ریاضیات مهندسی پیشرفته

جلسه هفتم

استاد : دکتر قصوری

رشته : کارشناسی ارشد مهندسی مکاترونیک

دانشگاه : آزاد واحد کاشان

تهیه وتنظیم : ابراهیم شهنازی

سرفصل مطالب جلسه هفتم

شرط لازم برای مشتق پذیری	
انتگرال روی مسیر	
انتگرال روی مسیر بسته ساده	

شرط لازم برای مشتق پذیری :

1. شرایط کوشی ریمان صدق کند.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

$$f'(z) = \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} - i \dfrac{\partial u}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial y} + i \dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$ تابع $u(x,y)$ همساز باشد.

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$ تابع $v(x,y)$ همساز باشد.

مثال 1) تابع $F(Z)=U(X,Y) + IV(X,Y)$ **تابعی تحلیلی و مشتق پذیرباشد در صورتیکه فقط** $U(X,Y)$ **موجود باشد مطلویست تعیین** $F(Z)$

چون تابع $f(z)$ تحلیلی می‌باشد بخش حقیقی آن در معادله لاپلاس صدق می‌کند.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow \int \partial v = \int \frac{\partial u}{\partial x} \partial y + \phi(x)$$

$\phi(x)$: یک مقدار ثابت در انتگرال می‌باشد و تنها برحسب x می‌باشد.

$$v(x,y) = \int_{y_0}^{y} \frac{\partial u}{\partial x}\, dy + \varphi(x)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{d}{dx}\left(\int_{y_0}^{y} \frac{\partial u}{\partial x}\, dy\right) + \varphi'(x)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \int_{y_0}^{y} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\, dy + \varphi'(x)$$

$$-\frac{\partial u}{\partial y} = \int_{y_0}^{y} -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\, dy + \varphi'(x)$$

برای اینکه تمام عبارت برحسب u شود جایگذاری انجام میدهیم.

$$-\frac{\partial u}{\partial y} + \underbrace{\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y_0}^{y}}_{\frac{\partial u}{\partial y}\big|_{y=y} - \frac{\partial u}{\partial y}\big|_{y=y_0}} = \varphi'(x)$$

$$\varphi'(x) = -\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=y_0}$$

$$\varphi(x) = -\int_{x_0}^{x} \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=y_0} dx + c \Rightarrow \varphi(x) = -\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y_0)} \frac{\partial u}{\partial y}\, dx + c$$

$$v(x,y) = \int_{y_0}^{y} \frac{\partial u}{\partial x}\, dy - \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y_0)} \frac{\partial u}{\partial y}\, dx + c$$

مثال ۲)بخش حقیقی یک تابع مشتق پذیر به صورت $U(X,Y)=X^2-Y^2$ موجود باشد مطلویست محاسبه $F(Z)$

$$f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y)$$

$$v(x,y)=\int_{y_0}^{y}\frac{\partial(x^2-y^2)}{\partial x}\,dy-\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y_0)}\frac{\partial(x^2-y^2)}{\partial y}\,dx+c$$

$$=2xy\Big|_{y_0}^{y}+2yx\Big|_{(x_0,y_0)}^{(x,y_0)}+c$$

$$=2xy-\cancel{2xy_0}+\cancel{2y_0x}\underbrace{-2x_0y_0+c}_{c_1}=$$

$$=2xy+c_1$$

$$f(z)=(x^2-y^2)+i(2xy+c_1)$$

تمرین ۱) بخش موهومی یک تابع تحلیلی مشخص می باشد ، مطلویست محاسبه بخش حقیقی آن.

$$V(x,y)\xrightarrow{f(z)\ \text{تحلیلی بودن}}u(x,y)$$

مانند مثال 1 حل شود

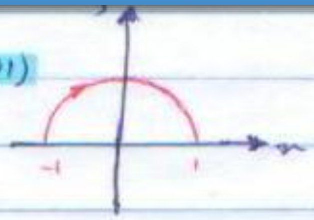
تمرین ۲) مطلویست محاسبه تابع زیر.

$$v(x,y)=x^3+y^3$$

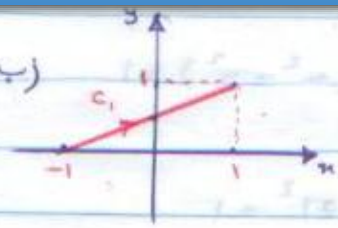
انتگرال روی مسیر:

مثال ۳) مطلوبیست محاسبه انتگرال $\oint Z2\ DZ$ روی مسیرهای زیر.

