مشتق گیری عددی

NUMERICAL DIFFERENTATION

مشتق گیری عددی

- موارد استفاده از مشتق گیری عددی:

1. داشتن جدولی از نقاط بصورت (x,f(x)) و محاسبه مشتق f(x) را در یک نقطه خاص.
2. داشتن توابع بسیار پیچیده که گرفتن مشتق تحلیلی کاری سخت و احتمال اشتباه زیاد است.

مشتق گیری عددی با استفاده از بسط تیلور

محاسبه مشتق مرتبه اول به کمک بسط تیلور:

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i) + R_1$$

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} - \frac{R_1}{x_{i+1} - x_i}$$

$$R_1 = \frac{f''(x_i)}{2!}(x_{i+1} - x_i)^2 + \ldots$$

$$f'(x_i) \cong \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} = \frac{\Delta f_i}{h}$$

$$f'(x_i) = \frac{\Delta f_i}{h} + O(h)$$

تفاضل پیشرو مشتق مرتبه اول

$$f'(x_i) \cong \frac{\Delta f_i}{h}$$

مشتق گیری عددی با استفاده از بسط تیلور

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) - f'(x_i)(x_{i-1} - x_i) + R_1$$

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) - hf'(x_i) + R_1$$

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h} + \frac{R_1}{h} = \frac{\nabla f_i}{h} + O(h)$$

تفاضل پسرو مشتق مرتبه اول

$$f'(x_i) \cong \frac{\nabla f_i}{h}$$

$$\begin{cases} f(x_{i-1}) = f(x_i) - f'(x_i)(x_{i-1} - x_i) + \dfrac{f''(x_i)}{2!}(x_{i-1} - x_i)^2 \\ f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i) + \dfrac{f''(x_i)}{2!}(x_{i+1} - x_i)^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}) = 2f'(x_i)h + \frac{2f^{(3)}(x_i)}{3!}h^3 + \ldots$$

تفاضل مرکزی مشتق مرتبه اول

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h}$$

محاسبه مشتق به مراتب بالاتر به کمک بسط تیلور

$$\begin{cases} f(x_{i+2}) = f(x_i) + f'(x_i)(2h) + \dfrac{f''(x_i)}{2!}(2h)^2 + \cdots = f(x_i) + 2f'(x_i)h + 2f''(x_i)h^2 + \cdots \\ f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)h + \dfrac{f''(x_i)}{2!}h^2 + \dfrac{f^{(3)}(x_i)}{3!}h^3 + \cdots \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) = -f(x_i) + f''(x_i)h^2 + \ldots$$

تفاضل پیشرو مشتق مرتبه دوم

$$\Rightarrow f''(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^2} + o(h)$$

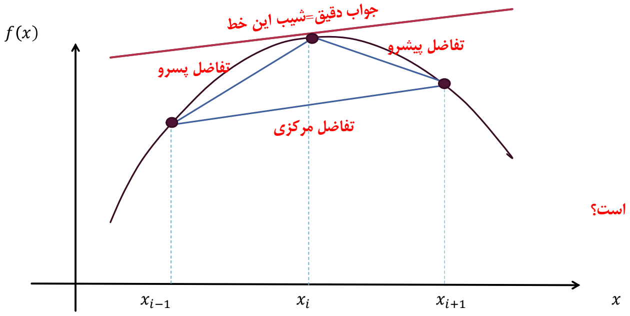
تفاضل پسرو مشتق مرتبه دوم

$$\Rightarrow f''(x_i) = \frac{f(x_i) - 2f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{h^2} + o(h)$$

تفاضل مرکزی مشتق مرتبه دوم

$$\Rightarrow f''(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1})}{h^2} + o(h^2)$$

مشتق گیری عددی با استفاده از بسط تیلور



کدام یک به جواب دقیق نزدیکتر است؟

نکته: دقت شود که در روابط نوشته شده فاصله بین نقاط یکسان است.

