انتگرال

تعریف ، ۷ قانون ، ۷ تکنیک

$\int f(x)\,dx$

قوانین :

۱) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ ، $\int e^x dx = e^x$ ، $\int \frac{dx}{x} = \ln x$

۲) $\int \sin x\, dx = -\cos x$ $\quad \int \cos x\, dx = \sin x$

$\int \operatorname{tg} x\, dx = -\ln|\cos x|$ $\quad \int \cot x\, dx = \ln|\sin x|$

۳) $\int \sec^2 x\, dx = \operatorname{tg} x$ $\quad \int \csc^2 x\, dx = -\cot x$

۵) $\int \sec x\, dx = \ln|\sec x + \operatorname{tg} x|$ $\quad \int \csc x\, dx = \ln|\csc x - \cot x|$

۶) $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{tg}^{-1}\frac{x}{a}$ $\quad$ ۷) $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|$

روابط کاربردی مهم :

۱) $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ $\quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$

۲) $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ $\quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

۳) $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ $\quad \csc x = \frac{1}{\sin x}$

۴) $(\sec x)' = \sec x \cdot \operatorname{tg} x$ $\quad (\csc x)' = -\csc x \cdot \cot x$

$(\operatorname{tg} x)' = 1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x$ $\quad (\cot x)' = -(1+\cot^2 x) = -\csc^2 x$

۵) $\ln(A) + \ln(B) = \ln(AB)$

$\ln(A) - \ln(B) = \ln\left(\frac{A}{B}\right)$

$\ln A^n = n\ln(A)$ $\quad (\ln A)^n \neq n\ln(A)$

تکنیک‌ها:

۱) تغییر متغیر:
۱) نمک غذا
۲) ایده کاربردی در اکثر انتگرال‌ها
۳) وجود یک تابع + مشتق آن در انتگرال
۵) ایده کاربردی در انتگرال‌گیری کلی عبارت تیپ‌دار.

۲) رادیکالی: رادیکال رو بزن توی کول ← زیر رادیکال $= u^{\text{فرجه}}$ (تغییر متغیر)

۳) کسری:
۱) درجه صورت > درجه مخرج ← تقسیم اول دبیرستان
۲) درجه صورت = درجه مخرج ← * ایجاد مخرج در صورت + تفکیک
۳) * درجه صورت < درجه مخرج $\boxed{\text{بسیار مهم}}$
- ۱) ۱ درجه ← ایجاد مشتق مخرج در صورت + تفکیک
- ۲) * ۲ درجه ← رجوع به تکنیک ۵ :)
- ۳) درجات بالاتر ← رجوع به تکنیک ۴ :)

۴) تجزیه کسری: * $\boxed{\text{بسیار مهم}}$
۱) وجود عامل $(x+a)^n$ $\xleftarrow{\text{تجزیه}}$ $\frac{A}{(x+a)^n}+\frac{B}{(x+a)^{n-1}}+\dots+\frac{Z}{(x+a)^1}$
۲) وجود عامل $(ax^2+bx+c)^n$ $\xleftarrow{\text{تجزیه}}$ $\frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}+\frac{Cx+D}{(ax^2+bx+c)^{n-1}}+\dots+\frac{Zx+Y}{(ax^2+bx+c)^1}$

۵) تغییر متغیر مثلثاتی: (بسیار پرکاربرد)
۱) وجود عبارت x^2+a^2 $\xleftarrow{\text{تغییر متغیر}}$ $x=a\,tg\theta$ $(dx=a\sec^2\theta\, d\theta)$
۲) وجود عبارت x^2-a^2 $\xleftarrow{\text{تغییر متغیر}}$ $x=a\sec\theta$ $(dx=a\sec\theta\, tg\theta\, d\theta)$
۳) وجود عبارت a^2-x^2 $\xleftarrow{\text{تغییر متغیر}}$ $x=a\sin\theta$ $(dx=a\cos\theta\, d\theta)$

۶) جزء به جزء: انتگرال‌گیری از عبارات حاصل ضرب و توابع معکوس (وارون) مثلثاتی

$$\int u\,dv = uv-\int v\,du$$

الویت u گیری ← لوچمن ← نمایی
(لگاریتمی، وارون، چندجمله‌ای، مثلثاتی)

۷) مثلثاتی:

۱) $\sin^m x\cdot\cos^n x$
- ۱) حداقل یکی فرد ← تبدیل عبارت دارای توان فرد به دیگری و استفاده از ویژگی انتگرال تغییر متغیر — $\sin x=\sqrt{1-\cos^2 x}$ ، $\cos x=\sqrt{1-\sin^2 x}$
- ۲) جفت زوج ← روابط کاربردی + $\frac{\sin 2x}{2}=\sin x\cos x$
- ۳) جفت منفی ← قرار دادن عبارت $\sin^2x+\cos^2x$ به جای ۱ و تفکیک

۲) $\sec^m x\cdot tg^n x$ یا $(\csc^m x\cdot\cot^n x)$
- ۱) * sec زوج ← تغییر متغیر $u=tg\,x$ و تبدیل sec که به tg
- ۲) sec فرد ← همه تبدیل به sec و رجوع به تکنیک ۴ :) $\boxed{\text{نکته}}$
- ۳) هر دو فرد ← تغییر متغیر $u=\sec x$ کم کاربرد.

