=-1\neq 0$$

System is controllable

So it is possible to assign the poles on -2±j .

روش دوم:

$$P=\begin{bmatrix}q\\ qA\end{bmatrix} \qquad q=[0 \quad 1]C^{-1} \qquad P=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

System characteristic equation: s^2+0s-1

Desired characteristic equation: $(s+2+j)(s+2-j)=s^2+4s+5$

$$\hat{k}=[b_0-a_0 \quad b_1-a_1]=[5-(-1) \quad 4-0]=[6 \quad 4] \rightarrow \quad k=\hat{k}P=[10 \quad -6]$$

17

MATLAB place(A,b,[-2+i -2-i])

Pole placement with state feedback

جایابی قطب با استفاده از فیدبک حالت

۳- استفاده از معادله لیاپانوف در تعیین محل قطبها

Consider controllable **(A , b).** Find a $1\times n$ real **k** such that **(A-bk)** has any set of desired eigenvalues that contains no eigenvalues of A.

1) Select an n×n orbitrary matrix **F** that has the set of desired eigenvalues.

2) Select an arbitrary (n-1)×1 vector $\bar{k}$ such that $(F,\bar{k})$ is observable.

3) Solve the unique T in the Lyapunov equation $AT-TF=b\bar{k}$.

4) Compute the feedback gain $k=\bar{k}T^{-1}$.

Theorem 7-3:

If A and F have no eigenvalues in common, then the unique solution T of $AT-TF=b\bar{k}$ is nonsingular if and only if (A , b) is controllable and $(F,\bar{k})$ is observable.

18

Pole placement with state feedback

جایابی قطب با استفاده از فیدبک حالت

۳- استفاده از معادله لیاپانوف در تعیین محل قطبها

Selection of F and $\bar{k}$

If the desired eigenvalues are all distinct, we can use the modal form.

For example

If n=5 and the five distinct desired eigenvalues are selected as

$\lambda_1, \alpha_1 \pm j\beta_1$ *and* $\alpha_2 \pm j\beta_2$, then we can select F as

$$F = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & \beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta_1 & \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_2 & \beta_2 \\ 0 & 0 & 0 & -\beta_2 & \alpha_2 \end{bmatrix}$$

For this F, if $\bar{k}$ Has at least one nonzero entry associate with each diagonal block such as: $\bar{k} = [1\ 1\ 0\ 1\ 0], \bar{k} = [1\ 1\ 0\ 0\ 1], or\ \bar{k} = [1\ 1\ 1\ 1\ 1]$

Then $(F, \bar{k})$ is observable.

Pole placement with state feedback

جایابی قطب با استفاده از فیدبک حالت

مثال ۷-۶: در سیستم مقابل در صورت امکان قطبها را در -1.5±0.5j و -1±j قرار دهید.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} u \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 10 \\ -2 & 0 & -10 & 0 \end{bmatrix}$$

$$|C| = 36 \neq 0$$

System is controllable

$$y = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]x$$

We select F in modal form as $F = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & -0.5 & -1.5 \end{bmatrix}$ $\bar{k} = [1\ 0\ 1\ 0]$

```
A=[0 1 0 0;0 0 -1 0;0 0 0 1;0 0 5 0];
b=[0;1;0;-2];
F=[-1 1 0 0;-1 -1 0 0;0 0 -1.5 0.5;0 0 -0.5 -1.5];
k_bar=[1 0 1 0];
T=lyap(A,-F,-b*k_bar)
k=k_bar*inv(T)
```

MATLAB

Tracking and regulator problems

مساله تنظیم و ردیابی

در صورت اعمال پله آیا سیستم در خروجی پله را دنبال خواهد کرد؟

خطای سیستم به ورودی پله چند است؟

فرض کنید تابع انتقال عبارتست از:

$$g(s) = \frac{y(s)}{r(s)} = \frac{\beta_1 s^3 + \beta_2 s^2 + \beta_3 s + \beta_4}{s^4 + \alpha_1 s^3 + \alpha_2 s^2 + \alpha_3 s + \alpha_4}$$

پاسخ به ورودی پله عبارتست از:

$$If \quad u(t) = unit \quad step \;\rightarrow\; y(t)\big|_{t\to\infty} = g(0) = \frac{\beta_4}{\alpha_4}$$

برای رفع مشکل:

$$u(t) = pr(t) - kx(t)$$

21

Tracking and regulator problems

مساله تنظیم و ردیابی

در صورت استفاده از:

$$u(t) = pr(t) - kx(t)$$

تابع انتقال عبارتست از:

$$g_f(s) = \frac{y_f(s)}{r(s)} = p\frac{\beta_1 s^3 + \beta_2 s^2 + \beta_3 s + \beta_4}{s^4 + \alpha_1 s^3 + \alpha_2 s^2 + \alpha_3 s + \alpha_4} = pg(s)$$

پاسخ به ورودی پله عبارتست از:

$$If \quad u(t) = unit \quad step \;\rightarrow\; y(t)\big|_{t\to\infty} = p\frac{\beta_4}{\alpha_4} = pg(0)$$

حال:

$$p = \frac{1}{g(0)}$$

22

Tracking and regulator problems

مساله تنظیم و ردیابی

خلاصه:

اگر (A, b) کنترل پذیر باشد میتوان فیدبک حالت u=r-kx را بگونه ای انتخاب کرد که مقادیر ویژه (A-bk) در نقاط دلخواه قرار گرفته و خروجی در مقدار خاصی تنظیم شود.