مشتق عددی با استفاده از روابط عملگرها

$$Df(x) = f'(x)$$

$$E = e^{hD} \qquad E = 1 + \Delta \to \ln(1+\Delta) = hD \to D = \frac{1}{h}\ln(1+\Delta)$$

$$\ln(1+\Delta) = \Delta - \frac{\Delta^2}{2} + \frac{\Delta^3}{3} - \frac{\Delta^4}{4} + \ldots.$$

مشتق گیری عددی پیشرو (مشتق مرتبه اول)

$$Df(x) = f'(x) = \frac{1}{h}[\Delta - \frac{\Delta^2}{2} + \frac{\Delta^3}{3} - \frac{\Delta^4}{4} + \ldots.]f(x)$$

$$E = e^{hD} \qquad E^{-1} = (1-\nabla) \to -\ln(1-\nabla) = hD \to D = -\frac{1}{h}\ln(1-\nabla)$$

$$\ln(1-\nabla) = -\left(\nabla + \frac{\nabla^2}{2} + \frac{\nabla^3}{3} + \frac{\nabla^4}{4} + \ldots.\right)$$

مشتق گیری عددی پسرو (مشتق مرتبه اول)

$$Df(x) = \frac{1}{h}\left(\nabla + \frac{\nabla^2}{2} + \frac{\nabla^3}{3} + \cdots\right)f(x)$$

روابط کلی مشتق عددی مرتبه اول

- دقت کنید که در این روابط حتماً باید فاصله نقاط یکسان باشد.
- ✓ سوال اگر نقاطی که در اختیار داریم هم فاصله نباشند چگونه می توان مشتق گرفت؟
  1. استفاده از روابط بسط تیلور مشابه کاری که در صفحه قبل انجام دادیم
  2. به دست آوردن رابطه میانیابی لاگرانژ و سپس مشتق گیری از آن

❑ نکته دنبال پیدا کردن روابطی هستیم که از تعداد نقاط زیادی برای به دست آوردن مشتق استفاده شود تا دقت جواب خوب باشد.

مشتق عددی مرتبه اول پیشرو

$Df_i = f'_i = \frac{1}{h}\Delta f_i = \frac{1}{h}(f_{i+1}-f_i)$ یک جمله (فرمول دو نقطه ای)

$Df_i = \frac{1}{h}\left(\Delta - \frac{\Delta^2}{2}\right)f_i = \frac{1}{h}\left(\Delta f_i - \frac{1}{2}\Delta^2 f_i\right) = \frac{1}{h}\left[f_{i+1}-f_i-\frac{1}{2}\Delta(f_{i+1}-f_i)\right]$

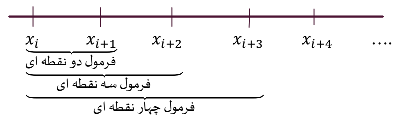
$= \frac{1}{h}\left[f_{i+1}-f_i-\frac{1}{2}(f_{i+2}-f_{i+1}-f_{i+1}+f_i)\right] = \frac{1}{2h}(-3f_i+4f_{i+1}-f_{i+2})$ دو جمله (فرمول سه نقطه ای)

$Df_i = \frac{1}{h}\left(\Delta-\frac{\Delta^2}{2}+\frac{\Delta^3}{3}\right)f_i = \frac{1}{h}\left[\Delta f_i - \frac{1}{2}\Delta(\Delta f_i)+\frac{1}{3}\Delta(\Delta(\Delta f_i))\right]$

$= \frac{1}{h}\left[f_{i+1}-f_i-\frac{1}{2}(f_{i+2}-2f_{i+1}-f_i)+\frac{1}{3}(f_{i+3}-3f_{i+2}+3f_{i+1}-f_i)\right]$ سه جمله (فرمول چهار نقطه ای)

مشتق عددی مرتبه اول پیشرو

$Df_i = \frac{1}{12h}[-25f_i+48f_{i+1}-36f_{i+2}+16f_{i+3}-3f_{i+4}]$ چهار جمله (فرمول پنج نقطه ای)



- هرچه تعداد نقاط مورد استفاده بیشتر باشد دقت جواب مشترک هم بیشتر خواهد بود
- نقاط هم فاصله هستند، رابطه پیشرو است پس تمام نقاط بعد از نقطه مورد نظر هستند.