۳) * $\frac{a}{b\sin x+c\cos x+d}$ $\xleftarrow{\text{تغییر متغیر}}$ $dx=\frac{2dz}{1-z^2}$ ، $\cos x=\frac{1-z^2}{1+z^2}$ ، $\sin x=\frac{2z}{1+z^2}$

$$\boxed{z=tg(x/2)}$$

۴) $\frac{a}{b\sin^2x+c\cos^2x}$ $\xleftarrow{\text{ایده}}$ همه عبارات صورت و مخرج تقسیم بر $\cos^2x$ ایجاد $tg\,x$ و استفاده از تغییر متغیر $u=tg\,x$

۵) $\frac{a\sin x+b\cos x}{c\sin x+d\cos x}$ مشابه کسری ← ایجاد خود مخرج و مشتق مخرج در صورت + تفکیک

تکنیک ۵ :
(تغییر متغیر)

۱) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin x}}\,dx \xrightarrow{\text{تغییر متغیر}} \begin{cases} 1+\sin x = u \\ \cos x\,dx = du \end{cases} \xrightarrow{\text{جایگذاری}} \int \frac{du}{\sqrt{u}}$ (حل با قانون ۱)

۲) $\displaystyle\int \underbrace{x^3}_{x^2 \cdot x} \cos(x^2)\,dx \longrightarrow \begin{cases} x^2 = u \\ 2x\,dx = du \end{cases} \xrightarrow{\text{جایگذاری}} \int u \cdot \cos(u)\,du$ (حل با تکنیک ۴)

۳) $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}}\,dx$ ($\sin^3 x = \sin^2 x \cdot \sin x$, $\sin^2 x \to 1-\cos^2 x$) $\displaystyle\longrightarrow \begin{cases} \cos x = u \\ -\sin x\,dx = du \end{cases} \xrightarrow{\text{جایگذاری}} -\int \frac{(1-u^2)}{\sqrt{u}}\,du$ (حل با قانون ۱)

۴) $\displaystyle\int \sin(\ln x)\,dx \longrightarrow \begin{cases} \ln x = u \\ \frac{dx}{x} = du \end{cases} \xrightarrow{\text{جایگذاری}} \int \sin(u) \cdot e^u\,du$ (حل با تکنیک ۴)

$dx = x\,du$, $x = e^u$ $\mapsto dx = e^u\,du$

۵) $\displaystyle\int \frac{dx}{x \ln^2 x} \longrightarrow \begin{cases} \ln x = u \\ \frac{dx}{x} = du \end{cases} \longrightarrow \int \frac{du}{u^2}$ (حل با قانون ۱)

۶) $\displaystyle\int \sec^2 x \cdot \ln(\operatorname{tg} x)\,dx \longrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x = u \\ \sec^2 x\,dx = du \end{cases} \longrightarrow \int \ln(u) \cdot du$ (حل با تکنیک ۴)

۷) $\displaystyle\int \frac{\sin(\ln x)}{x^2}\,dx \longrightarrow \begin{cases} \ln x = u \\ \frac{dx}{x} = du \end{cases} \longrightarrow \int \frac{\sin(u)}{(e^u)^2} \cdot e^u\,du = \int \frac{\sin(u)}{e^u}\,du = \int e^{-u} \cdot \sin(u)\,du$ (حل با تکنیک ۴)

$dx = x\,du$, $x = e^u$ $\mapsto dx = e^u\,du$

۸) $\displaystyle\int \frac{dx}{e^x+1} \longrightarrow \begin{cases} e^x = u \\ e^x\,dx = du \end{cases} \longrightarrow \int \frac{\frac{du}{u}}{u+1} = \int \frac{du}{u(u+1)}$ (حل با تکنیک ۳)

$dx = \frac{du}{e^x} = \frac{du}{u}$

۹) $\displaystyle\int \frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}\,dx \longrightarrow \begin{cases} e^{-x} = u \\ -e^{-x}\,dx = du \end{cases} \longrightarrow \int \frac{1-u}{1+u} \cdot \frac{-du}{u} = \int \frac{u-1}{u(1+u)}$ (حل با تکنیک ۳و۴)

$dx = -\frac{du}{e^{-x}} = -\frac{du}{u}$

Scanned by CamScanner

تکنیک ۴ :

(زیر رادیکالی)

۱) $\int e^{\sqrt{x}}\,dx \xrightarrow[\text{تغییر متغیر}]{\text{زیر رادیکال}} \begin{cases} x = u^2 \\ dx = 2u\,du \end{cases} \xrightarrow{\text{جایگذاری}} \int e^{u}\cdot(2u\,du) = 2\int ue^{u}\,du$

(حل با تکنیک ۶)