و علاوه بر آن اگر (A, b) کنترل پذیر بوده و اگر $c(sI-A)^{-1}b$ هیچ صفری در مبدا نداشته باشد آنگاه علاوه بر فیدبک حالت می توان بهره پیش خور p را بگونه ای تعیین کرد که سیستم منتجه هر مرجع پله ای را بطور مجانبی دنبال کند.

23

Tracking and regulator problems

مساله تنظیم و ردیابی

مثال ۷-۷: در سیستم مقابل در صورت امکان قطب های سیستم را در -5,-6 قرار دهید.

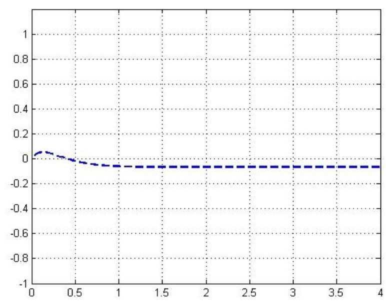
$$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}u$$
$$y=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}x(t)$$

System is controllable

$$k=\begin{bmatrix}14 & 57\end{bmatrix}$$

$$u=r-\begin{bmatrix}14 & 57\end{bmatrix}x$$

$$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix}-13 & -56\\ 1 & 2\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}r$$
$$y=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}x(t)$$



$$\frac{y(s)}{r(s)}=\frac{s-2}{s^2+11s+30}\qquad \left.\frac{y(s)}{r(s)}\right|_{s=0}=\frac{-2}{30}\neq 1$$

Tracking and regulator problems

مساله تنظیم و ردیابی

$$u = pr - \begin{bmatrix}14 & 57\end{bmatrix} x$$

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix}-13 & -56 \\ 1 & 2\end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix}p \\ 0\end{bmatrix} r$$

$$y = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix} x(t)$$

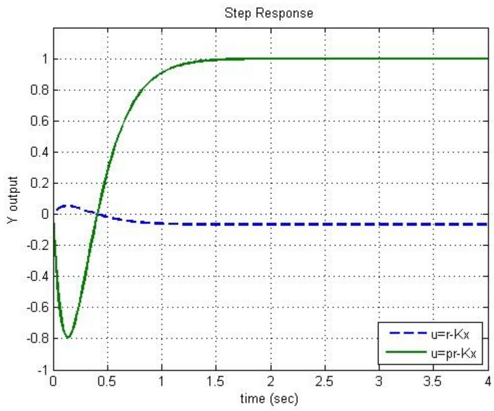
$$\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{p(s-2)}{s^2 + 11s + 30}$$

$$\downarrow$$

$$\left.\frac{y(s)}{r(s)}\right|_{s=0} = \frac{-2p}{30} = 1$$

$$\downarrow$$

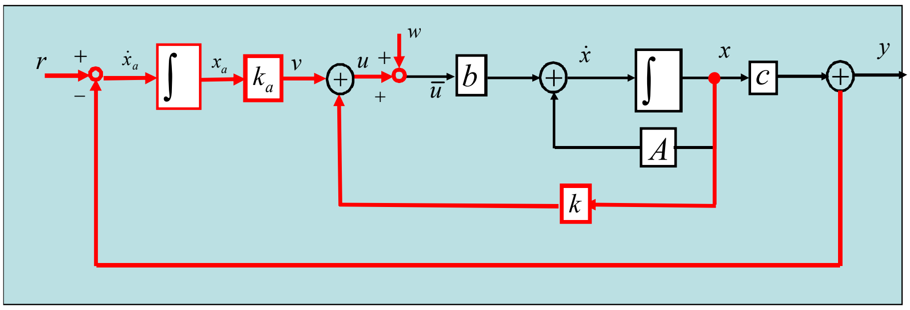
$$p = -15$$



Robust Tracking and Disturbance Rejection

ردیابی مقاوم و حذف اغتشاش

$$\dot{x} = Ax + bu + bw$$
$$y = cx$$



$$\dot{x}_a = r - y = r - cx$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x} \\ \dot{x}_a\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}A & 0 \\ -c & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x \\ x_a\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}b \\ 0\end{bmatrix} u + \begin{bmatrix}0 \\ 1\end{bmatrix} r + \begin{bmatrix}b \\ 0\end{bmatrix} w$$

$$y = \begin{bmatrix}c & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x \\ x_a\end{bmatrix}$$

