

مجموعه‌ها



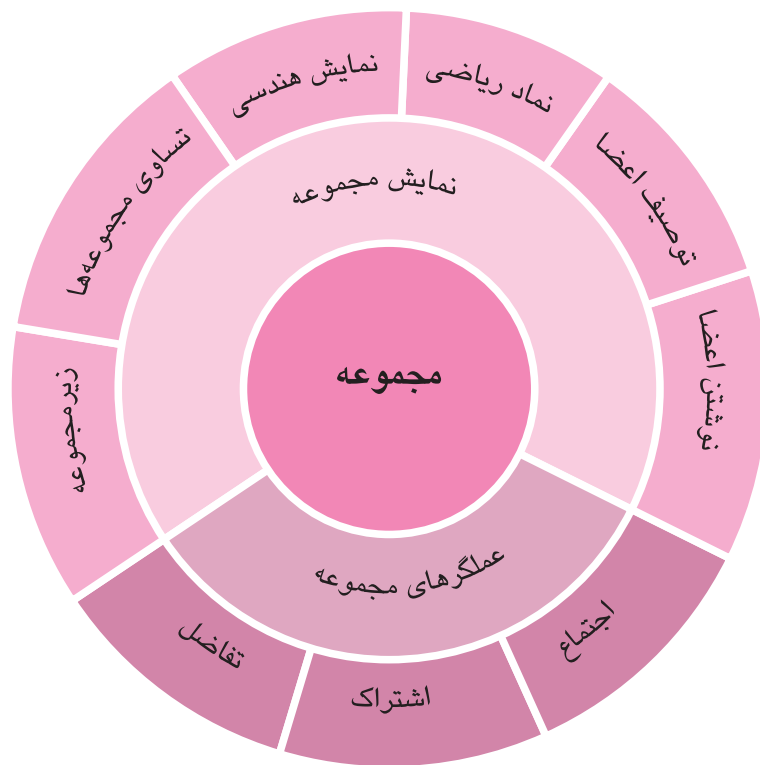
مهمانی فقط غرق سکوت نبود. غرق نگاه‌های خیره‌هر فیلسوفی که داشت در گوشه و کناری فکر می‌کرد که:

آیا مجموعه‌ای وجود دارد که شامل همهٔ مجموعه‌ها باشد؟

تا اینکه «برتراند راسل» از جا برخاست و همه را شکست:

دوستان. یک فاجعه! من مجموعه‌ای به نام را به شما معرفی می‌کنم که هر عضو آن، خود، مجموعه‌ای است که عضو خودش نیست. هر مجموعه‌ای که می‌شناسید عضو است. ولی از بین شما کسی هست که به من بگوید آیا عضو خودش هست یا نه. اگر باشد، نباید باشد و اگر نیست باید باشد.

دوباره سکوت و سکوت. اما این بار به خاطر نبوغ راسل. آنها فهمیدند مجموعهٔ همهٔ مجموعه‌ها نمی‌تواند وجود داشته باشد.



مقدمه



جورج کانتور

Georg Cantor

(۵۴۸۱ - ۸۱۹۱)

پایه‌های اصلی نظریهٔ مجموعه‌ها توسط ریاضیدان آلمانی به نام جورج کانتور بنا نهاده شده است. بیشتر ریاضیدانان بر این عقیده‌اند که نظریهٔ مجموعه‌ها پایهٔ ریاضیات مدرن است. علم منطق ریاضی که خود پایهٔ علوم مهندسی است، حیات خود را مدیون تلاش‌های کانتور است.

مفهوم مجموعه در ریاضیات، مفهومی اساسی به شمار می‌آید. مجموعه‌ها تقریباً در هر شاخه‌ای از علوم ریاضی مورد استفاده قرار می‌گیرد. وقتی در حال مطالعهٔ ریاضیات هستیم، مجموعه‌ها در یک قدمی ما قرار دارند. هر ساختاری در ریاضیات را می‌توان به شکل مجموعه‌ای از اجزای تشکیل دهندهٔ آن در نظر گرفت. وقتی ویژگی‌های اعداد طبیعی را مورد بررسی قرار می‌دهیم، با مجموعهٔ اعداد طبیعی روبرو هستیم. وقتی هندسه می‌خوانیم با مجموعهٔ نقاط، خطوط، پاره خط‌ها و مثلث‌ها سر و کار داریم.

در واقع مفهوم مجموعه، زبان مشترکی است که هر موضوعی در ریاضیات را می‌توان با آن زبان توصیف کرد. بنابراین یادگیری مفهوم مجموعه‌ها و خواص آن باعث خواهد شد تا ما ساختارهای مختلف ریاضی و مسائل مربوط به آن را با زبان گویاتری بشناسیم و یا بیان کنیم.

مجموعه چیست؟

در گفتگوهای روزانه معمولاً به مفاهیمی از نوع «گروه»، «دسته» و یا «خانواده» برخورد می‌کنیم: گروه سرود دانش‌آموزان مدرسهٔ بهزاد، دستهٔ مدارنگی‌های سارا، خانوادهٔ گیاهان دارویی. «مجموعه» نیز کلمه‌ای است که در ریاضی به جای گروه‌ها، دسته‌ها و یا خانواده‌ها به کار می‌رود. مثلاً می‌گوییم: «همهٔ گیاهان دارویی یک مجموعه تشکیل می‌دهند و بومادران عضو این مجموعه است».

مجموعه ویژگی‌هایی دارد و برای اینکه مجموعه را بهتر بشناسیم، باید ویژگی‌های آن را شناسایی کنیم. برای شناختن ویژگی‌های یک مجموعه فعالیت‌های زیر را انجام دهید.



فعالیت

نام هر یک از بستگان خود را بنویسید.



نوبت شما

بهزاد در انجام فعالیت ۱ دچار تردید شده است. به نظر شما چه چیزی او را به تردید انداخته است؟



فعالیت

نام هر یک از بستگان درجه یک خود را بنویسید. بستگان درجه یک شما را پدر، مادر، خواهر(ها) و برادر(های) شما تشکیل می‌دهند.

بهزاد در انجام فعالیت ۲، افراد زیر را نوشت:

حسین، معصومه، محمدرضا، رضیه، فاطمه

بستگان درجه یک بهزاد یک مجموعه تشکیل می‌دهند. به هر یک از افراد بالا، یک عضو می‌گوییم. بهزاد هیچ تردیدی ندارد که «فاطمه» عضو بستگان درجه یک است ولی «دایه محمود» عضو نیست. وقتی مجموعه بودن را مورد بررسی قرار می‌دهیم، عضو بودن یا عضو نبودن هر چیزی را باید بتوانیم بررسی کنیم. اگر در تشخیص عضو بودن یا عضو نبودن هیچ چیزی تردید نداشته باشیم، با یک «مجموعه» روبرو هستیم.

مثال

می‌خواهیم بدانیم کدام بند یک مجموعه را مشخص می‌کند و کدام نه.

- (الف) همهٔ اعداد طبیعی که فقط ۳ تا مقسوم علیه دارند. این بند یک مجموعه را مشخص می‌کند. زیرا برای شمردن تعداد مقسوم علیه‌های یک عدد طبیعی، ابهامی وجود ندارد.
- (ب) اعداد ۵، ۶، ۷. این سه عدد یک مجموعه را می‌سازند. زیرا هر چیزی که در نظر بگیریم یا برابر با یکی از این سه عدد است و یا نیست.
- (ج) همهٔ دانش‌آموزان قدبلند کلاس شما. این بند نمی‌تواند یک مجموعه را مشخص کند. زیرا روشن نیست که به چه شخصی قد بلند می‌گوییم و چه کسی قد بلند نیست. هیچ می‌دانستید در کشور اندونزی یک مرد $۱/۷۵$ متری قدبلند به نظر می‌آید و همین شخص در هلند یک مرد کوتاه قد به حساب می‌آید؟
- (د) سه تا از زیباترین غزل‌های حافظ. این بند یک مجموعه نیست. زیرا انتخاب سه تا از زیباترین غزل‌های حافظ به نظر هر شخص بستگی دارد.

