درونیابی
INTERPOLATION

درونیابی

تابع درونیابی $n+1$ نقطه

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

از داده های $n+1$ نقطه استفاده خواهیم کرد، تا $n+1$ مجهول که همان ضرایب a_0 تا a_n هستند را به دست آوریم.

سوال: آیا این چند جمله یکتا است؟ بله فقط یک چند جمله ای درجه n داریم که از تمام $n+1$ نقطه می گذرد.

مثال: سه نقطه داریم، می خواهیم چند جمله ای درونیابی عبوری از این نقاط را پیدا کنیم. درجه چندجمله ای چند است؟

چند جمله ای درونیابی $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_1 + a_2 {x_1}^2 = y_1 \\ a_0 + a_1 x_2 + a_2 {x_2}^2 = y_2 \\ a_0 + a_1 x_3 + a_2 {x_3}^2 = y_3 \end{cases} \longrightarrow$$

سه معادله خطی داریم که حل می کنیم،
a_0 تا a_2 به دست می آید

با افزایش درجه چند جمله ای، این روش کارآمد نیست، دنبال الگوریتم بهتری برای چند جمله ای درونیابی خواهیم بود.

مدل های مختلف بیان ریاضی برای چند جمله ای

- ✓ چند جمله ای لاگرانژ:
  - برای نقاطی با فاصله های یکسان و غیر یکسان
- ✓ چند جمله ای نیوتن:
  - فقط برای نقاطی با فاصله یکسان

چندجمله ای لاگرانژ

Lagrange Interpolating polynomials

x_i	x_1	x_2	…	x_n
f_i	f_1	f_2	…	f_n

✓ فرم کلی چند جمله ای لاگرانژ:

اگر $f(x)$ تابع عبوری از این نقاط را به صورت روبرو بیان شود. $f(x) = \emptyset_n(x) + R(X)$

- ❑ تابع $f(x)$ از تمام نقاط جدول میگذرد.
- ❑ در نقاط جدول $R(X) = 0$ است.

محاسبه فرم تقریب چندجمله ای لاگرانژ

- در اینجا از این تقریب استفاده می شود $f(x) = \emptyset_n(x)$
  - فرم کلی معادله چند جمله ای به شکل زیر است:

$$\emptyset_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$$

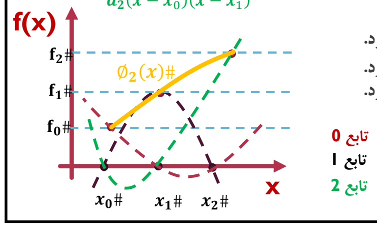
  - فرم لاگرانژ این چند جمله ای به فرم زیر است:

$$\begin{aligned}\emptyset_n(x) = {} & a_0(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\dots(x-x_n) + \\ & a_1(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)\dots(x-x_n) + \\ & \vdots \\ & a_n(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{n-1})\end{aligned}$$

الگوی نوشتاری فرم لاگرانژ

- ✓ چند جمله لاگرانژ به گونه ای نوشته شده است که از جمع $n+1$ تابع درجه n به دست آمده است.
- ✓ هر کدام از این توابع در یکی از نقاط جدول مقداری برابر f_i دارد و در بقیه نقاط صفر است.

$$\begin{aligned}\emptyset_2(x) = {} & a_0(x-x_1)(x-x_2) + \\ & a_1(x-x_0)(x-x_2) + \\ & a_2(x-x_0)(x-x_1)\end{aligned}$$



- مثال لاگرانژ درجه دو از ۳ تابع به دست آمده است:
  - تابع 0 در x_0 مقداری برابر f_0 دارد و در x_1 و x_2 مقداری برابر صفر دارد.
  - تابع 1 در x_1 مقداری برابر f_1 دارد و در x_0 و x_2 مقداری برابر صفر دارد.
  - تابع 2 در x_2 مقداری برابر f_2 دارد و در x_1 و x_0 مقداری برابر صفر دارد.
- ✓ حاصل جمع این ۳ تابع $\emptyset_2(x)$ را به ما میدهد.