26

Robust Tracking and Disturbance Rejection

ردیابی مقاوم و حذف اغتشاش

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + bu + bw \\ y &= cx \end{aligned} \xrightarrow[\text{state feedback}]{u = [\mathbf{k} \quad k_a]\begin{bmatrix} x \\ x_a \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + bk & bk_a \\ -c & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r + \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} w$$

$$y = [c \quad 0] \begin{bmatrix} x \\ x_a \end{bmatrix} \qquad (1)$$

قضیه ۷-۳:

اگر (A, b) کنترل پذیر بوده و اگر $c(sI-A)^{-1}b$ هیچ صفری در مبدا نداشته باشد آنگاه در سیستم (۱) می توان با استفاده از فیدبک حالت $u=kx+k_a x_a$ می توان مقادیر ویژه سیستم منتجه را در نقاط دلخواه قرار داد.

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -c & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r + \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} w$$

$$y = [c \quad 0] \begin{bmatrix} x \\ x_a \end{bmatrix}$$

برای اثبات باید نشان دهیم که سیستم مقابل در صورت کنترل پذیر بودن (A, b) کنترل پذیر است.

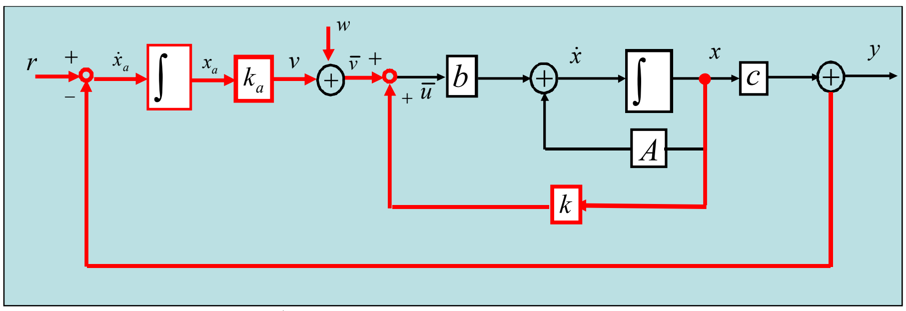
تمرین ۷-۱: قضیه داده شده را اثبات کنید.

27

Robust Tracking and Disturbance Rejection

ردیابی مقاوم و حذف اغتشاش

حال باید نشان داد سیستم زیر ورودی مرجع r را در حالت دائم بدون خطا دنبال و ورودی اغتشاش w را دفع می کند.



تمرین ۷-۲: در سیستم فوق با فرض اینکه (A, b) کنترل پذیر بوده و اینکه $c(sI-A)^{-1}b$ هیچ صفری در مبدا نداشته باشد نشان دهید در صورت اعمال پله به ورودی اغتشاش w خروجی در حالت دائم صفر می شود.

تمرین ۷-۳: در سیستم فوق با فرض اینکه (A, b) کنترل پذیر بوده و اینکه $c(sI-A)^{-1}b$ هیچ صفری در مبدا نداشته باشد نشان دهید در صورت اعمال پله به ورودی مرجع r خروجی در حالت پله را دنبال می کند.

28

Robust Tracking and Disturbance Rejection

ردیابی مقاوم و حذف اغتشاش

مثال ۷-۸: معادله حرکت طولی یک هواپیما را می توان در حالت کلی به صورت زیر نوشت

$$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix}-0.0507 & -3.861 & 0 & -9.81\\ -0.0017 & -0.5164 & 1 & 0\\ -0.000129 & 1.4168 & -0.4932 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix}0\\ -0.717\\ -1.645\\ 0\end{bmatrix}u(t)+\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}w$$

$$y(t)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}x(t)$$

که در آن

$x_1=\Delta v=$ تغییر در سرعت

$x_2=\alpha=$ زاویه حمله

$x_3=\theta=$ زاویه فراز

$x_4=q=$ نرخ فراز

$\delta_E=u=$ انحراف بالابر

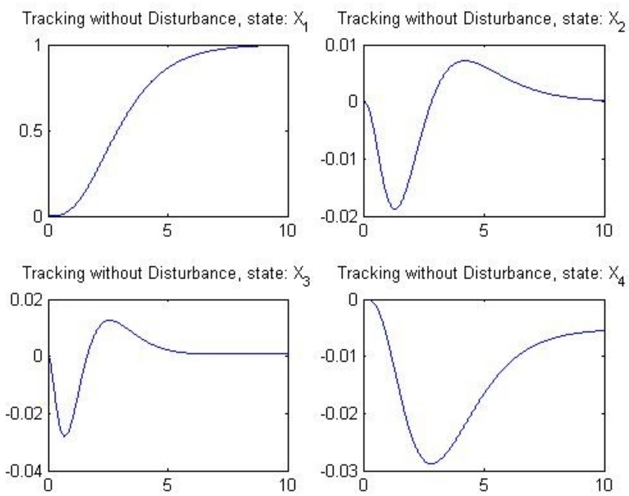
برای مدل هواپیمای داده شده یک کنترل انتگرالی طراحی کنید که مقادیر ویژه در ۰/۹- ، ۱-، ۱/۶-، ۲- و ۲/۵- قرارگیرد.

