

خودآزمایی C.A.S-های آنلاین

مدت آزمون: ∞ دقیقه

سطح آزمون: استاده از سلازهای جبر کاپیوتری

مدرس: شیخ امامی پور

emamipour@bam.ac.ir

۱. الف) فرض کنید $v(t) = 49(1 - e^{-\frac{t}{5}})$ ، در این صورت ریشه حقیقی T از معادله $\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = 0.98$ را بیابید. (با تقریب دو رقم اعشار)

ب) نمودار تابع های $v(t) = 49(1 - e^{-\frac{t}{5}})$ و $w(t) = 49 \tanh(\frac{t}{5})$ را هم زمان در یک دستگاه مختصاتی در بازه $[0, 12]$ را رسم کنید و سپس مقدار آنها را برای مقادیر $0 \leq t < T$ مقایسه کنید.

ج) مقدار T به دست آمده در قسمت الف) را در $x(t) = 49t + 245e^{-\frac{t}{5}} - 545$ قرار دهید و مقدار $x(T)$ را بیابید. (با تقریب دو رقم اعشار)

۲. الف) با فرض $Q(t) = 10^4(1 - e^{(-2 \times 10^{-2})t})$ ، مقدار $Q(8760)$ را بیابید.

ب) با توجه به قسمت الف)، مقادیر حقیقی t را طوری بیابید که رابطه $10 = Q(8760) \cdot e^{(-2 \times 10^{-2})t}$ برقرار باشد.

ج) با توجه به قسمت الف)، نمودار تابع زیر را در بازه $[0, 26000]$ رسم کنید.

$$W(t) = \begin{cases} 10^4(1 - e^{(-2 \times 10^{-2})t}) & 0 \leq t \leq 8760, \\ Q(8760) \cdot e^{(-2 \times 10^{-2})(t-8760)} & 8760 \leq t \leq 26000. \end{cases}$$

۳. به ازای $c = 0, \pm 1, \pm 2$ ، نمودار تابع های $f(t) = e^{-\frac{t}{c}} \left(\int_0^t e^{\frac{s}{c}} ds \right) + ce^{-\frac{t}{c}}$ را به طور هم زمان در یک دستگاه مختصاتی در بازه $[0, 4]$ رسم کنید.

۴. خانواده منحنی های $y^2 - 2y - x^2 - 2x^2 - 2x = c$ مفروض است.

الف) به ازای چند مقدار دلخواه از پارامتر c ، تعدادی از این منحنی ها را به طور هم زمان در یک دستگاه مختصاتی رسم کنید.

ب) ضابطه ضمنی آن منحنی ای که از نقطه $(0, -1)$ می گذرد را پیدا کنید. سپس این منحنی را رسم کنید.

ج) قسمتی از منحنی (ب) که از نقطه $(0, -1)$ می گذرد و نمودار یک تابع پیوسته $y = \phi(x)$ با بزرگترین دامنه ممکن است را روی شکل مشخص کنید.

د) قسمتی از منحنی (ب) که از نقطه $(0, -1)$ می گذرد و نمودار یک تابع مشتق پذیر $y = \phi(x)$ با بزرگترین دامنه ممکن است را روی شکل مشخص کنید.

ه) بدون یافتن ضابطه تابع قسمت (ج)، بزرگترین دامنه ممکن برای این تابع مشتق پذیر را دقیقاً مشخص کنید. راهنمایی: با بکارگیری مشتق گیری ضمنی، عرض نقاطی که تابع مزبور در آنها مشتق پذیر نیست را پیدا کنید و سپس با جایگذاری در رابطه ضمنی منحنی، و با توجه به نمودار تابع (ج)، بزرگترین محدوده مجاز x را پیدا کنید.

و) به طور مستقیم و با یافتن ضابطه صریح تابع قسمت (ج)، دامنه این تابع مشتق پذیر را پیدا کنید.

۵. خانواده منحنی های $y^2 + 16y + x^2 - 8x^2 = c$ مفروض است.

الف) به ازای چند مقدار دلخواه از پارامتر c ، تعدادی از این منحنی ها را به طور هم زمان در یک دستگاه مختصاتی رسم کنید.

ب) ضابطه ضمنی آن منحنی ای که از نقطه $(0, 1)$ می گذرد را پیدا کنید. سپس این منحنی را رسم کنید.

ج) قسمتی از منحنی (ب) که از نقطه $(0, 1)$ می گذرد و نمودار یک تابع پیوسته $y = \phi(x)$ با بزرگترین دامنه ممکن است را روی شکل مشخص کنید.

د) قسمتی از منحنی (ب) که از نقطه $(0, 1)$ می گذرد و نمودار یک تابع مشتق پذیر $y = \phi(x)$ با بزرگترین دامنه ممکن است را روی شکل مشخص کنید.

ه) بدون یافتن ضابطه تابع قسمت (ج)، بزرگترین دامنه ممکن برای این تابع مشتق پذیر را دقیقاً مشخص کنید. راهنمایی: با بکارگیری مشتق گیری ضمنی، عرض نقاطی که تابع مزبور در آنها مشتق پذیر نیست را پیدا کنید و سپس با جایگذاری در رابطه ضمنی منحنی، و با توجه به نمودار تابع (ج)، بزرگترین محدوده مجاز x را پیدا کنید.

۶. مسأله قبل را عیناً برای خانواده منحنی های $-x^2 + 3y - y^2 = c$ و نقطه $(0, 2)$ بررسی کنید.

۷. الف) فرض کنید $\alpha > 0$. به طور تحلیلی نشان دهید تابع زیر، همه جا پیوسته و مشتق پذیر است. (به ویژه در $t = \alpha$)

$$\chi(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t < \alpha, \\ \left(\frac{t}{\alpha}(t - \alpha)\right)^{\frac{2}{3}} & t \geq \alpha. \end{cases}$$

ب) نمودار تابع های $\psi(t) = 0$ ، $\phi_1(t) = \left(\frac{t}{\alpha}t\right)^{\frac{2}{3}}$ ، $\phi_2(t) = -\left(\frac{t}{\alpha}t\right)^{\frac{2}{3}}$ و تابع های $\chi(t)$ و $-\chi(t)$ در قسمت الف) را برای مقادیر $1, \frac{2}{3}, \alpha$ به طور هم زمان در یک دستگاه مختصاتی به ازای $t \geq 0$ رسم کنید (۹ تابع در یک دستگاه).

”همواره شاد و پیروز باشید.“

emamipour@bam.ac.ir