

$$e = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{6 + \dots}}}}}}}}$$

Continued Fraction

$$\pi = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1 + \frac{1}{292 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \dots}}}}}}}}$$

$$\log(1+x) = \frac{x}{1 + \frac{1^2x}{2 + \frac{1^2x}{3 + \frac{2^2x}{4 + \frac{2^2x}{5 + \dots}}}}}$$

$$\pi = \frac{4}{1 + \frac{1^2}{2 + \frac{3^2}{2 + \frac{5^2}{2 + \frac{7^2}{2 + \dots}}}}}}$$

$$\tanh x = \frac{x}{1 + \frac{x^2}{3 + \frac{x^2}{5 + \frac{x^2}{7 + \dots}}}}$$

$$\tan x = \frac{x}{1 - \frac{x^2}{3 - \frac{x^2}{5 - \frac{x^2}{7 - \dots}}}}$$

$$\frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}$$

۱. الگوریتم اقلیدس و ارتباط آن با کسر مسلسل

۲. عدد π و تقریب های آن به کمک کسر مسلسل

۳. کسر مسلسل مربوط به ریشه های دوم

۴. معادله پل و ارتباط آن با کسر مسلسل

کسر مسلسل چه شکلیه؟

$$\frac{9}{7} = 1 + \frac{2}{7} = 1 + \frac{1}{\frac{7}{2}} = 1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2}}$$

India

nice, good idea!

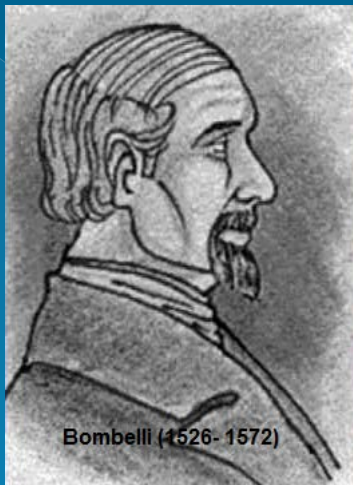
that's enough! sit and rest ...

قبل از قرن 16 ...





Italy 16 century



Bombelli (1526- 1572)



Cataldi (1548- 1626)



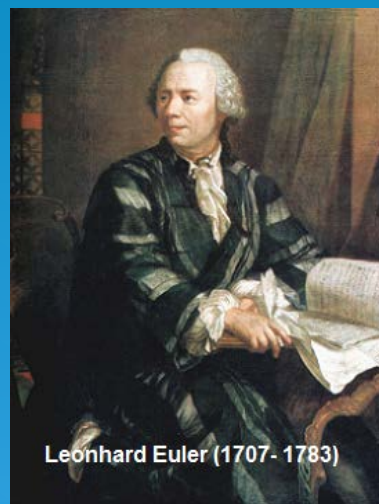
Christiaan Huygens
(1629- 1695)



Brouncker (1620- 1684)



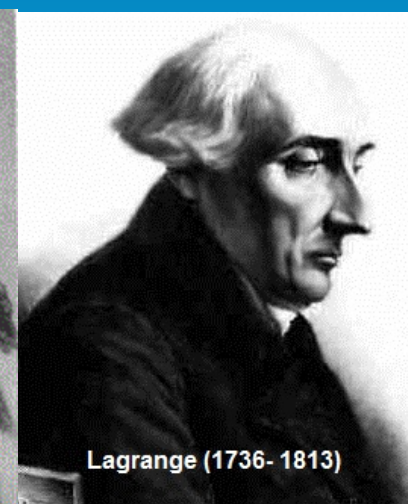
John Wallis (1616- 1703)



Leonhard Euler (1707- 1783)



Lambert (1728- 1777)



Lagrange (1736- 1813)

$$A = a_1 + \frac{b_1}{a_2 + \frac{b_2}{a_3 + \frac{b_3}{a_4 + \dots}}}$$

$$c_1 = \frac{a_1}{1}, c_2 = a_1 + \frac{b_1}{a_2} \quad c_3 = a_1 + \frac{b_1}{a_2 + \frac{b_2}{a_3}} = \frac{a_3 b_1 + a_1 a_2 a_3 + a_1 b_2}{a_2 a_3 + b_2}$$

به هر c_i ، i امین جمله همگرایی کسر مسلسل می گویند .