ضرایب و فرم کلی لاگرانژ

$$x = x_0 \rightarrow \qquad \emptyset_n(x_0) = f_0$$

$$\Rightarrow f_0 = a_0(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)\dots(x_0-x_n)$$

$$\Rightarrow a_0 = \frac{f_0}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)\dots(x_0-x_n)}$$

$$x = x_1 \rightarrow \qquad f_1 = a_1(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)\dots(x_1-x_n)$$

$$\Rightarrow a_1 = \frac{f_1}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)\dots(x_1-x_n)}$$

$$x = x_2 \rightarrow \qquad f_2 = a_2(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)\dots(x_2-x_n)$$

$$\Rightarrow a_2 = \frac{f_2}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)\dots(x_2-x_n)}$$

ضرایب و فرم کلی لاگرانژ

تابع لاگرانژ

$$\emptyset_n(x) = \sum_{i=0}^{n} l_i(x)f_i$$

ضریب لاگرانژ

$$l_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ i\neq j}}^{n} \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}$$

مطابق نکاتی که گفته شد، ضریب لاگرانژ $l_i(x)$ در x_i برای یک و در بقیه برابر صفر است

مثال: حل معادله چند جمله ای لاگرانژ در مرتبه اول

$$\emptyset_1(x) = \sum_{i=0}^{1} l_i(x)f_i$$

$$l_0(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ i\neq j}}^{1} \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)} = \frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)}$$

$$l_1(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ i\neq j}}^{1} \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)} = \frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)}$$

$$\emptyset_1(x) = \frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)}f_0 + \frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)}f_1$$

مثال حل معادله چند جمله ای لاگرانژ در مرتبه دوم

$$\emptyset_2(x) = \sum_{i=0}^{2} l_i(x) f_i$$

$$l_0(x) = \prod_{\substack{j=0\\ i\neq j}}^{2} \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)} = \frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)} \times \frac{(x-x_2)}{(x_0-x_2)}$$

$$l_1(x) = \prod_{\substack{j=0\\ i\neq j}}^{2} \frac{(x-x_j)}{(x_1-x_j)} = \frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)} \times \frac{(x-x_2)}{(x_1-x_2)}$$

$$l_2(x) = \prod_{\substack{j=0\\ i\neq j}}^{2} \frac{(x-x_j)}{(x_2-x_j)} = \frac{(x-x_0)}{(x_2-x_0)} \times \frac{(x-x_1)}{(x_2-x_1)}$$

$$\emptyset_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} f_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} f_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} f_2$$

مثال: مقدار $\mathrm{LN}(2)$ را با درون یابی لاگرانژ به دست آورید:

مقدار دقیق $\ln(2)$ نیز داده شده است. $\ln(2) = 0.6931472$

نقاط $(6,4,1)$

$\ln(1) = 0$

$\ln(4) = 1.386294$

$\ln(6) = 1.791759$

لاگرانژ مرتبه اول

$$\emptyset_1(2) = \frac{2-4}{1-4} \times 0 + \frac{2-1}{4-1} \times 1.386294 = 0.462098$$

لاگرانژ مرتبه دوم

$$\emptyset_2(2) = \frac{(2-4)(2-6)}{(1-4)(1-6)} \times 0 + \frac{(2-1)(2-6)}{(4-1)(4-6)} \times 1.386294 + \frac{(2-1)(2-4)}{(6-1)(6-4)} \times 1.791759 = 0.5658442$$

بنابراین $\emptyset_2(2)$ به مقدار واقعی نزدیک تر است.

✓ نکته: نقاط داده شده در این مثال، هم فاصله نبودند.

