خلاصه درس

ریاضیات مهندسی

@mathfree

فصل اول

اعداد مختلط

۱-۱ مفاهیم و تعاریف اولیه

هر عدد مختلط $z = x + iy$ ، که در آن x و y اعـداد حقیقـی و $i = \sqrt{-۱}$ واحـد موهـومی اسـت را می‌توان به صورت زوج مرتـب (x, y) تعریـف کـرد. x را قـسمت حقیقـی و y را قـسمت موهـومی z می‌نامیم و به ترتیب با نمادهای $\operatorname{Re} z$ و $\operatorname{Im} z$ نشان می‌دهیم. به این ترتیب زوج مرتب $(x,۰)$ معرف عدد حقیقی x و زوج مرتب $(۰, y)$ معرف عدد موهومی iy است. در نتیجه:

$$i = \sqrt{-۱} = (۰,۱) \rightarrow i^۲ = (\sqrt{-۱})(\sqrt{-۱}) = (\sqrt{-۱})^۲ = -۱ \rightarrow i^۲ = -۱$$

تست ۱: حاصل $(i)^{۱۳۸۸}$ کدامیک از مقادیر زیر است؟

الف) ۱   ب) ۱-   ج) i د) $-i$

حل: گزینه (الف) صحیح است.

زیرا داریم:

$$(i)^{۱۳۸۸} = (i^۲)^{۶۹۴} = (-۱)^{۶۹۴} = ۱$$

نکته ۱: در حالت کلی برای محاسبه i^n کافی است n را بر ۴ تقسیم کنیم. اگر باقیمانـده r فـرض شـود حاصل i^n برابر i^r خواهد بود.

مجموعه اعداد حقیقی را در ریاضیات عمومی با R نشان داده که مشتق از حرف اول کلمه (حقیقی) Real است.

مجموعه اعداد مختلط را با نماد $\mathbb{C}$ نشان می‌دهیم که از حـرف اول (مخـتلط) complex اسـتخراج شـده است.

نکته ۲: مجموعه اعداد حقیقی زیر مجموعه اعداد مختلط است. یعنی $R \subset \mathbb{C}$.

نکته ۳: اعداد مختلط خاصیت ترتیب ندارند یعنی نمی‌توان گفت $z_1 > z_2$ یا $z_1 < z_2$ اما دو عدد z_1 و z_2 می‌توانند مساوی باشند اگر قسمت‌های حقیقی آن‌ها با هم و قسمت‌های موهومی آن‌ها با هم برابر باشند. یعنی با فرض $z_1 = x_1 + iy_1$ و $z_2 = x_2 + iy_2$ آنگاه:

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \ , \ y_1 = y_2$$

مثال ۱: اگر دو عدد $z_1 = 1 + 3i + 5i^2$ و $z_2 = x + (x+y)i$ برابر باشند حاصل xy را بیابید.

حل: داریم $z_1 = z_2$ پس:

$$x + (x+y)i = 1 + 3i + 5i^2 = 1 + 3i - 5 = -4 + 3i$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} x = -4 \\ x + y = 3 \end{array} \quad \Rightarrow \begin{array}{l} x = -4 \\ y = 7 \end{array} \quad \Rightarrow \quad xy = -28 \ .$$

روی مجموعه اعداد مختلط چهار عمل اصلی جمع، تفریق و ضرب و تقسیم چنین تعریف می‌شوند:

$$z_1 \pm z_2 = x_1 \pm x_2 + i(y_1 \pm y_2)$$

$$z_1 z_2 = x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_2 y_1 + x_1 y_2)$$

$$z_1/z_2 = \frac{x_2 x_1 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \ .$$

مثال ۲: با فرض $z_1 = 2 + 3i$ و $z_2 = 6 - 5i$، حاصل $z_1 z_2$ و z_1/z_2 را بیابید.

حل: داریم:

$$z_1 z_2 = (2+3i)(6-5i) = 12 - (-15) + i(18 + (-10)) = 27 + 8i$$

$$z_1/z_2 = (2+3i)/(6-5i) = \frac{12 + (-15) + i(18 - (-10))}{6^2 + (-5)^2} = \frac{-3 + 28i}{61} = -\frac{3}{61} + \frac{28}{61}i$$

تعریف: مزدوج عدد z را که با $\bar{z}$ نشان می‌دهیم چنین تعریف می‌کنیم:

$$\bar{z} = x - iy$$

با این تعریف براحتی می‌توان مشاهده نمود که:

$$\text{i)} \quad z + \bar{z} = 2x \quad , \quad \text{ii)} \quad z - \bar{z} = 2iy \quad , \quad \text{iii)} \quad z\bar{z} = x^2 + y^2$$

$$\text{iv)} \quad z/\bar{z} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + i\frac{2xy}{x^2 + y^2}$$

بعبارتی حاصل جمع و حاصلضرب هر عدد مختلط با مزدوج خود یک عدد حقیقی اما حاصل تفریق و تقسیم آن یک عدد موهومی است.

مثال ۳: نشان دهید برای هر عدد مختلط z حاصل $A=\frac{z+1}{\bar{z}}+\frac{\bar{z}+1}{z}$ عددی حقیقی است.

حل: اگر بنویسیم $A=M+N$ که در آن $M=\frac{z+1}{\bar{z}}$ و $N=\frac{\bar{z}+1}{z}$ مشاهده می‌کنیم که N مزدوج M است در نتیجه حاصل جمع آن‌ها یک عدد حقیقی است.

نکته: مزدوج مزدوج z خود z است یعنی $\overline{(\bar{z})}=z$.

نکته ۴: برای محاسبه z_1/z_2 اول صورت و مخرج را در مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم تا مخرج به یک عدد حقیقی تبدیل شود. بنابراین احتیاجی به حفظ کردن تعریف تقسیم اعداد مختلط نیست.

مثال ۴: حاصل $\frac{3-i}{1-2i}$ را بیابید.

حل: داریم:

$$\frac{3-i}{1-2i}=\frac{(3-i)(1+2i)}{1+4}=\frac{5+5i}{5}=1+i$$

نکته ۵:

$$i)\overline{z_1 \pm z_2}=\bar{z}_1 \pm \bar{z}_2 \qquad , ii)\overline{z_1 . z_2}=\bar{z}_1 . \bar{z}_2 \qquad . \quad iii)\overline{z_1/z_2}=\bar{z}_1/\bar{z}_2$$

تذکر ۱: از قسمت (i) نکته ۵ بعداً در حل تمرین شماره ۱۰ کتاب از این فصل استفاده خواهیم نمود.

نکته ۶: معادله خط در صفحه مختلط به صورت $\bar{E}z+E\bar{z}+C=0$ و معادله دایره به شکل $Az\bar{z}+\bar{E}z+E\bar{z}+D=0$ است که در آن $A\neq 0$ و $E\bar{E}\geq AD$.

تعریف: برای هر عدد مختلط غیر صفر، یعنی $z\neq(0,0)$. عدد مختلطی نظیر $S=u+iv$ وجود دارد طوری که $Sz\neq(1,0)$. این عدد را ***وارون ضربی*** z نامند.

مثال ۵: نشان دهید وارون ضربی عدد غیر صفر $z=x+iy$ به صورت:

$S=\frac{x}{x^2+y^2}-\frac{iy}{x^2+y^2}$ است.

حل:

داریم:

$$Sz=(u,v)(x,y)=(xu-yv,uy+vx)=(1,0)$$

که با مقایسه قسمت‌های حقیقی با هم و موهومی با هم می‌گیریم.

$$xu-yv=1 \quad , \quad uy+vx=0$$

از حل این دستگاه به ترتیب $u=\dfrac{x}{x^2+y^2}$ و $v=\dfrac{-y}{x^2+y^2}$. به این ترتیب

$$S=u+iv=\frac{x}{x^2+y^2}-\frac{iy}{x^2+y^2}.$$

تست ۲: وارون ضربی عدد $z=i$ کدامیک از گزینه‌های زیر است؟

الف) $-i$ ب) 1 ج) i د) -1

حل: گزینه (الف) صحیح است.

زیرا داریم:

$$S=\frac{x}{x^2+y^2}-\frac{iy}{x^2+y^2}=\frac{0}{0+1}-\frac{i(1)}{0+1}=0-i=-i$$

تعریف: اگر z_1 و z_2 دو عدد مختلط باشند آنگاه $\alpha z_1+\beta z_2$ یک ترکیب خطی از z_1 و z_2 است. اگر $\alpha+\beta=1$ باشد این ترکیب خطی را یک ***ترکیب آفین*** نامند.

تست ۳: اگر سه نقطه z_1 و z_2 و z_3 از صفحه مختلط در رابطه $\alpha z_1+\beta z_2+\gamma z_3=0$ صدق کنند که در آن $\alpha,\beta,\gamma\in R$ طوری که $\alpha+\beta+\gamma=0$، آنگاه: (کنکور کارشناسی ارشد)

الف) سه نقطه رئوس یک مثلث متساوی‌الساقین هستند.

ب) سه نقطه رئوس یک مثلث قائم‌الزاویه هستند.

ج) سه نقطه رئوس یک مثلث متساوی‌الاضلاع هستند.

د) سه نقطه در یک راستا قرار دارند.

حل: گزینه (د) صحیح است.

زیرا داریم $\alpha+\beta+\gamma=0$ که از آن $\gamma=-(\alpha+\beta)$. حال با جاگذاری آن در رابطه اولی می‌گیریم:

$$\alpha z_1+\beta z_2+\gamma z_3=0\to z_3=-\frac{\alpha}{\gamma}z_1-\frac{\beta}{\gamma}z_2=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}z_1+\frac{\alpha}{\alpha+\beta}z_2$$

در نتیجه z_3 یک ترکیب آفین از z_1 و z_2 است لذا این سه نقطه روی یک خط قرار دارند. بعبارتی دیگر در یک راستااند.

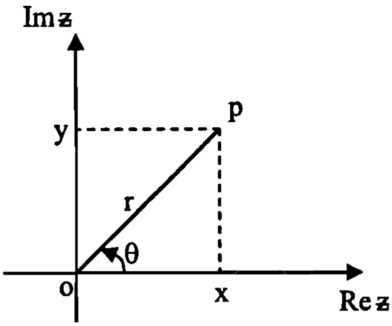
نکته ۷: دو مثلث به ترتیب با رئوس z_3، z_2، z_1 و w_3، w_2، w_1 متشابه‌اند اگر و تنها اگر

$$\begin{vmatrix}1&1&1\\z_1&z_2&z_3\\w_1&w_2&w_3\end{vmatrix}=0.$$

۱-۲ نمایش اعداد مختلط

از آنجایی که هر عدد مختلط را با زوج مرتب (x,y) نشان دادیم، می‌توانیم آن را در دستگاه مختصات دکارتی با نقطه‌ای مانند p به مختصات (x,y) نمایش دهیم (شکل زیر). محور x ها محور حقیقی و محور y ها محور موهومی آن را تشکیل می‌دهند. با توجه به شکل و این فرض که $op=r$ و زاویه‌ای که op در جهت مثبت (عکس حرکت عقربه‌های ساعت را جهت مثبت می‌نامیم) با محور x ها می‌سازد θ در نظر بگیریم می‌توان عدد مختلط z را بر حسب r و θ نوشت که شکل قطبی عدد مختلط است. با توجه به شکل $x=r\cos\theta$ و $y=rsn\theta$ پس z را می‌توان بر حسب r و θ به صورت زیر نوشت:

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$



با استفاده از شکل $r=\sqrt{x^2+y^2}$ و $\theta=tg^{-1}\frac{y}{x}$. عدد مثبت r را ***قدر مطلق یا هنگ*** عدد مختلط z نامند و با نماد $|z|$ نمایش می‌دهند.

