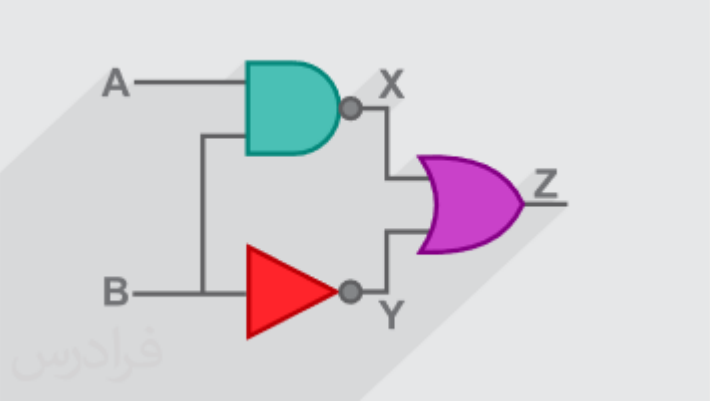


فصل اول

مبناهای عددی

سرفصل مطالب

- مبناهای عددی
- تبدیل مبنا
- نمایش های مختلف اعداد منفی
- اعمال حسابی در مبناهای مختلف
- کدهای دودویی

مبنای ۱۰

- در مبنای ۱۰، ارقام مجاز برای ساختن اعداد، ارقام از صفر تا ۹ هستند.

- در مبنای r ارقام مجاز برای ساختن اعداد، ارقام از صفر تا r-1 هستند و همه اعداد باید با استفاده از همین ارقام ساخته شوند

برخی مبناهای متداول:

مبنای ۲ : ارقام از صفر تا ۱ وجود دارد

مبنای ۴ : ارقام از صفر تا ۳ وجود دارد

مبنای ۸ : ارقام از صفر تا ۷ وجود دارد

مبنای ۱۶:

ارقام: 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 A B C D E F

10 11 12 13 14 15

سایر مبناهای عددی

برخی از مبناها نام های دیگری نیز دارند که باید آنها را به خاطر بسپاریم.

- نام دیگر مبنای ۲، Binary و دودویی است.
- نام دیگر مبنای ۸، octal یا به اختصار oct است.
- نام دیگر مبنای ۱۶، Hexadecimal یا به اختصار Hex است.
- نام دیگر مبنای ۱۰، Decimal یا دهدهی یا به اختصار Dec است.

تغییر مبنای اعداد

- چگونگی پیدا کردن نمایش یک عدد در مبنای ۱۰: اعداد باید به صورت مجموعی ازمضارب 10^r نوشته شوند