۲) $\int \sin(\sqrt{x-1})\,dx \longrightarrow \begin{cases} x-1 = u^2 \\ dx = 2u\,du \end{cases} \longrightarrow \int \sin(u)\,(2u\,du) = 2\int u\cdot\sin(u)$

(حل با تکنیک ۶)

۳) $\int \dfrac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x^3}}\,dx \longrightarrow \begin{cases} x = u^4 \\ dx = 4u^3\,du \end{cases} \longrightarrow \int \dfrac{u^2}{1+u^3}(4u^3\,du)$ (حل با تکنیک ۳)

۴) $\int \dfrac{1+\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx \longrightarrow \begin{cases} x = u^6 \\ dx = 6u^5\,du \end{cases} \longrightarrow \int \dfrac{1+u^2}{1+u^3}(6u^5\,du)$ (حل با تکنیک ۳)

۵) $\int \dfrac{1}{x}\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\,dx \longrightarrow \begin{cases} \dfrac{1+x}{1-x} = u^2 \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} u^2 - xu^2 = 1+x \longrightarrow x + xu^2 = u^2 - 1 \\ \longrightarrow x(1+u^2) = u^2 - 1 \longrightarrow x = \dfrac{u^2-1}{u^2+1} \\ dx = \dfrac{4u}{(u^2+1)^2} \end{cases}$

$\xrightarrow{\text{جایگذاری}} \int \dfrac{u^2+1}{u^2-1}(u)\dfrac{4u}{(u^2+1)^2} = \int \dfrac{4u^2}{(u^2-1)(u^2+1)}$ (حل با تکنیک ۴)

تکنیک : (کسری)

1) $\int \frac{x+1}{x^2+4x+8}\,dx \xrightarrow[\text{ایجاد مشتق مخرج در صورت}]{\text{اختلاف درجه}} \int \frac{\frac{1}{2}(2x+4)-1}{x^2+4x+8}\,dx$

$\xrightarrow{\text{تفکیک}} \underbrace{\frac{1}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+4x}\,dx}\; - \;\underbrace{\int \frac{dx}{x^2+4x+8}}_{\text{مربع کامل}}$

$\begin{cases} x^2+4x=u \\ (2x+4)\,dx=du \end{cases} \quad \underbrace{\frac{1}{2}\int \frac{du}{u}}$

$\frac{1}{2}\ln u$

$\boxed{\frac{1}{2}\ln(x^2+4x)}$

$\int \frac{dx}{(x+2)^2+4} \quad \begin{cases} x+2=u \\ dx=du \end{cases}$

$= \int \frac{du}{u^2+4} \xrightarrow{\text{قانون ۴}} \frac{1}{2}tg^{-1}\left(\frac{u}{2}\right) = \boxed{\frac{1}{2}tg^{-1}\frac{(x+2)}{2}}$

روش دیگر حل $\int \frac{du}{u^2+4}$ ← استفاده از تغییر متغیر مثلثاتی تکنیک ۵

---

2) $\int \frac{2-x}{(\sqrt{x^2-2x-3})^3}\,dx = \int \frac{2-x}{(x^2-2x-3)^{3/2}}\,dx \longrightarrow$

نکته: بازهم اختلاف درجه صورت و مخرج را ۱ می بینیم :)

$\xrightarrow{\text{ایجاد مشتق مخرج در صورت}} \int \frac{-\frac{1}{2}(2x-2)+1}{(x^2-2x-3)^{3/2}}\,dx \xrightarrow{\text{تفکیک}} \underbrace{-\frac{1}{2}\int \frac{2x-2}{(x^2-2x-3)^{3/2}}\,dx}_{\mathrm{I}} + \underbrace{\int \frac{dx}{(x^2-2x-3)^{3/2}}}_{\mathrm{II}}$

$\xrightarrow{\text{حل (I)}} \begin{cases} x^2-2x-3=u \\ (2x-2)\,dx=du \end{cases} \longrightarrow -\frac{1}{2}\int \frac{du}{u^{3/2}} = -\frac{1}{2}\int u^{-3/2}\,du$

$\overset{\text{قانون ۱}}{=} -\frac{1}{2}\,\frac{u^{-1/2}}{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{u}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{x^2-2x-3}}}$

$\xrightarrow{\text{حل (II)}}$ مربع کامل $\longrightarrow \int \frac{dx}{((x-1)^2-4)^{3/2}} \begin{cases} x-1=u \\ dx=du \end{cases} \longrightarrow \int \frac{du}{(u^2-4)^{3/2}}$

$\xrightarrow{\text{تکنیک ۵}} \begin{cases} u=2\sec\theta \\ du=2\sec\theta.\,tg\theta\,d\theta \end{cases}$

$= \int \frac{2\sec\theta.\,tg\theta\,d\theta}{(\underbrace{4\sec^2\theta-4}_{4(\sec^2\theta-1) \to tg^2\theta})^{3/2}} = \int \frac{2\sec\theta.\,tg\theta\,d\theta}{4^{3/2}.\,tg^3\theta}$