الف)



ب)



$x^2+y^2=1 \quad \begin{cases} -1<x<1 \\ 0<y<1 \end{cases}$

$y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2} \quad \begin{cases} -1<x<1 \\ 0<y<1 \end{cases}$

حل ب)

$$\int_{C_1} z^2\,dz = \int_{C_1} \underbrace{(x+iy)^2}_{x^2-y^2+i(2xy)}(dx+i\,dy)$$

$$=\left(\int_{C_1}(x^2-y^2)\,dx-\int_{C_1}2xy\,dy\right)+i\left(\int_{C}(x^2-y^2)\,dy+\int_{C}2xy\,dx\right)$$

تغییر متغیر $\Rightarrow \quad x=t \quad y=\frac{1}{2}t+\frac{1}{2} \quad -1<t<1$

$dx=dt \quad dy=\frac{1}{2}dt$

$$=\left(\int_{-1}^{1}t^2-\left(\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}\right)^2dt-2\int_{-1}^{1}t\left(\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}\right)\frac{dt}{2}\right)+$$

$$+\,i\left(\int_{-1}^{1}t^2-\left(\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}\right)^2\frac{dt}{2}+\int_{-1}^{1}2t\left(\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}\right)dt\right)$$

حل تمرین الف) $\int_C z^2\,dz$

$(x^2+y^2)=1 \qquad \begin{cases} -1<x<1 \\ 0<y<1 \end{cases}$

$\begin{cases} |z|^2=1 \\ 0<\operatorname{Arg} z<\pi \end{cases}$

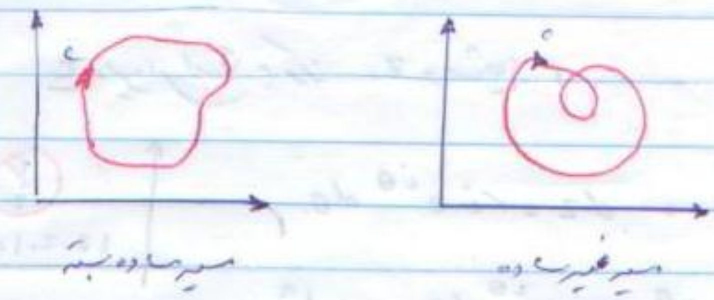
$z^2=|z|^2 e^{i2\theta} \qquad |z|=1$

$z=e^{i\theta} \qquad dz=ie^{i\theta}d\theta \Rightarrow dz=iz\,d\theta \Rightarrow \frac{dz}{iz}=d\theta$

$\int_C z^2\,dz = i\int_C z^3\frac{dz}{iz} = i\int_\pi^0 (|z|e^{i\theta})^3\,d\theta$

$= i\int_\pi^0 e^{i3\theta}\,d\theta = \frac{\cancel{i}}{i3}e^{i3\theta}\Big|_\pi^0 = \frac{1}{3}(1-e^{i3\pi}) = \boxed{2/3}$

انتگرال روی مسیر بسته ساده :



مثال ۴) در صورتیکه F(Z) روی و درون منحنی بسته مسیر C تابعی تحلیلی باشد مطلوبست محاسبه انتگرال روبرو.

$$\oint_c f(z)\,dz = ?$$

$$= \oint_c (u + iv)(dx + i\,dy)$$

$$= \oint_c (u\,dx - v\,dy) + i \oint_c (v\,dx + u\,dy)$$

قضیه گرین :

$$\oint_c \underset{f(x,y)}{f}\,dy + \oint_c \underset{g(x,y)}{g}\,dx = \iint_{y\,x} \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) dx\,dy$$

$$\Rightarrow -v = g \qquad u = f \qquad \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$\Rightarrow v = f \qquad u = g \qquad \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

طبق قضیه گرین

$$\Rightarrow \iint \left(\cancel{\frac{\partial v}{\partial x}} - \cancel{\frac{\partial u}{\partial y}}\right) dx\,dy + \iint \left(\cancel{\frac{\partial u}{\partial x}} - \cancel{\frac{\partial v}{\partial y}}\right) dx\,dy$$

$$-\frac{\partial u}{\partial y} \qquad 0 \qquad \frac{\partial v}{\partial y} \qquad 0$$

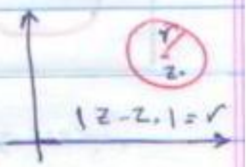
$$\int_c f(z)\,dz = 0$$

در صورتیکه $f(z)$ روی و درون ناحیه بسته c تحلیلی باشد

مثال ۵) در صورتیکه انتگرال مقابل روی مسیر C باشد مطلوبست محاسبه انتگرال زیر.

$$\oint_c \frac{dz}{z-z_0}$$

C دایره‌ای است به مرکز z_0 و شعاع r



$C : |z-z_0| = r$

$z = z_0 + re^{i\theta} \rightarrow dz = rie^{i\theta}\, d\theta$

$$\Rightarrow \oint_c \frac{dz}{z-z_0} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{rie^{i\theta}\, d\theta}{re^{i\theta}} = i\int_{-\pi}^{\pi} d\theta = i2\pi$$

مثال ۶) Z_0 نقطه ای درون منحنی بسته C می باشد مطلوبست محاسبه انتگرال زیردر نقطه Z_0.