29

Robust Tracking and Disturbance Rejection

ردیابی مقاوم و حذف اغتشاش

پاسخ سیستم در صورت اعمال پله واحد به ورودی u(t)

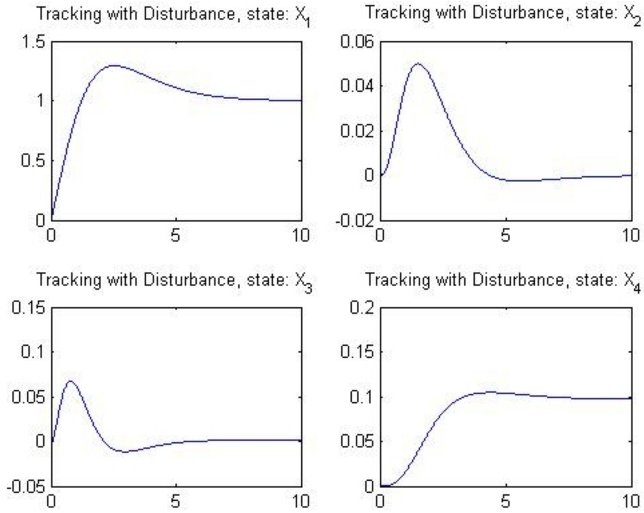


30

Robust Tracking and Disturbance Rejection

ردیابی مقاوم و حذف اغتشاش

پاسخ سیستم در صورت اعمال همزمان پله واحد به ورودی u(t) و پله واحد به اغتشاش w(t)



31

Stabilization

پایدارسازی

معادلات حالت مقابل را در نظر بگیرید: $\dot{x} = Ax + bu$

قبلا دیدیم که اگر سیستم کنترل ناپذیر بوده و رتبه ماتریس کنترل پذیری n1 باشد در اینصورت با تبدیل همانندی زیر

$$P^{-1} = [q_1 \quad q_2 \quad \ldots q_{n1} \ \ldots. \quad q_n]$$

که n_1 ستون اول آن هر n_1 ستون از C هستند که مستقل خطی باشند و ستون های باقی مانده بگونه ای انتخاب میشوند که P ناویژه باشد پس از تبدیل سیستم ابتدایی بصورت زیر در می آید.

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_c \\ \dot{\bar{x}}_{\bar{c}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_c & \bar{A}_{12} \\ 0 & \bar{A}_{\bar{c}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_c \\ \bar{x}_{\bar{c}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{b}_c \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (I)$$

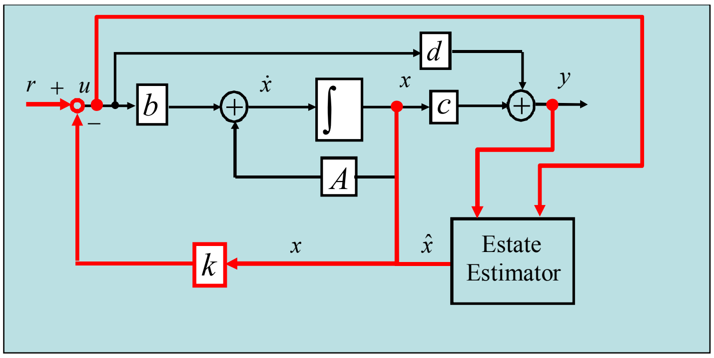
$$(I) \xrightarrow{u = r - kx = r - [\bar{k}_1 \ \bar{k}_2] \begin{bmatrix} \bar{x}_c \\ \bar{x}_{\bar{c}} \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_c \\ \dot{\bar{x}}_{\bar{c}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_c - \bar{b}_c \bar{k}_1 & \bar{A}_{12} - \bar{b}_c \bar{k}_2 \\ 0 & \bar{A}_{\bar{c}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_c \\ \bar{x}_{\bar{c}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{b}_c \\ 0 \end{bmatrix} r$$

اگر مقادیر ویژه ماتریس $\bar{A}_{\bar{c}}$ پایدار باشد سیستم را پایدار پذیر گویند.

32

Use of state estimation to use in feedback loop

استفاده از تخمین زن حالت برای استفاده در مسیر فیدبک



States are not available!

