گوسی بودن

در کیهان شناسی به دفعات راجع به میدان تصادفی گوسی یا توزیع تابش زمینه کیهانی و گوسی بودن آن بحث می‌شود اما گوسی بودن به طور دقیق یعنی چیه؟

۱ گوسی آماری

می‌دانیم توزیع گوسی برای یک متغیر تصادفی مثل X یعنی تابع چگالی احتمال یا تابع توزیع آن به صورت زیر باشد:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \tag{۱}$$

میدانیم میانگین این توزیع صفر است، یعنی $E[X] = 0$ است و واریانس آن برابر σ^2 است. سرراست‌ترین تعمیم این وضعیت به n متغیر تصادفی X_1 تا X_n به این صورت است:

$$f(x_1, ..., x_n) \propto e^{-\frac{1}{2}\mathbf{x}^T C^{-1}\mathbf{x}} \tag{۲}$$

در این رابطه $\mathbf{x} = (x_i)$ و $C = C_{ij}$ است. با توجه به متقارن بودن ماتریس C می‌توانیم آن را با یک ماتریس یکانی U قطری کنیم:

$$f(x_1, ..., x_n) \propto e^{-\frac{1}{2}\mathbf{x}^T (U^T D U)^{-1}\mathbf{x}} = e^{-\frac{1}{2}(U\mathbf{x})^T D^{-1}(U\mathbf{x})} \tag{۳}$$

که D یک ماتریس قطری است. با تغییر متغیر $Y_i = U_{ij}X_j$ و با توجه به قطری بودن D ، توزیع متغیرهای Y در واقع گوسی‌های مستقلی خواهند بود با واریانس عناصر قطر اصلی D (یا ویژه مقادیر C) بنا بر این داریم:

$$\int e^{-\frac{1}{2}\mathbf{U}\mathbf{x}^T D^{-1}\mathbf{U}\mathbf{x}} d^n x = \int e^{-\frac{1}{2}\mathbf{y}^T D^{-1}\mathbf{y}} d^n y = \sqrt{(2\pi)^n \det D} \tag{۴}$$

در نتیجه ضریب بهنجارش تابع گوسی $\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det C}}$ است. پس توزیع به فرم زیر است:

$$f(x_1, ..., x_n) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det C}} e^{-\frac{1}{2}\mathbf{x}^T C^{-1}\mathbf{x}} \tag{۵}$$

با توجه به گوسی بودن توزیع برای متغیرهای Y داریم $E[Y] = 0$ همچنین:

$$E[Y_i] = U_{ij} E[X_j] \tag{۶}$$

که بلافاصله نتیجه می‌دهد که: $E[X] = 0$. بنا بر این $\text{cov}(X_i, X_j) = E[X_i X_j]$ برای محاسبه همبستگی داریم:

$$E[Y_i Y_j] = D_{ij} = U_{ik} U_{jl} E[X_k X_l] \Rightarrow E[X_k X_l] = C_{kl} \tag{۷}$$

به همین ترتیب می‌توان استدلال کرد که اگر تعداد متغیرهای درون مقدار چشمداشتی فرد باشد $E[X_i ... X_k] = 0$ و اگر تعداد متغیرهای درون مقدار چشمداشتی زوج باشد نتیجه بر حسب C_{ij} قابل بیان است. به عبارتی تمام اطلاعات توزیع در ماتریس C نهفته است که خود ماتریس C آنگونه که نشان دادید چیزی نیست جز همبستگی‌های دوتایی.

۲ توزیع نوسانگر هماهنگ

یک نوسانگر هارمونیک کوانتمی را در نظر بگیرید. همیلتونی این نوسانگر به شکل زیر است:

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 X^2 \tag{۸}$$

می‌دانیم که بر حسب عملگرهای خلق و فنا می‌توان X را به صورت زیر نوشت:

$$X = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a + a^\dagger) \tag{۹}$$