شما می‌دانید که منجمان به چه چیزی «ستاره» می‌گویند. یکی از معروفترین ستارگان دنیا، خورشیدی است که در آسمان بالای سرتان می‌درخشد. ما هیچ یک از ستاره‌های کهکشان راه شیری را از نزدیک ندیده‌ایم ولی همهٔ ستارگان کهکشان راه شیری، یک مجموعه است. زیرا ستاره بودن یا نبودن یک جرم آسمانی، ابهامی ندارد. بنابراین لازم نیست اعضای یک مجموعه را بتوانیم بشماریم و یا نام ببریم.

معمولاً هر مجموعه را با یک حرف بزرگ (انگلیسی) نشان می‌دهیم و هر عضو آن را با یک حرف کوچک (انگلیسی) نمایش می‌دهیم. در این صورت به جای اینکه بگوییم « x عضو مجموعه A است»، می‌نویسیم:

$$a \in A$$

مثال

مجموعه اعداد طبیعی که فقط ۳ تا مقسوم علیه دارند را در نظر بگیرید. این مجموعه را A می‌نامیم. عدد ۲۵ فقط سه تا مقسوم علیه دارد: ۱، ۵ و ۲۵. ولی عدد ۲۶ چهار مقسوم علیه دارد: ۱، ۲ و ۱۳، ۲۶. بنابراین می‌نویسیم:

$$25 \in A, \quad 26 \notin A$$

با توجه به مجموعه‌های زیر، کدام بند درست و کدام نادرست است؟

$A =$ مجموعه حروف فارسی بدون نقطه. $B =$ مجموعه اعداد طبیعی که فقط ۳ مقسوم علیه دارد.

- | | | |
|------------------|-----------------|---------------|
| الف) $ج \in A$ | ب) $ز \notin A$ | ج) $ی \in A$ |
| د) $۱۰ \in A$ | ه) $۱۶ \in B$ | و) $۴۹ \in B$ |
| ز) $۹۴ \notin B$ | ح) $س \notin B$ | |



فعالیت

فرض کنید به عضو بودن هر چیزی پاسخ «نه» بدهیم:

آیا عدد «۲» عضو آن است؟ پاسخ: نه. آیا حرف «ل» عضو آن است؟ پاسخ: نه. آیا ستارهٔ «خورشید» عضو آن است؟ پاسخ: نه. و ... بنابراین به «عضو نبودن» هیچ چیزی تردید نداریم. پس ما با یک مجموعه روبرو هستیم که هیچ عضوی ندارد. این مجموعهٔ مهم، «تهی» نام دارد و آن را با \emptyset نمایش می‌دهیم.

مثال

افرادی که در روز ۳۱م مهرماه به دنیا آمده‌اند را در نظر بگیرید. چون مهرماه ۳۰ روز بیشتر ندارد، هر فردی که در نظر بگیریم به روشنی در ۳۱م مهرماه به دنیا نیامده است. بنابراین با یک مجموعه روبرو هستیم که هیچ عضوی هم ندارد. پس:

$$\emptyset = \text{مجموعه افرادی که در روز ۳۱م مهرماه به دنیا آمده‌اند}$$



فعالیت

بحث کنید که چرا هر یک از مجموعه‌ی زیر برابر با تهی است.
 الف) A مجموعه مثلث‌هایی که مجموع زاویه‌های داخلی آن ۲۰۰ درجه است.
 ب) $B =$ مجموعه کوچکترین عدد گویای بزرگتر از یک.
 ج) مجموعه خط‌هایی که هر کدام از سه رأس یک مثلث عبور می‌کند.
 د) مجموعه بزرگترین عدد طبیعی.
 ه) مجموعه اعداد صحیحی که توان دوم آن (مربع آنها) عددی منفی است.

نمایش یک مجموعه

نوشتن عضوها

برای اینکه عضوهای یک مجموعه را نام ببریم، عضوهای آن را بین دو علامت آکولاد یعنی « $\{ \}$ » قرار می‌دهیم و هر عضو را با علامت « $,$ » از هم جدا می‌کنیم. مثلاً وقتی می‌نویسیم $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ ، یعنی $1 \in A$ ، $2 \in A$ ، $3 \in A$ ، $4 \in A$ ، $6 \in A$ ، $12 \in A$.

یک تالار عروسی از پنج نفر خواست که غذاهای دوست داشتنی خود را در جدول زیر انتخاب کنند. هر یک از آنها غذایی که دوست داشت را با \checkmark و غذایی که دوست نداشت را با \times نشان داد:

	الناز	دریا	سیما	بهنوش	آزاده
کباب	\times	\times	\checkmark	\times	\checkmark
فسنجان	\times	\times	\checkmark	\checkmark	\checkmark
ماهی	\times	\times	\checkmark	\times	\checkmark
باقالی پلو	\times	\checkmark	\checkmark	\checkmark	\times
آلو اسفناج	\times	\times	\times	\times	\times

مجموعه غذاهایی که آزاده دوست دارد را با A نمایش می‌دهیم. پس $A = \{ \text{کباب}, \text{فسنجان}, \text{ماهی} \}$. برای بهنوش $B = \{ \text{باقالی پلو}, \text{فسنجان} \}$ ، برای سیما $C = \{ \text{کباب}, \text{ماهی}, \text{باقالی پلو}, \text{فسنجان} \}$ و برای دریا $D = \{ \text{باقالی پلو} \}$ است. الناز هیچ یک از این غذاها را برای جشن عروسی دوست ندارد. بنابراین مجموعه E هیچ عضوی ندارد. پس $E = \{ \}$ است و نیز می‌توانیم بنویسیم $E = \emptyset$.

تالار عروسی قصد دارد منوی غذایی خود را مطابق با علاقه مشتریان خود ارائه دهد. یک منوی غذایی برابر با مجموعه‌ای از غذاهای مورد علاقه مشتریان می‌باشد. برای کمتر شدن هزینه‌ها، منوی غذایی نباید بیشتر از ۲ غذا داشته باشد. بنابراین منوهای غذایی که تالار ارائه می‌کند، مجموعه زیر است:

$$T = \{ \emptyset, \{ \text{باقالی پلو} \}, \{ \text{باقالی پلو}, \text{فسنجان} \} \}$$

به نکات زیر توجه کنید:

(۱) وقتی یک عروسی فقط به صرف شیرینی و میوه برگزار می‌شود، منوی غذایی \emptyset را انتخاب شده است. بنابراین $\emptyset \in T$ است.

(۲) باقالی پلو یک غذا است ولی $\{ \text{باقالی پلو} \}$ یک منوی غذایی است. پس $\{ \text{باقالی پلو} \} \notin T$ اما $\{ \text{باقالی پلو} \} \in T$ است.



فعالیت

با توجه به مجموعه‌های زیر، کدام بند درست و کدام نادرست است؟

$$B = \{98, \{1, 98\}\} \quad , \quad A = \{1, 98, 9 - 8\}$$

- الف) A ۳ عضوی است. (ب) $5 - 4 \in A$ (ج) B دو عضوی است. (د) $A \in B$
 ه) $1 \notin B$ (و) $98 \notin B$ (ز) $\{98\} \notin B$ (ح) $\{A\} \in B$

کاوه دانش‌آموز کلاس «الف» در پایه نهم است. معلم ریاضی نام دانش‌آموزان را به ترتیب نام خانوادگی نوشت و کاوه نفر نهم بود. معلم ورزش نام دانش‌آموزان را به ترتیب قد نوشت و کاوه نفر نوزدهم بود. اما «عضو بودن» کاوه در کلاس «الف» تغییر نکرده است. یعنی اگر ترتیب نوشتن عضوهای یک مجموعه را تغییر دهیم، مجموعه تغییر نمی‌کند. بنابراین:

$$\{1, 3, 9, 4\} = \{3, 4, 9, 1\}$$



فعالیت

با توجه به تساوی‌های زیر مقدار a ، b و c را پیدا کنید:

$$\{1, a, b, 7\} = \{2, 3, 7, c\} = \{a, 7, 1, 3\}$$

روز اول مهر بود و یکی از آموزگاران کاوه می‌خواست با دانش‌آموزان آشنا شود. او در آغاز زنگ نام تک تک دانش‌آموزان را یادداشت کرد. در پایان درس نیز دوباره شروع به نوشتن نام دانش‌آموزان کرد که متوجه اشتباه خود شد. پس او نام بعضی از دانش‌آموزان را ۲ بار نوشته بود. بدون اینکه بدانیم نام کاوه ۱ بار نوشته شده یا ۲ بار، یقین داریم کاوه عضو دانش‌آموزان این کلاس است.