عملگرها

operator	name	Definition	
E	shift operator	$E\,f(x) = f(x+h), \quad Ef_i = f_{i+1}$	عملگر جابجایی
$\Delta(Delta)$	forward diff.	$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x), \quad \Delta f_i = f_{i+1} - f_i$	عملگر دلتا (اختلاف پیشرو)
∇(Del)	backward diff.	$\nabla f(x) = f(x) - f(x-h), \quad \nabla f_i = f_i - f_{i-1}$	عملگر دل (اختلاف پسرو)
$\delta(small\ Delta)$	central diff.	$\delta f(x) = f\left(x+\frac{h}{2}\right) - f\left(x-\frac{h}{2}\right)$	عملگر اختلاف مرکزی
μ	average operator	$\mu\,f(x) = \frac{1}{2} f\left(x+\frac{h}{2}\right) + f\left(x-\frac{h}{2}\right)$	عملگر متوسط گیری
D	differential operator	$Df(x) = \frac{df(x)}{dx} = f'(x)$ $D^n f(x) = f^{(n)}(x)$	عملگر مشتق
I	Integral operator	$\mathrm{I}f(x) = \int_x^{x+h} f(x)\mathrm{d}x$ $I^n f(x) = \int_x^{x+nh} f(x)dx$	عملگر انتگرال از x تا x+h

روابط بین عملگرها

$\boldsymbol{\Delta = E - 1 = E\nabla}$

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x) = E\,f(x) - f(x) = (E-1)f(x) \Rightarrow \Delta = E - 1$$

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x) = E\,f(x) - \mathrm{E}f(x-h) = \mathrm{E}\big(f(x) - f(x-h)\big) = E\big(\Delta f(x)\big)$$

$$\rightarrow \Delta = E\nabla$$

$$\boldsymbol{\nabla = 1 - E^{-1}} \Rightarrow (1 - E^{-1})f(x) = f(x) - E^{-1}f(x) = f(x) - f(x-h) = \nabla f(x)$$

$$\boldsymbol{\delta = E^{\frac{1}{2}} - E^{\frac{-1}{2}}} \Rightarrow \left(E^{\frac{1}{2}} - E^{\frac{-1}{2}}\right)f(x) = f\left(x+\frac{h}{2}\right) - f\left(x-\frac{h}{2}\right) = \delta f(x)$$

$\boldsymbol{\delta^2 = \Delta - \nabla}$

✓ δ^2 یعنی اینکه عملگر دلتا دو بار روی $f(x)$ اعمال شود

$$\delta^2 f(x) = \delta\left[f\left(x+\frac{h}{2}\right) - f\left(x-\frac{h}{2}\right)\right] = \delta f\left(x+\frac{h}{2}\right) - \delta f\left(x-\frac{h}{2}\right)$$

$$= \big(f(x+h) - f(x)\big) - \big(f(x) - f(x-h)\big) = (\Delta - \nabla)f(x)$$

$\boldsymbol{ID = \Delta}$ $\qquad IDf(x) = \mathrm{I}\big(f'(x)\big) = \int_x^{x+h} f'(x) = f(x+h) - f(x) = \Delta f(x)$

روابط بین عملگرها

$$E = e^{hD}$$

$$E\,f(x) = f(x+h) = f(x) + f'(x)\mathrm{h} + f''(x)\frac{h^2}{2!} + f'''(x)\frac{h^3}{3!} + \cdots$$

$$= \left[1 + \mathrm{hD} + \frac{h^2D^2}{2!} + \frac{h^3D^3}{3!} + \cdots\right] f(x) = e^{hD} f(x)$$

$$\mathrm{AA^{-1}} = \mathrm{A^{-1}A} = 1$$

$$Ef(x) = f(x+h)\,,\; E^{-1}f(x) = f(x-h)$$

$$EE^{-1}f(x) = Ef(x-h) = f(x-h+h) = f(x)$$

$$A_1 + A_2 = A_2 + A_1\,, A_1A_2 = A_2A_1\,,\; A_1(A_2+A_3) = A_1A_2 + A_1A_1$$

$$A_1(A_2A_3) = (A_1A_2)A_3$$

- ✓ تمام اپراتورها معکوس پذیر هستند ولی E^{-1} از همه پر کاربرد تر است.
- ✓ اپراتور ها خاصیت جابجایی دارند.