نکته ۸: قدر مطلق دارای ویژگی‌های زیر است:

i) $|z|\geq 0$, $|z|=0 \Leftrightarrow z=0$ ii) $|z|=|\bar{z}|$ iii) $|z|^2=z\bar{z}$

iv) $|z_1z_2|\geq|z_1||z_2|$ v) $|z_1+z_2|\leq|z_1|+|z_2|$ vi) $|z_1-z_2|\geq|z_1|-|z_2|$

vii) $|z_1+z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2+2\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2)$

viii) $|z_1-z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2-2\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2)$

(نامساوی کوشی ـ شوارتز)

ix) $|z_1w_1+z_2w_2+\cdots+z_nw_n|\leq\sqrt{|z_1|^2+\cdots+|z_n|^2}\ \sqrt{|w_1|^2+\cdots+|w_n|^2}$

(اتحاد لاگرانژ)

x) $\left|\sum_{k=1}^{n}z_kw_k\right|^2=(\sum_{k=2}^{n}|z_k|^2)(\sum_{k=2}^{n}|w_k|^2)-\sum_{k<j}|z_k\overline{w}_j-z_j\overline{w}_k|^2.$

تست ۴: اگر z_1 و z_2 دو عدد مختلط باشند آنگاه حاصل عبارت $|z_1+z_2|^2-|z_1-z_2|^2$ برابـر اسـت با:

الف) 0 ب) $4\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2)$ ج) $2(|z_1|^2+|z_2|^2)$ د) $2(|z_1|^2-|z_2|^2)$

حل: گزینه (ب) صحیح است.

کافی است ویژگی‌های (vii) و (viii) را از هم کم نماییم.

مثال ۶: اگر z_1 و z_2 دو عدد مختلط باشند بطوری که $|z_1|=1$ ، نشان دهید $|1-\bar{z}_1z_2|=|z_1-z_2|$.

حل: از $|z_1|=1$ نتیجه می‌گیریم که $z_1\bar{z}_1=|z_1|^2=1$. در نتیجه

$$|1-\bar{z}_1z_2|=|z_1\bar{z}_1-\bar{z}_1z_2|=|\bar{z}_1(z_1-z_2)|=|\bar{z}_1||z_1-z_2|=|z_1-z_2|$$

نکته ۹: (i) – رابطه $|z-z_0|=r$ معرف دایره‌ای به مرکز z_0 و به شعاع r است.

(ii) – رابطه $|z-z_1|-|z-z_2|=k$ معرف یک بیضی با کانون‌های z_1 و z_2 است.

تست ۵: معادله $1\le|z-i|+|z+i|\le\sqrt{2}$ نمایش دهنده چه شکلی است؟

الف) دایره ب) خط راست ج) بیضی د) ناحیه بین دو بیضی

حل: گزینه (د) صحیح است.

نامعادلات داده شده ترکیبی از درون و روی بیضی $|z-i|+|z+i|\le\sqrt{2}$

و بیرون و روی بیضی $1\le|z-i|+|z+i|$ می‌باشد.

تست ۶: معادله $|z-i|=|z+i|$ معرف چه شکلی است؟

الف) مبدأ مختصات ب) دو دایره مساوی

ج) خط $y=0$ د) یک بیضی به کانونهای $\pm i$

حل: گزینه (ج) صحیح است.

زیرا داریم:

$$|z-i|=|z+i|\Rightarrow|z-i|^2=|z+i|^2\Rightarrow(z-i)(\overline{z-i})=(z+i)(\overline{z+i})\Rightarrow(z-i)(\bar{z}+i)=$$
$$(z+i)(\bar{z}-i)\Rightarrow z\bar{z}+iz-i\bar{z}+1=z\bar{z}-iz+i\bar{z}+1\Rightarrow 2i(z-\bar{z})=0\Rightarrow 2i(2iy)=0\Rightarrow$$
$$-4y=0\rightarrow y=0.$$

تست۷: معادله دایره $x^۲ + y^۲ = ۴$ در صفحه مختلط کدام است؟

الف) $|z-\bar{z}| = ۲$ ب) $z = ۴$ ج) $z+\bar{z} = ۲$ د) $z\bar{z} = ۴$

حل: گزینه (د) صحیح است.

زیرا داریم $x^۲ + y^۲ = r^۲ = |z|^۲ = ۴$ از طرفی $|z|^۲ = z\bar{z}$ پس $z\bar{z} = ۴$.

تست۸: اگر a و b اعداد حقیقی باشند مقدار عبارت $\left|\frac{a-ib}{b+ia}\right|$ برابر است با:

الف) ۰ ب) ۱ ج) $-\frac{b}{a}$ د) $\frac{a}{b}$

حل: گزینه (ب) صحیح می‌باشد.

زیرا:

$$\left|\frac{a-ib}{b+ia}\right| = \frac{|a-ib|}{|a+ib|} = \frac{\sqrt{a^۲+b^۲}}{\sqrt{b^۲+a^۲}} = ۱$$

زاویه θ را *آرگومان* یا *آوند* z نامند و با نماد $\arg z$ نمایش می‌دهیم. در صورتیکه θ یک آرگومان باشد، $\theta + ۲k\pi$ نیز آرگومانی از z خواهد بود لذا آرگومان یک عدد مختلط یکتا نیست ولی اگر θ را بـه فاصـله $(-\pi, \pi]$ محدود کنیم، آرگومان یکتا می‌شود. این آرگومان را *آرگومان اصلی* نامند و بـا $\operatorname{Arg} z$ نمـایش می‌دهند. به این ترتیب

$$\operatorname{Arg} z = \theta = tg^{-۱} \frac{y}{x} \qquad , \qquad \theta \in (-\pi, \pi]$$

نکات زیر را به خاطر می‌سپاریم. $k \in z$

i) $\arg z = \operatorname{Arg} z + ۲k\pi$

ii) $\arg(z_۱ z_۲) = \arg z_۱ + \arg z_۲ + ۲k\pi$

iii) $\arg(z^n) = n \arg z + ۲k\pi$

iiii) $\arg z + \arg \bar{z} = ۲k\pi$

تذکر ۲: در نوشتن هر عدد مختلط به صورت قطبی مقدار θ مورد نظر همان $\operatorname{Arg} z$ است.

مثال۷: شکل قطبی عدد $z = -۱ + \sqrt{۳}\, i$ را بنویسید.

حل: داریم $r = \sqrt{x^۲+y^۲} = \sqrt{۱+۳} = ۲$, $\theta = tg^{-۱} \frac{y}{x} = tg^{-۱} \frac{\sqrt{۳}}{-۱} = \frac{۲\pi}{۳}$ در نتیجه

$$z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta) \rightarrow -۱ + \sqrt{۳}\, i = ۲(\cos\frac{۲\pi}{۳} + i\sin\frac{۲\pi}{۳})$$

نکته ۱۰: برای هر $n \in N$ به استقراء ثابت می‌شود:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

رابطه فوق به ***فرمول دوموآور*** معروف است که برای توان رساندن اعداد مختلط مورد استفاده قرار می‌گیرد.

تست ۹: حاصل $(۱-i)^{۸۰}$ برابر است با:

الف) $۴۰^۲$ ب) $۲^{۴۰}$ ج) $i^{۴۰}$ د) ۴۰^i

حل: گزینه (ب) صحیح می‌باشد.

زیرا داریم:

$$۱-i\begin{cases} x=۱ \\ y=-۱ \end{cases} \Rightarrow r=\sqrt{۲}\,,\theta = tg^{-۱}\frac{y}{x} = tg^{-۱}(\frac{-۱}{۱}) = -\frac{\pi}{۴}$$

$$\Rightarrow (۱-i)^{۸۰} = (\sqrt{۲}\cos(-\frac{\pi}{۴}) + i\sin(-\frac{\pi}{۴}))^{۸۰} = ۲^{۴۰}(\cos ۲۰\pi - \sin ۲۰\pi) = ۲^{۴۰}$$

تست ۱۰: عبارت $A = (\cos\theta + i\sin\theta)^n + (\cos\theta + i\sin\theta)^{-n}$ برابر است با:

الف) $۲\cos n\theta$ ب) $۲\sin ۲\theta$ ج) $۲\sin n\theta$ د) $۲\cos ۲\theta$

حل: گزینه (الف) صحیح می‌باشد.

زیرا بنابر فرمول دوموآور داریم:

$$A = (\cos\theta + i\sin\theta)^n + (\cos\theta + i\sin\theta)^{-n} = \cos n\theta + i\sin n\theta + \frac{۱}{\cos n\theta + i\sin n\theta}$$

$$= (\cos n\theta + i\sin n\theta) + \frac{\cos n\theta - i\sin n\theta}{\cos^۲ n\theta + \sin^۲ n\theta} = ۲\cos n\theta$$

نکته ۱۱: اگر $z + \frac{۱}{z} = ۲\cos\theta$ آنگاه $z^n + \frac{۱}{z^n} = ۲\cos n\theta$.

تست ۱۱: مقدار $Arg\frac{i}{۱+i}$ برابر است با:

الف) $\frac{\pi}{۴}$ ب) $-\frac{\pi}{۴}$ ج) $\frac{۳\pi}{۴}$ د) $\frac{۵\pi}{۴}$

حل: گزینه (ج) صحیح می‌باشد.

زیرا:

$$Arg\frac{i}{(۱+i)} = Arg i - Arg(۱+i) = \frac{\pi}{۴}$$

زیرا:

$$\mathrm{Arg}(1+i)=\frac{\pi}{4} \quad , \quad \mathrm{Arg}\, i=\frac{\pi}{2}.$$

نکته ۱۲:

$$1+z+z^2+\cdots+z^n=\frac{1-z^{n+1}}{1-z}$$

تذکر ۱۳: تمرین ۳ فصل اول کتاب با استفاده از این اتحاد حل می‌شود.

۱-۳ توان‌ها و ریشه‌ها

همانطوری که مشاهده نمودیم با استفاده از فرمول دوموآور می‌توان توان هر عدد مختلط را یافت. کاربرد دیگری از این فرمول بدست آوردن ریشه‌های اعداد است. چون $\cos\theta$ و $\sin\theta$ دارای دوره تناوب 2πاند در نتیجه

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)=r[\cos(2k\pi+\theta)+i\sin(2k\pi+\theta)]$$

حال اگر از طرفین ریشه nام بگیریم و فرمول دوموآور را اعمال کنیم خواهیم داشت:

$$z^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{2k\pi+\theta}{n}\right)+i\sin\left(\frac{2k\pi+\theta}{n}\right)\right]$$

که n ریشه z به ترتیب با انتخاب $k=0,1,2,\cdots,(n-1)$ بدست می‌آیند.

نکته ۱۳: از نظر هندسی n مقدار $z^{\frac{1}{n}}$ مطابقند با رأس‌های یک n ضلعی منتظم که محاط در دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و شعاع $\sqrt[n]{r}$ است. این تعبیر باعث می‌شود مجموع ریشه‌ها صفر شود.