در هر مجموعه مهم این است که برای عضو بودن یا عضو نبودن هر چیز پاسخ روشنی وجود داشته باشد. تکرار کردن این پاسخ، مجموعه را تغییر نمی‌دهد. یعنی ۱ بار خواندن نام کاوه عضو بودن او را در مجموعه دانش‌آموزان مشخص می‌کند. وقتی ۲ بار نام کاوه نوشته شود، عضو بودن او تغییر نمی‌کند.

مجموعه $\{1, 1, 2, 2, 2, 3, 4, 4, 4, 4\}$ با مجموعه $\{1, 2, 3, 4\}$ برابر است. زیرا در هر دو نمایش مجموعه، عضو بودن اعداد ۱، ۲، ۳ و ۴ مشخص است و عضو دیگری نیز ندارند.

مثال



فعالیت

یک کاربر رایانه می‌خواهد جمله «mississippi is necessary» را در رایانه وارد کند.

الف) کلیدهایی که او فشار می‌دهد را به صورت یک مجموعه به نام T بنویسید.

ب) مجموعه T چند عضوی است؟

ج) آیا جمله زیر یک مجموعه را مشخص می‌کند؟

«اولین و آخرین عضو مجموعه T »

توصیف عضوها

نوشتن همه عضوهای هر یک از مجموعه‌های زیر یا مشکل است و یا امکان پذیر نیست:


A مجموعه روزهای تعطیل رسمی امسال است.


B مجموعه نام‌های پسر یا دختر است که در فرهنگ ایرانی ثبت شده است.


C مجموعه اعداد گویا است که بزرگتر از صفر و کوچکتر از یک می‌باشند.


در بعضی از مجموعه‌ها به جای نوشتن عضوها، جمله کوتاه و قابل فهمی را بیان می‌کنیم که ویژگی عضوها را مشخص می‌کند. اگر چیزی آن ویژگی را داشته باشد، به عضو بودن و در غیر این صورت به عضو نبودن آن یقین پیدا می‌کنیم.

مثال مجموعه اعدادی طبیعی است که برابر با حاصلضرب دو عدد پشت سر هم هستند. مثلاً $2 \times 3 = 6 \in A$ است. اما روشن است که همه عضوها را نمی‌توانیم بنویسیم. برای همین آن را توصیف کرده‌ایم.

	<p>معلم ریاضی روی تخته نوشت: $B = \{2, 6, 12, 20, \dots\}$.</p>
<p>نوبت شما</p>	<p>پوران: به نظر من اعضای B همان حاصلضرب‌های دو عدد طبیعی پشت سر هم هستند. پس $5 \times 6 = 30 \in B$. مهین: به نظر من مجموع هر سه عضو پشت سر هم، برابر با عضو بعدی است. مثلاً $2 + 6 + 12 = 20$. بنابراین $6 + 12 + 20 = 48 \in B$ است و $30 \notin B$. از گفتگوی بالا چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟</p>

	<p>مجموعه‌های زیر به روش توصیفی مشخص شده‌اند. حداکثر ۵ عضو دلخواه هر یک از مجموعه‌های زیر را نام ببرید.</p>
<p>فعالیت</p>	<p>الف) A مجموعه کلماتی است که در زبان فارسی بدون نقطه هستند. (مثال: $A \in \text{مادر}$) ب) B مجموعه اعدادی طبیعی است که مجموع ارقام هر یک از آنها مساوی با ۶ می‌باشد. ج) C مجموعه اعداد صحیحی است که با ۲ برابر خود مساوی هستند. د) D مجموعه اعداد اولی است که رقم یکان آن صفر است.</p>

	<p>مجموعه‌های زیر را به روش توصیفی مشخص کنید.</p>
<p>فعالیت</p>	<p>الف) $A = \{80, 71, 62, 53, 44, 35, 26, 17\}$ (ب) $B = \{\text{هیدروژن, اکسیژن}\}$ ج) $C = \{\}$ (د) $D = \{1^2 + 1, 2^2 + 1, 10, 17, 26, \dots\}$</p>

	<p>برای کدام مجموعه‌ها استفاده از روش «نوشتن عضوها» مناسب نیست؟ روش «توصیف عضوها» برای کدام مجموعه‌ها مناسب‌تر است؟</p>
<p>نوبت شما</p>	

نماد ریاضی

وقتی یک یا چند ویژگی را برای توصیف عضوهای یک مجموعه بیان می‌کنیم، همیشه یک کلمه «که» یا «به طوریکه» در این توصیف وجود دارد:
 A مجموعه اعداد طبیعی است «که» فرد هستند.

الگوی زیر به نماد ریاضی معروف است. در این الگو، x به جای هر عضو نوشته می‌شود. علامت « $|$ » نیز به جای کلمه «که» یا «به طوریکه» قرار می‌گیرد. در پایان، عضوها را توصیف می‌کنیم:

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ فرد است}\}$$

مثال مجموعه اعداد زوج را می‌شناسیم. این مجموعه را با سه روش نشان می‌دهیم:

نماد ریاضی	توصیف اعضا	نوشتن اعضا
$\{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ عددی زوج است}\}$	مجموعه اعداد طبیعی که زوج هستند	$\{2, 4, 6, 8, 10, \dots\}$

در روشی که با نماد ریاضی نوشته‌ایم، جمله‌ای توصیفی وجود دارد که نشان می‌دهد « x عددی زوج است». می‌دانیم هر عدد زوجی برابر با حاصلضرب عدد ۲ در یک عدد طبیعی است:

$$x = 2 \times n, n \in \mathbb{N}$$

بنابراین مجموعه اعداد زوج را به شکل زیر نیز می‌توان نوشت:

$$\{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

در این نمایش از مجموعه اعداد زوج، جملات توصیفی جای خود را به نمادهای ریاضی داده است.



فعالیت

هر یک از مجموعه‌های زیر را با نماد ریاضی نمایش دهید.

الف) $\{3 \times 1, 3 \times 2, 9, 12, 15, \dots\}$ ب) $\{4 \times 1 - 1, 4 \times 2 - 1, 4 \times 3 - 1, 15, 19, 23, \dots\}$

ج) $\{2 \times 1^2, 2 \times 2^2, 2 \times 3^2, 32, 50, 72, 98, \dots\}$ د) $\{2, 6, 12, 20, \dots\}$

ه) مجموعه اعداد طبیعی که فقط با رقم «۹» نوشته می‌شوند.

مقایسه مجموعه‌ها

امتیازی که هر تیم فوتبال در یک لیگ کسب می‌کند، عددی صحیح است. رتبه قرار گرفتن هر تیم در جدول مسابقات، به امتیاز آن تیم بستگی دارد. بنابراین مقایسه عملکرد تیم‌ها کار آسانی است زیرا هر دو عدد صحیح را می‌توان با هم مقایسه کرد. در فصل ۸۷-۸۶ پرسپولیس ۵۹ امتیاز و استقلال ۴۳ امتیاز کسب کردند. ولی در فصل ۹۱-۹۰ عملکرد استقلال بهتر بود و ۶۶ امتیاز کسب کرد، در حالیکه پرسپولیس به امتیاز ۴۲ رضایت داد.

زیرمجموعه

برای اینکه مجموعه‌ها را بهتر بشناسیم، به این فکر می‌افتیم که مجموعه‌ها را با هم مقایسه کنیم. شایان برای مقایسه دو مجموعه پیشنهادی داشت. او پیشنهاد کرد: «مجموعه‌ای که تعداد عضوهای آن بیشتر است، بزرگتر است. ولی پیشنهاد شایان برای مقایسه مجموعه‌ها نامناسب به نظر می‌رسد. دیدگاه زیر، نامناسب بودن روش مقایسه شایان را نشان می‌دهد:

تعداد عضوهای مجموعه {هیدروژن، اکسیژن} $A = \{1, 7\}$ و $B = \{1, 7\}$ با هم برابر است. با توجه به پیشنهاد شایان، نه مجموعه A از B بزرگتر است و نه B از A . بنابراین شایان به این نتیجه می‌رسد که مجموعه‌های A و B با هم مساوی هستند. اما روشن است که مجموعه A و B با هم برابر نیستند.