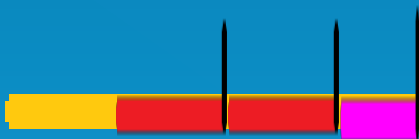
اثبات همگرایی توسط جان والیس در سال ۱۶۵۵ ارایه شد و در همان موقع نام کسر مسلسل بیان شد.



الگوریتم اقلیدس و کسر مسلسل

● اقلیدس (۳۰۶، ۲۸۳) قبل از میلاد

در مقاله ۱۰، قضیه ۳ شیوه ای هندسی برای پیدا کردن ب، م، م دو عدد
ارایه می دهد.



برای به دست آوردن ب.م.م دو عدد ۶۷ و ۲۹ به روش اقلیدس اینگونه عمل می‌کردیم :

$$67 = 2 \times 29 + 9 \quad \frac{67}{29} = \frac{2 \times 29 + 9}{29} = 2 + \frac{9}{29} = 2 + \frac{1}{\frac{29}{9}}$$

$$29 = 3 \times 9 + 2 \quad \frac{29}{9} = \frac{3 \times 9 + 2}{9} = 3 + \frac{2}{9} = 3 + \frac{1}{\frac{9}{2}}$$

$$9 = 4 \times 2 + 1 \quad \frac{9}{2} = \frac{4 \times 2 + 1}{2} = 4 + \frac{1}{2} = 4 + \frac{1}{\frac{2}{1}}$$

$$2 = 2 \times 1 + 0 \quad \frac{2}{1} = \frac{2 \times 1 + 0}{1} = 2$$

$$\frac{67}{29} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{2}}}$$

اقلیدس بدون اینکه بداند ، شیوه ای برای تبدیل اعداد گویا به کسر مسلسل ارایه داده بود.

● اوایلر در سال ۱۷۳۱ اثبات کرد:

- هر عدد گویا دارای کسر متناهی است.

- هر عدد گنگ دارای کسر مسلسل نا متناهی است.

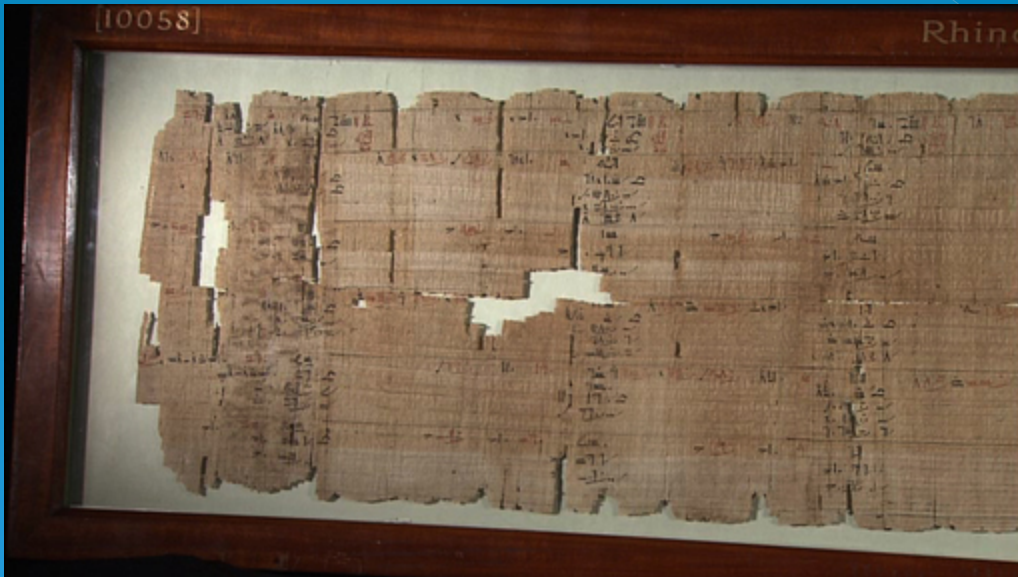


π و کسر مسلسل

● در مسایلی که در لوح های بابلی ها به جا مانده (۱۸۰۰، ۱۶۰۰ قبل از میلاد) π را عدد ۳ تقریب می زدند.