مشتق عددی مرتبه اول پسرو

$Df_i = \frac{1}{h}\nabla f_i = \frac{f_i-f_{i-1}}{h}$ یک جمله (فرمول دو نقطه ای)

$Df_i = \frac{1}{h}\left[\nabla+\frac{\nabla^2}{2}\right]f_i = \frac{1}{h}\left[\nabla f_i+\frac{1}{2}\nabla(\nabla f_i)\right] = \frac{1}{h}\left[f_i-f_{i-1}+\frac{1}{2}(f_i-f_{i-1}-f_{i-1}+f_{i-2})\right]$

$= \frac{1}{2h}(3f_i-4f_{i-1}+f_{i-2})$ دو جمله (فرمول سه نقطه ای)

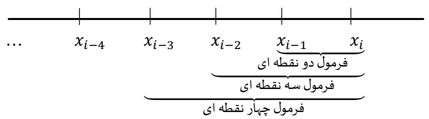
$Df_i = \frac{1}{h}\left[\nabla+\frac{\nabla^2}{2}+\frac{\nabla^3}{3}\right]f_i = \frac{1}{h}\left[\nabla f_i+\frac{1}{2}\nabla^2 f_i++\frac{1}{3}\nabla^3 f\right]$

$= \frac{1}{h}\left[f_i-f_{i-1}+\frac{1}{2}(f_i-f_{i-1}-f_{i-1}+f_{i-2})+\frac{1}{3}(f_i-f_{i-1}-2f_{i-1}+2f_{i-2}+f_{i-2}-f_{i-3})\right]$

$= \frac{1}{6h}(11f_i-18f_{i-1}+9f_{i-2}-2f_{i-3})$ سه جمله (فرمول چهار نقطه ای)

مشتق عددی مرتبه اول پسرو

$Df_i = \frac{1}{12h}(25f_i-48f_{i-1}+36f_{i-2}-16f_{i-3}+3f_{i-4})$ چهار جمله (فرمول پنج نقطه ای)



- مجموع ضرایب برابر صفر است.
- ضرایب رابطه پسرو قرینه ضرایب پیشرو هستند.
- نقاطی که دراختیار داریم در رابطه پسرو قبل از نقطه مورد نظر هستند و هم فاصله هستند.

رابطه پیشرو با یک شیفت به عقب

$$\Rightarrow Df_i = f'_i = \frac{1}{h}\left[\Delta - \frac{\Delta^2}{2} + \frac{\Delta^3}{3} - \frac{\Delta^4}{4} + \dots\right] f_i$$

$$1 + \Delta = E \Rightarrow (1+\Delta)E^{-1} = EE^{-1} = 1$$

$$\Rightarrow Df_i = f'_i = \underbrace{\frac{1}{h}\left[\Delta - \frac{\Delta^2}{2} + \frac{\Delta^3}{3} - \frac{\Delta^4}{4} + \dots\right](1+\Delta)}_{\text{درهم ضرب می کنیم}} \underbrace{E^{-1}f_i}_{f_{i-1}}$$

$$= \frac{1}{h}\left[\Delta + \left(1 - \frac{1}{2}\right)\Delta^2 + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right)\Delta^3 + \left(\frac{-1}{4} + \frac{1}{3}\right)\Delta^4 + \dots\right] f_{i-1}$$

$$\Rightarrow Df_i = f'_i = \frac{1}{h}\left[\Delta + \frac{\Delta^2}{2} - \frac{\Delta^3}{6} + \frac{\Delta^4}{12} - \frac{\Delta^5}{20} + \dots\right] f_{i-1}$$