چرا مجموعه‌های {هیدروژن، اکسیژن} $A = \{1, 7\}$ و $B = \{1, 7\}$ با هم برابر نیست؟



نوبت شما

فرض کنید هر عضو مجموعه A ، عضو مجموعه B نیز هست. در این صورت می‌نویسیم $A \subseteq B$ و می‌خوانیم «مجموعه A زیرمجموعه B است». اگر A زیرمجموعه B نباشد، می‌نویسیم $A \not\subseteq B$.

مثال جدول عضویت را برای سه مجموعه $A = \{p, e, n, c, i, l\}$ ، $B = \{l, i, p\}$ و $C = \{i, c, e\}$ در نظر بگیرید:

	آزاده	بهنوش	سیما	دریا	الناز
کیاب	✓	✗	✓	✗	✗
فسنجان	✓	✓	✓	✗	✗
ماهی	✓	✗	✓	✗	✗
باقالی پلو	✗	✓	✓	✓	✗
آلو اسفناج	✗	✗	✗	✗	✗

هر عضو مجموعه B عضوی از مجموعه‌ی A نیز هست. پس $B \subseteq A$.
 هر عضو مجموعه C عضوی از مجموعه‌ی A نیز هست. پس $C \subseteq A$.
 عضوی از مجموعه B وجود دارد که عضو مجموعه C نیست: $p \in B$ ، $p \notin C$. نتیجه می‌گیریم که $B \not\subseteq C$.
 عضوی از مجموعه C وجود دارد که عضو مجموعه B نیست: $e \in C$ ، $e \notin B$. نتیجه می‌گیریم که $C \not\subseteq B$.

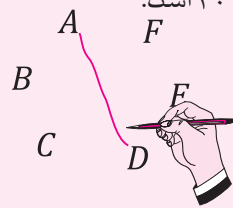


نوبت شما

پیشنهاد شایان برای مقایسه کردن دو مجموعه نامناسب بود. حالا برای اینکه دو مجموعه را با هم مقایسه کنیم چه پیشنهادی دارید؟



فعالیت



هر دو مجموعه‌ای را که یکی زیرمجموعه دیگری است با یک پاره خط به هم وصل کنید:

A مجموعه مقسوم علیه‌های عدد ۳۶ است. B مجموعه مقسوم علیه‌های عدد ۳۰ است.

$$D = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}, C = \{1, 7, 49\}$$

$$F = \{1, 2, 3, 6\}, E = \{1, 5\}$$

مثال آرزو، بهنوش، سیما، دریا و الناز هر کدام یک کارت سفید دارند. از آنها خواسته شده روی هر کارت یک عدد طبیعی و در پشت آن مجموعه مقسوم علیه‌های آن عدد را بنویسند. روی کارت‌ها اعداد زیر نوشته شده بود:

F	D	C	B	A
۲	۳	۴	۱۲	۶۰

این ۵ عدد همگی با هم قابل مقایسه هستند: $2 \leq 3 \leq 4 \leq 6 \leq 12$.

پشت کارت‌ها زیر مجموعه‌های زیر نوشته شده بود:

F	D	C	B	A
{1, 2}	{1, 3}	{1, 2, 4}	{1, 2, 3, 4, 5, 6, 12}	{1, 2, 3, 4, 5, 6, 12, 15, 20, 30, 60}

مقایسه این ۵ مجموعه در شکل زیر آمده است:
 $C \subseteq B \subseteq A$
 $E \subseteq D \subseteq$

اگر a و b دو عدد طبیعی باشند، به هم قابل مقایسه هستند. یعنی یا $a \leq b$ یا $b \leq a$ است. اما اگر C و D دو مجموعه باشند، ممکن است قابل مقایسه نباشند. یعنی $C \not\subseteq D$ و $D \not\subseteq C$.

نمایش هندسی

برای اینکه رابطه بین مجموعه‌ها را بهتر درک کنیم، آنها را به شکل هندسی به تصویر می‌کشیم. در این نمایش، ابتدا عضوهای یک مجموعه را می‌نویسیم:



هر خم بسته، نمایش یک زیرمجموعه است. مثلاً با خم بسته روبه‌رو، نشان داده‌ایم که $\{1, 2\} \subseteq \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ است.

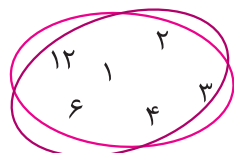


به این نمایش هندسی، نمودار ون می‌گویند.

	<p>محسن می‌گوید که در نمودار زیر سه زیرمجموعه از مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ مشخص شده است. آیا نظر او درست است؟</p>	<p>نوبت شما</p>
	<p>فرض کنید $B = \{1, 2, 4\}$ است. دو نمودار زیر چه فرقی با هم دارد؟</p>	<p>نوبت شما</p>

تساوی مجموعه‌ها

در نمودار ون زیر، هر خم بسته یک مجموعه را نشان می‌دهد که با هم برابرند. زیرا عضوهای یکسانی دارند:



A عضوی ندارد که خارج از B باشد. پس $A \subseteq B$ است. به گونه مشابه $B \subseteq A$ است. بنابراین برای اینکه نشان دهیم دو مجموعه X و Y با هم برابرند باید بررسی کنیم که $X \subseteq Y$ و $Y \subseteq X$ باشد.

مثال

می‌خواهیم بدانیم a و b چه عددی باشند تا تساوی $\{a, a^2\} = \{1, b, b^2\}$ برقرار باشد.

چون $1 \in \{1, b, b^2\}$ آنگاه عدد ۱ باید عضو $\{a, a^2\}$ نیز باشد. پس دو حالت دارد:

الف) $a = 1$ است. بنابراین $a^2 = 1$ می‌باشد. پس $\{a, a^2\}$ برابر با مجموعه تک عضوی $\{1\}$ است. در نتیجه $\{1, b, b^2\}$ نیز باید با $\{1\}$ برابر باشد. بنابراین $b = b^2 = 1$ است. این فقط وقتی درست است که $b = 1$ باشد.

ب) $a^2 = 1$ است. بنابراین یا $a = 1$ است که در بند قبل به این نتیجه رسیدیم که $b = 1$ است، و یا $a = -1$ است. پس $\{a, a^2\} = \{-1, 1\}$ است. بنابراین $\{1, b, b^2\} = \{-1, 1\}$ می‌باشد. پس b یا b^2 برابر با -1

می‌باشند. این فقط وقتی درست است که $b = -1$ باشد.

پس به دو جواب رسیدیم: $a = 1, b = 1$ و $a = -1, b = -1$.



فعالیت

فرض کنید $A = \{x - y \mid x, y \in \mathbb{N}\}$ است. نشان دهید $A = \mathbb{Z}$ است. \mathbb{Z} مجموعه اعداد صحیح است.



نوبت شما

در مورد دو مجموعه A و B می‌دانیم، $A \subseteq B$ است. آیا می‌تواند A با B برابر باشد؟

عملگرهای مجموعه

مجموعه اعداد طبیعی شامل اعدادی است که برای شمارش به کار می‌بریم. یعنی هر عدد طبیعی فقط برای شمارش به کار می‌رود و فاقد ویژگی خاصی است. اما همین که پای یک عملگر به میان می‌آید، خواص جبری اعداد ظاهر می‌شود. مثلاً با وجود عملگر ضرب بحث می‌کنیم که: اگر عددی مضرب ۶ باشد، آیا مضرب ۳ نیز هست؟



نوبت شما

آیا عملگری می‌شناسید که فقط به یک عملوند نیاز داشته باشد؟

می‌خواهیم بین مجموعه‌ها عملگرهایی تعریف کنیم. این عملگرها باعث می‌شوند تا به مطالعه بیشتر مجموعه‌ها بپردازیم و آنها بهتر بشناسیم.

اجتماع

فرض کنید A و B دو مجموعه باشند. عملگر \cup که «اجتماع» نام دارد به دو عملوند مانند A و B نیاز دارد. در این صورت می‌نویسیم:

و می‌خوانیم A اجتماع B . حاصل $A \cup B$ مجموعه همهٔ عضوهای A و همهٔ عضوهای B است. پس عضوهای مجموعه $A \cup B$ ، عضو حداقل یکی از مجموعه‌های A یا B است.