$$491 = 4\times10^2 + 9\times10^1 + 1\times10^0$$

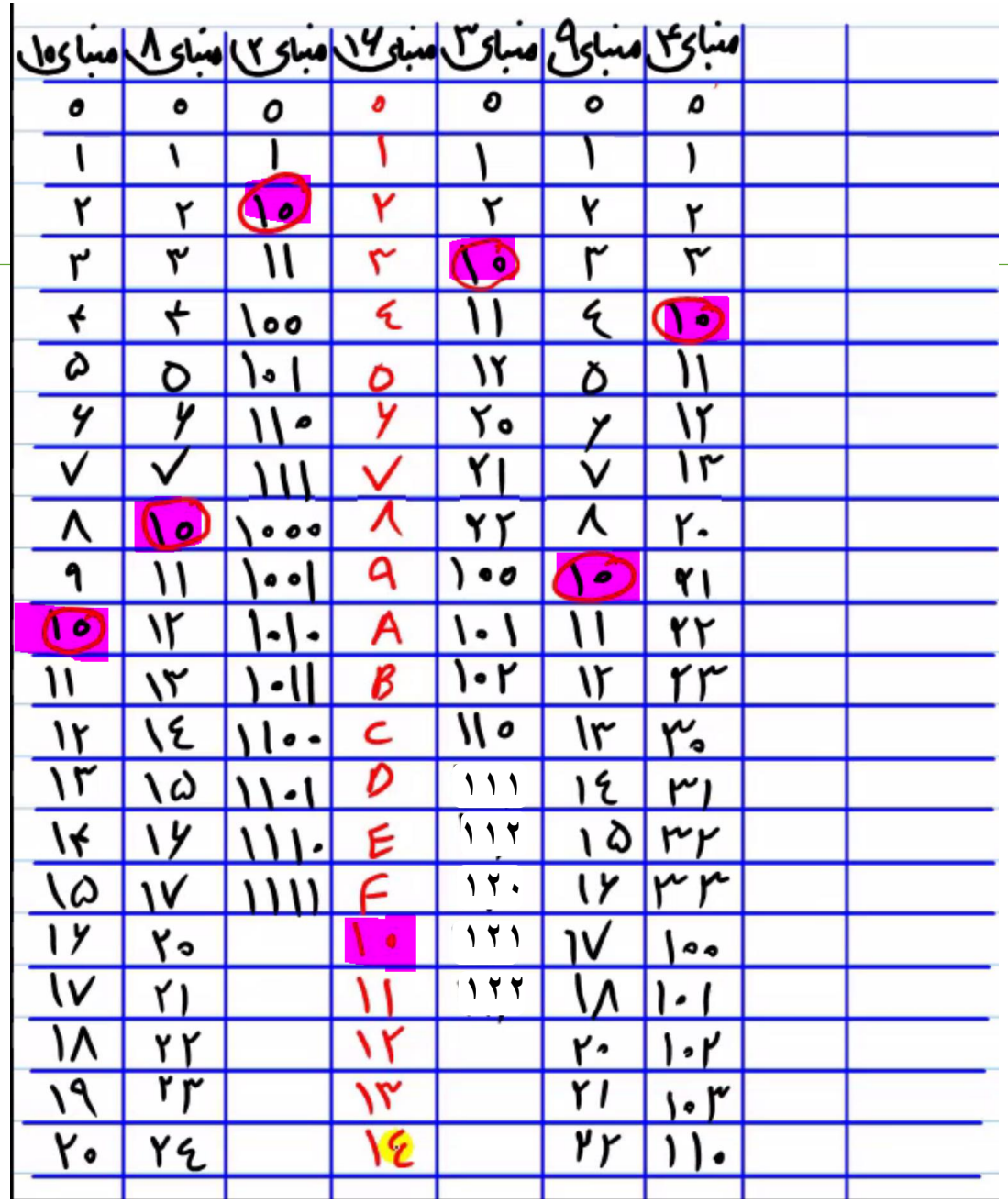
$$0.32 = 3\times10^{-1} + 2\times10^{-2}$$

$$491.32 = 4\times10^2 + 9\times10^1 + 1\times10^0 + 3\times10^{-1} + 2\times10^{-2}$$

- چگونگی پیدا کردن نمایش یک عدد در مبنای ۲: اعداد باید به صورت مجموعی ازمضارب 2^r نوشته شوند.

$$15 = 8 + 4 + 2 + 1 = 1 * 2^3 + 1 * 2^2 + 1 * 2^1 + 1 * 2^0 = (1111)_2$$

تغییر مبناهای عددی



مبنای ۱۰	مبنای ۸	مبنای ۲	مبنای ۱۶	مبنای ۳	مبنای ۹	مبنای ۴
۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱
۲	۲	۱۰	۲	۲	۲	۲
۳	۳	۱۱	۳	۱۰	۳	۳
۴	۴	۱۰۰	۴	۱۱	۴	۱۰
۵	۵	۱۰۱	۵	۱۲	۵	۱۱
۶	۶	۱۱۰	۶	۲۰	۶	۱۲
۷	۷	۱۱۱	۷	۲۱	۷	۱۳
۸	۱۰	۱۰۰۰	۸	۲۲	۸	۲۰
۹	۱۱	۱۰۰۱	۹	۱۰۰	۱۰	۲۱
۱۰	۱۲	۱۰۱۰	A	۱۰۱	۱۱	۲۲
۱۱	۱۳	۱۰۱۱	B	۱۰۲	۱۲	۲۳
۱۲	۱۴	۱۱۰۰	C	۱۱۰	۱۳	۳۰
۱۳	۱۵	۱۱۰۱	D	۱۱۱	۱۴	۳۱
۱۴	۱۶	۱۱۱۰	E	۱۱۲	۱۵	۳۲
۱۵	۱۷	۱۱۱۱	F	۱۲۰	۱۶	۳۳
۱۶	۲۰		۱۰	۱۲۱	۱۷	۱۰۰
۱۷	۲۱		۱۱	۱۲۲	۱۸	۱۰۱
۱۸	۲۲		۱۲		۲۰	۱۰۲
۱۹	۲۳		۱۳		۲۱	۱۰۳
۲۰	۲۴		۱۴		۲۲	۱۱۰