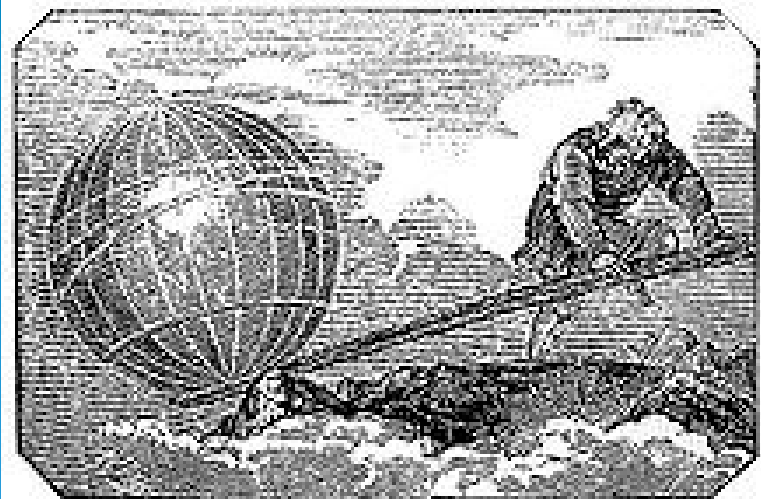
در پاپيروس راینند (۱۷۸۸، ۱۵۸۰ قبل از میلاد)، در ۴ مساله
 مساحت دایره ای با قطر ۹ و در یک مساله مساحت دایره ای با
 قطر ۱۰ حساب شده است ، با مقایسه آنها با $kA = kr^2$
 تقریبا $3/1605$ به دست می آید.





*"Give me a lever
long enough and a
fulcrum on which
to place it, and I
shall move the
world. "*

Archimedes



ارشمیدس (۲۸۷، ۲۱۲ قبل از میلاد)

- با کار با چند ضلعی های منتظم محیطی و محاطی
- و دو برابر کردن پیوسته تعداد
- ضلع ها، به ۹۶ ضلعی رسید.

$$3 + \frac{1}{7} > \pi > 3 + \frac{1}{7} + \frac{1}{10}$$





ببین شاید بشه چیزای دیگه
هم امتحان کرد!

و تنها خط کش و پرگار
برای رسم نازل شد

④ فرانسوا ویت فرانسوی در ۱۵۷۹ از $6(2^{16}) = 393216$ ضلعی استفاده کرد! و را تا π رقم اعشار تقریب زد.

⑤ لودولف آلمانی در ۱۶۱۰ به کمک 2^{62} ضلعی π را تا ۳۵ رقم اعشار تقریب زد.

ستاره شناس نامی ،تسو چونگ چای (۴۳۰، ۵۰۱ میلادی) از

$\frac{355}{113}$ که به ترتیب دومین و چهارمین جمله کسر مسلسل

π هستند ، استفاده می کرد.



برهماگوپتا (۵۹۸، ۶۶۵ میلادی) $\sqrt{10}$ به عنوان π کار می برد.

در ۱۶۵۸ ویلیام برونکر کسر مسلسل را به دست آورد.