مثال

زهرا و نرگس دو همسایه هستند که در یک روز به دنیا آمده‌اند. سال گذشته، آنها تصمیم گرفتند برای صرفه جویی تولدشان را در یک جشن برگزار کنند. هر یک از آنها دوستان خود را دعوت کرد. جدول زیر نشان می‌دهد که هر نفر دوست مانا است یا نرگس:

ژینوس	یلدا	فاطمه	مریم	نیوشا	یاسمن	منیره	سعیده	ملیکا	
×	✓	✓	✓	✓	×	✓	✓	×	مانا
✓	×	×	✓	×	✓	✓	×	✓	نرگس

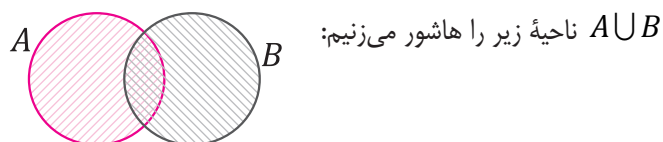
مجموعه دوستان مانا برابر با $M = \{ \text{یلدا، فاطمه، مریم، نیوشا، منیره، سعیده} \}$ است. مجموعه دوستان نرگس برابر با $N = \{ \text{ملیکا، منیره، یاسمن، مریم، ژینوس} \}$ است. مجموعه NUM مجموعه افرادی در این مهمانی هستند که حداقل دوست یکی از آن دو نفر (مانا و نرگس) هستند:

$$NUM = \{ \text{ملیکا، سعیده، منیره، یاسمن، نیوشا، مریم، فاطمه، یلدا، ژینوس} \}$$

بنابراین NUM را می‌توان با جمله زیر توصیف کرد:

NUM برابر با مجموعه افرادی است که دوست مانا یا دوست نرگس هستند.

نمودار ون به ما کمک می‌کند تا در یک نمایش هندسی، مفهوم $A \cup B$ را بهتر درک کنیم. به جای مجموعه



مجموعه عضوهایی که در ناحیه هاشوری قرار گرفته‌اند برابر با $A \cup B$ است.

اشتراک

فرض کنید A و B دو مجموعه باشند. عملگر \cap که «اشتراک» نام دارد به دو عملوند مانند A و B نیاز دارد. در این صورت می‌نویسیم:

$$A \cap B$$

و می‌خوانیم A اشتراک B . حاصل $A \cap B$ مجموعه همه عضوهای A است که عضو B نیز باشد. یعنی عضوهای مجموعه $A \cap B$ ، عضو هر دو مجموعه A و B هست.

مثال

جدول زیر مشخصات مجموعه‌ای از ۱۰ اتومبیل را نشان می‌دهد. مشتریان اتومبیل با توجه به سلیقه خود، زیرمجموعه‌ای از این مجموعه ۱۰ عضوی را انتخاب می‌کنند:

بی ام و	بنز	زانتیا	پروتون	مزدا	تندر ۹۰	پراید	سمند	پژو ۴۰۵	پژو ۲۰۶	
۲۰۵۵	۱۵۰۵	۱۳۲۰	۱۰۵۰	۱۳۱۰	۱۱۰۰	۸۵۰	۱۲۲۰	۱۱۰۰	۱۰۲۵	وزن
زیاد	زیاد	متوسط	متوسط	متوسط	پایین	پایین	پایین	پایین	پایین	قیمت
۱۶/۴	۱۱/۱	۱۱/۲	۱۰/۱	۸/۴	۹	۸/۸	۱۲/۵	۱۲/۸	۸/۹	مصرف بنزین
۵	۸/۸	۱۰/۳	۱۱	۹/۲	۱۰/۲	۱۴/۵	۱۴/۵	۱۱	۱۴/۱	صفر تا صد

اتومبیل‌های شهری کوچک اتومبیل‌هایی هستند که کمتر از ۱۱۰۰ کیلوگرم وزن دارند:

$$H = \{ \text{پژو ۲۰۶، پراید، پروتون} \}$$

اتومبیل‌های کم مصرف به اتومبیل‌هایی می‌گویند که در ۱۰۰ کیلومتر کمتر از ۱۰ لیتر بنزین مصرف کنند:

$$T = \{ \text{پژو ۲۰۶، پراید، تندر ۹۰، مزدا} \}$$

تردد آقای مرادی در شهر زیاد است. به همین دلیل او به دنبال اتومبیلی است که کم مصرف باشد. جای پارک کردن به سختی پیدا می‌شود. به همین اتومبیلی برای او مناسب است که کوچک شهری باشد. بنابراین مجموعه اتومبیل‌هایی که مناسب آقای مرادی است برابر با مجموعه زیر است:

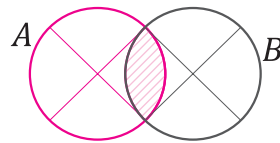
$$H \cap T = \{ \text{پژو ۲۰۶، پراید} \}$$

بنابراین $H \cap T$ را می‌توان با جمله زیر توصیف کرد:


$H \cap T$ برابر با مجموعه اتومبیل‌هایی است که کم مصرف و کوچک شهری هستند.


نمودار ون به ما کمک می‌کند تا در یک نمایش هندسی، مفهوم $A \cap B$ را بهتر درک کنیم. به جای مجموعه

$A \cap B$ ناحیه زیر را هاشور می‌زنیم:



مجموعه عضوهایی که در ناحیه هاشوری قرار گرفته‌اند برابر با $A \cap B$ است.

 فعالیت	<p>اتومبیل‌هایی با شرایط زیر پیدا کنید:</p> <p>الف) کوچک شهری و قیمت پایین</p> <p>ب) کوچک شهری یا قیمت پایین</p> <p>ج) کم مصرف و قیمت پایین</p> <p>د) صفر تا صد زیر ۱۰ و مصرف پایین</p> <p>ه) صفر تا صد زیر ۱۰ یا بند الف</p> <p>و) الف یا ب</p>
--	--

 فعالیت	<p>در جشن تولد مانا و نرگس، مجموعه دوستان یلدا $Y = \{ \text{مانا، ملیکا، منیره، مریم} \}$ و مجموعه دوستان ژینوس $X = \{ \text{نرگس، نیوشا، ملیکا، مریم} \}$ است.</p> <p>الف) $X \cup Y$ را بدست آورید.</p> <p>ب) $X \cap Y$ را پیدا کنید.</p> <p>ج) اگر یلدا و ژینوس بخواهند دوستان خود را در یک جشن دعوت کنند، چه کسانی دعوت نمی‌شوند؟</p>
--	--

مثال مجموعه مضارب عدد ۲ را با A و مجموعه مضارب عدد ۳ را با B نمایش می‌دهیم. در این صورت $A = \{ 2n \mid n \in \mathbb{N} \}$ و $B = \{ 3n \mid n \in \mathbb{N} \}$ است. $A \cap B$ و $A \cup B$ را به دو شکل زیر می‌توان نمایش

داد:

نمایش با اعضا

$$A \cap B = \{ 6, 12, 18, 24, \dots \} \quad \text{و} \quad A \cup B = \{ 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, \dots \}$$

نمایش با نماد ریاضی

$$A \cap B = \{ x \mid x \in A \text{ و } x \in B \} \quad \text{و} \quad A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ یا } x \in B \}$$

در این مثال نمایش $A \cap B$ با نماد مجموعه‌ها را می‌توان ساده‌تر نوشت:

$$A \cap B = \{ 6n \mid n \in \mathbb{N} \}$$



فرض کنید A مجموعه مضارب عدد ۴، B مجموعه مضارب عدد ۶ و C مجموعه مضارب عدد ۸ باشد. مجموعه‌های زیر را با نمایش اعضا و نماد مجموعه‌ها مشخص کنید.

الف) $A \cap B$ ب) $A \cap C$ ج) $(A \cap B) \cap C$ د) $A \cap (B \cap C)$

فعالیت



چه رابطه‌ای بین $A \cup B$ و $B \cup A$ برقرار است؟
 چه رابطه‌ای بین $A \cap B$ و $B \cap A$ برقرار است؟
 چه رابطه‌ای بین $(A \cup B) \cup C$ و $A \cup (B \cup C)$ برقرار است؟
 چه رابطه‌ای بین $(A \cap B) \cap C$ و $A \cap (B \cap C)$ برقرار است؟

نوبت شما

تفاضل مجموعه‌ها

فرض کنید A و B دو مجموعه باشند. عملگر - که «تفاضل» نام دارد به دو عملوند مانند A و B نیاز دارد. در این صورت می‌نویسیم:

و می‌خوانیم A منهای B . حاصل $A - B$ مجموعه همه عضوهای A است که عضو B نیستند.