Condition for $\hat{x} \rightarrow x$

33

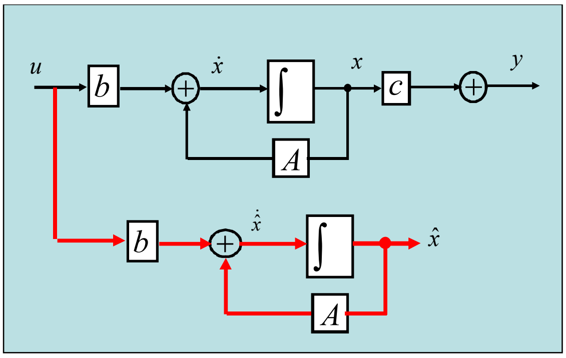
Open loop state estimator

تخمین زن حالت حلقه باز

$$\dot{x} = Ax + bu$$
$$y = cx$$

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + bu$$

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$$



$$\dot{e} = \dot{x} - \dot{\hat{x}}$$
$$= Ax + bu - A\hat{x} - bu$$

$$\dot{e}(t) = Ae(t)$$

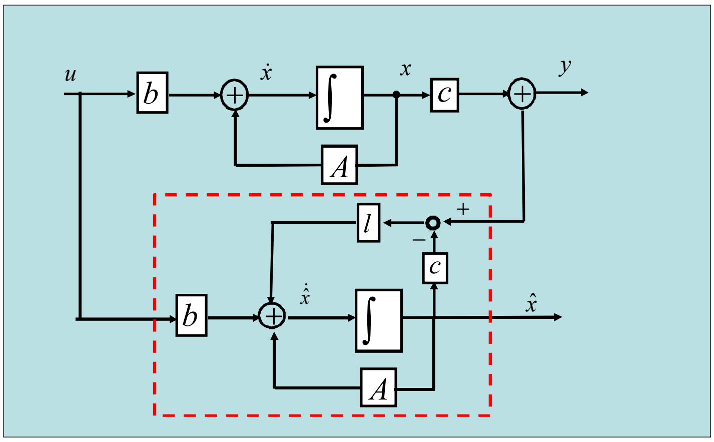
$$e(t) = e^{At}e_0$$

اشکالات؟

34

Close loop state estimator

تخمین زن حالت حلقه بسته



$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + bu + l(y - c\hat{x}) \longrightarrow \dot{\hat{x}} = (A - lc)\hat{x} + bu + ly$$

35

Estimation error

خطای تخمین زن

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$$

$$\dot{e} = \dot{x} - \dot{\hat{x}} = Ax + bu - (A - lc)\hat{x} - bu - l(cx)$$

$$= (A - lc)x - (A - lc)\hat{x}$$

$$= (A - lc)(x - \hat{x})$$

$$\dot{e}(t) = (A - lc)e(t) \quad \Rightarrow \quad e(t) = e^{(A-lc)t}e_0$$

در چه صورت می توان مقادیر ویژه را به طور دلخواه جابجا کرد؟

36

State estimator
تخمین زن حالت

قضیه ۷-۴:

زوج (A, c) را در نظر بگیرید. تمام مقادیر ویژه (A-lc) را می توان با استفاده از یک بردار حقیقی l در نقاط مناسب قرار داد اگر و فقط اگر زوج (A, c) رویت پذیر باشد.

اثبات قضیه ۷-۴:

می دانیم:

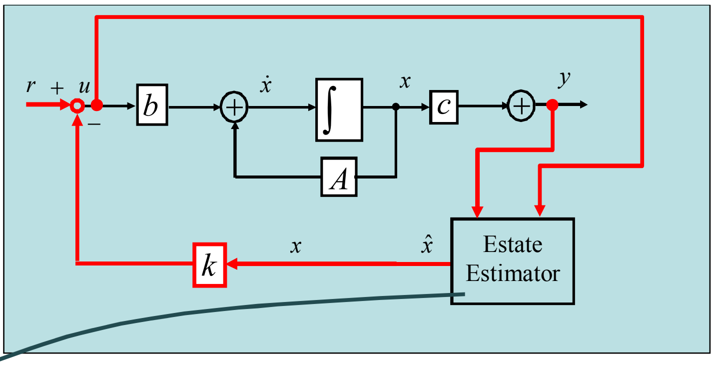
$$(\mathrm{A},\mathrm{c})\ \text{observable} \Leftrightarrow (\mathrm{A}',\mathrm{c}')\ \text{controllable}$$

$$(\mathrm{A}',\mathrm{c}')\ \text{controllable} \Leftrightarrow \text{All eigenvalue of } (\mathrm{A}'-\mathrm{c}'\mathrm{k}) \text{ can be assigned arbitrarily by selecting a constant vector k}$$

$$(\mathrm{A}'-\mathrm{c}'\mathrm{k})' = \mathrm{A}-\mathrm{ck}' \Rightarrow \mathrm{l}=\mathrm{k}'$$

37

Use of state estimation to use in feedback loop
استفاده از تخمین زن حالت برای استفاده در مسیر فیدبک