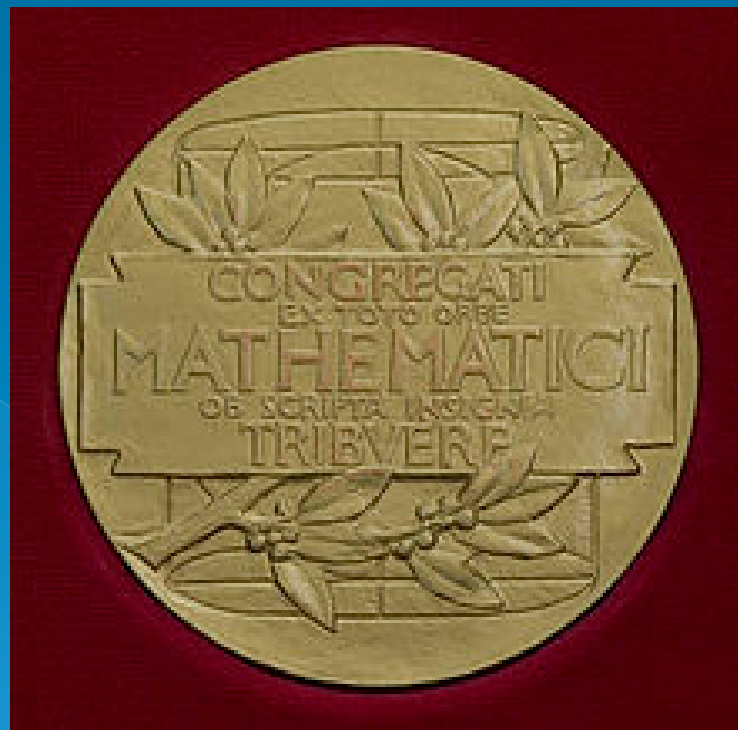
$$\pi = \frac{4}{1 + \frac{1^2}{2 + \frac{3^2}{2 + \frac{5^2}{2 + \frac{7^2}{2 + \dots}}}}}$$

● هایگن (۱۶۲۹، ۱۶۹۵) در سال ۱۶۸۲ به کمک رابطه زیر، کسر
مسلل π را به دست آورد.

$$T'_n = n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) < \pi < T_n = n \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

$$\pi = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1 + \frac{1}{292 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \dots}}}}}}}}$$





هر فهرستی که شامل سه تن از بزرگترین ریاضی دانان تاریخ بشر باشد به طور قطع نام ارشمیدس را شامل می شود.

کسر مسلسل ریشه های دوم

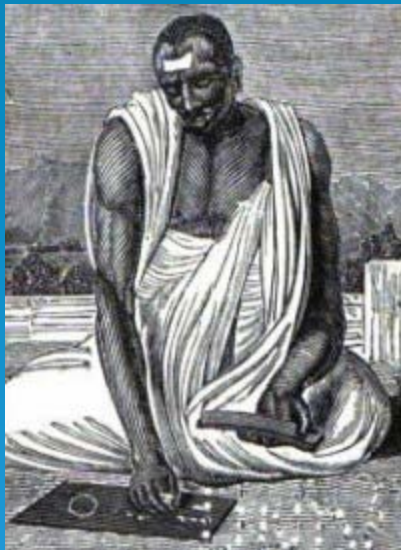
● اولین قاعده برای تقریب ریشه های دوم ، در لوحی مربوط به بابلی ها (۲۱۲۳، ۲۰۸۱ قبل از میلاد) پیدا شده است. این لوح مربوط به پادشاه حمورابی است و در موزه برلین نگهداری می شود و به صورت زیر می باشد.

$$\sqrt{A} = \sqrt{a^2 + r} = a + \frac{r}{2a}$$

● a بزرگترین عدد صحیح است که $a^2 \leq A$

● برهماگوپتا (۵۹۸،۶۶۵ میلادی) $\sqrt{10}$ را به عنوان π کار می برد.