$= \frac{1}{4}\int \frac{\sec\theta}{tg^2\theta}\,d\theta = \frac{1}{4}\int \frac{\cos\theta\,d\theta}{\sin^2\theta} \quad \begin{cases} \sin\theta=t \\ \cos\theta\,d\theta=dt \end{cases}$

$= \frac{1}{4}\int \frac{dt}{t^2} = \boxed{-\frac{1}{4t}+C} \xrightarrow{t=\sin\theta} -\frac{1}{4\sin\theta}$

$\sec\theta=\frac{u}{2}$

$\cos\theta=\frac{2}{u}=\frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}}$

$\xrightarrow{\sin\theta=\frac{\sqrt{u^2-4}}{u}} = \frac{-u}{4\sqrt{u^2-4}} \xrightarrow{x-1=u} \boxed{\frac{-x+1}{4\sqrt{(x-1)^2-4}}}$

تکلیف 12 :

(تجزیه کسری)

1) $\int \frac{dx}{x^3+1} \overset{\text{چاق و لاغر}}{=} \int \frac{dx}{(x+1)(x^2-x+1)}$

تجزیه : $\frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}$

یافتن A: $\xrightarrow[x=-1]{\text{ضرب در } (x+1)} \frac{1}{(-1)^2-(-1)+1} = A \to \boxed{A=\frac{1}{3}}$

یافتن B: $\xrightarrow[x\to\infty]{\text{ضرب در } (x)} 0 = A+B \to \boxed{B=-\frac{1}{3}}$

یافتن C: $\xrightarrow[x=0]{\text{عدد گذاری}} \frac{1}{(0+1)(0-0+1)} = A + \frac{0+C}{0-0+1}$

$\to 1 = A+C \to \boxed{C=\frac{2}{3}}$

$$\to \int \frac{dx}{x^3+1} = \int \frac{dx}{(x+1)(x^2-x+1)} = \underbrace{\int \frac{\frac{1}{3}}{x+1}dx}_{\text{(جواب) } \frac{1}{3}\ln(x+1)} + \underbrace{\int \frac{-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}}{x^2-x+1}dx}_{(\mathrm{I})}$$

(I) حل به: ایجاد مشتق مخرج در صورت

$$\to \int \frac{-\frac{1}{6}(2x-1)+\frac{3}{6}}{x^2-x+1}dx \xrightarrow{\text{تفکیک}} \underbrace{-\frac{1}{6}\int \frac{(2x-1)\,dx}{x^2-x+1}}_{\text{(جواب) } -\frac{1}{6}\ln(x^2-x+1)} + \underbrace{\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2-x+1}}_{(\mathrm{II})}$$

(II) حل به: مربع کامل؛ چون اختلاف صورت و مخرج ۲ است

$$\to \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} \quad \begin{cases} x-\frac{1}{2}=u \\ dx=du \end{cases} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}$$

$$\xrightarrow{\text{فرمول}} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{u}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{2u}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\xrightarrow[x-\frac{1}{2}=u]{\text{برگشت}} \boxed{\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{tg}^{-1}\frac{(2x-1)}{\sqrt{3}}}$$

2) $\int \frac{dx}{\underbrace{(x^3+3x^2+2x)}_{x\underbrace{(x^2+3x+2)}_{(x+1)(x+2)}}\underbrace{(x^2-1)}_{(x-1)(x+1)}} \overset{\text{ساده سازی}}{=} \int \frac{dx}{x(x-1)(x+1)^2(x+2)}$

$$= \int \left(\frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x+1)^2} + \frac{D}{x+1} + \frac{E}{x+2}\right)dx$$

$\boxed{\text{یافتن A}} \xrightarrow[(x=0)]{\text{ضرب در } x} \frac{1}{(0-1)(0+1)(0+2)} = A+0+0+0+0 \to \boxed{A=-\frac{1}{2}}$

$\boxed{\text{یافتن B}} \xrightarrow[(x=1)]{\text{ضرب در } (x-1)} \frac{1}{1(1+1)^2(1+2)} = 0+B+0+0+0 \to \boxed{B=\frac{1}{12}}$

$\boxed{\text{یافتن C}} \xrightarrow[x=-1]{\text{ضرب در } (x+1)^2} \frac{1}{-1(-1-1)(-1+2)} = 0+0+C+0+0 \to \boxed{C=\frac{1}{2}}$

$\boxed{\text{یافتن E}} \xrightarrow[x=-2]{\text{ضرب در } (x+2)} \frac{1}{-2(-2-1)(-2+1)^2} = 0+0+0+0+E \to \boxed{E=\frac{1}{6}}$

$\boxed{\text{یافتن D}}$

راه اول: دادن عدد دلخواه

$\xrightarrow[\text{دلخواه}]{x=2} \frac{1}{2(2-1)(2+1)^2(2+2)} = \frac{-\frac{1}{2}}{2} + \frac{\frac{1}{12}}{2-1} + \frac{\frac{1}{2}}{(2+1)^2} + \frac{D}{2+1} + \frac{\frac{1}{6}}{2+2}$