فرض کنید A مجموعه مقسوم علیه‌های عدد ۱۸ و B مجموعه مقسوم علیه‌های عدد ۱۲ باشد. در این صورت $A = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$ و $B = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ است. به جدول زیر دقت کنید:

مثال

$A \cup B$	$A - B$	$A \cap B$	$B - A$
$\{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18\}$	$\{4, 12\}$	$\{1, 2, 3, 6\}$	$\{9, 18\}$

به جای مجموعه $A - B$ ناحیه زیر را هاشور می‌زنیم:

مجموعه عضوهایی که در ناحیه هاشوری قرار گرفته‌اند برابر با مجموعه $A - B$ است.



چه رابطه‌ای بین مجموعه $A - B$ و مجموعه A وجود دارد؟
 چه رابطه‌ای بین مجموعه $A - B$ و مجموعه B وجود دارد؟

نوبت شما



در هر بند، سه مجموعه به جای A ، B و C مثال بزنید که شرایط برقرار باشد:

الف) $A - B = A - C$ ، اما $B \neq C$ باشد.

ب) $A - B = B - C$ باشد.

ج) $(A - C) \cup (A - B) = A$ باشد.

د) $(A - C) \cup (A - B) \neq A$ باشد.

فعالیت



۱. کدام بند یک مجموعه را مشخص می‌کند و کدام نه؟
 - الف) همهٔ روزهای هفته.
 - ب) همهٔ کلمات بدون نقطهٔ فارسی.
 - ج) همهٔ کلمات بامعنی فارسی.
 - د) عددی که از خودش بزرگتر است.
 - ه) همهٔ رنگ‌ها.
 - و) همهٔ این‌ها: سعدی، دمپایی، ۳۳، همچنین، برو بیرون.
 - ز) سه تا از بلندترین قله‌های جهان.
 - ح) سه تا از معروف‌ترین شاعران ایران.
 - ط) همهٔ آدم‌های زنده روی کرهٔ زمین.
 - ی) همهٔ آدم‌های روی کرهٔ زمین که در تاریخ ۹۴/۱/۱ زنده بوده‌اند.
 - ک) همهٔ آدم‌هایی که فردا زنده‌اند.
 - ل) همهٔ اعداد طبیعی که با کمتر از ۳۰ حرف فارسی قابل توصیف هستند.
 - م) همهٔ اعداد گویا با صورت و مخرج صحیح که مجموع صورت و مخرج آنها برابر با ۱۰۰ باشد.
۲. به یک سرباز دستور داده می‌شود که فقط صورت سربازهایی از دستهٔ خود را بتراشد که خودشان این کار را نمی‌کنند. به نظر شما تکلیف این سرباز با خودش چیست؟
۳. کدام یک از توصیف‌های زیر، مجموعهٔ $A = \{2, 4, 6, 8\}$ را مشخص می‌کند؟
 - ۱) چهار عدد زوج متوالی
 - ۲) اعداد زوج کمتر از ۱۰
 - ۳) اعداد زوج بین ۱ تا ۹
 - ۴) چهار مضرب متوالی عدد ۲
۴. مجموعه‌های زیر را یک بار با «نوشتن اعضا» و یک بار با «نماد ریاضی» نشان دهید:
 - الف) مجموعه اعداد فرد بین ۱ و ۱۲.
 - ب) مجموعه اعداد دورقمی مضرب ۷.
 - ج) مجموعه اعداد طبیعی بین یک و ۵۰ که مربع کامل هستند.
 - د) مجموعه ماه‌های پاییز.
 - ه) مجموعه اعدادی که نسبت دو عدد طبیعی متوالی باشند.
 - و) مجموعهٔ A به طوری که هر عضو آن مربع یک عدد زوج طبیعی باشد.
 - ز) مجموعهٔ B به طوری که هر عضو آن سه برابر یک عدد فرد طبیعی باشد.
۵. مجموعه‌های زیر را که با نوشتن اعضا مشخص شده‌اند، با نماد ریاضی نشان دهید.

الف) $\{2, 5, 10, 17, 26, \dots\}$	ب) $\{0, 7, 26, 63, 124, \dots\}$
ج) $\left\{\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, \dots\right\}$	د) $\{2, 8, 18, 32, 50, 72, 98, 128, 162, 200, \dots\}$
ه) $\{55, 50, 45, \dots, 5\}$	و) $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$
ز) $\{2, 11, 101, 1001, \dots\}$	ح) $\{0, 1, 3, 7, \dots\}$

- (ط) $\{4, 44, 444, 4444, \dots\}$ (ی) $\{0/1, 0/11, 0/111, \dots\}$
 (ک) $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ (ل) $\{3, -6, 9, -12, 18, \dots\}$
 (م) $\{1, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \dots\}$ (ن) $\{-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{3}{4}, \dots\}$
 (ص) $\{-9, -99, 999, 9999, -99999, -999999, \dots\}$ (ض) $\{-1, 11, 111, -1111, -11111, 111111, \dots\}$

۶. حداکثر پنج عضو هر یک از مجموعه‌های زیر را بنویسید.

الف) $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 2x - 10 = 0\}$ ب) $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 - 1 = 8\}$

ج) $\{x \mid -x \in \mathbb{N}\}$ د) $\left\{ \frac{1}{x} \mid -x \in \mathbb{N} \right\}$ ه) $\{x \in \mathbb{N} \mid 3\sqrt{x} < 20\}$

و) $\{x \mid x^2 \in \mathbb{N}\}$ ز) $\{x^2 \mid x \in \mathbb{N}\}$ ح) $\{2x \mid \frac{x}{3} \in \mathbb{N}\}$

ط) $\left\{ \frac{x}{3} \mid 2x \in \mathbb{N} \right\}$ ی) $\{x \in \mathbb{N} \mid x^2 < 0\}$ ک) $\left\{ 7 \times \frac{10^m - 1}{9} \mid m \in \mathbb{W} \right\}$

ل) $\left\{ \frac{x}{2} \mid \frac{x}{3} \in \mathbb{Z}, \frac{x}{5} \notin \mathbb{Z} \right\}$ م) $\left\{ (-1)^{\frac{x(x+1)}{2}} \times x \mid x \in \mathbb{N} \right\}$

ن) $\{2m + 5n \mid m, n \in \mathbb{N}\}$

۷. فرض کنید هیچ چیزی پیدا نکنیم که عضو B باشد، اما عضو A نباشد. در این صورت:

الف) چه رابطه‌ای بین A و B برقرار است؟

ب) نشان دهید \emptyset زیرمجموعه هر مجموعه‌ای است.

۸. نشان دهید اگر A یک مجموعه باشد، $A \subset A$ است.

۹. نشان دهید هیچ دو مجموعه‌ای از سه مجموعه \emptyset ، $\{\emptyset\}$ ، $\{\{\emptyset\}\}$ با هم برابر نیستند.

۱۰. در هر مورد، مشخص کنید که کدام زیر مجموعه دیگری است و یا هیچ یک زیرمجموعه دیگری نیست.

الف) مجموعه پروازهای تهران - پاریس. مجموعه پروازهای شرکت هواپیمایی هما.

ب) مجموعه انسان‌هایی که به زبان انگلیسی صحبت می‌کنند. مجموعه انسان‌هایی که ملیت غیرایرانی دارند.

ج) مجموعه قله‌های کوتاه‌تر از قله اورست. مجموعه قله‌های کشورمان ایران.

د) مجموعه ایرانیانی که ترک زبان هستند. ترک زبان‌هایی که در آلمان زندگی می‌کنند.

ه) مجموعه دانش‌آموزانی که معدل آنها ۱۹ است. مجموعه دانش‌آموزانی که نمره ریاضی آنها ۱۹ است.

۱۱. مجموعه همه زیرمجموعه‌های A را «مجموعه توانی A » می‌نامیم و با $P(A)$ نمایش می‌دهیم. مثلاً برای $A = \{0, 1\}$:

$$P(A) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$$

الف) اگر $A = \{\emptyset, 1\}$ ، $P(A)$ را بدست آورید.

ب) برای هر مجموعه دلخواه X کدام درست و کدام نادرست است؟

(۱) $X \in P(X)$ (۲) $X \subseteq P(X)$ (۳) $\emptyset \in P(X)$ (۴) $\emptyset \subseteq P(X)$

۱۲. نشان دهید اگر $A \subseteq B$ آنگاه $P(A) \subseteq P(B)$ است.