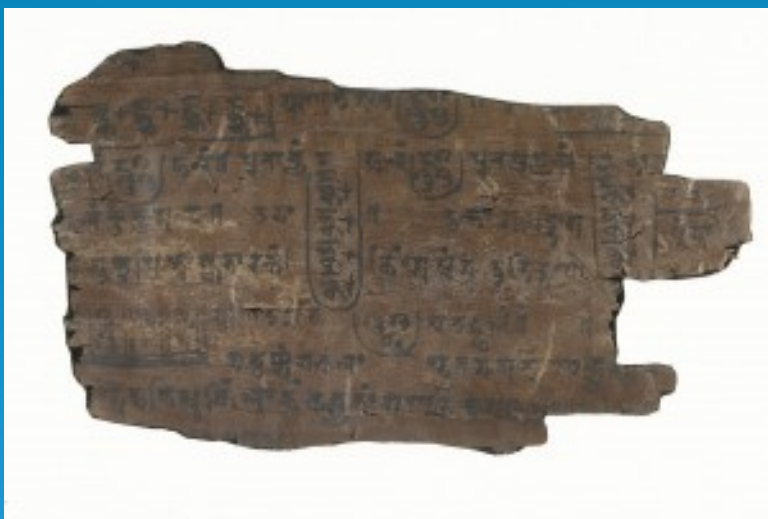
● به نظر می رسد از فرمول زیر استفاده کرده است.



$$\sqrt{A} = \sqrt{a^2 + r} = a + \frac{r}{2a + 1}$$

$$a = 3, r = 1 \quad \sqrt{9 + 1} = 3 + \frac{1}{7} = \frac{22}{7}$$

● نوشته بخشعلی (Bakhshali manuscript) یک نوشته هندی در حدود ۲۰۰ تا ۴۰۰ میلادی است. توسط یک کشاورز در سال ۱۸۸۱ در روستای بخشعلی نزدیک پشاور پیدا شده و حاوی تقریب های زیر بوده است.



$$\sqrt{A} = \sqrt{a^2 + r} = a + \frac{r}{2a}$$

$$\sqrt{A} = \sqrt{a^2 + r} = a + \frac{r}{2a + \frac{r}{2a + \frac{r}{2a}}}$$

④ کوشیار ابن لبان (کوشیار گیلانی) (۱۰۲۹، ۹۷۱ میلادی در گیلان)

$$A = a^2 + r, a_1 = a + \frac{r}{2a}, \frac{A}{a_1} = a + \frac{r}{2a + \frac{r}{a}}$$

⑤ در کتاب تلخیص (talkhis) که خلاصه ای از کارهای از دست رفته الحصار (۱۲۶۲)، ابن البنا (۱۲۵۶، ۱۳۲۱) بیان میکند:



$$\sqrt{A} = \sqrt{a^2 + r} = a + \frac{r}{2a + \frac{r}{2a + \frac{r}{2a}}}$$

④ دانشمند اسپانیایی-عربی، ال کلسادی (al-kalsadi) فوت
۱۴۸۶ میلادی) در کتاب

④ (raising of the veil of the science of Gubar)
تقریب زیر را بیان کرد.

$$\sqrt{A} = \sqrt{a^2 + r} = a + \frac{r}{2a + \frac{r}{2a}}$$

④ عرب ها ریاضی را (که در اصل ریشه یونانی دارد)، به واسطه ایرانی
ها، از معلمان هندی خود آموختند.

How Greeek science passed to the arabs.

DE LACY O'LEARY

⊙ رافایل بامبلی (۱۵۲۶، ۱۵۷۲) مهندس و معمار ، علاقه به کار با کسر مسلسل $\sqrt{13}$ بعد از حدود ۱۳۰۰ سال ، اولین کسی بوده که به کسر مسلسل علاقه نشان داده و آن را در جهت ساختار بخشیدن مطالعه کرده است.