مثال ۸: ریشه‌های هفتم عدد ۱- را بیابید و با استفاده از این ریشه‌ها نشان دهید

$$\tan\frac{\pi}{7}+\tan\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{5\pi}{7}=\frac{1}{2}.$$

حل: برای محاسبه ریشه‌های هفتم عدد ۱- کافی است اول مقدار θ را مشخص کنیم و سپس $n=7$ اختیار شود داریم:

$z=x+iy=-1$ پس $\theta=tg^{-1}\frac{y}{x}=tg^{-1}\left(\frac{0}{-1}\right)=\pi$ در نتیجه:

$$(-1)^{\frac{1}{7}}=\cos\left(\frac{2k\pi+\pi}{7}\right)+i\sin\left(\frac{2k\pi+\pi}{7}\right), k=0,1,2,3,4,5,6$$

چون مجموع ریشه‌ها صفر است پس مجموع قسمت‌های حقیقی باید صفر باشند یعنی:

$$\mathrm{Re}(z_1+z_2+z_3+z_4+z_5+z_6+z_7)=0\Rightarrow$$

$$\cos\frac{\pi}{۷}+\cos\frac{۳\pi}{۷}+\cos\frac{۵\pi}{۷}+\cos\frac{۷\pi}{۷}+\cos\frac{۹\pi}{۷}+$$
$$\cos\frac{۱۱\pi}{۷}+\cos\frac{۱۳\pi}{۷}=۰$$
$$۲\cos\frac{\pi}{۷}+۲\cos\frac{۳\pi}{۷}+۲\cos\frac{۵\pi}{۷}+\cos\pi=۰\Rightarrow$$
$$\cos\frac{\pi}{۷}+\cos\frac{۳\pi}{۷}+\cos\frac{۵\pi}{۷}=\frac{۱}{۲}.$$

مثال ۹: ریشه‌های معادله $z^۶+i=\sqrt{۳}$ را بیابید.

حل: می‌نویسیم

$$z^۶=\sqrt{۳}-i=x+iy\to x=\sqrt{۳}\ ,\ y=-۱\Rightarrow r=۲,\ \theta=tg^{-۱}(\frac{-۱}{\sqrt{۳}})=-\frac{\pi}{۶}$$

$$\Rightarrow z^۶=۲[\cos(۲k\pi-\frac{\pi}{۶})+i\sin(۲k\pi-\frac{\pi}{۶})]$$

$$\Rightarrow z=\sqrt[۶]{۲}\ [\cos(\frac{۲k\pi-\frac{\pi}{۶}}{۶})+i\sin(\frac{۲k\pi-\frac{\pi}{۶}}{۶})]$$

$$\Rightarrow z=\sqrt[۶]{۲}\ [\cos(۱۲k-۱)\frac{\pi}{۳۶}+i\sin(۱۲k-۱)\frac{\pi}{۳۶}]\ ,k=۰,۱,۲,۳,۴,۵\ .$$

تست ۱۲: معادله $۱+z^۲+z^۴+\cdots+z^{۱۰}=۰$ چند ریشه دارد؟

الف) ریشه ندارد.
ب) ده ریشه دارد.
ج) پنج ریشه دارد.
د) تنها یک ریشه حقیقی دارد.

حل: گزینه (ب) صحیح می‌باشد.

زیرا بنابر قضیه اساسی جبر، هر معادله از درجه n دقیقاً n ریشه دارد. اما اگر در این تست سوال می‌شد که این معادله چند ریشه حقیقی دارد گزینه (الف) درست می‌بود. زیرا مجموع اعداد مثبت هیچ وقت صفر نمی‌شود.

فصل دوم

متغیرهای مختلط

۲-۱ برخی از مفاهیم توپولوژی در صفحه مختلط

در ابتدا برخی از تعاریف و مفاهیم اساسی که جهت درک ادامه بحث لازم داریم را به اجمال بیان می‌کنیم.

فاصله اقلیدسی دو نقطه z_1 و z_2 را در صفحه مختلط با $d(z_1,z_2)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$d(z_1,z_2)=|z_2-z_1|.$$

مجموعه همه نقاطی از $\mathbb{C}$ مانند z که در شرط $d(z_1,z_0)<\varepsilon$ صدق می‌کنند را با $N(z_0,\varepsilon)$ نشان داده و یک همسایگی z_0 به شعاع ε می‌نامیم. هر همسایگی z_0 به جز خود z_0 را یک همسایگی محذوف z_0 می‌نامیم.

نقطه $z_0\in s$ را یک *نقطه داخلی (درونی)* s می‌نامیم هرگاه یک همسایگی از z_0 وجود داشته باشد به طوری که تماماً در s واقع شود. همچنین اگر یک همسایگی از z_0 مانند $N(z_0,\varepsilon)$ موجود باشد، به طوری که $N(z_0,\varepsilon)\cap s=\emptyset$ آنگاه z_0 را یک *نقطه خارجی* s می‌نامیم. نقطه z_0 یک *نقطه مرزی* (کرانه‌ای) s است هرگاه هر همسایگی s شامل نقاطی درون s و نقاطی خارج s باشد. مجموعه همه نقاط مرزی s را با ∂s نشان داده و *مرز* s می‌نامیم. مجموعه s را *باز* می‌نامیم. هرگاه هیچ یک از نقاط مرزی خود را در برنگیرد و چنانچه $\partial s\subset s$ باشد s را *بسته* می‌نامیم. *بست* s را با $\bar{s}$ نشان داده و با $s\cup\partial s$ تعریف می‌کنیم. نقطه z_0 را یک *نقطه حدی (یا نقطه انباشتگی)* s می‌نامیم هرگاه هر همسایگی s شامل نقطه‌ای از s متمایز از z_0 باشد.

نکته ۱: مجموعه‌های متناهی فاقد نقطه حدی هستند.

نکته ۲: لازم نیست نقطه حدی یک مجموعه، عضو مجموعه باشد.

نکته ۳: اگر مجموعه s شامل نقاط حدی خودش باشد آنگاه s بسته است.

تست۱: نقطه صفر نقطه حدی کدامیک از مجموعه‌های زیر است؟

الف) $\{in \mid n\in \mathbb{Z}\}$ ب) $\{i^n \mid n\in \mathbb{Z}\}$ ج) $\{ni^n \mid n\in \mathbb{Z}\}$ د) $\left\{\frac{i}{n}^n \mid n\in \mathbb{Z}\right\}$

حل: گزینه (د) صحیح است.

زیرا با توجه به این که همواره $|i^n|=1$ در این صورت برای هر $\varepsilon>0$ می‌توان Nای را یافت که

$$n\geq N\Rightarrow\left|\frac{i^n}{n}\right|=\frac{1}{n}<\varepsilon$$

بنابراین هر همسایگی صفر، حداقل شامل یک عضو مجموعه $\left\{\frac{i^n}{n}\mid n\in \mathbb{Z}\right\}$ است.

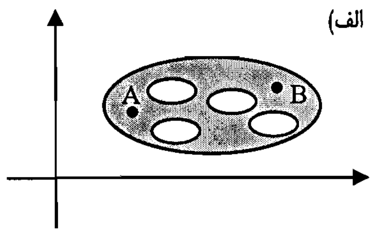
گرد آیه A_i از زیر مجموعه‌های باز s را یک ***پوشش باز*** s می‌نامیم هرگاه $s\subset\cup A_i$ باشد و s را ***فشرده*** می‌نامیم هرگاه هر پوشش باز آن شامل زیر پوشش متناهی باشد.

زیر مجموعه باز s از $\mathbb{C}$ را ***همبند*** می‌نامیم هرگاه هر دو نقطه دلخواه z_0 و z_1 را به توان با رسم خطوطی به هم وصل کرد. هر مجموعه باز و همبند را ***حوزه*** نامند.

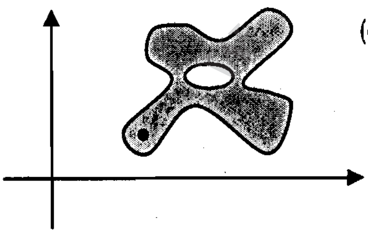
نکته۴: هر همسایگی یک مجموعه باز، همبند و در نتیجه حوزه است.

تست۲: کدامیک از نواحی داده شده زیر همبند نیست؟

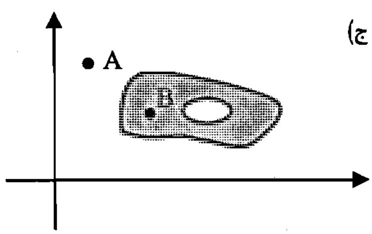
الف)



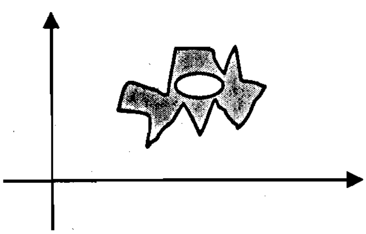
ب)



ج)



د)



حل: گزینه (ج) صحیح است.

زیرا A عضوی از مجموعه است که با هر نقطه نظیر B وقتی متصل شوند خط حاصل در مجموعه واقع نمی‌گردد.

مجموعه S را **کرندار** گوییم هرگاه عدد مثبتی نظیر M موجود باشد به گونه‌ایکه برای هر z از این مجموعه داشته باشیم $|z| < M$.

نکته ۵: هر مجموعه بسته و کراندار فشرده است.

تست ۳: کدامیک از مجموعه زیر یک مجموعه فشرده است؟

الف) $\left\{z \in \mathbb{C} : 0 \le \operatorname{Arg} z \le \frac{\pi}{4}\right\}$ ب) $\left\{z \in \mathbb{C} : 0 \le |z| \le 1\right\}$

ج) $\left\{z \in \mathbb{C} : |z| \le 1, 0 \le \operatorname{Arg} z \le \frac{\pi}{4}\right\}$ د) $\left\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, 0 \le \operatorname{Arg} z \le \pi\right\}$

حل: گزینه (ج) صحیح است.

زیرا این مجموعه کراندار و بسته است بنابراین فشرده است.

در صفحه مختلط نقطه در بی‌نهایت وجود ندارد اما می‌توان با اضافه کردن یک نقطه به صفحه مختلط آن را توسعه داد. حاصل را که با $\overline{\mathbb{C}}$ و نقطه را با ∞ نشان می‌دهیم مجموعه‌ای است متشکل از اجتماع $\mathbb{C}$ و این نقطه که آنرا نقطه در بی‌نهایت نامند. نقاط صفحه مختلط به علاوه این نقطه را ***صفحه مختلط توسعه یافته*** می‌نامیم.

نکته ۶: نقطه در بی‌نهایت یک نقطه حدی برای مجموعه $\operatorname{Re} z > 0$ و مجموعه $\operatorname{Re} z < 0$ است.

۲-۲ متغیرهای مختلط

فرض می‌کنیم S یک مجموعه از اعداد مختلط در صفحه مختلط باشد. برای هر نقطه $z = x + iy \in S$ قاعده‌ای برای نسبت دادن اعداد مختلط متناظر با $w = u + iv$ تعیین می‌کنیم و آنرا یک تابع از متغیر مختلط z تعریف کرده و با نماد

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

نشان می‌دهیم. مجموعه S را **دامنه** تابع و همه مجموعه مقادیر w را **برد تابع** می‌نامیم.

مثال۸: دامنه توابع زیر را مشخص کنید.

الف) $w = f(z) = \text{Arg}z$

ب) $w = \dfrac{z^2 - 1}{z^2 + 4}$

حل: تابع $w = \text{Arg}z$ در $z = 0$ تعریف نمی‌شود بنابراین دامنه آن $\mathbb{C} - \{0\}$.

تابع $w = \dfrac{z^2 - 1}{z^2 + 4}$ در $z = \pm 2i$ تعریف نمی‌شود لذا دامنه این تابع $\mathbb{C} - \{\pm 2i\}$.