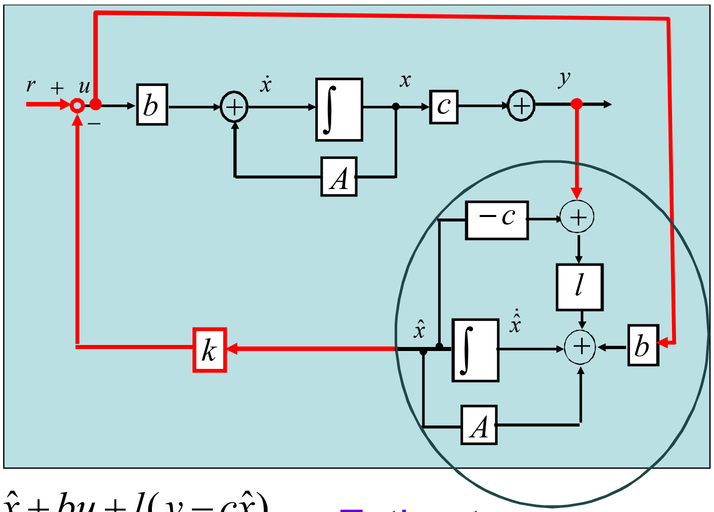


$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + bu + l(cx - c\hat{x})$$

38

Use of state estimation to use in feedback loop

استفاده از تخمین زن حالت برای استفاده در مسیر فیدبک



$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + bu + l(y - c\hat{x})$$

Estimator

39

Use of state estimation to use in feedback loop

استفاده از تخمین زن حالت برای استفاده در مسیر فیدبک

$$u = r - k\hat{x}$$

state feedback

$$\dot{x} = Ax - bk\hat{x} + br$$

$$\dot{\hat{x}} = (A - lc)\hat{x} + b(r - k\hat{x}) + lcx$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\hat{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -bk \\ lc & A - lc - bk \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b \\ b \end{bmatrix} r$$

$$y = \begin{bmatrix} c & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - bk & bk \\ 0 & A - lc \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} r$$

$$y = \begin{bmatrix} c & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix}$$

خاصیت جدایی

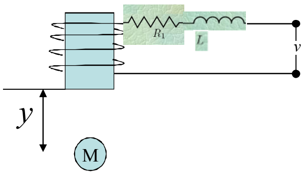
بکارگیری تخمین زن حالت اثری بر مقادیر ویژه فیدبک حالت اولیه نمیگذارد.

همچنین مقادیر ویژه تخمین زن حالت با این اتصال تغییری نمی کند.

40

Use of state estimation to use in feedback loop

استفاده از تخمین زن حالت برای استفاده در مسیر فیدبک



تمرین ۷-۴: معادلات فضای حالت سیستم تعلیق مقابل را در نظر بگیرید:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 980 & 0 & -208 \\ 0 & 0 & -100 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 100 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x$$

الف) فیدبک حالتی طراحی کنید که مقادیر ویژه سیستم منتجه در $-2\pm2j$ و -10 قرار گیرد.

ب) پاسخ سیستم را به شرط اولیه غیر صفر دلخواه رسم کنید.

ج) برای سیستم فیدبک حالت با استفاده از تخمین زن حالت طراحی کنید.

د) پاسخ سیستم را به شرط اولیه غیر صفر قسمت ب مجددا با استفاده از تخمین زن حالت رسم کنید.

ه) حالتهای واقعی سیستم و حالتهای تخمینی را بر روی یک شکل رسم کنید.

41

Reduced state estimation

تخمین زن حالت با بعد کاهش یافته

در این قسمت فرض می شود که بعنوان مثال $y=x_1$ باشد لذا تنها لازم است که تنها حالتهای باقیمانده یعنی n-1 حالت را تخمین بزنیم. برای این کار دو روش وجود دارد.

1- Use of similarity transformation.

۱- استفاده از تبدیلات همانندی

2- Use of Lyapunov Equation

۲- استفاده از معادله لیاپانوف

42

Reduced state estimation

تخمین زن حالت با بعد کاهش یافته

استفاده از معادله لیاپانوف در تخمین زن حالت با بعد کاهش یافته

آلگوریتم تعیین تخمین زن حالت با بعد کاهش یافته

۱- ماتریس (n-1)×(n-1) بعدی F را بگونه ای تنظیم کنید که مقادیر ویژه آن پایدار دلخواه و متمایز از مقادیر ویژه A باشد.

۲- بردار l با بعد (n-1)×1 را بگونه ای تنظیم کنید که زوج (A,l) کنترل پذیر باشد.

۳- جواب منحصر بفرد معادله لیاپانوف TA-FT=lc که دارای بعد (n-1)×n است را بیابید.

۴- تخمین حالات عبارتست از حل معادله n-1 بعدی زیر:

$$\dot{z} = Fz + Tbu + ly$$

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} c \\ T \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}$$

وجود معکوس در رابطه فوق در صورت اینکه F و A مقدار ویژه مشترک نداشته و (A,c) رویت‌پذیر و (F,l) کنترل پذیر باشد طی قضیه ای تضمین می شود.