$$\Delta\nabla = \nabla\Delta \Leftarrow \begin{cases} \nabla\Delta f(x) = \nabla[f(x+h) - f(x)] = \big(f(x+h) - f(x)\big) - \big(f(x) - f(x-h)\big) = f(x+h) - 2f(x) + f(x-h) \\ \Delta\nabla f(x) = \Delta[f(x) - f(x-h)] = \big(f(x+h) - f(x)\big) - \big(f(x) - f(x-h)\big) = f(x+h) - 2f(x) + f(x-h) \end{cases}$$

روابط بین عملگرها

$$\begin{cases} E^nDf(x) = E^nf'(x) = f'(x+nh) \\ DE^nf(x) = Df(x+h) = f'(x+nh) \end{cases} \Rightarrow E^nD = DE^n$$

- ✓ در اصل اپراتور ها کمک میکنند تا برخی عملیات را کوتاه تر نوشته شوند.
- ✓ سری باینومیال (binomial series)

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^{\boldsymbol{r}} = \binom{\boldsymbol{r}}{\boldsymbol{0}}\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{b}^{\boldsymbol{0}} + \binom{\boldsymbol{r}}{\boldsymbol{1}}\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{1}}\boldsymbol{b}^{\boldsymbol{1}} + \ldots \binom{\boldsymbol{r}}{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{k}}\boldsymbol{b}^{\boldsymbol{k}} + \ldots$$

$$\begin{cases} \binom{r}{0} = 1 \\ \binom{r}{k} = \dfrac{r(r-1)(r-2)\ldots(r-k+1)}{k!} \end{cases}$$

- ❑ **r**: می تواند حقیقی یا موهومی باشد .
- ❑ **k**: یک عدد صحیح بزرگتر از صفر است.
- ❑ اگر r عدد صحیح مثبتی باشد آنگاه ...

$$(a+b)^r = \sum_{k=0}^{r}\binom{r}{k} a^{r-k}\, b^k$$

درون یابی نیوتن

فرم کلی معادله چند جمله ای درونیابی

$$\boldsymbol{f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n}$$

فرم کلی معادله چند جمله ای درونیابی نیوتن

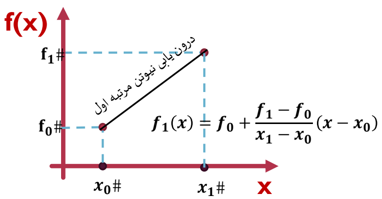
$$\boldsymbol{f_n(x) = b_0 + b_1(x-x_0) + b_2(x-x_0)(x-x_1) + b_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) + \ldots + b_n(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-1})}$$

- ✓ چند جمله ای مرتبه یک نیوتن

x_i	x_1	x_2
$\mathrm{f_i}$	$\mathrm{f_1}$	$\mathrm{f_2}$

فرض کنید $x_0 < x_1$

$$\boldsymbol{f_1(x) = b_0 + b_1(x-x_0)}$$



$$\Rightarrow b_0 = f_0$$

$$b_1 = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} = \frac{\Delta f_0}{\Delta x_0}$$

- ▪ استفاده از عملگر دلتا

فرم کلی چند جمله های مرتبه دوم نیوتن

$$\boldsymbol{f_2(x) = b_0 + b_1(x-x_0) + b_2(x-x_0)(x-x_1)}$$

x_i	x_0	x_1	x_2
$\mathrm{f_i}$	$\mathrm{f_0}$	$\mathrm{f_1}$	$\mathrm{f_2}$

$$\boldsymbol{x_0 < x_1 < x_2}$$

$$x = x_0 \Rightarrow f_0 = b_0 \Rightarrow b_0 = f_0$$

$$x = x_1 \Rightarrow f_1 = b_0 + b_1(x_1 - x_0) \Rightarrow b_1 = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} = \frac{\Delta f_0}{\Delta x_0}$$

$$x = x_2 \Rightarrow f_2 = b_0 + b_1(x_2 - x_0) + b_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$$

$$f_2 = f_0 + \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}(x_2 - x_0) + b_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$$

$$b_2 = \frac{\dfrac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1} - \dfrac{f_1 + f_0}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_1}$$