توجه: از تعریف تابع مختلط این‌گونه استنباط می‌شود که فرض کنیم تنها یک مقدار از w به هر مقدار z نسبت داده شود به عبارتی w یک تابع تک مقداری باشد اما در مورد تابع مختلط چنین نیست. بعنوان مثال تابع $w = z^{\frac{1}{2}}$ یا تابع $w = \arg z$ توابعی چند مقداری‌اند هر یک از این مقادیر را یک **شاخه** نامند.

مثلاً تابع $w = z^{\frac{1}{2}}$ دو شاخه و تابع $w = \arg z$ بی‌نهایت شاخه دارد. شاخه $w = \text{Arg}z$ را ***شاخه اصلی*** $w = \arg z$ تعریف می‌کنند.

نکته: توابع مختلط را نمی‌توان در صفحه z یا صفحه w رسم کرد چون نیاز به چهار محور مختصات خواهد بود.

نکته۷: هر تابع یک به یک تابعی تک مقداری است.

تست۴: **کدامیک از توابع زیر تک مقداری است؟**

الف) $w = z + \dfrac{1}{z}$ ب) $w = z^{\frac{1}{2}}$

ج) $w = \dfrac{2 + iz}{2i - z}$ د) $w = z^2 + \sqrt{z}$

حل: گزینه (ج) صحیح است.

زیرا برای هر دو مقدار z_1 و z_2 داریم:

$$\frac{2 + iz_1}{2i - z_1} = \frac{2 + iz_2}{2i - z_2} \Rightarrow 4i - 2z_2 - 2z_1 - iz_1z_2 = 4i - 2z_1 - 2z_2 - iz_1z_2$$

$$\Rightarrow z_1 = z_2$$

تابع یک به یک است پس تک مقداری است.

۲-۳ حد و پیوستگی

فرض کنید $A\subset B$ و $f(z)$ تابعی از A به B باشد. گوییم حد تابع $f(z)$ در نقطه حدی z_0 از A برابر عدد مختلط w_0 است و می‌نویسیم $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=w_0$ هرگاه

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,0<|z-z_0|<\delta\Rightarrow|f(z)-w_0|<\varepsilon$$

یادداشت ۱: بسیاری از قضایای مربوط به حد در توابع حقیق برای حالت مختلط نیز قابل تعمیم‌اند. بعنوان مثال

i) حد در صورت وجود یکتاست.

ii) $\lim\limits_{z\to z_0}(f\pm g)=w_1\pm w_2$ (iii $\lim\limits_{z\to z_0}(fg)=w_1w_2$ (iv $\lim\limits_{z\to z_0}(f/g)=\frac{w_1}{w_2}$

که در آن $w_2\neq 0$ با این شرط که $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=w_1$ و $\lim\limits_{z\to z_0} g(z)=w_2$.

نکته ۸: اگر $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=0$ و $g(z)$ تابعی کراندار باشد آنگاه $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)g(z)=0$.

تست ۵: کدام گزاره در مورد تابع $f(z)=\operatorname{Arg}z$ درست است؟

الف) این تابع روی محور حقیقی منفی حد ندارد.

ب) این تابع روی محور موهومی منفی حد دارد.

ج) روی هر محوری این تابع حد دارد.

د) تنها در $z=\pm 1$ حد ندارد.

حل: گزینه (الف) صحیح است.

با مراجعه به مثال ۵ کتاب در صفحه ۲۷ مشاهده می‌شود که اگر در هر همسایگی هر نقطه‌ای روی قسمت منفی محور حقیقی دو جهت حرکت را برای رسیدن به این نقطه در نظر بگیریم اگر جهت حرکت مثبت باشد در ربع دوم این اتفاق می‌افتد که به π نزدیک می‌شود و اگر در عکس جهت این حرکت صورت گیرد در ربع سوم این اتفاق صورت می‌گیردکه به دلخواه به $-\pi$ نزدیک می‌شود بنابراین حد وجود ندارد.

تابع $f(z)$ در نقطه $z_0=x_0+iy_0$ پیوسته است اگر u و v در نقطه (x_0,y_0) پیوسته باشند.

تعریف دیگر و مشابه آن این که

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)\ .$$

مثال ۲: نشان دهید تابع $f(z)=\begin{cases}\frac{z}{\bar z} & ,z\neq 0\\ 1 & ,z=0\end{cases}$ در $z=0$ پیوسته نیست.

حل: این مثال ۶ کتاب در صفحه ۲۸ است که به اشتباه قسمت اول $\bar z$ درج شده است که باید به صورت مثال ۲ داده شده تصحیح شود. چون $z=x+iy$ اگر روی محور xها به $z=0$ نزدیک شود در این

صورت چون $y=0$ پس $\lim\limits_{z\to 0} f(z)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+0}{x-0}=1$ و روی محور yها اگر به $z=0$ نزدیک شویم، چون $x=0$ است پس $\lim\limits_{z\to 0} f(z)=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{0+iy}{0-iy}=-1$ بنابراین تابع حد ندارد بعبارتی پیوسته نیست.

تست ۷: **کدام گزینه در مورد تابع** $f(z)=\begin{cases}\bar{z} & ,z\neq 0\\ 1 & ,z=0\end{cases}$ **درست نیست؟**

الف) تابع در $z=0$ حد دارد.
ب) تابع در $z=0$ پیوسته نیست.
ج) تابع در همه نقاط از صفحه z پیوسته است.
د) تابع در همه نقاط از صفحه z دارای حد است.

حل: گزینه (ج) صحیح است.

زیرا تابع در تمام نقاط از صفحه z حد دارد اما در $z=0$ پیوسته نیست یعنی در تمام نقاط از صفحه z به غیر از $z=0$ پیوسته است.

نکته ۹: اگر $f(z)$ در ناحیه R پیوسته باشد آنگاه $|f(z)|$ برای هر نقطه از R کراندار است و ماکزیمم خود را در R برمی‌گزیند.

فرض کنید $f(z)$ در R پیوسته باشد، آنگاه در هر نقطه نظیر z_0 داخل R و هر $\varepsilon>0$ می‌توانیم $\delta>0$ای بیابیم طوری که $|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon$ وقتی که $|z-z_0|<\delta$. معمولاً δ به ε و z_0 وابسته است، با وجود این اگر بتوانیم یک δای برای هر ε بیابیم که مستقل از z_0 باشد گوییم $f(z)$ در R ***پیوسته یکنواخت*** است. مثلاً تابع $f(z)=\dfrac{1}{z}$ روی مجموعه $0<|z|<1$ پیوسته یکنواخت نیست اما روی $|z|>1$ پیوسته یکنواخت است. یا تابع $f(z)=\dfrac{1}{z^2}$ روی مجموعه $\dfrac{1}{2}\leq|z|\leq 1$ پیوسته یکنواخت است. اما روی $0<|z|\leq 1$ پیوسته یکنواخت نیست.

(مراجعه شود به حل تمرین ۵ از این فصل)

۲-۴ مشتق

فرض کنید $f(z)$ تابعی تک مقداری در همسایگی یک نقطه z_0 باشد مشتق $f(z)$ در z_0 که با $f'(z)$ نشان می‌دهیم چنین تعریف می‌کنیم:

$$f'(z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}.$$

یادداشت ۲: قضایای مشتق توابع حقیقی در مورد توابع مختلط هم برقرارند. بعنوان مثال اگر $f(z)$ و $g(z)$ مشتق‌پذیر باشند آنگاه:

$$\text{i)}\quad [f(z)\pm g(z)]' = f'(z)\pm g'(z)$$

$$\text{ii)}\quad [f(z)g(z)]' = f'(z)g(z)+f(z)g'(z)$$

$$\text{iii)}\quad [f(z)/g(z)]' = \frac{f'(z)g(z)-f(z)g'(z)}{g^{2}(z)}\ ,\ g(z)\neq 0$$

نکته ۱۰: اگر f در z_0 دارای مشتق و g در $f(z_0)$ مشتق داشته باشد آنگاه مشتق $g(f(z))$ در z_0 به صورت $f'(z_0)g'(f(z_0))$ داده می‌شود.

تذکر: برخی از قضایای مشتق نظیر قضیه رُل و قضیه مقدار میانگین را نمی‌توان برای توابع مختلط تعمیم داد.

تست ۷: اگر $f(z)=(\sqrt[n]{a}\ z+b)^n$ که n عددی طبیعی و a و b اعداد حقیقی‌اند آنگاه $f^{(n)}(z)$ کدام است؟

الف) $\frac{a}{n!}$ ب) $\frac{\sqrt{n}\ a}{n!}$ ج) $n!a$ د) $n!\sqrt[n]{a}$

حل: گزینه (ج) درست است.

زیرا داریم:

$$f(z)=(\sqrt[n]{a}\ z+b)^n = az^n+g(z)\quad ,\quad \deg g(z)<n$$

چون درجه $g(z)$ از n کمتر است پس اگر از طرفین n بار مشتق بگیریم $g^{(n)}(z)=0$ و از طرفی اگر از z^n به تعداد n بار مشتق بگیریم حاصل $n!$ می‌شود در نتیجه به خاطر وجود a جواب $n!a$ می‌شود.

۲-۵ معادلات کوشی ـ ریمان

اگر چه شرط کافی مشتق‌پذیری توابع مختلط همانند توابع حقیقی است اما برای توابع مختلط شرایط لازم، اما نه کافی، وجود دارند که به معادلات کوشی ـ ریمان معروفند و به صورت زیر داده می‌شوند.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{و} \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

تذکر: برای مشتق‌پذیری باید حاصل این معادلات پیوسته باشند.

نکته ۱۱: مشتق تابع $f(z)$ در مختصات بر حسب x و y می‌تواند به یکی از دو صورت زیر باشد:

$$\text{i)}\ f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{و} \quad \text{ii)}\ f'(z)=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}$$

تست ۸: کدامیک از توابع زیر در هیچ نقطه‌ای مشتق‌پذیر نیست؟

الف) $f(z)=z^{۲}$ ب) $f(z)=\bar{z}$ ج) $f(z)=|z|^{۲}$ د) $f(z)=|\bar{z}|^{۲}$

حل: گزینه (ب) صحیح است.

زیرا $f(z)=\bar{z}=x-iy=u+iv$ که از آن $\frac{\partial u}{\partial x}=۱$ و $\frac{\partial v}{\partial y}=-۱$ که برابر نیستند. اما گزینه (ج) و (د) در $z=۰$ مشتق‌پذیرند.

تست ۹: در مورد تابع $f(z)=\begin{cases}\frac{(\bar{z})^{۲}}{z} & ,z\neq ۰\\ ۰ & ,z=۰\end{cases}$ کدام گزینه صحیح است؟

الف) f در صفر پیوسته نیست.

ب) f در نقطه صفر پیوسته و در روابط کوشی ـ ریمان صدق می‌کند.

ج) f در نقطه صفر مشتق دارد.

د) f در نقطه صفر پیوسته و در روابط کوشی ـ ریمان صدق نمی‌کند.

حل: گزینه (د) صحیح است

زیرا براحتی با توجه به مثال ۲ می‌توان دریافت که تابع در صفر پیوسته است اما چون $(\bar{z})^{۲}=(x-iy)^{۲}$ و $z=x+iy$ در نتیجه:

$$f(z)=\frac{(\bar{z})^{۲}}{z}=\frac{(\bar{z})^{۲}.\bar{z}}{z\bar{z}}=\frac{(\bar{z})^{۳}}{|z|^{۲}}=\frac{(x-iy)^{۳}}{x^{۲}+y^{۲}}=$$

$$\frac{x^{۳}-۳xy^{۲}}{x^{۲}+y^{۲}}+i\frac{y^{۳}-۳x^{۲}y}{x^{۲}+y^{۲}}=u+iv$$

و براحتی می‌توان مشاهده نمود که u و v در $z=۰$ دارای مشتق‌های جزیی نیستند.