تغییر مبنای اعداد

- توجه: با تغییر مبنای عدد، ماهیت آن عوض نمی شود بلکه فقط شکل نشان دادن آن تغییر می کند.

$$a = (a_n \dots a_2 a_1 a_0 . a_{-1} a_{-2} \dots a_{-m})_r$$

- مبنای ۲ (binary)
- مبنای ۱۰ (decimal)
- مبنای ۸ (octal)
- مبنای ۱۶ (hexadecimal) : شامل ارقام ۰ تا ۹ و a، b، c، d، e، f

تبدیل از مبنای ۲ به مبنای ۱۰

تبدیل از مبناهای غیر ۱۰ به مبنای ۱۰: برای تبدیل یک عدد از مبنای فشرده به مبنای ۱۰ ، ابتدا آن عدد را ارزش گذاری کرده و سپس از خاصیت ضرب استفاده می‌کنیم.

$$a = (a_n \dots a_2 a_1 a_0 . a_{-1} a_{-2} \dots a_{-m})_r = \sum_{i=-m}^{n} a_i (r)^i$$

$$a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \dots + a_1 r^1 + a_0 r^0 + a_{-1} r^{-1} + a_{-2} r^{-2} + \dots + a_{-m} r^{-m}$$

$$(110.01)_2 = (1\times2^2 + 1\times2^1 + 0\times2^0 + 0\times2^{-1} + 1\times2^{-2})_{10} = (6.25)_{10}$$

مثال هایی از تبدیل مبنای ۲ به ۱۰

$$(4021.2)_5 = 4 \times 5^3 + 0 \times 5^2 + 2 \times 5^1 + 1 \times 5^0 + 2 \times 5^{-1} = (511.4)_{10}$$

$$(127.4)_8 = 1 \times 8^2 + 2 \times 8^1 + 7 \times 8^0 + 4 \times 8^{-1} = (87.5)_{10}$$

$$(B65F)_{16} = 11 \times 16^3 + 6 \times 16^2 + 5 \times 16^1 + 15 \times 16^0 = (46{,}687)_{10}$$

$$(110101)_2 = 32 + 16 + 4 + 1 = (53)_{10}$$

تمرین

در تساوی زیر مقدار A برابر کدام است؟

$(۱۱۰۱۱/۰۱۰۱)_۲ = (A)_{۱۰}$

$A = ۲۷/۳۱$

(دکترا ـ ۹۳)

تعریف کیلو / مگا / گیگا / ترا بیت:

در کارهای کامپیوتری 2^{10} را K (کیلو)، 2^{20} را M (مگا)، 2^{30} را G (گیگا) و 2^{40} را T (ترا) می‌گویند. بنابراین $4K = 2^{12} = 4096$ و $16M = 2^{24} = 16777216$ می‌باشد. معمولاً ظرفیت کامپیوتر به بایت داده می‌شود. یک بایت برابر با هشت بیت بوده و می‌تواند یک کاراکتر از صفحه کلید را در خود جای دهد. یک دیسک سخت (هارد) کامپیوتر با ظرفیت 4 گیگا دارای ظرفیت $4G = 2^{32}$ بایت می‌باشد.