رابطه پیشرو با یک شیفت به عقب

رابطه پیشرو با یک شیفت به عقب

رابطه پیشرو با یک شیفت به عقب

$$\Rightarrow Df_i = f'_i = \frac{1}{h}\left[\Delta + \frac{\Delta^2}{2} - \frac{\Delta^3}{6} + \frac{\Delta^4}{12} - \frac{\Delta^5}{20} + \dots\right] f_{i-1}$$

دو جمله

$$Df_i = f'_i = \frac{1}{h}\left[\Delta + \frac{\Delta^2}{2}\right] f_{i-1} = \frac{1}{h}\left[f_i - f_{i-1} + \frac{1}{2}[f_{i+1} - f_i - (f_i - f_{i-1})]\right] = \frac{1}{2h}[f_{i+1} - f_{i-1}]$$

سه جمله

$$Df_i = f'_i = \frac{1}{h}\left[\Delta + \frac{\Delta^2}{2} - \frac{\Delta^3}{6}\right] f_{i-1} = \frac{1}{6h}[-2f_{i-1} - 3f_i + 6f_{i+1} - f_{i+2}]$$

رابطه پسرو با یک شیفت به عقب

$$\Rightarrow Df_i = f'_i = \frac{1}{h}\left[\nabla + \frac{\nabla^2}{2} + \frac{\nabla^3}{3} - \frac{\nabla^4}{4} + \dots\right] f_i$$

$$1 - \nabla = E^{-1} \Rightarrow (1-\nabla)E = EE^{-1} = 1$$

$$\Rightarrow Df_i = f'_i = \underbrace{\frac{1}{h}\left[\nabla + \frac{\nabla^2}{2} + \frac{\nabla^3}{3} + \dots\right](1-\nabla)}_{\text{درهم ضرب می کنیم}} \underbrace{Ef_i}_{f_{i+1}} =$$

$$\Rightarrow Df_i = f'_i = \frac{1}{h}\left[\nabla - \frac{\nabla^2}{2} - \frac{\nabla^3}{6} - \frac{\nabla^4}{12} - \frac{\nabla^5}{20} + \dots\right] f_{i+1}$$

رابطه پیشرو با دو شیفت به عقب

- در رابطه پیشرو نقاط از x_{i-1} شروع می شوند و تا بعد از x_i پیش می رود.
- در رابطه پسرو نقاط از x_{i+1} شروع می شوند و تا قبل از x_i پیش می رود.

رابطه پیشرو با ۲ شیفت به عقب

$$f'_i = \frac{1}{h}\left[\Delta - \frac{\Delta^2}{2} + \frac{\Delta^3}{3} - \frac{\Delta^4}{4} + \dots\right](1+\Delta)^2 E^{-2} f_i$$

$$f'_i = \frac{1}{h}\left[\Delta + \frac{3}{2}\Delta^2 + \frac{1}{3}\Delta^3 - \frac{1}{12}\Delta^4 + \frac{1}{30}\Delta^5 \dots\right] f_{i-2}$$

رابطه پسرو با دو شیفت به جلو

$$f'_i = \frac{1}{h}\left[\nabla + \frac{\nabla^2}{2} + \frac{\nabla^3}{3} + \frac{\nabla^4}{4} + \ldots\right](1-\nabla)^2 E^2 f_i$$

$$f'_i = \frac{1}{h}\left[\nabla - \frac{3}{2}\nabla^2 + \frac{1}{3}\nabla^3 + \frac{1}{12}\nabla^4 + \frac{1}{30}\nabla^5 + \cdots\right] f_{i+2}$$

رابطه پسرو با دو شیفت به جلو

$$f'_i = \frac{1}{h}\left[\nabla - \frac{3}{2}\nabla^2 + \frac{1}{3}\nabla^3\right] f_{i+2} = \frac{1}{6h}\left[-2f_{i-1} - 3f_i + 6f_{i+1} - f_{i+2}\right]$$

سه جمله

معادل با رابطه پیشرو با یک شیفت به عقب

$$f'_i = \frac{1}{h}\left[\nabla - \frac{3}{2}\nabla^2 + \frac{1}{3}\nabla^3 + \frac{1}{12}\nabla^4\right] = \frac{1}{12h}\left[f_{i-2} - 8f_{i-1} + 8f_{i+1} - f_{i+2}\right]$$