⊙ او نشان داد: $\sqrt{A} = \sqrt{a^2 + r} = a + x$, $a^2 + r = a^2 + 2ax + x^2$

با صرف نظر از x^2 داریم: $r = 2ax$, $x = \frac{r}{2a}$

با ادامه این روند:

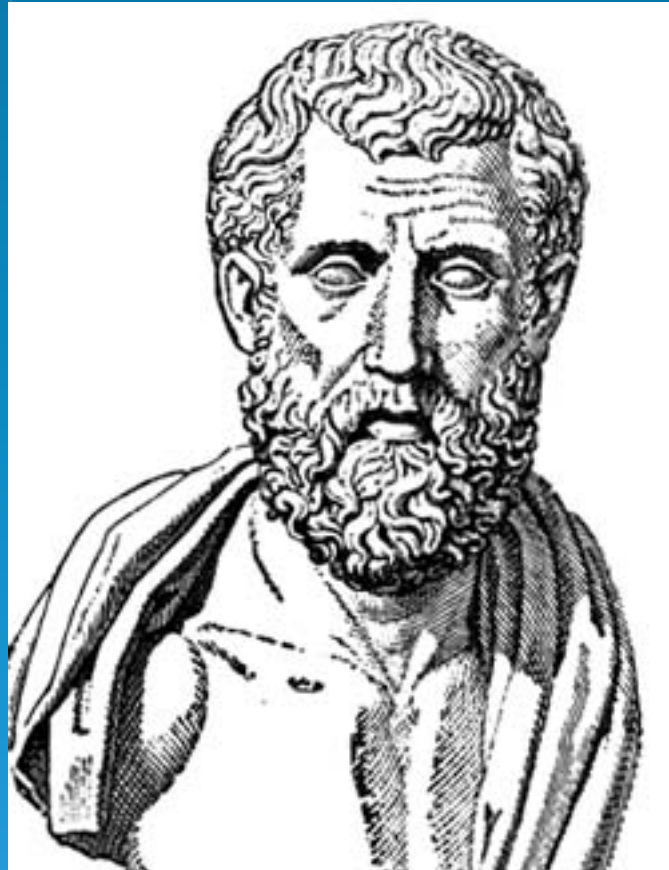
$$\sqrt{A} = \sqrt{a^2 + r} = a + \frac{r}{2a + \frac{r}{2a + \frac{r}{2a + \dots}}}$$

$$\sqrt{13} = \sqrt{3^2 + 4} = 3 + \frac{4}{6 + \frac{4}{6 + \dots}}$$

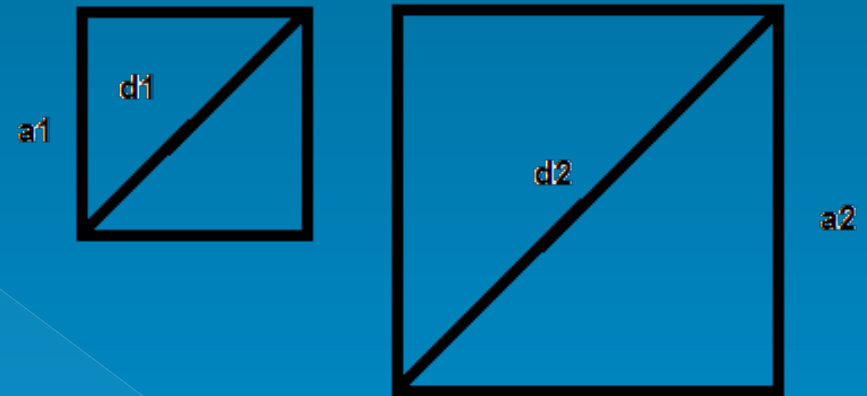


معادله پل و تقریب ریشه دوم

تئون از سمیرنا (۱۸۰، ۱۳۰) ●



مربع زیر را در نظر می گیریم



$$a_2 = a_1 + d_1$$

$$d_2 = \sqrt{2}(a_1 + d_1)$$

$$= \sqrt{2}a_1 + \sqrt{2}d_1 \xrightarrow{\sqrt{2}a_1 = d_1} d_2 = 2a_1 + d_1$$

$$a_n = a_{n-1} + d_{n-1} \quad (1)$$

$$d_n = 2a_{n-1} + d_{n-1} \quad (2)$$

اگر ادامه دهیم:

ادامه می دهد:

معادله اول را در ۲ ضرب می کند و معادله دوم را از آن کم می کند و حاصل را در معادله دوم جایگذاری می کند .

$$d_{n+1} = 2d_n + d_{n-1} \quad \text{به دست می آید:}$$

سپس معادله اول و دوم را از هم کم می کند و حاصل را در اولی جایگذاری می کند.

$$a_{n+1} = 2a_n - a_{n-1} \quad \text{نهایتا}$$

سپس $a_1 = 1, d_1 = 1, n = 1$ پس $d_2 = 2 + 1 = 3, a_2 = 1 + 1 = 2$ داریم:

$$d_n: 1, 3, 7, 17, \dots$$

$$a_n: 1, 2, 5, 12, \dots$$

$$\frac{d_n}{a_n} = \frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \dots \xrightarrow{\text{همگرا}} \sqrt{2}$$

تئون در ادامه بیان می کند:

$$d_n = 2a_{n-1} + d_{n-1}, d_n^2 = 4a_{n-1}^2 + 4a_{n-1}d_{n-1} + d_{n-1}^2$$

$$a_n = a_{n-1} + d_{n-1}, 2a_n^2 = 2a_{n-1}^2 + 4a_{n-1}d_{n-1} + 2d_{n-1}^2$$

$$d_n^2 - 2a_n^2 = -(d_{n-1}^2 - 2a_{n-1}^2)$$

$$d_0 = 1, a_0 = 0, d_0^2 - 2a_0^2 = 1$$

$$d_n^2 - 2a_n^2 = (-1)^n$$

Constantine NEWS: به طور اشتباه در نامه ای که اوایلر در
۱۰ آگوست ۱۷۳۲ به گلدباخ می نویسد، معادله ای به فرم
را به پل $(11 \pm 6 \sqrt{5} - 1)N$ نسبت می دهد.



صفحه دانشمندان

گزیده خبرها:

انیشترین راز های بهشت و جهنم را کشف کرد!

در گیری های نیوتن و لایبنیتز همچنان ادامه دارد.

اوایلر به طور اشتباه معادله ای را به پل نسبت داد.

دو عنصر جدید مندلیف!

● در سال ۱۷۶۵، اوایلر (۱۷۰۷، ۱۷۸۳) به مطالعه معادله پل پرداخت.
او را به کسر مسلسل تبدیل کرد، شیوه ای که امروزه مرسوم است.

$$\sqrt{30} \rightarrow \sqrt{25} < \sqrt{30} < \sqrt{36}$$

$$\sqrt{30} = 5 + \frac{1}{x_1}, \sqrt{30} - 5 = \frac{1}{x_1},$$

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{30} - 5} \cdot \frac{\sqrt{30} + 5}{\sqrt{30} + 5} = \frac{\sqrt{30} + 5}{5}$$
$$\approx 2.095, x_1 = 2 + \frac{1}{x_2}$$

$$\frac{\sqrt{30} + 5}{5} = 2 + \frac{1}{x_2}, \frac{\sqrt{30} + 5}{5} - 2 =$$

$$\frac{1}{x_2} = \frac{\sqrt{30} - 5}{5}$$

$$x_2 = \frac{5}{\sqrt{30} - 5} = \sqrt{30} + 5 = 10.477,$$

$$x_2 = 10 + \frac{1}{x_3}$$

$$\sqrt{30} = 5 + \frac{1}{2 + \frac{1}{10 + \frac{1}{2 + \frac{1}{10 + \frac{1}{2 + \frac{1}{10 + \dots}}}}}}$$

❶ اوایلر متوجه شد:هر کسر مسلسل ریشه دوم ،حالت دوری و قرینه دارد.

$$\sqrt{29} = 5 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{10 + \dots}}}}}}$$

❷ او فهمید آخرین عدد از هر دور ، دو برابر اولین عددی است که در کسر استفاده می شود.

FROM THE DIRECTOR OF "BATMAN BEGINS" AND "THE TENENT".