$\xrightarrow{\text{حل معادله}} \boxed{D=\frac{1}{4}}$

راه دوم: استفاده از ضرب در

$\xrightarrow[x\to\infty]{\text{ضرب در } (x)} 0 = \overset{-\frac{1}{2}}{\cancel{A}} + \overset{\frac{1}{12}}{\cancel{B}} + 0 + D + \overset{\frac{1}{6}}{\cancel{E}} \to \boxed{D=\frac{1}{4}}$

$$\xrightarrow{\text{حاصل انتگرال}} = \int \frac{-\frac{1}{2}}{x}dx + \int \frac{\frac{1}{12}}{x-1}dx + \int \frac{\frac{1}{2}}{(x+1)^2}dx + \int \frac{\frac{1}{4}}{x+1}dx + \int \frac{\frac{1}{6}}{x+2}dx$$

$$= \boxed{-\frac{1}{2}\ln x + \frac{1}{12}\ln(x-1) - \frac{1}{2}\frac{1}{(x+1)} + \frac{1}{4}\ln(x+1) + \frac{1}{6}\ln(x+2)}$$

۱۰/۱ تکلیف ۵ :

(تغییر متغیر مثلثاتی)

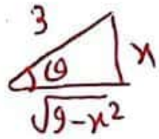
1) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9-x^2}} \xrightarrow{(a^2-x^2)} \begin{cases} x = 3\sin\theta \\ dx = 3\cos\theta\, d\theta \end{cases} \to \int \frac{3\cos\theta\, d\theta}{9\sin^2\theta\sqrt{\underbrace{9-9\sin^2\theta}_{\underbrace{9(1-\sin^2\theta)}_{\cos^2\theta}}}}$

$\to \int \frac{\cancel{3\cos\theta}\, d\theta}{9\sin^2\theta \cdot \cancel{3\cos\theta}}$

$= \int \frac{d\theta}{9\sin^2\theta} = \frac{1}{9}\int \csc^2\theta\, d\theta \overset{\text{قانون ۳}}{=\!=} -\frac{1}{9}\cot\theta$

$\theta = \sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)$ کامپیک

$\cot\theta = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}$



$\sin\theta = \frac{x}{3} = \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}}$

$= \boxed{-\frac{1}{9}\frac{\sqrt{9-x^2}}{x}}$ یا $-\frac{1}{9}\cot\left(\sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)\right)$

2) $\int \frac{dx}{(x+\frac{1}{2})\sqrt{x^2+x+\frac{17}{16}}} = \int \frac{dx}{(x+\frac{1}{2})\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2+4}} \xrightarrow{\text{تغ}} \begin{cases} x+\frac{1}{2} = u \\ dx = du \end{cases}$

$= \int \frac{du}{u\sqrt{u^2+4}} \xrightarrow{(u^2+a^2)} \begin{cases} u = 2\,tg\,\theta \\ du = 2\sec^2\theta\, d\theta \end{cases}$

$= \int \frac{\cancel{2}\sec^2\theta\, d\theta}{\cancel{2}\,tg\,\theta \cdot \sqrt{\underbrace{4\,tg^2\theta+4}_{\underbrace{4(tg^2\theta+1)}_{\sec^2\theta}}}} = \int \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{tg\,\theta \cdot \sec\theta\, d\theta} = \int \frac{\sec\theta}{tg\,\theta}\, d\theta$

$= \int \frac{\frac{1}{\cos\theta}}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}\, d\theta$

$= \int \frac{1}{\sin\theta} = \int \csc\theta \overset{\text{قانون ۵}}{=}$

$u = x+\frac{1}{2},\quad \theta = tg^{-1}\left(\frac{u}{2}\right)$ کامپیک $\leftarrow$ $\boxed{\ln|\csc\theta - \cot\theta|}$

تکنیک ۴ :

(جزء به جزء)

مثال) $\int x e^{\arcsin x} dx \xrightarrow{\text{تغ}} \begin{cases} \arcsin x = t \to \sin t = x \\ \cos t\, dt = dx \end{cases}$

$= \int \sin t\, e^{t} \cdot \cos t\, dt = \int \underbrace{\sin t \cdot \cos t}_{\frac{1}{2}\sin 2t} \cdot e^{t} dt = \frac{1}{2} \int \underbrace{\sin 2t \cdot e^{t} dt}_{\text{لوجمن}}^{*} \quad \begin{cases} \sin 2t = u \to 2\cos 2t\, dt = du \\ e^{t} dt = dv \to e^{t} = v \end{cases}$

$\xrightarrow[\text{فرمول}]{uv - \int v du} \sin 2t\, e^{t} - 2\int e^{t} \cdot \cos 2t\, dt \quad \begin{cases} \cos 2t = u \to -2\sin 2t\, dt = du \\ e^{t} dt = dv \to e^{t} = v \end{cases}$

$\xrightarrow[\text{فرمول}]{uv - \int v du} = e^{t} \cdot \cos 2t + 2\int \sin 2t \cdot e^{t} dt$