تبدیل از مبنای ۱۰ به r (روش تقسیمات متوالی)

- قسمت صحیح عدد را متوالیا به r تقسیم و قسمت اعشاری عدد را متوالیا در r ضرب می کنیم.
- مزیت روش تقسیمات متوالی بر مبنا، سادگی پیاده سازی کامپیوتری آن است.
- تقسیم های متوالی را تا جایی ادامه می دهیم که حاصل تقسیم صفر شود
- باقیمانده ها را از پایین به بالا می نویسیم

$$(301.2)_{10} = (455.1463....)_8$$

قسمت صحیح

301	8			
296	37	8		
5	32	4	8	
	5	0	0	
		4		

قسمت اعشاری

$0.2 \times 8 = 1.6$

$0.6 \times 8 = 4.8$

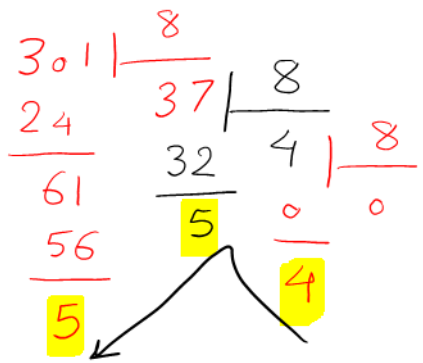
$0.8 \times 8 = 6.4$

$0.4 \times 8 = 3.2$

تکراری $0.2 \times 8 =$

- ضرب های متوالی را ادامه می دهیم. هرگاه حاصل ضرب بزرگتر از یک شد قسمت صحیح آن را استخراج می کنیم و قیمت اعشاری آن را مجددا ضرب می کنیم

$(301.2)_{10} = (455.1463....)_8$



$0.2 \times 8 = 1.6 = 1 + 0.6$

$0.6 \times 8 = 4.8 = 4 + 0.8$

$0.8 \times 8 = 6.4 = 6 + 0.4$

$0.4 \times 8 = 3.2 = 3 + 0.2$

$0.2 \times 8 = 1.6 = 1 + 0.6$

.

.

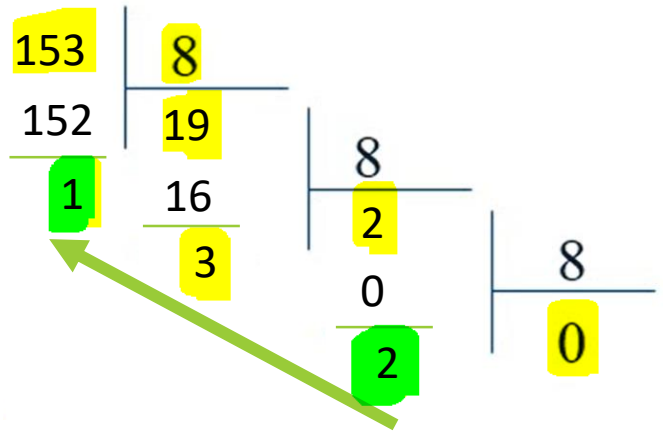
.

.