نکته ۱۲: معادلات کوشی ـ ریمان در مختصات قطبی به صورت زیر در می‌آیند.

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{۱}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\ ,\ \frac{\partial v}{\partial r}=-\frac{۱}{۲}\frac{\partial u}{\partial \theta}\ ,\ r>۰$$

نکته ۱۳: مشتق تابع $f(z)$ در مختصات قطبی به یکی از دو صورت زیر داده می‌شوند.

$$\text{i)}\ f'(z)=\left(\frac{\partial u}{\partial r}+i\frac{\partial v}{\partial r}\right)(\cos\theta-i\sin\theta)$$

$$\text{ii)}\ f'(z)=\left(\frac{\partial v}{\partial \theta}-i\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)(\cos\theta-i\sin\theta)/r$$

تست ۱۰: اگر اگر $f(z)=\ln|z|+i\theta$ تعریف شود حاصل $f'(z)$ کدامیک از گزینه‌های زیر است؟

الف) $\frac{1}{z}$ ب) z ج) $\frac{1}{|z|}$ د) $\frac{1}{|z|}+i$

حل: گزینه (الف) صحیح است.

زیرا از آنجایی که $\ln|z|=\ln r=u$ و $\theta=v$ در نتیجه:

$$f'(z)=\left(\frac{\partial u}{\partial r}+i\frac{\partial v}{\partial r}\right)(\cos\theta-i\sin\theta)=\left(\frac{1}{r}+0\right)(\cos\theta-i\sin\theta)=$$

$$\frac{1}{r}(\cos\theta-i\sin\theta)=\frac{(\cos\theta-i\sin\theta)(\cos\theta+i\sin\theta)}{r(\cos\theta+i\sin\theta)}=\frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{z}=\frac{1}{z}$$

مثال ۱۳: مشتق‌پذیری تابع $f(z)=\sqrt{\operatorname{Im} z^2}$ را در $z=0$ بررسی کنید.

حل: داریم $\operatorname{Im} z^2=\operatorname{Im}(x+iy)^2=2xy$ در نتیجه $f(z)=\sqrt{2xy}=u+iv$ یعنی $u=\sqrt{2xy}$ و $v=0$ براحتی می‌توان نشان داد که معادلات کوشی ـ ریمان در $z=0$ برقرار و برابر صفرند اما در این نقطه پیوسته نیستند بنابراین تابع داده شده در $z=0$ مشتق‌پذیر نیست.

۲-۶ توابع تحلیلی ـ توابع موزون

تابع $f(z)$ را در $z=z_0$ تحلیلی گوییم اگر در z_0 و همسایگی آن مشتق‌پذیر باشد و تابعی که همه جا تحلیلی باشد ***تابع تام*** نامیده می‌شود.

مثال ۱۴: نشان دهید تابع $f(z)=|z|^2$ در $z=0$ تحلیلی نیست.

حل: داریم $f(z)=|z|^2=x^2+y^2=u+iv$ یعنی $u=x^2+y^2$ و $v=0$. براحتی می‌توان مشاهده نمود که تنها در $z=0$ تابع مشتق‌پذیر است و در هر همسایگی آن $\frac{\partial u}{\partial x}=2x\neq\frac{\partial v}{\partial y}=0$ پس تابع در هیچ نقطه‌ای تحلیلی نیست.

نکته ۱۴: اگر تابعی در $z = z_0$ تحلیلی نباشد اما در یک همسایگی آن تحلیلی باشد نقطه z_0 را ***نقطه تکین*** تابع نامند.

چند نکته در مورد توابع تحلیلی

i) هر تابع چند جمله‌ای تابعی تحلیلی است.

ii) اگر f و $\bar{f}$ تحلیلی باشند آنگاه f تابعی ثابت است. (تمرین ۶ از همین فصل)

iii)اگر $|f|$ در ناحیه‌ای که f تحلیلی است ثابت باشد آنگاه f هم تابعی ثابت است. (تمرین ۶ از همین فصل)

iv) اگر f تابعی تحلیلی به گونه‌ای که $\operatorname{Re} f$ ثابت باشد آنگاه f هم تابعی ثابت است.

v) اگر f در D تحلیلی و f' هم در هر نقطه از D صفر باشد آنگاه f تابعی ثابت است.

تست ۱۱: نقاط تکین تابع $f(z) = \dfrac{iz(z+1)}{z(z^2-1)}$ **کدامند؟**

الف) $\pm i$ ب) $0, \pm i$ ج) $0, \pm 1$ د) 0

حل: گزینه (ج) صحیح است.

زیرا تابع در این نقاط تعریف نمی‌شود.

تابعی نظیر $f(x,y)$ را که در معادله لاپلاس صدق کند ***تابع همساز (یا موزون)*** نامند. یعنی برای هر x و y داشته باشیم:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

نکته ۱۵: توابع u و v از تابع مختلط $f(z) = u + iv$ توابعی همسازند اگر f تحلیلی و مشتق‌های مرتبه دوم u و v پیوسته باشند.

تست ۱۲: اگر تابع $u(x,y) = 3ax^2y - 2y^3 + 5xy$ **همساز باشند آنگاه مقدار** a **کدام است؟**

الف) ۳- ب) ۲ ج) ۴ د) ۱۲

حل: گزینه (ب) صحیح است.

زیرا داریم:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 6axy \quad \to \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6ay$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -6y^2 + 5x \to \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -12y$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲}+\frac{\partial^۲ u}{\partial y^۲}=۰ \rightarrow ۶ay-۱۲y=۰ \rightarrow a=۲$$

تذکر: برای تفکیک دو تابع همساز u و v از هم، v را ***مزدوج همساز*** u می‌نامیم.

نکته ۱۶: اختلاف بین هر دو مزدوج همساز u مقداری ثابت است.

نکته ۱۷: اگر u مزدوج همساز v و v مزدوج همساز u باشد آنگاه u و v توابعی ثابت خواهند بود.

تست ۱۳: **اگر $u+iv$ تحلیلی باشد، تحت چه شرایطی تابع $u+iv$ هم تحلیلی است؟**

(کارشناسی ارشد)

الف) اگر u فقط تابعی از x و v فقط تابعی از y باشد.

ب) اگر x فقط تابعی از y و v فقط تابعی از x باشد.

ج) اگر u و v هر دو مقادیر ثابتی باشند.

د) همواره تحلیلی است.

حل: با توجه به نکته ۱۷ گزینه (ج) صحیح می‌باشد.

تست ۱۴: **اگر $u(x,y)=۲x(۱-y)$ و تابع v یک مزدوج همساز u باشد آنگاه $f=u+iv$ تحلیلی است و $f'(z)$ برابر می‌شود با:**

الف) $f'(z)=۲iz$

ب) $f'(z)=-y+ix$

ج) $f'(z)=۲(۱-y)+۲ix$

د) $f'(z)=۲(۱-y)+۲i(x-۱)$

حل: گزینه (ج) صحیح است.

باید شرایط کوشی ـ ریمان برقرار باشند. داریم:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \rightarrow ۲(۱-y)=\frac{\partial u}{\partial y}=v=۲y-y^۲+f(x)$$

از طرفی $\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}$ در نتیجه $f'(x)=۲x$ که از آن $f'(x)=x^۲$ پس $v=۲y-y^۲+x^۲$

لذا

$$f(z)=u+iv=۲x(۱-y)+i(۲y-y^۲+x^۲) \rightarrow f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial u}{\partial x}=۲(۱-y)+۲ix$$

۲-۷ عملگرها

اگر F یک تابع حقیقی مقدار باشد آنگاه گرادیان F که با ∇F نشان داده می‌شود به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\nabla F=\frac{\partial F}{\partial x}+i\frac{\partial F}{\partial y}.$$

یادداشت ۱۳: براحتی می‌توان نشان داد که $\nabla F = 2\frac{\partial F}{\partial \bar{z}}$.

اگر $A(x,y) = P(x,y) + iQ(x,y)$، آنگاه *دایورژانس* A را که با dirA نشان می‌دهیم چنین تعریف می‌شود:

$$\operatorname{div}A = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}.$$

یادداشت ۱۴: می‌توان نشان داد که:

$$\operatorname{div}A = \nabla.A = \operatorname{Re}(\nabla A) = \operatorname{Re}[(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y})(P + iQ)]$$

$$= 2\operatorname{Re}[\frac{\partial B}{\partial z}]$$

که در آن $A(x,y) = B(z,\bar{z})$.

چرخه یا کرل A که با $\operatorname{curl}(A)$ نشان داده می‌شود به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\operatorname{curl}(A) = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}.$$

چند نکته در مورد عملگرهای فوق

i) ∇F برداری عمود بر منحنی $F(x,y) = c$ است.

ii) $\operatorname{curl}A = \nabla \times A = \operatorname{Im}(\nabla A) = 2\operatorname{Im}(\frac{\partial B}{\partial z})$

iii) اگر A حقیقی یا $\operatorname{Im}A$ همساز باشد آنگاه $\operatorname{curl}(\nabla A) = 0$.

iv) اگر $f(z)$ تابعی تحلیلی باشد آنگاه $\nabla^2[f(z)]^n = n^2[f(z)]^{n-2}[f'(z)]^2$.

v) اگر A موهومی یا به حالت کلی‌تر $\operatorname{Re}(A)$ همساز باشد آنگاه $\operatorname{div}(A) = 0$.

vi) $\nabla^4 u = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = \frac{16\partial^4 u}{\partial z^2 \partial \bar{z}^2}$.

تست ۱۵: اگر $A = 2x^3y^2 - ix^2y^2$ باشد آنگاه divA کدام است؟

الف) $2x - 3yx^2$ ب) $3x^2 - 2y^3$ ج) $x^3 - 2y^2$ د) $2(2x - y)$

حل: گزینه (د) صحیح است.

زیرا داریم:

$$\operatorname{div}A = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = 4x - 2y.$$

فصل سوم

توابع غیرجبری مقدماتی

با تعریف تابع مختلط، تابع تحلیلی و تابع همساز آشنا شدیم. حال آماده‌ایم تا از آن‌ها برای معرفی توابع نظیر توابع نمایی، مثلثاتی، لگاریتمی و ... استفاده نماییم. برخی از این توابع ویژگی‌هایی دارند که برای توابع حقیقی برقرار نیستند. مثلاً تابع نمایی تابعی متناوب است یا معادلاتی نظیر $\sin z = ۵$ دارای جواب می‌باشد. هر یک از این توابع می‌توانند به عنوان تبدیل یا نگاشت از صفحه z به صفحه w تعبیر شوند.

۳-۱ تابع نمایی

به ازای هر عدد مختلط $z = x + iy$ تابع نمایی مختلط را که با نماد e^z یا $\exp(z)$ نمایش می‌دهیم چنین تعریف می‌شود:

$$\exp(z) = e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$$

که دارای ویژگی‌های زیر است:

i) $\frac{d}{dz}(\exp(z)) = \exp(z)$

ii) $\exp(z_1).\exp(z_2) = \exp(z_1 + z_2)$

iii) $\exp(z_1) \div \exp(z_2) = \exp(z_1 - z_2)$

iv) $\exp(z + 2\pi i) = \exp(z)$

v) $\exp(\overline{z}) = \overline{(\exp(z))}$

نکته ۱: تابع نمایی یک تابع متناوب با دوره تناوب $2\pi i$ است.