۱۳. در هر مورد برای دو مجموعه A و B مثالی بزنید که:

(الف) $A \in B$ باشد. (ب) $A \subseteq B$

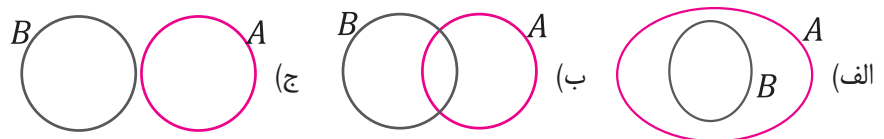
۱۴. اگر $B \in A$ و $C \in B$ باشد، آیا حتماً $C \in A$ است؟

۱۵. اگر $B \subseteq A$ و $C \subseteq B$ باشد، آیا حتماً $C \subseteq A$ است؟

۱۶. آیا مجموعه‌ای به جای A می‌تواند قرار بگیرد که $P(A) = \emptyset$ باشد؟

۱۷. a را طوری پیدا کنید که $\{\emptyset, \{a\}, \{\emptyset, a\}\}$ یک مجموعه توانی باشد.

۱۸. فرض کنید $A \not\subseteq B$ است. چند تا از نمودارهای زیر می‌تواند برای این دو مجموعه درست باشد؟



۱۹. فرض کنید $A \not\subseteq B$ و $B \not\subseteq A$ است. چند تا از نمودارهای سؤال ۱۲ می‌تواند برای این دو مجموعه درست باشد؟

۲۰. دو گزاره $A \not\subseteq B$ و $A \neq B$ چه فرقی با هم دارند؟

۲۱. در مورد هر یک از بندهای زیر، $A \cup B$ را هاشور آبی و $A \cap B$ را هاشور قرمز بزنید.



۲۲. با رسم نمودار ون درستی یا نادرستی هر بند را بررسی کنید.

(الف) $A \subseteq A \cap B$ (ب) $B \subseteq A \cup B$

(ج) $A \cap B \subseteq A \cup B$ (د) اگر $A \subseteq B$ آنگاه $A \cap B = A$.

(ه) اگر $A \subseteq B$ آنگاه $A \cup B = B$. (و) اگر $A \cap B = A \cup B$ آنگاه $A = B$.

۲۳. در جای خالی چه مجموعه‌هایی می‌تواند قرار بگیرد تا تساوی برقرار باشد؟

(الف) $A \cup \square = A$ (ب) $A \cap \square = A$ (ج) $A \cap \square = \emptyset$ (د) $A \cap \emptyset = \square$

۲۴. اگر $A \cup \emptyset = \emptyset$ باشد، چه چیزی در مورد مجموعه A می‌توان گفت؟

۲۵. در هر بند، سه مجموعه به جای A ، B و C مثال بزنید که شرایط برقرار باشد:

(الف) $A \cup B = A \cup C$ اما $B \neq C$ باشد. (ب) $A \cap B = A \cap C$ اما $B \neq C$ باشد.

(ج) $B \subseteq A \cup C$ و $C \subseteq A \cap B$. (د) $A \cup B = A \cap C$ باشد.

۲۶. منظور از P یک نقطه دلخواه، L مجموعه نقاط یک خط دلخواه و M مجموعه نقاط یک صفحه دلخواه در فضای اطراف ما است.

هر یک از بندهای زیر چه می‌تواند باشد؟

(الف) $P \cap L$ (ب) $P \cup L$ (ج) $L \cap M$

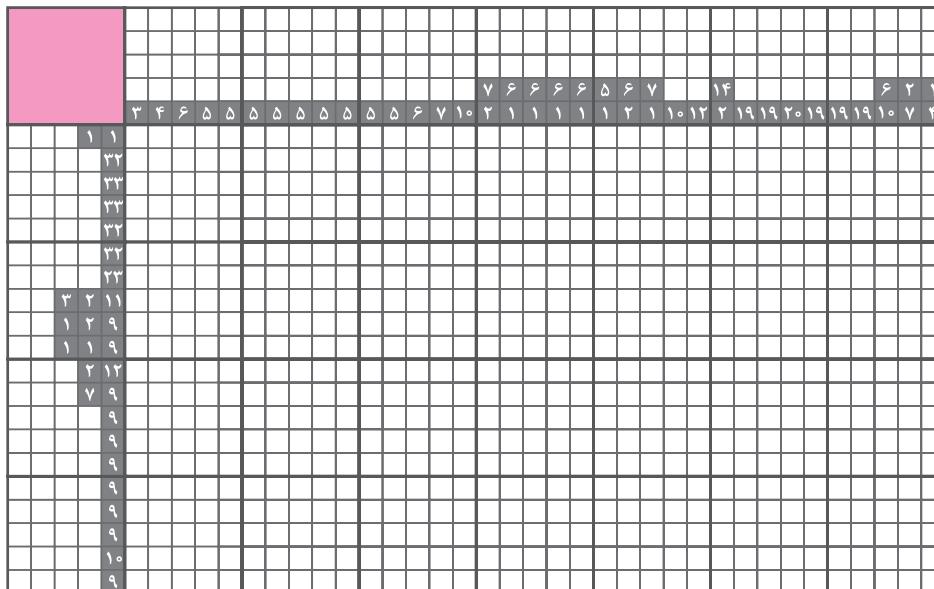
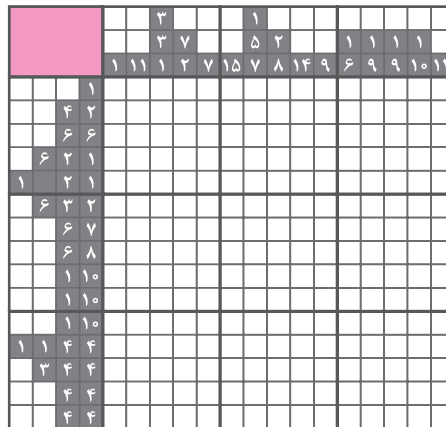
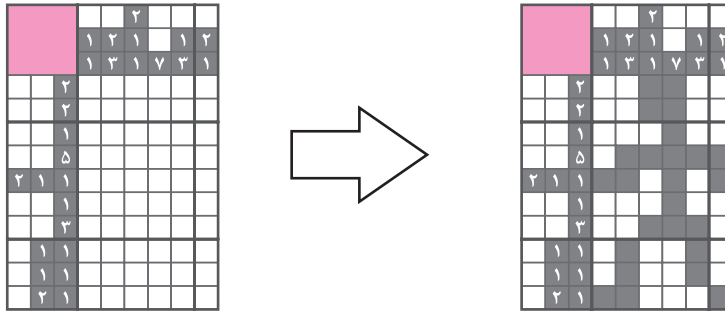
(د) $L \cup M$ (ه) $L_1 \cap L_2$ (و) $M_1 \cap M_2$

۲۷. در پازل زیر باید بعضی از خانه‌های سفید را سیاه کنید تا شکل مرموز این معما پدیدار شود. عددی که در هر ردیف دیده می‌شود، تعداد خانه‌های سیاه به هم چسبیده (بلوک) است که در همان ردیف قرار دارد. همچنین عددی که در هر ستون دیده می‌شود، تعداد خانه‌های سیاه به هم چسبیده‌ای است که در همان ستون قرار دارد.

نکته ۱: پین پلوک‌های یک ردیف (یک ستون) باید حداقل یک خانه سفید وجود داشته باشد.

نکته ۲: ترتیب پلوک‌های یک ردیف (یا یک ستون) پس از حل پازل باید به ترتیب اعداد همان ردیف (یا

ستون) باشند.