$\xrightarrow{*} \int \sin 2t \cdot e^{t} dt = \sin 2t \cdot e^{t} \overset{*}{-2}\left(e^{t} \cos 2t + 2\int \sin 2t\, e^{t} dt\right)$

$= \sin 2t \cdot e^{t} - 2e^{t} \cos 2t - 4\int \sin 2t \cdot e^{t} dt$

$\to 5\int \sin 2t \cdot e^{t} dt = e^{t} \sin 2t - 2e^{t} \cos 2t$

$\int \sin 2t \cdot e^{t} dt = \frac{1}{5}\left(e^{t} \sin 2t - 2e^{t} \cos 2t\right)$

کامل کنید :)
$t = \arcsin x$

مثال۲) $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x\, dx = \int_0^{\pi/2} \sin x \cdot \sin^{n-1} x\, dx \quad \begin{cases} u = \sin^{n-1} x \to du = (n-1)\sin^{n-2} x \cos x \\ dv = \sin x\, dx \to v = -\cos x \end{cases}$

$\xrightarrow[\text{فرمول}]{uv - \int v du} I_n = \underbrace{-\cos x \cdot \sin^{n-1} x \Big|_0^{\pi/2}}_{(0-0)} + \int_0^{\pi/2} (n-1) \underbrace{\cos^2 x}_{(1-\sin^2 x)} \sin^{n-2} x\, dx$

$(n-1)\left[\underbrace{\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x\, dx}_{I_{n-2}} - \underbrace{\int_0^{\pi/2} \sin^n x\, dx}_{I_n}\right]$

$\to I_n = (n-1) I_{n-2} - \underbrace{(n-1) I_n}_{-nI_n + I_n} \to n I_n = (n-1) I_{n-2} \to \boxed{I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}}$

$\xrightarrow{n \to n+2} \boxed{I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n}$

$\xrightarrow{\text{از صورت سوال}} I_0 = \int_0^{\pi/2} \sin^0 x\, dx = \boxed{\pi/2}$

$\xrightarrow{\text{از صورت سوال}} I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin^1 x\, dx = -\cos x \Big|_0^{\pi/2} = -(0-1) = \boxed{1}$

$\xrightarrow[n=0]{\text{از فرمول}} I_2 = \frac{1}{2} I_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi/4$

$\xrightarrow{n=1} I_3 = \frac{2}{3} I_1 = \frac{2}{3}(1) = \frac{2}{3}$

$\xrightarrow{n=2} I_4 = \frac{3}{4} I_2 = \frac{3}{4}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\pi}{16}$

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$

تکنیک ۷: (مثلثات)

مثال ۱) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^4 x \cdot \sin^2 x} \xrightarrow[\text{مورد ۳ از ۱ (جفت منفی)}]{\text{تکنیک ۷}} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^4 x \cdot \sin^2 x}\,dx$

$\overset{\text{تفکیک}}{=} \displaystyle\int \frac{\cancel{\sin^2 x}}{\cos^4 x \cdot \cancel{\sin^2 x}}\,dx + \int \frac{\cancel{\cos^2 x}}{\cos^{\cancel{4}} x \cdot \sin^2 x} = \int \frac{1}{\cos^4 x}\,dx + \int \frac{1}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x}\,dx$

$= \displaystyle\int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^4 x}\,dx + \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x}\,dx$

$\overset{\text{تفکیک}}{=} \displaystyle\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}\,dx + \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{\cancel{\sin^2 x}}{\cos^2 x \cdot \cancel{\sin^2 x}}\,dx + \int \frac{\cancel{\cos^2 x}}{\cancel{\cos^2 x} \cdot \sin^2 x}\,dx$

$= \underbrace{\displaystyle\int \tan^2 x \cdot \sec^2 x\,dx}_{} + \underbrace{\int \sec^2 x\,dx + \int \sec^2 x\,dx}_{\text{قانون ۳} \;=\; \tan x} + \underbrace{\int \csc^2 x\,dx}_{-\cot x}$

مورد ۱ از ۲ مثلثات $\begin{cases} \tan x = u \\ \sec^2 x\,dx = du \end{cases}$

$= \displaystyle\int u^2\,du = \frac{1}{3}u^3 = \boxed{\frac{1}{3}\tan^3 x}$

مثال ۲) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sin x - \cos x}\,dx \xrightarrow[\text{مورد ۳ (کمکی)}]{\text{تکنیک ۷}} \begin{cases} \sin x = \dfrac{2z}{1+z^2} \\ \cos x = \dfrac{1-z^2}{1+z^2} \end{cases} \quad dx = \frac{2\,dz}{1+z^2}$

$= \displaystyle\int \frac{\frac{2}{1+z^2}\,dz}{1 + \frac{2z}{1+z^2} - \frac{1-z^2}{1+z^2}} = \int \frac{\frac{2}{\cancel{1+z^2}}\,dz}{\frac{2z^2+2z}{\cancel{1+z^2}}} = \int \frac{dz}{z^2+z} \overset{\text{تکنیک ۳}}{=} \int \frac{dz}{(z+\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}}$