اگر در حالت پایه باشیم خواهیم داشت:

$$\begin{gathered}\langle X \rangle = 0 \\ \langle X^2 \rangle = \tfrac{\hbar}{2m\omega} \\ \langle X^3 \rangle = 0 \\ \langle X^4 \rangle = 3\left(\tfrac{\hbar}{2m\omega}\right)^2 \\ \langle X^5 \rangle = 0 \\ \langle X^6 \rangle = 15\left(\tfrac{\hbar}{2m\omega}\right)^3 \\ \ldots \\ \langle X^{2k+1} \rangle = 0 \\ \langle X^{2k} \rangle = (2k-1)(2k-3)...(3)(1)\left(\tfrac{\hbar}{2m\omega}\right)^k\end{gathered} \tag{۱۰}$$

روابط بالا دقیقا معادل این هستند که توزیع X گوسی است:

$$f(x) = \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} e^{-\frac{m\omega x^2}{\hbar}} \tag{۱۱}$$

برای حالت چند متغیره باید از همیلتونی زیر شروع کنیم:

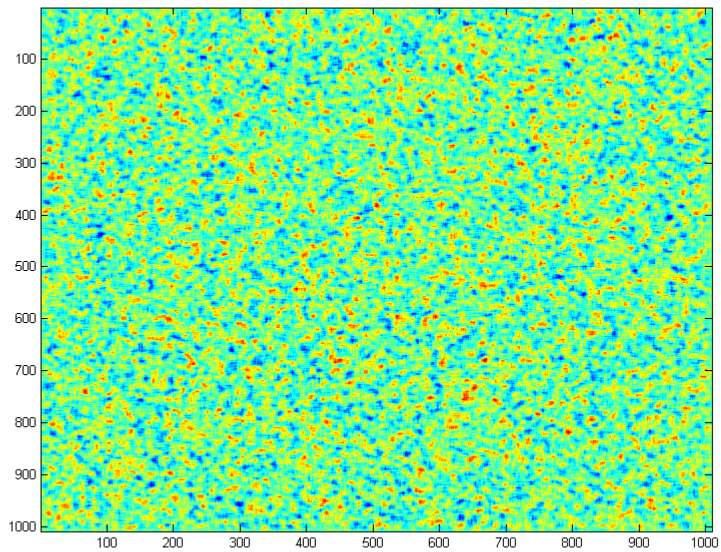
$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}M_{ij}X_iX_j \tag{۱۲}$$

که با تبدیل مختصات $Y_i = U_{ij}X_j$ ، ماتریس متقارن M قطری شده و مجموعه‌ای نوسانگرهای هماهنگ غیر جفت شده به دست می‌آید که می‌دانیم توزیع تک تک Y ها گوسی و مستقل از هم هستند بنا بر این توزیع X ها هم مشابه توزیع آماری گوسی (بخش قبل) خواهند بود.

۳ میدان گوسی

حالا آماده‌ایم تا معنی گوسی بودن یک میدان را بفهمیم. بعد از تجزیه میدان کوانتمی به مدهای فوریه می‌دانیم که میدان اسکالر بر حسب عملگرهای خلق و فنا به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\phi(\vec{k}) \propto (a_{\vec{k}} + a^\dagger_{-\vec{k}}) \tag{۱۳}$$



شکل ۱: میدان گوسی تصادفی

در نتیجه آمار این میدان **درحالت پایه** عینا مثل نوسانگر کوانتمی گسسته خواهد بود، به این معنی که توابع هم بستگی فرد نقطه‌ای صفراند و توابع زوج نقطه‌ای فقط به توابع دو نقطه‌ای بستگی دارند و بستگی آنها درست مثل رابطه‌ی ۱۰ است. بنا بر این به یک معنی میدان ϕ توزیع گوسی دارد با این تفاوت که چون تعداد نوسانگرها بینهایت است نوشتن توزیع ϕ به فرم رابطه ۵ تقریبا غیر ممکن است، در واقع پیدا کردن اندازه برای فضای توابع پیوسته $\phi(x)$ خود دردسر انگیز است چه برسد به تعریف تابع توزیع احتمال پیکره بندی های مختلف ϕ (که تا حدی روشهای آن احتمالا مشابه انتگرال مسیر است ولی انتگرال مسیر به لحاظ ریاضی کامل نیست) .