مثال

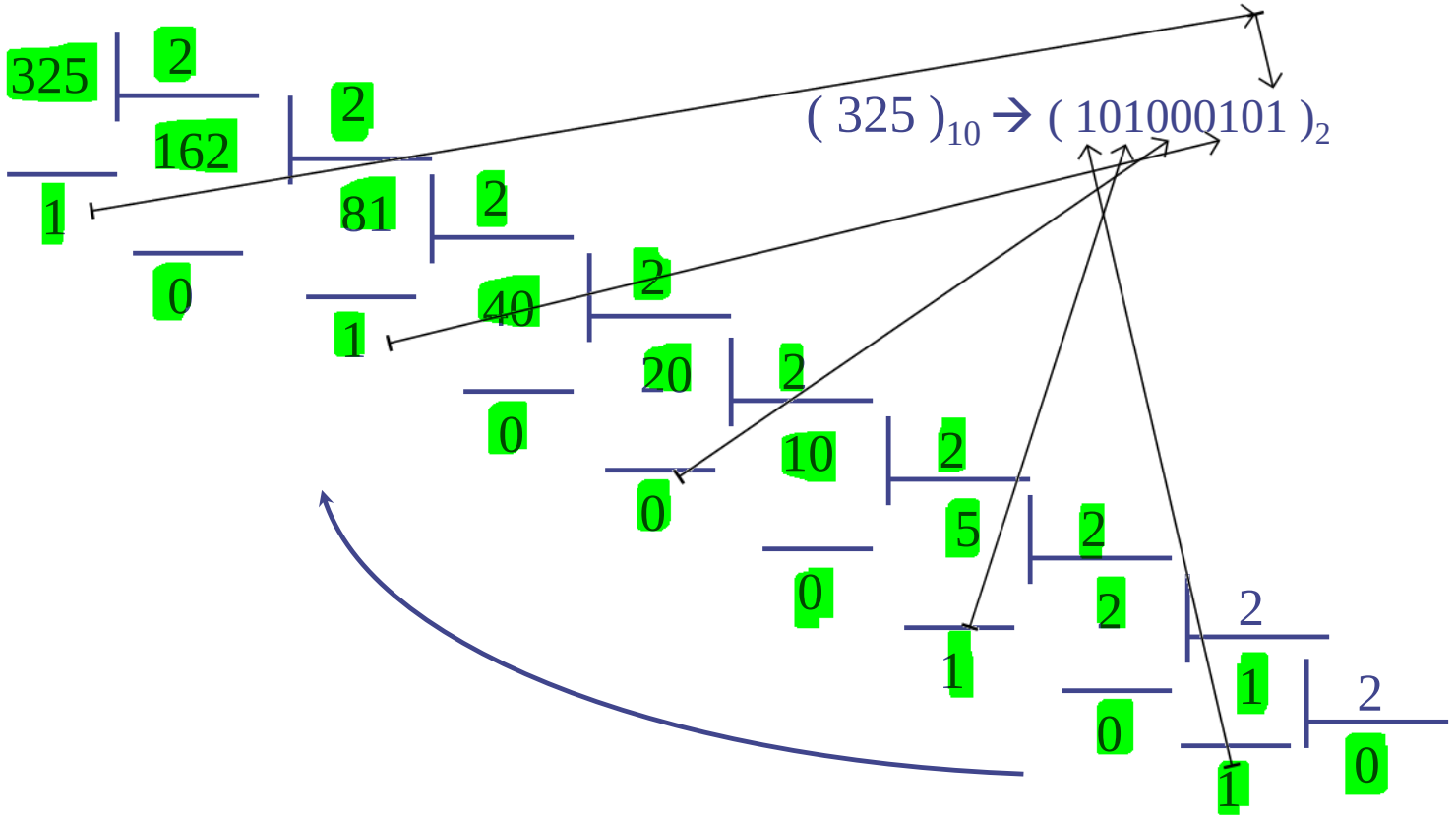
عدد 153 را به مـبنای 8 بـبرید

153 | 8
8 | 19
73
72
1



جواب: $(231)_8$

مثال



مثال

عدد $(0.6875)_{10}$ را به مبنای 2 تبدیل کنید.

$(0.6875)_{10} = (0.1011)_2$

		صحیح		کسری	ضریب
$0.6875 \times 2 =$		1	+	0.3750	$a_{-1} = 1$
$0.3750 \times 2 =$		0	+	0.7500	$a_{-2} = 0$
$0.7500 \times 2 =$		1	+	0.5000	$a_{-3} = 1$
$0.5000 \times 2 =$		1	+	0.0000	$a_{-4} = 1$

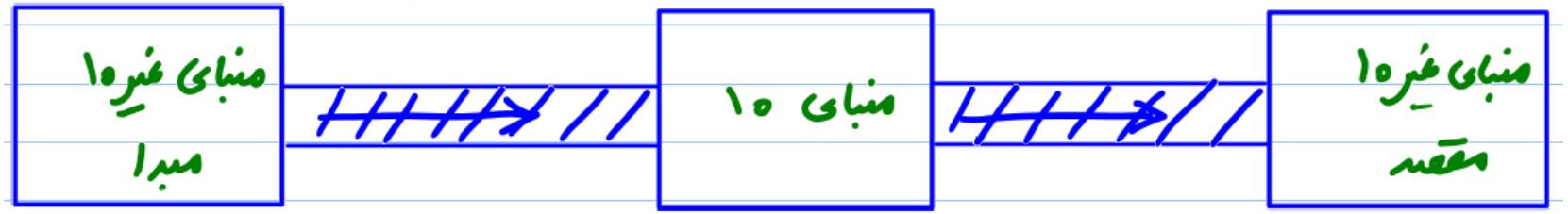
تمرین:

$(0.513)_{10}$ را به مبنای 8 ببرید.