کمکی $\Rightarrow \begin{cases} z+\frac{1}{2} = u \\ dz = du \end{cases} = \displaystyle\int \frac{du}{u^2 - \frac{1}{4}} \overset{\text{قانون ۷}}{=} \frac{1}{2(\frac{1}{2})} \ln\left|\frac{u-\frac{1}{2}}{u+\frac{1}{2}}\right| = \boxed{\ln\left|\frac{2u-1}{2u+1}\right|}$

کاشکی $z = \tan\frac{x}{2}$, $u = z + \frac{1}{2}$

مثال ۳) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x + 4\cos^2 x} \xrightarrow[\text{مورد ۴}]{\text{تکنیک ۷}} \xrightarrow{\div \cos^2 x} \int \frac{\sec^2 x\,dx}{\tan^2 x + 4}$ زنی $\begin{cases} \tan x = u \\ \sec^2 x\,dx = du \end{cases}$

$= \displaystyle\int \frac{du}{u^2+4} \overset{\text{قانون ۴}}{=} \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{u}{2}\right) \xrightarrow{\text{کاشکی}} u = \tan x$

مثال ۴) $\displaystyle\int \frac{\sin x + \cos x}{2\sin x - \cos x}\,dx \xrightarrow[\text{مورد ۵}]{\text{تکنیک ۷}} = \int \frac{A(2\sin x - \cos x) + B(2\cos x + \sin x)}{2\sin x - \cos x}\,dx$

$\begin{cases} 2A\sin x + B\sin x = \sin x \longrightarrow 2A + B = 1 \\ -A\cos x + 2B\cos x = \cos x \longrightarrow -A + 2B = 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} \begin{cases} B = 3/5 \\ A = 1/5 \end{cases}$

$\overset{\text{تفکیک}}{=} \displaystyle\int \frac{\frac{1}{5}\cancel{(2\sin x - \cos x)}}{\cancel{2\sin x - \cos x}}\,dx + \int \frac{\frac{3}{5}(2\cos x + \sin x)}{2\sin x - \cos x}\,dx$

$= \boxed{\frac{1}{5}x + \frac{3}{5}\ln|2\sin x - \cos x|}$

کاربرد :

۱) معین :

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)$$

(نکته: وقتی تغییر متغیر می‌دهیم بازه‌ی انتگرال هم تغییر می‌کند)

---

۲) حد :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) \overset{\text{فرمول}}{=} \int_0^1 f(x)\,dx \qquad \frac{i}{n}\to x$$

۱) نوشتن حد داده‌شده به صورت Σ

۲) ایجاد $\frac{1}{n}$ و $\frac{i}{n}$

۳) تبدیل $f(\frac{i}{n})$ به $f(x)$ و محاسبه انتگرال

---

۳) مشتق :

$$y=\int_{v(x)}^{u(x)} f(t)\,dt \longrightarrow y' = u' f(u) - v' f(v)$$

---

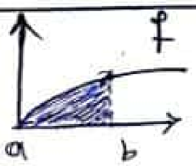
۴) مساحت :

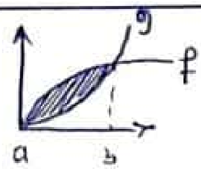
$$S=\int_a^b f(x)\,dx \qquad S=\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx$$

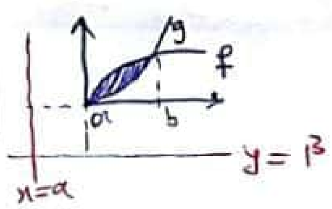
---

۵) حجم :

$v=\pi r^2 h$ (دوران حول محور x)	$\boxed{V=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx}$	$v=\pi\int_a^b (f^2-g^2)\,dx$	$v=\pi\int_a^b \left((f-\beta)^2-(g-\beta)^2\right)dx$ دوران موازی محور x (حول خط $y=\beta$)
$v=2\pi r h$ (دوران حول محور y)	$\boxed{V=2\pi\int_a^b x f(x)\,dx}$	$v=2\pi\int_a^b x(f-g)\,dx$	$v=2\pi\int_a^b (x-\alpha)(f-g)\,dx$







---

۶) طول قوس :

$$l=\int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx$$

---

۷) همگرایی و واگرایی :

عدد = ، = ∞

$$\int \frac{1}{x^p}$$

۱) ناسره نوع اول (∞ بودن کران)
- $p>1$ ← همگرا
- $p\leq 1$ ← واگرا

۲) ناسره نوع دوم (∞ شدن بازای کران)
- $p<1$ ← همگرا
- $p\geq 1$ ← واگرا

روش‌های حل:
① استفاده از فرمول سه‌گانه
② محاسبه انتگرال

مثال۱) $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\dots+\frac{1}{(n+n)^2}\right)$ می‌شود چند؟

$$=\lim_{n\to\infty} n\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\underbrace{(n+i)^2}_{\text{فاکتور } n(1+\frac{i}{n})}}\right)=\lim_{n\to\infty}\cancel{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n^{\cancel{2}}(1+\frac{i}{n})^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(1+\frac{i}{n})^2}\to f\left(\frac{i}{n}\right)$$