فرم کلی چند جمله های مرتبه دوم نیوتن

- برای b_2 می توان مقادیر x را به صورت مستقیم در رابطه وارد کرد.
- لزومی به هم فاصله بودن نقاط نیست.

$$b_2 = \frac{\frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1} - \frac{f_1 + f_0}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_1}$$

- ولی اگر نقاط هم فاصله باشند خیلی بهتر است و رابطه b_2 خیلی ساده تر می شود.

$$\begin{cases} x_1 - x_0 = h \\ x_2 - x_1 = h \\ x_2 - x_0 = 2h \end{cases}$$

$$b_2 = \frac{\frac{\Delta f_1}{h} - \frac{\Delta f_0}{h}}{2h} = \frac{\Delta f_1 - \Delta f_0}{2h^2} = \frac{\Delta(f_1 - f_0)}{2h^2} = \frac{\Delta(\Delta f_0)}{2h^2} = \frac{\Delta^2 f_0}{2h^2}$$

✓ نکته: از این به بعد در روش نیوتن از نقاط هم فاصله و مرتب استفاده می شود.

در چندجمله ای ها با مراتب بالاتر

$$f_n(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1) + b_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \dots + b_n(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_{n-1})$$

$$b_0 = f_0$$

$$b_1 = \frac{\Delta f_0}{h}$$

$$b_2 = \frac{\Delta^2 f_0}{2!\, h^2}$$

$$b_3 = \frac{\Delta^3 f_0}{3!\, h^3}$$

$$b_4 = \dots$$

فرم جدولی برای محاسبه Δ، Δ^2، Δ^3 و ...

x_0	f_0					
		Δf_0				
x_1	f_1		$\Delta^2 f_0$			
		Δf_1		$\Delta^3 f_0$		
x_2	f_2		$\Delta^2 f_1$			
		Δf_2				
						$\Delta^n f_0$
x_{n-2}	f_{n-2}					
		Δf_{n-2}		$\Delta^3 f_{n-3}$		
x_{n-1}	f_{n-1}		$\Delta^2 f_{n-2}$			
		Δf_{n-1}				
x_n	f_n					

رابطه کلی درون یابی نیوتن پیشرو

- **Newton forward interpolation**

$$f_n(x) = f_0 + \frac{\Delta f_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 f_0}{2!\, h^2}(x - x_0)\big(x - \overbrace{(x_0 + h)}^{x_1}\big) + \cdots$$

$$+ \frac{\Delta^n f_0}{n!\, h^n}(x - x_0)\big(x - \overbrace{(x_0 + h)}^{x_1}\big)\big(x - \overbrace{(x_0 + 2h)}^{x_2}\big)\dots\big(x - \overbrace{(x_0 + (n-1)h)}^{x_{n-1}}\big) + R_n$$

❑ R_n خطای درون یابی نیوتن است .

فرم دیگر درونیابی نیوتن

تعریف متغیر جدید

$$\alpha = \frac{x - x_0}{h}$$

$$x - x_0 = \alpha h \qquad x - (x_0 + h) = (\alpha - 1)h$$

$$x - (x_0 + 2h) = (\alpha - 2)h \qquad x - (x_0 + (n-1)h) = (\alpha - n + 1)h$$

$$f_n(x) = f_0 + \Delta f_0 \alpha + \frac{\Delta^2 f_0}{2!\,h^2}\alpha(\alpha - 1) + \ldots + \frac{\Delta^n f_0}{n!}\alpha(\alpha - 1)\ldots(\alpha - n + 1) + R_n$$

✓ بنابراین با فرض $R_n = 0$ می توان از این رابطه استفاده کرد و مقدار تابع را در نقطه مشخص x به دست آورد.