HUGH JACKMAN
CHRISTIAN BALE
SCARLETT JOHANSSON
MICHAEL CAINE

ARE YOU WATCHING CLOSELY?

THE PRESTIGE

WARNER BROS. PRESENTS THE NEW WARNER BROS. PICTURES FILM "THE PRESTIGE" A FILM BY CHRISTOPHER NOLAN CASTING BY JEFFREY PETERSON COSTUME DESIGNER JEFFREY PETERSON MUSIC BY DAVID JULYAN EDITOR WALTER MURPHY EXECUTIVE PRODUCERS JEFFREY PETERSON PRODUCED BY JEFFREY PETERSON AND JEFFREY PETERSON WRITTEN BY JEFFREY PETERSON AND JEFFREY PETERSON DIRECTED BY CHRISTOPHER NOLAN

OCTOBER 20

● مرحله اول شعبده بازی: اوپلر معادله را به تماشاچیان نشان می دهد.

$$x^2 - 30y^2 = 1$$

● مرحله دوم شعبده بازی: او به کمک ابزاری که فقط خودش از آن سر در می آورد، کار غیر معمولی انجام می دهد.

● یک دور از کسر مسلسل را در نظر می گیرد

● کسر را تا قبل از آخرین جمله ی دور حساب می کند.

$$\sqrt{30} = 5 + \frac{1}{2 + \frac{1}{10}}$$

$$5 + \frac{1}{2} = \frac{11}{2}$$

مرحله سوم شعبده بازی: (The Prestige)

$$x = 11, y = 2$$

$$11^2 - 30(2)^2 = 1$$

● اوایلر اثبات کرد :

● هر كسر مسلسل دورى ، نشان دهنده ریشه يك معادله درجه دو است.

● لاگرانژ (۱۷۳۶، ۱۸۱۳) : در سال ۱۷۶۹ عكس قضیه اویلر را اثبات کرد. یعنی هر ریشه معادله درجه دو ، دارای كسر مسلسل دورى است. پس به طور كلى :

$$\sqrt{N} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_n + \frac{1}{a_n + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{2a_1}}}}}}}$$

کسره‌های مسلسل دیدنی:

۱. اویلر (۱۷۶۸) ●

$$e = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{6 + \dots}}}}}}}}$$

$$\tan x = \frac{x}{1 - \frac{x^2}{3 - \frac{x^2}{5 - \frac{x^2}{7 - \dots}}}}$$

۲. لمبرت (۱۷۷۰) ●

$$\tanh x = \frac{x}{1 + \frac{x^2}{3 + \frac{x^2}{5 + \frac{x^2}{7 + \dots}}}}$$

۳. گاوس (۱۸۱۲) ●

۴. لمبرت (۱۷۷۰)، لاگرانژ (۱۷۷۶)

$$\log(1+x) = \frac{x}{1 + \frac{1^2 x}{2 + \frac{1^2 x}{3 + \frac{2^2 x}{4 + \frac{2^2 x}{5 + \dots}}}}} \quad |x| < 1$$

۵. ...

$$\frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}$$

۶. لاپلاس (۱۸۰۵)، لژاندر (۱۸۲۶)

$$\int_0^x e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \frac{\frac{1}{2} e^{-x^2}}{x + \frac{1}{2x + \frac{2}{3x + \dots}}} \quad x > 0$$

۷. رامانوجان (۱۸۸۷، ۱۹۲۰) ◎

$$\left(\frac{\sqrt{5}}{1 + \left(5^{3/4} \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2} \right)^{5/2} - 1 \right)^{1/5}} - \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \right) e^{2\pi/\sqrt{5}} = \frac{1}{1 + \frac{e^{-2\pi\sqrt{5}}}{1 + \frac{e^{-4\pi\sqrt{5}}}{1 + \frac{e^{-6\pi\sqrt{5}}}{1 + \dots}}}}$$

Srinivasa Ramanujan Godfray Harold Hardy