نکته ۲: تابع نمایی تابع تحلیلی اما تابع $\exp(\overline{z})$ تابعی تحلیلی نیست.

نکته ۳: تابع نمایی می‌تواند مقدار منفی هم باشد.

تست ۱: مقدار $e^{۱+۴\pi i}$ برابر است با:

الف) $e^{۴\pi i}$ ب) e ج) $e^{۴\pi}$ د) $e^{۴}$

حل: بنا بر نکته ۱ چون تابع نمایی تابع متناوب است پس گزینه (ب) صحیح می‌باشد. زیرا داریم:

$$e^{۱+۴\pi i} = \exp(۱+۴\pi i) = \exp(۱) = e$$

تذکر: چون تابع نمایی تابعی متناوب با دوره تناوب $۲\pi i$ است پس تابعی چند به یک است.
اگر دامنه ما به صورت $-\pi < \operatorname{Im} z \le \pi$ در نظر گرفته شود در این صورت نگاشت $w = e^{z}$ یک به یک می‌شود. خط عمودی $x = a$ بر روی دایره $|w| = e^{a}$ نگاشته می‌شود و حال آن که خط افقی $y = b$ بر روی خط شعاع $\operatorname{Arg} w = b$ نگاشت می‌گردد.

تست ۲: نگاشت $w = e^{z}$ خط $x = ۲$ را به کدام شکل می‌نگارد؟

الف) سهمی ب) هذلولی ج) دایره د) بیضی

حل: گزینه (ج) با توجه به آنچه گفته شد صحیح می‌باشد.

تست ۳: جواب معادله $e^{-z} = -۵$ برای kهای فرد برابر است با:

الف) $\ln ۵ + ۵i$ ب) $-\ln ۵ + k\pi$ ج) $-\ln ۵ - k\pi i$ د) $-\ln ۵ + k\pi i$

حل: گزینه (د) صحیح است.

زیرا داریم:

$$e^{-z} = e^{-x}(\cos y - i\sin y) = -۵ \to e^{-x}\cos y = -۵\ ,\ -e^{x}\sin y = ۰$$

$$\Rightarrow y = k\pi\ ,\ e^{-x}\cos k\pi = -۵ \to e^{-x} = ۵ \to x = -\ln ۵$$

پس $z = -\ln ۵ + k\pi i$.

۳-۲ توابع مثلثاتی

توابع $\cos z$ و $\sin z$ را با استفاده از فرمول اویلر $e^{\pm i\theta} = \cos\theta \pm i\sin\theta$ به صورت:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{۲} \quad , \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{۲i}$$

تعریف می‌کنیم.

نکته ۴: چون تابع نمایی تحلیلی است پس توابع $\sin z, \cos z$ هم تحلیلی‌اند.

نکته ۵: توابع $\sin \bar{z}, \cos \bar{z}$ تحلیلی نیستند.

نکته ۶: $\frac{d}{dz}\cos z=-\sin z$ و $\frac{d}{dz}\sin z=\cos z$.

یادداشت ۱: اگر در تعریف $\sin z,\cos z$ بجای z قرار دهیم iz می‌گیریم.

$$\sin iz=\frac{e^{-z}-e^{z}}{2i}=i\left(\frac{e^{-z}-e^{z}}{-2}\right)=ishz \quad , \quad \cos iz=\frac{e^{-z}+e^{z}}{2}=chz$$

با توجه به این یادداشت می‌توان نتیجه‌گیری نمود که:

$$\cos z=\cos(x+iy)=\cos x\, chy-i\sin x\, shy$$
$$\sin z=\sin(x+iy)=\sin x\, chy+i\cos x\, shy$$

که از این رابطه خواهیم داشت:

$$|\cos z|=\sqrt{\cos^2 x+sh^2 y} \text{ و } |\sin z|=\sqrt{\sin^2 x+sh^2 y}\ .$$

نکات زیر از این روابط نتیجه‌گیری می‌شوند:

i) $|\cos z|^2+|\sin z|^2=ch^2 z+sh^2 z$

ii) $|shy|\le|\cos z|\le chy$

iii) $|shy|\le|\sin z|\le chy$

تذکر: با توجه به روابط (ii) و (iii) توابع $\cos z$ و $\sin z$ کراندار نیستند.

توابع $\tan z$ و $\cot z$ و $\sec z$ و $\operatorname{cosec} z$ را به ترتیب زیر تعریف می‌کنیم.

$$\tan z=\frac{\sin z}{\cos z} \text{ و } \cot z=\frac{\cos z}{\sin z} \text{ و } \sec z=\frac{1}{\cos z} \text{ و } \operatorname{cosec} z=\frac{1}{\sin z}$$

براحتی می‌توان نشان داد که:

i) $\frac{d}{dz}(\tan z)=1+\tan^2 z$ و ii) $\frac{d}{dz}(\cot z)=-(1+\cot^2 z)$

iii) $\frac{d}{dz}(\sec z)=\sec z\tan z$ و iv) $\frac{d}{dz}(\operatorname{cosec} z)=-\operatorname{cosec} z\cot z$

یادداشت ۲: مشتق مرتبه n توابع $\cos az$ و $\sin az$ به ترتیب به صورت زیر داده می‌شوند.

i) $(\cos az)^{(n)}=a^n\cos(az+\frac{n\pi}{2})$ و ii) $(\sin az)^{(n)}=a^n\sin(az+\frac{n\pi}{2})$

یادداشت ۳: توابع $\tan z$ و $\sec z$ در نقاطی که $\cos z=0$ تحلیلی نیستند و توابع $\cot z$ و $\cos z$ هم در نقاطی که $\sin z=0$ تحلیلی نیستند.

مثال ۱: معادله $\cos z = -8$ را حل نمایید.

حل: می‌نویسیم:

$$\cos z = \cos(x+iy) = \cos x\, ch y - i \sin x\, sh y = -8$$

که با مقایسه طرفین تساوی می‌گیریم $\cos x\, sh y = -8$ و $\sin x\, sh y = 0$. از معادله دوم می‌توانیم $sh y = 0$ و $\sin x = 0$ را امتحان کنیم. از اولی $y = 0$ بدست می‌آید که اگر در معادله اولی قرار دهیم $\cos x = -8$ که امکان‌پذیر نیست پس باید $\sin x = 0$ یعنی $x = k\pi$ در نتیجه معادله اول چنین می‌شود $\cos k\pi\, ch y = -8$. از طرفی چون $ch y \geq 1$ پس $\cos k\pi = -1$ یعنی k فرد باشد در نتیجه $ch y = 8$ یعنی $y = ch^{-1} 8$. لذا $z = x + iy = k\pi + i ch^{-1} 8$ که k عددی فرد است.

۳-۳ توابع هذلولی (هیپربولیک)

توابع سینوس و کسینوس هذلولی از تغییر مختلط همانند متغیر حقیقی تعریف می‌شوند، یعنی

$$sh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \quad , \quad ch z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

نکته۶: چون توابع نمایی e^z و e^{-z} تحلیلی‌اند پس $ch z$ و $sh z$ هم تحلیلی‌اند.

نکته۷: توابع $ch z$ و $sh z$ تحلیلی نیستند.

نکته۸: توابع $sh z$ و $ch z$ متناوب با دوره تناوب $2\pi i$ هستند.

یادداشت۳: می‌توان نشان دادکه $\frac{d}{dz}(ch z) = sh z$ و $\frac{d}{dz}(sh z) = ch z$. بعلاوه این که

$$sh z = sh(x+iy) = sh x \cos y + i ch x \sin y$$
$$ch z = ch(x+iy) = ch x \cos y + i sh x \sin y$$

تست۴: کدامیک از روابط زیر درست‌اند.

الف) $ch iz = \cos z$ ب) $sh iz = i \sin z$ ج) گزینه الف و ب د) هیچکدام

حل: گزینه (ج) صحیح است.

زیرا اگر در تعریف $ch z$ و $sh z$ بجای z قرار دهیم iz می‌گیریم.

$$ch iz = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z \quad \text{و} \quad sh iz = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} = i\left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right) = i \sin z.$$

همانند توابع حقیقی توابع $\tanh z$ و $\coth z$ و $\sec hz$ و $\cos ech z$ به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$\tanh z = \frac{sh z}{ch z} \text{ ، } \coth z = \frac{ch z}{sh z} \text{ ، } \sec hz = \frac{1}{ch z} \text{ ، } \cos ec z = \frac{1}{sh z}$$

می‌توان نشان داد که:

i) $\frac{d}{dz}(\tanh z) = 1 - \tanh^2 z = \operatorname{sech}^2 z$

ii) $\frac{d}{dz}(\coth z) = 1 - \coth^2 z = -\operatorname{cosech}^2 z$

iii) $\frac{d}{dz}(\operatorname{sech} z) = -\operatorname{sech} z \tanh z$

iv) $\frac{d}{dz}(\operatorname{cosech} z) = -\operatorname{cosech} z \coth z$

تذکر: اگر چه توابع $\tanh z$ و $\coth z$ توابعی بر حسب توابع نمایی‌اند اما این توابع همه جا تحلیلی نیستند. مثلاً $\tanh z$ در نقاطی که $\operatorname{ch} z = 0$ است تحلیلی نیست و $\coth z$ هم در نقاطی که $\operatorname{sh} z = 0$.

نکته ۹: دوره تناوب $\tanh z$ و $\coth z$ برابر $i\pi$ است.

۳-۴ تابع لگاریتمی

وارون تابع نمایی را تابع لگاریتم مختلط گوییم و با $w = \log z$ نمایش می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$w = \log z = \ln|z| + i\arg z \ , \quad z \neq 0$$

برای تفکیک لگاریتم عدد مختلط از لگاریتم عدد حقیقی نماد $\log$ را به جای $\ln$ مورد استفاده قرار می‌دهیم.

از آنجایی که تابع $\arg z$ یک تابع چند مقداری است پس $\log z$ هم تابعی چند مقداری است. در بین مقادیر ممکنه از $\arg z$ مقدار θ_0 را انتخاب نموده و $\arg z$ را محدود به $\theta_0 < \theta \leq \theta_0 + 2\pi$ می‌کنیم تا شاخه‌ای از آن را داشته باشیم و متناظر با شاخه‌ای از $\log z$ نماییم. در این شاخه $\log z$ تک مقداری است. همانند $\arg z$ که یک شاخه اصلی برای آن تعریف نمودیم در این جا هم وقتی $-\pi < \operatorname{Arg} z \leq \pi$ در نظر گرفته شود متناظر با آن شاخه اصلی $\log z$ را که با $\operatorname{Log} z$ نمایش می‌دهیم به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\operatorname{Log} z = \ln|z| + i\operatorname{Arg} z \quad , \quad -\pi < \operatorname{Arg} z \leq \pi$$

نکته ۱۰: $\frac{d}{dz}(\log z) = \frac{1}{z} \ , \ (|z| > 0 \ , \ \theta_0 < \theta < \theta_0 + 2\pi)$

تست ۵: مقدار اصلی $\log(i)$ کدامیک از مقادیر زیر است؟

الف) 0 ب) $\frac{\pi}{2}i$ ج) πi د) $-\pi i$

حل: گزینه (ب) صحیح است.

زیرا داریم:

$$\mathrm{Log}(i) = \ln|i| + i\,\mathrm{Arg}(i) = \ln 1 + i\frac{\pi}{2} = \frac{i\pi}{2}$$

تذکر: لگاریتم اعداد منفی در حوزه اعداد مختلط قابل محاسبه‌اند.