فرم دیگر درونیابی نیوتن و استفاده از عملگرها

$$\alpha = \frac{x - x_0}{h} \qquad \Delta = E - 1 \rightarrow E = \Delta + 1 \Rightarrow$$

✓ سری باینومیال (binomial series)

$$E^\alpha = (\Delta + 1)^\alpha = \binom{\alpha}{0} + \binom{\alpha}{1}\Delta + \binom{\alpha}{2}\Delta^2 + \cdots + \binom{\alpha}{n}\Delta^n + \cdots$$

$$\Rightarrow E^\alpha = 1 + \alpha\Delta + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2!}\Delta^2 + \frac{\alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2)}{3!}\Delta^3 + \cdots$$

✓ اثر عملگر شیفت روی تابع

$$E^\alpha f(x_0) = f(x_0 + \alpha h) = (1 + \Delta)^\alpha f(x_0)$$

$$= \left[1 + \alpha\Delta + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2!}\Delta^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha - 1)\ldots(\alpha - n + 1)\Delta^n}{n!} + \ldots\right] f(x_0)$$

$$f(x_0 + \alpha h) = \left[1 + \alpha\Delta + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{n!}\Delta^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha - 1)\ldots(\alpha - n + 1)}{n!}\Delta^n\right] f(x_0) + R_n$$

تابع درون یابی نیوتن پیشرو

$$f(x_0 + \alpha h) = \left[1 + \alpha\Delta + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{n!}\Delta^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha - 1)\ldots(\alpha - n + 1)}{n!}\Delta^n\right] f(x_0) + R_n$$

✓ چه زمانی $R_n = 0$ می شود؟

✓ رابطه آلفا

$$\alpha = \frac{x - x_0}{h}$$

$$f(x_0 + \alpha h) = f_0 + \alpha\Delta f_0 + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2!\,h^2}\Delta^2 f_0 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha - 1)\ldots(\alpha - n + 1)}{n!}\Delta^n f_0$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} \nabla^k f_0$$

✓ تابع درون یابی نیوتن پیشرو

مثال: با استفاده از داده های جدول مقابل مقدار $f(3.6)$ را پیش بینی کنید

$x = 3.6$ →

$x_0 = 1$	$f_0 = 11$				
		$\Delta f_0 = 25$			
$x_1 = 2$	$f_1 = 36$		$\Delta^2 f_0 = 22$		
		$\Delta f_1 = 47$		$\Delta^3 f_0 = 6$	
$x_2 = 3$	$f_2 = 83$		$\Delta^2 f_1 = 28$		$\Delta^4 f_0 = 0$
		$\Delta f_2 = 75$		$\Delta^3 f_1 = 6$	
$x_3 = 4$	$f_3 = 158$		$\Delta^2 f_2 = 34$		
		$\Delta f_3 = 109$			
$x_4 = 5$	$f_4 = 267$				

مثال: با استفاده از تمام نقاط جدول

$$\alpha = \frac{3.6-1}{1} = 2.6 \qquad h = 1$$

$$f(3.6) = f(x_0+\alpha h) = f(1+2.6) = f_0 + \alpha\Delta f_0 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}\Delta^2 f_0 +$$

$$\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}\Delta^3 f_0 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{4!}\Delta^4 f_0$$

$$f(3.6) = 11 + 2.6 + 25 + \frac{2.6\times 1.6}{2}\times 22 + \frac{2.6+1.6+6}{6}\times 6 + coef.\times 0$$

$$f(3.6) = 124.256$$

✓ با استفاده از تمام نقاط جدول

مثال: با استفاده از تعداد نقاط کمتر جدول

$$3.6 = 2 + \alpha\times 1 \Rightarrow \alpha = 1.6$$

$$f(3.6) = f(2+1.6) = f_1 + 1.6\Delta f_1 + \frac{1.6(1.6-1)}{2!}\Delta^2 f_1 + \frac{1.6(1.6-1)(1.6-2)}{3!}\Delta^3 f_1$$

$$f(3.6) = 36 + 1.6\times 47 + \frac{1.6\times 0.6}{2!}\times 28 + \frac{1.6\times 0.6\times(-0.4)}{6}\times 6$$

$$f(3.6) = 124.256$$

✓ دقیقا به جواب قبلی رسیدیم. چرا؟

❑ برای سه نقطه (x_4, x_3, x_2) چطور؟

$$3.6 = 3 + \alpha\times 1 \Rightarrow \alpha = 0.6$$

$$f(3.6) = 123.92$$

فرمول کلی درون یابی نیوتن پسرو

$$\nabla = 1 - E^{-1} \Rightarrow E^{-1} = 1-\nabla \Rightarrow E = (1-\nabla)^{-1} \Rightarrow E^{\alpha} = (1-\nabla)^{-\alpha}$$