چهار جمله

معادل با رابطه پیشرو با دو شیفت به عقب

رابطه پیشرو با دو شیفت به عقب

$$f'_i = \frac{1}{h}\left[\Delta + \frac{3}{2}\Delta^2 + \frac{1}{3}\Delta^3 - \frac{1}{12}\Delta^4 + \frac{1}{30}\Delta^5 \ldots\right] f_{i-2}$$

$$f'_i = \frac{1}{h}\left[\Delta + \frac{3}{2}\Delta^2 + \frac{1}{3}\Delta^3\right] f_{i-2} = \frac{1}{6h}\left[f_{i-2} - 6f_{i-1} + 3f_i + 2f_{i+1}\right]$$

سه جمله (فرمول چهار نقطه ای)

معادل با رابطه پسرو با یک شیفت به جلو

$$f'_i = \frac{1}{h}\left[\Delta + \frac{3}{2}\Delta^2 + \frac{1}{3}\Delta^3 - \frac{1}{12}\Delta^4\right] f_{i-2} = \frac{1}{12h}\left[f_{i-2} - 8f_{i-1} + 8f_{i+1} - f_{i+2}\right]$$

چهار جمله (فرمول چهار نقطه ای)

محاسبه مشتق مراتب بالاتر

رابطه پسرو برای به دست آوردن مشتق مرتبه دوم $f''(x_i)$

$$hD = -\ln(1+\nabla) = \left[\nabla + \frac{\nabla^2}{2} + \frac{\nabla^3}{3} - \frac{\nabla^4}{4} + \ldots\right]$$

$$\Rightarrow h^2 D^2 = \nabla^2 + \nabla^3 + \frac{11}{12}\nabla^4 + \frac{5}{6}\nabla^5 + \frac{137}{180}\nabla^6 + \frac{7}{10}\nabla^7 + \ldots$$

$$D^2 f_i = \frac{1}{h^2}\left[\nabla^2 + \nabla^3 + \frac{11}{12}\nabla^4 + \frac{5}{6}\nabla^5 + \frac{137}{180}\nabla^6 + \frac{7}{10}\nabla^7 + \ldots\right] = f''(x_i)$$

محاسبه مشتق مراتب بالاتر

رابطه پیشرو برای به دست آوردن مشتق مرتبه دوم $f''(x_i)$

$$hD = \ln(1+\Delta) = \left[\Delta - \frac{\Delta^2}{2} + \frac{\Delta^3}{3} - \frac{\Delta^4}{4} + \ldots\right] \Rightarrow h^2 D^2 = \left[\Delta - \frac{\Delta^2}{2} + \frac{\Delta^3}{3} - \frac{\Delta^4}{4} + \ldots\right]^2$$

$$h^2 D^2 = \Delta^2 - \Delta^3 + \frac{11}{12}\Delta^4 - \frac{5}{6}\Delta^5 + \frac{137}{180}\Delta^6 - \frac{7}{10}\Delta^7 + \ldots$$

$$D^2 f_i = \frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 - \Delta^3 + \frac{11}{12}\Delta^4 - \frac{5}{6}\Delta^5 + \frac{137}{180}\Delta^6 - \frac{7}{10}\Delta^7 + \ldots\right] f_i = f''(x_i)$$

محاسبه مشتق مراتب بالاتر

مثال برای پیشرو :

$$f''(x_i)=\frac{1}{h^2}\left(\Delta^2 f_i\right)=\frac{1}{h^2}\left(\Delta(f_{i+1}-f_i)\right)=\frac{1}{h^2}[f_{i+2}-2f_{i+1}+f_i]$$