۲۸. در هر یک از موارد زیر، بررسی کنید آیا نقطه P ، خط L و صفحه M وجود دارد که گزاره‌ها درست باشند؟

الف) $P \cap L = \emptyset$ ب) $P \cup L = P \cap L$ ج) $L \cap M = P$

د) $L \cap M = L$ ه) $L \cap M = M$ و) $L \cap M = \emptyset$

ز) $L_1 \cap L_2 = P$ ح) $L_1 \cap L_2 = P$ و $L_1 \neq L_2$

$$M_1 \cap M_2 = L \quad (س) \quad M_1 \cap M_2 = M_1 \quad (ط)$$

$$L_1 \cup L_2 = M \quad (م) \quad M_1 \cap M_2 = \emptyset \quad (ج) \quad M_1 \cap M_2 = P \quad (ک)$$

۲۹. در یک کلاس ۱۲۰ نفره، دانش‌آموزان از ۱ تا ۱۲۰ شماره گذاری شده‌اند. شماره‌های زوج در کلاس نجوم، شماره‌های مضرب ۵ در کلاس سینما و شماره‌های مضرب ۷ در کلاس خوش‌نویسی ثبت نام کرده‌اند. چند نفر در هیچ کلاسی ثبت نام نکرده‌اند؟

۳۰. از بین ۲۰۰ نفر شرکت کننده در سمینار رایانه‌ای، ۱۰۰ نفر موبایل هوشمند داشتند، ۷۰ نفر تبلت و ۱۴۰ نفر لپ‌تاپ به همراه داشتند. ۴۰ نفر موبایل و تبلت را با هم داشتند، ۳۰ نفر تبلت و لپ‌تاپ و ۶۰ نفر موبایل و لپ‌تاپ به همراه داشتند. ۱۰ نفر هر سه را با هم به همراه آورده بودند. چند شرکت کننده هیچ کدام از این سه وسیله را نداشتند؟

۳۱. در یک کلاس ۴۰ نفره، ۱۲ دانش‌آموز هر دو کلاس آلمانی و انگلیسی را ثبت نام کردند. در کلاس آلمانی ۲۲ نفر ثبت نام کردند. اگر هر دانش‌آموز حداقل در یک کلاس ثبت نام کرده باشد، چند دانش‌آموز فقط در کلاس انگلیسی ثبت نام کرده‌اند؟

۳۲. در یک کلاس، ۴۰ درصد از دانش‌آموزان در کلاس نقاشی و ۷۰ درصد در کلاس موسیقی ثبت نام کرده‌اند. اگر ۱۵ درصد از دانش‌آموزان در هر دو کلاس ثبت نام کرده باشند، چند درصد از دانش‌آموز در هیچ کدام از این کلاس‌ها ثبت نام نکرده‌اند؟

۳۳. در یک کلاس ۳۰ نفره، ۱۲ نفر در شیمی، ۱۴ نفر در فیزیک و ۹ نفر در زیست‌شناسی نمره ۲۰ گرفته‌اند. اگر ۹ نفر هم در شیمی و هم در فیزیک، ۷ نفر هم در شیمی و هم در زیست‌شناسی و ۵ نفر نیز هم در فیزیک و هم در زیست‌شناسی نمره ۲۰ گرفته باشند و بدانیم ۱۲ نفر در هیچ‌یک از این درس‌ها ۲۰ نگرفته‌اند، آن‌گاه چند نفر در هر سه درس ۲۰ گرفته‌اند؟

۳۴. ظاهراً در پایه نهم، اگر خیلی خوب بگردید، چند علاقمند به علم هم می‌توانید پیدا کنید. تعدادشان از این قرار است؛ ۱۸ نفر علاقمند به فیزیک، ۲۱ نفر علاقمند به ریاضی و ۱۴ نفر علاقمند به زیست‌شناسی. نکته عجیب‌تر این که ۹ نفر هم به فیزیک و هم به ریاضی علاقمند هستند. ۶ نفر هم علاقمند به زیست و فیزیک. حال، تعداد علاقمندان به زیست و ریاضی حداکثر چند نفر خواهند بود؟ علاقمندان به هر سه شاخه چطور؟

۳۵. یک کارخانه سازنده خودرو قبل از تحویل خودرو به مشتریان، ۱۰۰ تا از خودروها را به طور تصادفی انتخاب کرده و مورد بازدید فنی قرار می‌دهد. در این بررسی ملاحظه می‌شود از ۴۲ خودرو فاقد نقص فنی، ۲۳ خودرو نقص فرمان، ۲۶ خودرو نقص چراغ، ۳۲ خودرو نقص موتور، ۹ خودرو نقص فرمان و چراغ، ۱۰ خودرو نقص فرمان و موتور و ۱۲ خودرو نقص چراغ و موتور دارند. الف) تعداد خودروهایی که هر سه نقص را دارند، مشخص کنید. ب) تعداد خودروهایی را که فقط یک نقص دارند، بیابید.

۳۶. مسوولین مدرسه، دانش‌آموزان را در آرایشی مستطیلی به صف کرده‌اند. از هر سطر بلندترین نفر را انتخاب می‌کنند. در میان این افراد علی کوتاه‌ترین است. سپس از هر ستون کوتاه‌ترین نفر را انتخاب می‌کنند. در میان این افراد رضا بلندترین است. علی بلندتر است یا رضا؟

۳۷. می‌دانیم مجموعه S دارای ۵ عضو و مجموعه F دارای ۷ عضو می‌باشند.

الف) حداقل و حداکثر تعداد اعضای $S \cup F$ چند است؟ ب) حداقل و حداکثر تعداد اعضای $S \cap F$ چند است؟

۳۸. کدام گزاره درست و کدام نادرست است؟

الف) اگر $A \cup B = A \cup C$ آنگاه $B = C$ ب) اگر $A \cap B = A \cap C$ آنگاه $B = C$

۳۹. اگر $A = \{x \mid x = 2k, k \in \mathbb{N}\}$ و $B = \{y \mid y = 3t, t \in \mathbb{N}\}$ آنگاه $A \cap B$ و $A \cup B$ را با نماد ریاضی نمایش دهید.

۴۰. فرض کنید:

$$\begin{cases} E \cap \{3, 5, 8, 11\} = \{5, 8\} \\ E \cup \{4, 5, 11, 13\} = \{4, 5, 7, 8, 11, 13\} \\ E \subset \{5, 7, 8, 9, 11, 13\} \\ 13 \in E \end{cases}$$

E چند عضو دارد؟

۴۱. مجموعه $A - (B - C)$ را با کمک نمودار ون نمایش دهید.

۴۲. اگر بدانیم $B \cap C = \emptyset$ آنگاه ثابت کنید $(A - B) \cup (A - C) = A$.

۴۳. درباره سه مجموعه A ، B و C اطلاعات زیر را داریم:

$$A - B = \{2, 4, 8\}$$

$$B - C = \{3, 6\}$$

$$C - A = \{1, 5, 9\}$$

۴۴. اگر $A \cup B \cup C$ مجموعه اعداد طبیعی یک رقمی باشد، $A \cap B \cap C$ را بدست آورید.

۴۵. با توجه به اطلاعات داده شده، جدول عضویت زیر را با دو علامت \in و \notin پر کنید. اگر در مورد عضویت نمی‌توان تصمیم گرفت از علامت O استفاده کنید.

	A	B	C
a			
b			
c			
d			

$$A \subset B, C \not\subset B$$

$$B - A = \{c, d\}$$

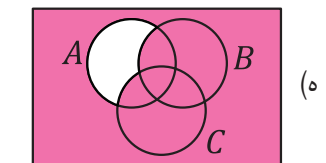
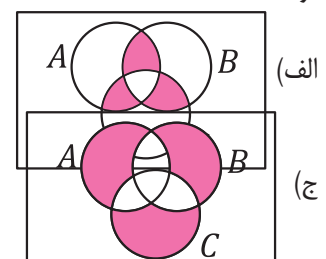
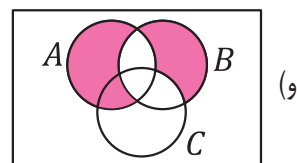
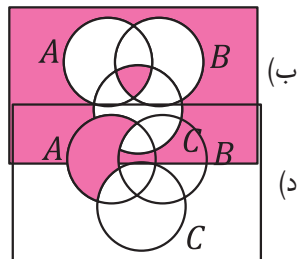
$$A - C = \{a, e\}$$

$$A' - B = \{b\}$$

۴۶. با استفاده از نمودار ون درستی روابط زیر را بررسی کنید.

$$(A \cap B)' = A' \cup B' \quad (\text{ب}) \qquad (A \cup B)' = A' \cap B' \quad (\text{الف})$$

۴۷. با استفاده از عملگرهای مجموعه، برای هر یک از نمودارهای زیر، عبارتی بر حسب A ، B و C بنویسید که قسمت خاکستری را توصیف کند.



۴۸. برای چهار مجموعه یک نمودار ون در حالت کلی بکشید.