$r = -\alpha$

$a = 1$

$b = -\nabla$

$$\alpha = \frac{x - x_n}{h}$$

✓ پس آلفا همواره منفی است

$$(1-\nabla)^{-\alpha} = 1 + \alpha\nabla + \frac{\alpha(\alpha+1)}{2!}\nabla^2 + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{3!}\nabla^3 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n-1)}{n!}\nabla^n + \ldots$$

$$E^{\alpha}f(x_n) = (1-\nabla)^{-\alpha}f(x_n) = \left[\begin{array}{c} 1 + \alpha\nabla + \frac{\alpha(\alpha+1)}{2!}\nabla^2 + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{3!}\nabla^3 + \ldots + \\ \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n-1)}{n!}\nabla^n + \ldots \end{array}\right] f(x_n)$$

فرمول کلی درون یابی نیوتن پسرو

$$f(x_n+\alpha h) = \left[1 + \alpha\nabla + \frac{\alpha(\alpha+1)}{2!}\nabla^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha+n-1)}{n!}\nabla^n\right] f(x_n) + R_n$$

$$f(x_n+\alpha h) = f_n + \alpha\nabla f_n + \frac{\alpha(\alpha+1)}{2!}\nabla^2 f_n + \ldots + \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)}{n!}\nabla^n f_n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{-\alpha}{k}\nabla^k f_n$$

$$\nabla f_n = f_n - f_{n-1}$$

$$\nabla^2 f_n = \nabla(\nabla f_n) = \nabla(\nabla f_n) = \nabla(f_n - f_{n-1}) = \nabla f_n - \nabla f_{n-1}$$

درون یابی نیوتن پسرو

x_0	f_0				
		∇f_1			
x_1	f_1		$\nabla^2 f_2$		
		∇f_2		$\nabla^3 3$	
x_2	f_2		$\nabla^2 f_3$		
		∇f_3			
					$\nabla^n f_\mathrm{n}$
x_{n-2}	f_{n-2}				
		∇f_{n-1}		$\nabla^3 f_n$	
x_{n-1}	f_{n-1}		$\nabla^2 f_n$		
		∇f_n			
x_n	f_n				

حل مثال قبل با استفاده از نیوتن پسرو

	$x_0 = 1$	$f_0 = 11$				
			$\nabla f_1 = 25$			
	$x_1 = 2$	$f_1 = 36$		$\nabla^2 f_2 = 22$		
			$\nabla f_2 = 47$		$\nabla^3 f_3 = 6$	
	$x_2 = 3$	$f_2 = 83$		$\nabla^2 f_3 = 28$		$\Delta^4 f_4 = 0$
$x = 3.6$ →			$\nabla f_3 = 75$		$\nabla^3 f_4 = 6$	
	$x_3 = 4$	$f_3 = 158$		$\nabla^2 f_4 = 34$		
			$\nabla f_4 = 109$			
	$x_4 = 5$	$f_4 = 267$				

حل مثال قبل با استفاده از نیوتن پسرو

$$\alpha = \frac{3.6 - 5}{1} = -1.4$$

$$f(3.6) = f_n + \alpha \nabla f_n + \frac{\alpha(\alpha+1)}{2!}\nabla^2 f_n + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{3!}\nabla^3 f_n +$$

$$\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)}{4!}\nabla^4 f_n$$

$$f(3.6) = 267 + (-1.4) \times (109)\frac{(-1.4)(-0.4)}{2} \times 34 + \frac{(-1.4)(-0.4)(0.6)}{6} \times 6 + coef. \times 0$$

$$f(3.6) = 124.256$$