$(۱۰۹/۱۴)_{۱۰} = (\quad)_{۱۳}$

تبدیل از یک مبنای غیر ۱۰ به یک مبنای غیر ۱۰ دیگر

تبدیل از مبنای غیر ۱۰ به مبنای غیر ۱۰ دیگر: مبنای ۱۰ مانند یک پل ارتباطی است به این صورت که برای تبدیل یک عدد در مبنای غیر ۱۰ دیگر، باید از روی این پل عبور کنیم (البته موارد خاصی نیز وجود دارد که می‌توان مستقیما تبدیل را انجام داد) یعنی نخست باید از مبنای غیر ۱۰ مبدا به مبنای ۱۰ و سپس به مبنای غیر ۱۰ مقصد برویم.



تبدیل از یک مبنای غیر ۱۰ به یک مبنای غیر ۱۰ دیگر

مثال:

$(۲۳۱/۳)_۴ = (\quad)_۷$

۱- ابتدا تبدیل به مبنای ۱۰

$(۲۳۱/۳)_۴ = (۴۵/۷۵)_{۱۰}$

۲- تبدیل از مبنای ۱۰ به مبنای ۷ با تقسیم و ضرب متوالی

$(۴۵/۷۵)_{۱۰} = (۶۳/۵۱۵)_۷$

۴۵ | ۷
۴۲ | ۶
۳

۰/۷۵ × ۷ = ۵/۲۵
۰/۲۵ × ۷ = ۱/۷۵

تکرار

$(۲۳۱,۳)_۴ = (\quad)_۷$

$(۲۳۱,۳)_۴ = (۲\times۴^{۲} + ۳\times۴^{۱} + ۱\times۴^{۰} + ۳\times۴^{-۱}) = (۳۲ + ۱۲ + ۱ + \frac{۳}{۴}) = (۴۵,۷۵)_{۱۰}$

$(۴۵,۷۵)_{۱۰} = (\quad ۶۳,۵۴۶۱۵۶\ldots)_۷$

$۴۵ \mid \frac{۷}{۶}$ $\quad$ $۴۲ \mid \frac{۷}{۰}$ $\quad$ $۳ \mid ۰$

$۰,۷۵ \times ۷ = ۵,۲۵ = ۵ + ۰,۲۵$

$۰,۲۵ \times ۷ = ۱,۷۵ = ۱ + ۰,۷۵$

$۰,۷۵ \times ۷ =$ تکرار

تمرین

$(۵۱۲/۴۱)_{۸} = (\qquad\qquad)_{۶}$

تبدیل عدد از مبنای ۱۰ به مبنای r (روش افزودن وزن ها)

- بیشتر برای تبدیل اعداد دهدهی به اعداد دودویی کاربرد دارد.
- توان های صعودی ۲ را تا مقدار بزرگتر از عدد می نویسیم. با قرار دادن ۱ در زیر بزرگترین وزنی که مساوی یا کوچکتر از عدد دهدهی است شروع می کنیم. سپس آن وزن را از عدد کم می کنیم، این روال به همین ترتیب برای دیگر وزن ها تکرار می شود.

$(43)_{10} = (?)_2$

$43 - 32 = 11$

$11 - 8 = 3$

$3 - 2 = 1$

64	32	16	8	4	2	1
	1	0	1	0	1	1

تغییر مبنای مستقیم

هر عدد در سیستم دودویی : ۱ بیت

هر ۸ بیت: یک بایت

نکته بسیار مهم در مورد مبنای دودویی یا Binary: از n تعداد بیت های ما باشد، با n بیت می‌توان 2^n

عدد یا حالت را به وجود آورد

- با یک بیت می‌توان $2 = 2^1$ عدد یا حالت را به وجود آورد ۰ و ۱
- با دو بیت می‌توان $4 = 2^2$ عدد یا حالت را به وجود آورد ۰۰ و ۰۱ و ۱۰ و ۱۱
  ۰ و ۱ و ۲ و ۳
- با سه بیت می‌توان $8 = 2^3$ عدد یا حالت را به وجود آورد