تست ۶: مقدار $\log(-1)$ برابر است با:

الف) $(2k+1)\pi i$ ب) $2k\pi i$ ج) 1 د) صفر

حل: گزینه (الف) صحیح است.

زیرا داریم:

$$\log(-1) = \ln|-1| + i\arg(-1) = \ln 1 + i(2k+1)\pi = (2k+1)\pi i$$

یادداشت ۴: روابط زیر در مورد توابع لگاریتم برقرارند.

i) $\log(z_1 z_2) = \log z_1 + \log z_2$

ii) $\log(z_1/z_2) = \log z_1 - \log z_2$

iii) $z^n = \exp(n\log z) \quad , \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

iv) $z^{\frac{1}{n}} = \exp(\frac{1}{n}\log z) \quad , \quad n = 1, 2, 3, \ldots \quad , \quad z \neq 0$

تذکر: در حالت کلی روابطی نظیر $\log z_1 z_2 = \log z_1 + \log z_2$ یا $\log {z_1}/{z_2} = \log z_1 - \log z_2$ درست نمی‌باشد.

تست ۷: مقدار $(-1)^{\frac{1}{\pi}}$ کدامیک از داده‌های زیر است؟ $(n \in z)$

الف) $e^{(2n+1)i}$ ب) e^{2n+1} ج) $e^{2\pi+1}$ د) -1

حل: گزینه (الف) صحیح است.

زیرا بنا بر (iv) و تست قبلی داریم:

$$(-1)^{\frac{1}{\pi}} = \exp(\frac{1}{\pi}\log(-1)) = \exp(\frac{1}{\pi}(2n+1)\pi i) = \exp(2n+1)i$$

۳-۵ توابع توانی (نمایی مختلط) z^c

تابع توانی z^c را به صورت $z^c = e^{c\log z}$ تعریف می‌کنیم که c عددی مختلط است. چون $\log z$ چند مقداری است پس در حالت کلی z^c هم چند مقداری است و $e^{c\log z}$ هم شاخه اصلی آن می‌باشد.

نکته ۱۱: اگر $c = n$ عدد صحیح باشد آنگاه $z^c = z^n = |z|^n \exp(in\,\mathrm{Arg}\,z)$.

نکته ۱۲: $\frac{d}{dz} z^c = c z^{n-1}$.

یادداشت ۵: اگر در z^c جای c با z عوض شود تابع نمایی c^z را خواهیم داشت که $c^z = \exp(z\log c)$ با انتخاب یک مقدار برای $\log c$ یک تابع تک مقداری که در تمام صفحه مختلط تحلیلی است را خواهیم داشت.

نکته ۱۳: $\frac{d}{dz} c^z = c^z \log c$.

مثال ۲: مقدار اصلی ۲^i را بیابید.

حل: داریم

$$۲^i = \exp(i\,\mathrm{Log}۲) = \cos(\ln ۲) + i\sin(\ln ۲)$$

اگر در این مثال بجای ۲ عدد i قرار دهیم براحتی می‌یابیم که:

$$i^i = \exp(i\,\mathrm{Log}i) = \exp(i(\ln|i| + i\frac{\pi}{۲})) = \exp(-\frac{\pi}{۲})$$

تست ۸: مقدار اصلی $(۱-i)^{۴i}$ کدام است؟

الف) $e^{۲i\ln\sqrt{۲}+\pi}$ ب) $e^{۴i\ln\sqrt{۲}}$ ج) $e^{۲i\ln ۲+\pi}$ د) $e^{۴i\ln ۲+\pi}$

حل: گزینه (ج) صحیح است.

زیرا:

$$(۱-i)^{۴i} = e^{۴i\,\mathrm{Log}(۱-i)} = e^{۴i(\ln\sqrt{۲} - i\frac{\pi}{۴})} = e^{۲i\ln ۲+\pi}$$

۳-۶ توابع مثلثاتی و هذلولی وارون

از آنجایی که توابع مثلثاتی بر حسب توابع نمایی مختلط تعریف شده‌اند بنابراین انتظار داریم توابع وارون آن‌ها توابعی از لگاریتم باشند به عنوان مثال $w = \sin^{-۱} z$ وارون تابع $w = \sin z$ است. داریم:

$$z = \sin w = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{۲i} \to e^{۲iw} - ۲ize^{iw} - ۱ = ۰ \to e^{iw} = iz + (۱-z^۲)^{\frac{۱}{۲}}$$

که از آن $\left(w = \sin^{-1} z = \frac{1}{i}\log(iz + (1-z^2)^{\frac{1}{2}}\right)$. وقتی $z \neq \pm 1$ کمیت $(1-z^2)^{\frac{1}{2}}$ دو مقدار ممکنه را داراست. برای هر مقدار به لگاریتم بی‌نهایت مقدار می‌پذیرد. از این رو، $\sin^{-1} z$ دارای دو مجموعه بی‌نهایت مقدار است.

مثال ۳: مقدار $\sin^{-1}(\frac{1}{2})$ را بیابید.

حل: داریم:

$$\sin^{-1}(\frac{1}{2}) = \frac{1}{i}\log(\frac{i}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{1}{i}[\ln 1 + i(\frac{\pi}{6} + 2k\pi)] =$$
$$\frac{1}{i}[\ln 1 + i(\frac{5\pi}{6} + 2k\pi)] = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \ , \ \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

به طریقی مشابه می‌توان نشان داد که:

$$\text{i)}\ \cos^{-1} z = \frac{1}{i}\log[z + (z^2-1)^{\frac{1}{2}}] \quad ، \quad \text{ii)}\ \tan^{-1} z = \frac{1}{2i}\log(\frac{1+iz}{1-iz})$$

$$\text{iii)}\ \cot^{-1} z = \frac{1}{2i}\log(\frac{z+i}{z-i}) \quad ، \quad \text{iv)}\ sh^{-1} z = \log[z + (1+z)^{\frac{1}{2}}]$$

$$\text{v)}\ ch^{-1} z = \log[z + (z^2-1)^{\frac{1}{2}}] \quad ، \quad \text{vi)}\ \tanh^{-1} z = \frac{1}{2}\log(\frac{1+z}{1-z})$$

$$\text{vii)}\ \coth^{-1} z = \frac{1}{2}\log(\frac{z+1}{z-1}) \quad ، \quad \text{viii)}\ \sec^{-1} z = \frac{1}{i}\log\frac{1+\sqrt{1-z^2}}{z}$$

$$\text{ix)}\ \operatorname{cosec}^{-1} z = \frac{1}{i}\log\frac{i+\sqrt{z^2-1}}{z}$$

تذکر: توجه شود که رابطه‌ای نظیر $\tan^{-1}(\tan z) = z$ در حالت کلی درست نیست. زیرا سمت چپ تساوی یک تابع چند مقداری است.

تست ۹: مقدار $\tan^{-1}(2i)$ **برابر است با** $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$

الف) $n\pi i$ ب) $(n+\frac{1}{2})\pi + \frac{i}{2}\ln 2$

ج) $-\frac{\pi}{2} + in\pi$ د) 0

حل: با توجه به تعریف لگاریتم و فرمول $\tan^{-1} z$ گزینه (ب) صحیح است..

تست ۱۰: مقدار $\tanh^{-1}(0)$ کدام است؟ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$

الف) $(2n+1)\pi i$ ب) $(n+1)\pi i$ ج) $n\pi i$ د) 0

حل: گزینه (ج) صحیح است.

زیرا داریم:

$$\tan^{-1} h(0) = \frac{1}{2}\log(\frac{1+0}{1-0}) = \frac{1}{2}\log 1 = \frac{1}{2}(\ln|1| + 2n\pi i) = n\pi i$$

مشتق توابع وارون همانند نتایجی است که برای توابع وارون حقیقی به دست آوردیم. به عبارتی:

i) $\frac{d}{dz}(\sin^{-1} z) = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$ ، ii) $\frac{d}{dz}(\cos^{-1} z) = \frac{-1}{\sqrt{1-z^2}}$

iii) $\frac{d}{dz}(\tan^{-1} z) = \frac{1}{1+z^2}$ ، iv) $\frac{d}{dz}(\cot^{-1} z) = \frac{-1}{1+z^2}$

v) $\frac{d}{dz}(sh^{-1} z) = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}$ ، vi) $\frac{d}{dz}(ch^{-1} z) = \frac{1}{\sqrt{z^2-1}}$

vii) $\frac{d}{dz}(\tanh^{-1} z) = \frac{1}{1-z^2}$ ، viii) $\frac{d}{dz}(\coth^{-1} z) = \frac{1}{z^2-1}$

ix) $\frac{d}{dz}(\mathrm{sech}^{-1} z) = \frac{-1}{z\sqrt{1-z^2}}$ ، x) $\frac{d}{dz}(\mathrm{cosech}^{-1} z) = \frac{-1}{z\sqrt{z^2+1}}$

تست ۱۱: مشتق تابع $ch^{-1}z$ به ازای $z = \sqrt{2}$ برابر است با:

الف) $\frac{1}{2}$ ب) 1 ج) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ د) 2

حل: گزینه (ب) صحیح است.

زیرا داریم:

$$[\frac{d}{dz}(ch^{-1}z)]_{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2-1}} = 1$$

۳-۷ نگاشت بوسیله توابع مقدماتی

فرض کنید $w = f(z)$ یک تابع تک مقداری از متغیر $z = x + iy$ از صفحه z باشد به گونه‌ای که هر نقطه از صفحه z با یک مقدار $w = u + iv$ از صفحه $-w$ متناظر باشد. چون نمی‌توان توابع مختلط را رسم کرد، اما می‌توان قسمت‌های حقیقی و موهومی را به صورت مجزا رسم کرد. بنابراین بهتر است که برای نمایش چنین نقاطی از دو صفحه $-z$ و صفحه $-w$ استفاده نمود. گوییم $w = f(z)$ نقاط p از صفحه $-z$ را به روی نقاط از صفحه p' $-w$ نگاشت می‌کند هر گاه متناظری یک به یک بین دو ناحیه برقرار باشد تحت چنین نگاشتی p' تصویر p است. برای تفکیک نگاشت‌ها از اصطلاحات آشنایی نظیر انتقال، دوران و انعکاس استفاده می‌کنیم.

الف) تبدیل خطی $w = az + b$: اگر $a = 1$ باشد این نگاشت یک انتقال است. زیرا شکل در صفحه $-w$ همانند صفحه $-z$ است اما نسبت به مبدأ مختصات به صورت متفاوت جاگذاری شده است.
اگر $b = 0$، نگاشت همانی است پس با شرط $b = 0$ و $a \neq 0$ داریم:

$$|w| = |az| = |a||z| \,,\ \arg w = \arg z$$

که اگر a حقیقی باشد با شرط $a > 1$ یک انبساط و اگر $a < 1$ یک انقباض خواهیم داشت. اما اگر a عددی مختلط باشد آنگاه نگاشت $w = az$ معرف دوران به اندازه $\arg a$ است و $w = az + b$ یک دوران همراه با یک انتقال به اندازه b است.

تست ۱۲: ناحیه‌ای که نیم صفحه $x > 0$ تحت تبدیل $w = iz + i$ به آن نگاشته می‌شود کدام است؟

الف) $v > 1$ ب) $0 \leq v < 1$ ج) $u > 0$ د) $0 < u \leq 1$

حل: گزینه (الف) صحیح است.
زیرا داریم:

$$w = iz + i \rightarrow u + iv = i(x + iy) + i = -y + i(x + 1)$$

با مقایسه طرفین تساوی $u = -y$ و $v = x + 1$. چون $x > 0$ پس $v > 1$.