$$\oint_c \frac{f(z)}{z-z_0}\, dz$$

جهت C_2 عکس جهت C_1 است

نتیجه: $\int_{C_1} - \int_{C_2}$

$$\oint_c \frac{f(z)}{z-z_0}\, dz = 0$$

چون $z = z_0$ خارج منحنی بسته C_1 می‌باشد

$$\oint_{C_1} \frac{f(z)}{z-z_0}\, dz = \int_{A'A} \frac{f(z)}{z-z_0}\, dz + \int_{AB} \frac{f(z)}{z-z_0}\, dz + \int_{BB'} \frac{f(z)}{z-z_0}\, dz + \int_{B'A'} \frac{f(z)}{z-z_0}\, dz$$

$$= \oint \frac{f(z)}{z-z_0}\, dz + \int_{AB} \cancel{\frac{f(z)}{z-z_0}}\, dz - \oint_{C_2} \frac{f(z)}{z-z_0}\, dz - \int_{AB} \cancel{\frac{f(z)}{z-z_0}}\, dz$$

انتگرال روی مسیر C_1 برابر است با انتگرال روی مسیر C_2

$$\Rightarrow \oint_{c} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = \oint_{c_2} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz$$

$$= \oint_{c_2} \frac{f(z)-f(z_0)+f(z_0)}{z-z_0}\,dz$$

$$= \oint_{c_2} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz + f(z_0)\underbrace{\oint_{c_2} \frac{dz}{z-z_0}}_{2\pi i} = 2\pi i\, f(z_0)$$

$$= \oint_{c_2} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz = \begin{cases} 0 & \text{چون این عبارت تحلیلی می‌باشد} \quad z \neq z_0 \\ \oint_{c_2} f'(z)\,dz\Big|_{z=z_0} = 0 & z = z_0 \end{cases}$$

اگر تابعی تحلیلی باشد مشتقات آن نیز تحلیلی می‌باشد و نتیجه انتگرال روی منحنی بسته تابع تحلیلی نیز صفر می‌باشد.

مثال ۷) مطلوبست محاسبه انتگرال روبرو روی مسیر زیر.

$$\oint_{c} \frac{dz}{z^2-1}$$

الف) $c: |z-1| = 1$

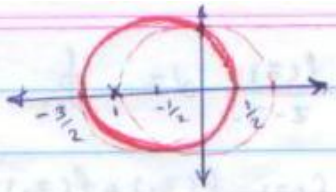
$z^2 = 1 \Rightarrow z = \pm 1$

$$\oint_{c} \frac{\frac{1}{z+1}}{z-1}\,dz = 2\pi i\, f(z_0) = 2\pi i \left.\frac{1}{z+1}\right|_{z=1}$$

روی و درون منحنی تحلیلی است $f(z)$

$$= 2\pi i \times \frac{1}{2} = \pi i$$

ب) $C: |z + \frac{1}{2}| = 1$



$$\oint_C \frac{dz}{(z-1)(z+1)} = \oint_{C_1} \frac{\frac{1}{z-1}}{z+1}\, dz = 2\pi i \cdot \frac{1}{z-1}\Big|_{z=-1} = -\pi i$$

ج) $C: |z| = 2$

روش اول حل:

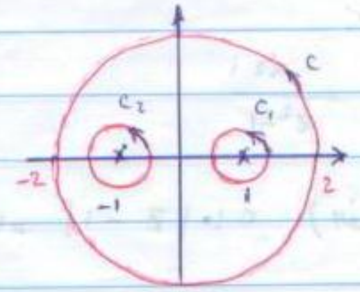
$$\oint_C \frac{dz}{(z-1)(z+1)} = \frac{1}{2}\oint_C \frac{dz}{z-1} - \frac{1}{2}\oint \frac{dz}{z+1}$$

جزء به کسر $\quad \dfrac{1}{(z-1)(z+1)} = \dfrac{A}{z-1} + \dfrac{B}{z+1} = \dfrac{1/2}{z-1} - \dfrac{1/2}{z+1}$

$A + B = 0 \qquad A - B$

$\underline{A - B = 1}$

$A = \frac{1}{2} \rightarrow B = -\frac{1}{2}$



$\Rightarrow \frac{1}{2}\, 2\pi i - \frac{1}{2}\, 2\pi i = 0$

روش دوم حل:

$$\oint_C = \oint_{C_1} + \oint_{C_2} + \cancel{\oint_C}^{\,0}$$

C: دیواری که دو حفره C_1 و C_2 از آن حذف شده است.

$$\oint_{C_1} \frac{\frac{1}{z+1}}{z-1}\, dz + \oint_{C_2} \frac{\frac{1}{z-1}}{z+1}\, dz = 2\pi i \frac{1}{z+1}\Big|_{z=1} + 2\pi i \frac{1}{z-1}\Big|_{z=-1}$$

$= \pi i - \pi i = 0$

تمرین ۱) مطلوبست محاسبه انتگرال روبرو روی مسیرهای زیر.

$$\oint \frac{z^2}{z^3-1}\,dz$$

الف) $C: |z-1| = \frac{1}{2}$

ب) $C: |z+\frac{1}{2}| = 1$

ج) $C: |z| = 2$

$w = z^3 = 1 \Rightarrow w = 1e^{i\theta} = 1e^{i0}$

$z = \sqrt[3]{w}$

$z = |1|\, e^{i\frac{0+2k\pi}{3}}$

$$\begin{cases} z_1 = e^{i0} \\ z_2 = e^{i\frac{2\pi}{3}} \\ z_3 = e^{-i\frac{2\pi}{3}} \end{cases}$$