43

Reduced Dimension estimation error

خطای تخمین زن دارای کاهش مرتبه

$$\dot{z} = Fz + Tbu + ly$$

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} c \\ T \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} c \\ T \end{bmatrix} \hat{x} = \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}$$

حال نظر به اینکه y=cx است کافی است که نشان دهیم:

$$z \to Tx$$

پس خطا عبارتست از:

$$e = z - Tx$$

$$\dot{e} = \dot{z} - T\dot{x} = Fz + Tbu + ly - TAx - Tbu$$

$$= Fz + lcx - TAx$$

با توجه به رابطه لیاپانوف

$$\dot{e} = Fz - FTx$$

$$\dot{e} = Fe$$

44

Reduced state estimation

تخمین زن حالت با بعد کاهش یافته

تمرین ۷-۵: معادلات فضای حالت سیستم مقابل را در نظر بگیرید:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -24 & -10\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ -8\\ 106\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$$

الف) فیدبک حالتی طراحی کنید که مقادیر ویژه سیستم منتجه در 1±2j- و 5- قرار گیرد.

ب) پاسخ سیستم را به شرط اولیه غیر صفر دلخواه رسم کنید.

ج) برای سیستم فیدبک حالت با استفاده از تخمین زن حالت مرتبه کامل طراحی کنید که قطبهای تخمین زن در 10- و 10- و 10- باشد.

د) پاسخ سیستم را به شرط اولیه غیر صفر قسمت ب مجددا با استفاده از تخمین زن حالت رسم کنید.

ه) حالتهای واقعی سیستم و حالتهای تخمینی را بر روی یک شکل رسم کنید.

و) برای سیستم فیدبک حالت با استفاده از تخمین زن حالت با بعد کاهش یافته طراحی کنید که قطبهای تخمین زن در 10- و 10- باشد. قسمت "د" و "ه" را نیز تکرار کنید.

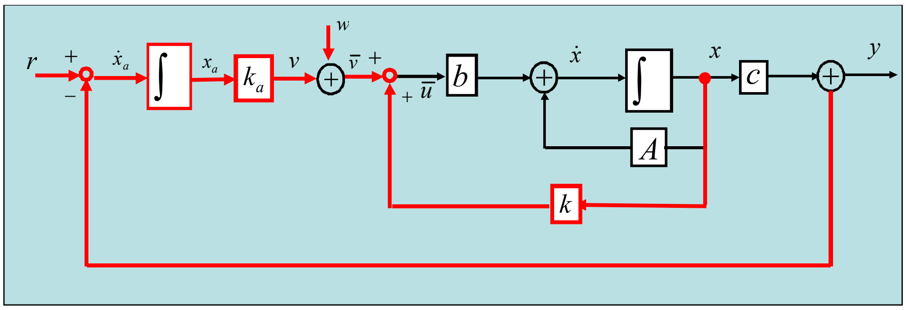
45

Exercises

تمرینها

تمرین ۷-۱: قضیه ۷-۳ را اثبات کنید.

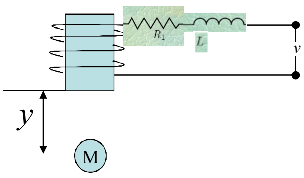
تمرین ۷-۲: در سیستم شکل زیر با فرض اینکه (A, b) کنترل پذیر بوده و اینکه $c(sI-A)^{-1}b$ هیچ صفری در مبدا نداشته باشد نشان دهید در صورت اعمال پله به ورودی اغتشاش w خروجی در حالت دائم صفر می شود.



تمرین ۷-۳: در سیستم شکل فوق با فرض اینکه (A, b) کنترل پذیر بوده و اینکه $c(sI-A)^{-1}b$ هیچ صفری در مبدا نداشته باشد نشان دهید در صورت اعمال پله به ورودی مرجع r خروجی در حالت پله را دنبال می کند.

46

Exercises تمرینها



تمرین ۷-۴: معادلات فضای حالت سیستم تعلیق مقابل را در نظر بگیرید:

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 980 & 0 & -208\\ 0 & 0 & -100\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\0\\100\end{bmatrix}$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}x$$

الف) فیدبک حالتی طراحی کنید که مقادیر ویژه سیستم منتجه در -2±2j و -10 قرار گیرد.

ب) پاسخ سیستم را به شرط اولیه غیر صفر دلخواه رسم کنید.

ج) برای سیستم فیدبک حالت با استفاده از تخمین زن حالت طراحی کنید.

د) پاسخ سیستم را به شرط اولیه غیر صفر قسمت ب مجددا با استفاده از تخمین زن حالت رسم کنید.

ه) حالتهای واقعی سیستم و حالتهای تخمینی را بر روی یک شکل رسم کنید.

Exercises تمرینها

تمرین ۷-۵: معادلات فضای حالت سیستم مقابل را در نظر بگیرید:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -24 & -10\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ -8\\ 106\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$$

الف) فیدبک حالتی طراحی کنید که مقادیر ویژه سیستم منتجه در -1±2j و -5 قرار گیرد.