بنابراین $\longleftarrow$ $f(x)=\frac{1}{(1+x)^2}$

$$\xrightarrow{\text{فرمول}}=\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1\frac{1}{(1+x)^2}dx=\frac{-1}{1+x}\Big|_0^1=-1\left(\frac{1}{2}-1\right)$$

$$=\boxed{\frac{1}{2}}$$

مثال۲) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3}{(n^2+1)^2}+\frac{n^3}{(n^2+4)^2}+\dots+\frac{n^3}{16n^4}\right)$ می‌شود چند

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{n^3}{(\underbrace{n^2+i^2}_{\text{فاکتور } n^2(1+\frac{i^2}{n^2})})^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\cancel{n^3}}{n^{4}(1+(\frac{i}{n})^2)^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(1+(\frac{i}{n})^2)^2}\to f\left(\frac{i}{n}\right)$$

بنابراین $\longleftarrow$ $f(x)=\frac{1}{(1+x^2)^2}$

$$\xrightarrow{\text{فرمول}}=\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1\frac{1}{(1+x^2)^2}dx\qquad\begin{cases}x=\tan\theta\\ dx=\sec^2\theta\,d\theta\end{cases}$$

بازه کم تغییری کند

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sec^2\theta\,d\theta}{\underbrace{\cancel{(1+\tan^2\theta)^2}}_{\sec^4\theta}}=\int_0^{\pi/4}\cos^2\theta\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1+\cos2\theta}{2}d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\left(\theta+\frac{1}{2}\sin2\theta\right)\Big|_0^{\pi/4}=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)-(0+0)\right)=\boxed{\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}}$$

مثال) $y=\frac{1}{3}(x^2-2)^{3/2}$ $\quad x=2 \quad x=4$

الف) طول خم (طول قوس)

ب) حجم - حول محور x؟

الف) $\boxed{l=\int_a^b\sqrt{1+y'^2}\,dx}$ $\quad y'=\frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}\right)(2x)(x^2-2)^{1/2}=x(x^2-2)^{1/2}$

$$l=\int_2^4\sqrt{1+x^2(x^2-2)}\,dx=\int_2^4\sqrt{x^4-2x^2+1}\,dx=\int_2^4\sqrt{(x^2-1)^2}\,dx$$

$$=\int_2^4(x^2-1)\,dx=\frac{1}{3}x^3-x\Big|_2^4=\left(\frac{1}{3}4^3-4\right)-\left(\frac{1}{3}2^3-2\right)=\boxed{\frac{50}{3}}$$ (الف)

ب) $\boxed{V=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx} \to V=\pi\int_2^4\frac{1}{9}(x^2-2)^3\,dx$

$$V=\frac{\pi}{9}\int_2^4\left(x^6-\underbrace{\cancel{3(2)}x^4}_{6x^4}+\underbrace{\cancel{3(x^2)4}}_{12x^2}-8\right)dx$$

$$V=\frac{\pi}{9}\left(\frac{1}{7}x^7-\frac{6}{5}x^5+4x^3-8x\right)\Big|_2^4$$ → خودت حساب کن تا

مثال۲) $\begin{cases}y=x^2\\ y=x^3\end{cases}$ حجم محصور

الف) دوران حول x؟

ب) دوران حول y؟

تلاقی → $x^2=x^3 \begin{cases}x=0\\ x=1\end{cases}$

الف → $V=\pi\int(f^2-g^2)\,dx$

$$=\pi\int_{x=0}^{1}\left((x^2)^2-(x^3)^2\right)dx=\pi\int_0^1(x^4-x^6)\,dx$$

$$=\pi\left(\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}\right)\Big|_0^1=\pi\left(\frac{2}{35}\right)$$

ب → $V=2\pi\int x(f-g)\,dx$

$$=2\pi\int_{x=0}^{1}x(x^2-x^3)\,dx=2\pi\int_0^1(x^3-x^4)\,dx$$

$$=2\pi\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^1=\pi\left(\frac{1}{10}\right)$$

ج) دوران حول خط $y=1$

د) دوران حول خط $x=1$

ج) → $V=\pi\int(f-\beta)^2-(g-\beta)^2\,dx$

$$=\pi\int_0^1(x^2-1)^2-(x^3-1)^2\,dx$$

$$=\pi\int_0^1(x^4-2x^2+1)-(x^6-2x^3+1)\,dx$$

$$=\pi\left(\frac{1}{5}x^5-\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{7}x^7-\frac{1}{2}x^4\right)\Big|_0^1=$$ خودت حساب کن تا

د) → $V=2\pi\int(x-\alpha)(f-g)\,dx$

$$=2\pi\int_0^1(x-1)(x^2-x^3)\,dx$$

$$=2\pi\int_0^1(x^3-x^4-x^2+x^3)\,dx$$

$$=2\pi\left(\frac{1}{2}x^4-\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^1=$$ خودت حساب کن تا