یک جمله (فرمول سه نقطه ای)

$$f''(x_i)=\frac{1}{h^2}\left(\Delta^2-\Delta^3\right)f_i=\frac{1}{h^2}\left(\Delta^2 f_i-\Delta^3 f_i\right)=\frac{1}{h^2}[(f_{i+2}-2f_{i+1}+f_i)-(f_{i+3}-3f_{i+2}+3f_{i+1}-f_i)]$$

$$=\frac{1}{6h^2}[12f_i-30f_{i+1}+24f_{i+2}-6f_{i+3}]$$

دو جمله (فرمول چهار نقطه ای)

مثال برای پسرو :

$$f''(x_i)=\frac{1}{h^2}\left(\nabla^2 f_i\right)=\frac{1}{h^2}[f_i-2f_{i-1}+f_{i-2}]$$

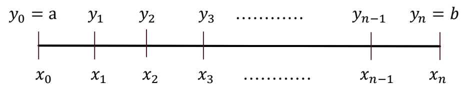
یک جمله (فرمول سه نقطه ای)

$$f''(x_i)=\frac{1}{h^2}\left(\nabla^2+\nabla^3\right)f_i=\frac{1}{6h^2}[12f_i-30f_{i-1}+24f_{i-2}-6f_{i-3}]$$

دو جمله (فرمول چهار نقطه ای)

مثال: تبدیل معادله دیفرانسیل به معادله جبری

$$y''+2y'+4y-3x-5=0$$



$$\begin{cases}x_0=0\rightarrow y(0)=a\\ x_n=1\rightarrow y(1)=b\end{cases}\qquad x_0<x<x_n$$

$y_1, y_2, y_3, \dots, y_{n-1}$ مجهولات

برای حل معادله دیفرانسیل دارای مشتق مرتبه ۲ به دو شرط مرزی نیاز داریم

مجهولات مسئله این معادله دیفرانسیل باید در تمام نقاط این محور برقرار باشد.

$$y''_i+2y'_i+4y_i-3x_i-5=0$$

$$y''_i=\frac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{h^2}\qquad y'_i=\frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2h}$$

$$\frac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{h^2}+2\frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2h}+4y_i=5+3x_i\qquad \underbrace{\left(\frac{1}{h^2}-\frac{1}{h}\right)}_{A}y_{i-1}+\underbrace{\left(4-\frac{2}{h^2}\right)}_{B}y_i+\underbrace{\left(\frac{1}{h^2}-\frac{1}{h}\right)}_{C}y_{i+1}=5+3x_i$$

$$i=1\Rightarrow y_0=a\Rightarrow By_1+Cy_2=5+3x_1-Aa$$

$$i=2\Rightarrow Ay_1+By_2+Cy_3=5+3x_2$$

$$i=3\Rightarrow Ay_2+By_3+Cy_4=5+3x_3$$

$$i=n-2\Rightarrow Ay_{n-3}+By_{n-2}+Cy_{n-1}=5+3x_{n-2}$$

$$i=n-1\Rightarrow y_n=b\Rightarrow Ay_{n-2}+By_{n-1}=5+3x_i-Cb$$

$$Ay_{i-1}+By_i+Cy_{i+1}=5+3x_i$$

$$i=1,2,3,\dots,n-2,n-1$$

فرم ماتریسی دستگاه معادلات

$$\begin{bmatrix}B & C & 0 & \cdots & \cdots & 0\\ A & B & C & \cdots & \cdots & 0\\ 0 & A & B & C & \cdots & 0\\ 0 & \cdots & A & B & C & \cdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & \cdots & \cdots & A & B & C\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & A & B\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\\ \vdots\\ \vdots\\ y_{n-2}\\ y_{n-1}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}5+3x_1-Aa\\ 5+3x_2\\ 5+3x_3\\ \vdots\\ \vdots\\ 5+3x_{n-2}\\ 5+3x_{n-1}-Cb\end{bmatrix}$$

- ✓ ماتریس ضرایب یک ماتریس سه قطری است.
- ✓ معمولاً در تبدیل معادلات دیفرانسیل، به معادلات جبری اینگونه ماتریس ها مشاهده می شود.
- ✓ از روش های حل ماتریس، خصوصاً روش توماس استفاده می شود.