۰۰۰ و ۰۰۱ و ۰۱۰ و - - - - و ۱۱۰ و ۱۱۱
۰ و ۱ و ۲ و - - - و ۶ و ۷

تغییر مبنای مستقیم از مبنای ۲ به ۸ و ۱۶

تبدیل از دودویی به هشتایی به سادگی با تفکیک عدد دودویی به گروه‌های سه رقمی در دو طرف نقطه دودویی بدست می‌آید. سپس به هر گروه یک رقم مبنای هشت تعلق می‌گیرد. مثال زیر روال مربوطه را نشان می‌دهد:

$$(010\ 110\ 001\ 101\ 011\ .\ 111\ 100\ 000\ 110)_2 = (26153.7406)_8$$

2 6 1 5 3 7 4 0 6

تبدیل از مبنای دو به مبنای شانزده نیز مشابه با روند فوق است، با این تفاوت که عدد دودویی به گروه‌های چهار رقمی تفکیک می‌شوند:

$$(0010\ 1100\ 0110\ 1011\ .\ 1111\ 0010)_2 = (2C6B.F2)_{16}$$

2 C 6 B F 2

تغییر مبنای مستقیم از مبنای ۸ و ۱۶ به ۲

۱۱۰

تبدیل از مبنای هشت یا شانزده به دودویی با روشی عکس روش بالا انجام می‌گردد.

$(673.124)_8 = (110\ \ 111\ \ 011\ \cdot\ 001\ \ 010\ \ 100)_2$

$6\quad 7\quad 3\quad\quad 1\quad 2\quad 4$

معادل

$(4)_8 \rightarrow 100$

$(4)_{16} \rightarrow 0100$

$(306.D)_{16} = (0011\ \ 0000\ \ 0110\ \cdot\ 1101)_2$

$(۴۵۷/۶۳)_۸ = (۱۰۰\ \ ۱۰۱\ \ ۱۱۱/۱۱۰\ \ ۰۱۱)_۲$

$۴\quad ۵\quad ۷\quad\quad ۶\quad ۳$

$(F4E/8C)_{۱۶} = (۱۱۱۱\ \ ۰۱۰۰\ \ ۱۱۱۰/۱۰۰۰\ \ ۱۱۰۰)_۲$

$F\quad ۴\quad E\quad\quad ۸\quad C$

تبدیل عدد از مبنای r^n به r و برعکس

- **تبدیل از مبنای r^n به r**

به ازای هر رقم، n رقم در مبنای r قرار می دهیم.

$(257)_8 = (\ 010\ 101\ 111\ )_2$

- **تبدیل از مبنای r به r^n**

قسمت صحیح را از سمت راست و قسمت اعشاری را از سمت چپ به صورت دسته های n رقمی جدا می کنیم، و معادل هر دسته را در مبنای می نویسیم.

$(10101111)_2 = (2\ 5\ 7)_8$

$(0.101111)_2 = (\ 0.5\ 7)_8$

تست

مقدار اعداد نمایش داده شده در کدام مبنا با سایر موارد زیر متفاوت است؟

(ارشد کامپیوتر - دولتی ۹۴)

$(11001.0001)_2 = (31.04)_8$

$(11001.0001)_2 = (19.1)_{16}$

۱) $(19,1)_{16}$

۲) $(25,0625)_{10}$

۳) ✓ $(31,01)_8$

۴) $(11001,0001)_2$

تست

در معادله‌ی $(211)_a = (152)_a$ مقدار a کدام است؟

$a^2 + 5a + 2 = 106$

$a^2 + 5a - 104 = 0$

$a = 8$ ✓

$a = -13$

۱) ۸ ✓

۲) ۷

۳) ۵

۴) ۹

(کاردانی به کارشناسی ـ دولتی ۸۹)

$(152)_a = (\quad)_{10}$

$(211)_a = (106)_{10}$

$2\times 49 + 7 + 1$

98

106