ب) پاسخ سیستم را به شرط اولیه غیر صفر دلخواه رسم کنید.

ج) برای سیستم فیدبک حالت با استفاده از تخمین زن حالت مرتبه کامل طراحی کنید که قطبهای تخمین زن در -10 و -10 و -10 باشد.

د) پاسخ سیستم را به شرط اولیه غیر صفر قسمت ب مجددا با استفاده از تخمین زن حالت رسم کنید.

ه) حالتهای واقعی سیستم و حالتهای تخمینی را بر روی یک شکل رسم کنید.

و) برای سیستم فیدبک حالت با استفاده از تخمین زن حالت با بعد کاهش یافته طراحی کنید که قطبهای تخمین زن در -10 و -10 باشد. قسمت "د" و "ه" را نیز تکرار کنید.

Exercises تمرینها

تمرین ۷-۶: معادلات فضای حالت سیستم مقابل را در نظر بگیرید:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

الف) بروش مستقیم فیدبک حالتی طراحی کنید که مقادیر ویژه سیستم منتجه در 2- و 1- قرار گیرد.

ب) بروش تبدیل همانندی فیدبک حالتی طراحی کنید که مقادیر ویژه سیستم منتجه در 2- و 1- قرار گیرد.

ج) بروش معادله لیاپانوف فیدبک حالتی طراحی کنید که مقادیر ویژه سیستم منتجه در 2- و 1- قرار گیرد.

تمرین ۷-۷: معادلات فضای حالت سیستم مقابل را در نظر بگیرید:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 & -2\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 1\end{bmatrix}u$$

فیدبک حالتی طراحی کنید که مقادیر ویژه سیستم منتجه در $-1\pm1j$ و 2- قرار گیرد.

49

Exercises تمرینها

تمرین ۷-۸: معادلات فضای حالت سیستم مقابل را در نظر بگیرید:

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}1 & 1 & -2\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\end{bmatrix}x$$

فیدبک حالت و بهره پیش خور بگونه ای طراحی کنید که مقادیر ویژه سیستم منتجه در $-1\pm1j$ و 2- قرار گرفته و سیستم ورودی پله را بدون خطا دنبال کند.

تمرین ۷-۹: معادلات فضای حالت سیستم مقابل را در نظر بگیرید:

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}u$$

الف) آیا می توان فیدبک حالتی طراحی کرد که مقادیر ویژه سیستم منتجه در 2-و 2- و 1- و 1- قرار گیرد؟

ب) آیا می توان فیدبک حالتی طراحی کرد که مقادیر ویژه سیستم منتجه در 2-و 2- و 2- و 1- قرار گیرد؟

ج) آیا می توان فیدبک حالتی طراحی کرد که مقادیر ویژه سیستم منتجه در 2-و 2- و 2- و 2- قرار گیرد؟

n) آیا سیستم داده شده پایدار پذیر است؟

Exercises تمرینها

تمرین ۷-۱۰: معادلات فضای حالت سیستم مقابل را در نظر بگیرید:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

تخمین زن حالت مرتبه کامل و مرتبه کاهش یافته طراحی کنید بگونه ای که مقادیر ویژه تخمین زن از مجموعه {-3,-2±2j} انتخاب شود.

تمرین ۷-۱۱: تابع انتقال سیستمی عبارتست از:

$$g(s)=\frac{(s-1)(s+2)}{(s+1)(s-2)(s+3)}$$

آیا می توان با استفاده از فیدبک حالت تابع انتقال را بفرم زیر تبدیل کرد؟

$$g_f(s)=\frac{s-1}{(s+2)(s+3)}$$

آیا سیستم منتجه پایدار BIBO است؟ پایدار مجانبی چطور؟

51

Exercises تمرینها

تمرین ۷-۱۲: تابع انتقال سیستمی عبارتست از:

$$g(s)=\frac{(s-1)(s+2)}{(s+1)(s-2)(s+3)}$$

آیا می توان با استفاده از فیدبک حالت تابع انتقال را بفرم زیر تبدیل کرد؟

$$g_f(s)=\frac{1}{s+3}$$

آیا سیستم منتجه پایدار BIBO است؟ پایدار مجانبی چطور؟

52

Answers to selected problems

جواب ۷-۶: k=[4 1]

جواب ۷-۸: u=pr-kx, p=0.5, k=[15 47 -8]

جواب ۷-۱۰: تخمین زن مرتبه ۲

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0.6282 \\ -0.3105 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} y$$

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} -12 & -27.5 \\ 19 & 32 \end{bmatrix} z$$

تخمین زن مرتبه ۱

$$\dot{z} = -3z + (13/21)u + y$$

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} -4 & 21 \\ 5 & -21 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}$$

جواب ۷-۱۱: بله، بله و بله

53