تست ۱۳: ناحیه‌ای که نیم صفحه $y > 0$ تحت تبدیل $w = (1+i)z$ بر روی آن نگاشته می‌شود، کدام است؟

الف) $u = v$ ب) $u < v$ ج) $u > 1$ د) $v > 1$

حل: گزینه (ب) صحیح است.
زیرا داریم:

$$w = (1+i)z \rightarrow u + iv = (1+i)(x+iy) = x - y + i(x+y) \Rightarrow u = x - y \,,\ v = x + y$$

که با حذف x می‌گیریم $v - u = 2y$. چون ناحیه $y > 0$ مورد نظر است پس $v - u > 0$ یعنی $v > u$.

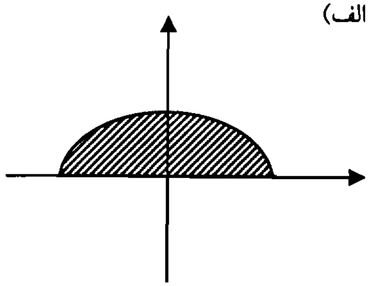
ب) تبدیل $w = e^z$: داریم

$$w = e^z = e^{x+iy} = e^x.e^{iy} = Re^{i\phi}$$

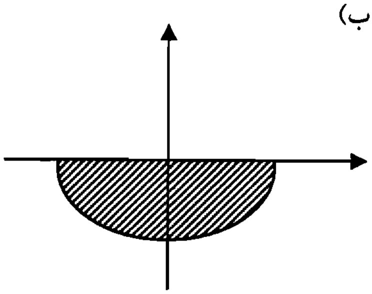
که با مقایسه طرفین تساوی می‌گیریم $R = e^x$، $y = \phi$. بنابراین اگر $-\pi < y = b \leq \pi$ باشد تناظری یک به یک بین این نقاط و صفحه $-w$ برقرار می‌شود.

تست ۱۴: تصویر مستطیل $0 \le x \le 1$، $0 \le y \le \pi$ تحت نگاشت $w = e^z$ کدام است؟

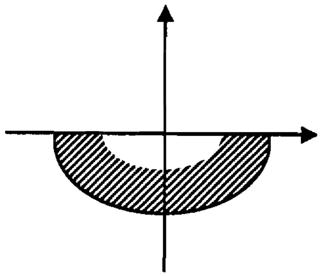
الف)



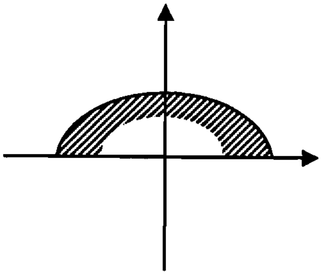
ب)



ج)



د)



حل: گزینه (د) صحیح است.

زیرا خطوط $x = 0$ و $x = 1$ به روی دایره‌هایی به شعاع‌های $R = e^{0} = 1$ و $R = e$ نگاشته می‌شود و خطوط $y = 0$ و $y = \pi$ به روی شعاع‌های حاصل $\varphi = 0$ و $\varphi = \pi$.

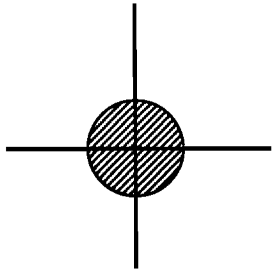
نکته ۱۳: تبدیل $w = e^z$ خط $x = a$ را روی دایره $R = e^a$ و خط $y = c$ را روی شعاع $\theta = c$ می‌نگارد. نوار افقی $0 \le y \le \pi$ بر روی نیم صفحه فوقانی صفحه $-w$ و مرز $y = 0$ بر روی نیمه مثبت محور u و خط $y = \pi$ بر روی نیمه منفی محور u نگاشته می‌شود. پاره‌خطی که 0 را به $i\pi$ وصل می‌کند. بر روی نیم دایره $|w| = 1$ و $v \ge 0$ نگاشته می‌شود. نیمه چپ نوار $(x \le 0)$ بر روی ناحیه $|w| \le 1$ و قسمت $v \ge 0$ و نیمه راست آن $(x \ge 0)$ بر روی خارج نیم دایره $|w| = 1$ و $v \ge 0$ نگاشته می‌شود.

ج) تابع $w = \log z$: تابع لگاریتم وارون تابع نمایی است. پس می‌توانیم نگاشت وارونی را در نظر بگیریم که از صفحه $-w$ به صفحه $-z$ باشد.

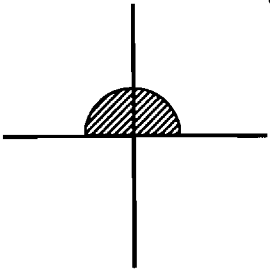
د) تابع $w = z^n$: با فرض $z = re^{i\theta}$ و $w = Re^{i\phi}$ در نتیجه $Re^{i\phi} = r^n e^{in\theta}$ لذا $R = r^n$ و $\phi = n\theta$.

تست ۱۵: تصویر قطاع $\frac{\pi}{۲} \le Argz \le \frac{\pi}{۴}$ و $|z| \le ۱$ تحت نگاشت $w = z^۲$ کدام است؟

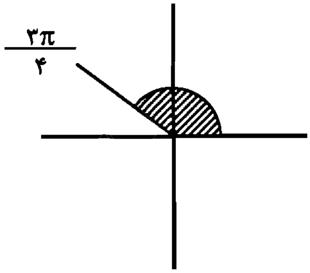
الف)



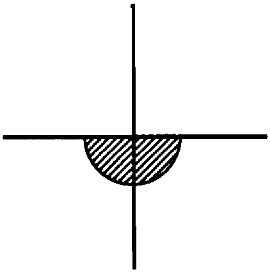
ب)



ج)



د)



حل: گزینه (د) صحیح است.

زیرا $\pi \le \phi \le ۲\pi$ با $R \le ۱$.

مثال ۴: ناحیه‌ای در صفحه $-z$ را بیابید که تصویرش تحت تبدیل $w = z^۲$ حوزه‌ای مستطیلی در صفحه $-w$ محدود به خطوط $u = ۱$ و $u = ۲$ و $v = ۱$ و $v = ۲$ است.

حل: داریم

$$w = z^۲ = (x + iy)^۲ = x^۲ - y^۲ + ۲ixy = u + iv \to u = x^۲ - y^۲ \ , \ v = ۲xy$$

حال اگر $u = ۱,۲$ انتخاب شود به ترتیب هذلولی‌های $x^۲ - y^۲ = ۱$ و $x^۲ - y^۲ = ۲$ را خواهیم داشت و اگر $v = ۱,۲$ انتخاب شود سهمی‌های $۲xy = ۱$، $xy = ۱$ را داریم.

نکته ۱۴: تبدیل $w = z^۲$ نگاشت یک به یکی است از خطوط $x = c$ $(c \ne ۰)$ بر روی سهمی $v^۲ = -۴c^۲(u - c^۲)$ وخطوط $y = d$ $(d \ne ۰)$ بر روی سهمی $v^۲ = ۴d^۲(u + d^۲)$. توجه شود که همه این سهمی‌ها دارای کانونهایی در نقطه $w = ۰$ هستند.

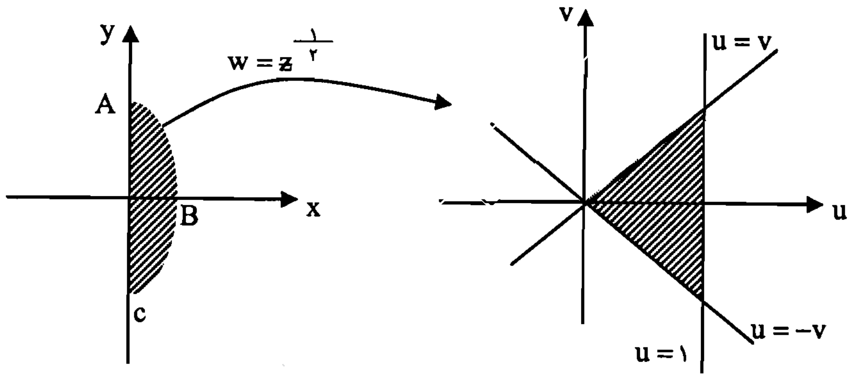
ه) تابع $w=\sqrt[n]{z}$: این تابع چند مقداری است و مقادیر آن ریشه‌های nام z هستند، یعنی

$$w=\sqrt[n]{|z|}\,(\cos(\frac{2k\pi+\theta}{n})+i\sin(\frac{2k\pi+\theta}{n})),k=0,1,2,\ldots,n-1$$

که هر یک از n مقدار حاصل یک شاخه $\sqrt[n]{z}$ می‌باشد و برای $-\pi<\theta<\pi$ نگاشتی یک به یک به روی قطاع $(2k-1)\frac{\pi}{n}<\phi<(2k+1)\frac{\pi}{n}$ با شعاع $R>0$ است.

مثال۵: تبدیل یافته حوزه محدود به سهمی $y^2=-4(x-1)$ و محور yها تحت شاخه اصلی $z^{\frac{1}{2}}$ را بیابید.

حل: با توجه به نکته ۱۴ براحتی می‌توان دریافت که مبداء مختصات از صفحه z تحت این نگاشت به مبداء مختصات از صفحه $-w$ تبدیل می‌شود. کافی است تبدیل یافته AB و BC را بیابیم.



و) تابع $w=\frac{1}{z}$: این نگاشت تناظری یک به یک بین نقاط غیر صفحه $-z$ و صفحه $-w$ برقرار می‌کند. با فرض $z=re^{i\theta}$ و $w=Re^{i\theta}$ می‌گیریم $R=\frac{1}{r}$, $\phi=-\theta$.

نکته ۱۵: نگاشت $w=\frac{1}{z}$ دایره یا خط راست را به روی یک خط راست یا دایره می‌نگارد.

تست۷: تبدیل یافته ناحیه بین دو دایره $|z-1|=1$ و $|z-i|=1$ توسط $w=\frac{1}{z}$ عبارت است از:

الف) $u>\frac{1}{2}$ و $v>\frac{1}{2}$

ب) $u>\frac{1}{2}$ و $v<-\frac{1}{2}$

ج) $u<\frac{1}{2}$ و $v<-\frac{1}{2}$

د) $u<\frac{1}{2}$ و $v>-\frac{1}{2}$

حل: گزینه (ب) صحیح است.

زیرا داریم:

$$\left.\begin{array}{l} |z-1|<1 \to x^2+y^2<2x, x>0 \\ |z-i|<1 \to x^2+y^2<2y, y>0 \end{array}\right\} \Rightarrow u>\frac{1}{2}, v<-\frac{1}{2}$$

ی) تابع $w=\sin z$: داریم

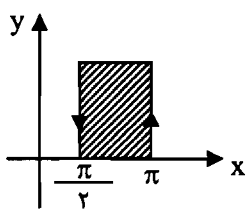
$$w=\sin z=\sin(x+iy)=\sin x\,\mathrm{ch}\,y+i\cos x\,\mathrm{sh}\,y=u+iv$$

یعنی $u=\sin x\,\mathrm{ch}\,y$ و $v=\cos x\,\mathrm{sh}\,y$.

این نگاشت یک به یک است و به راحتی نشان داده می‌شود که مستطیل $x=\pm\frac{\pi}{2}$ ، $y=\pm c$ به وسیله این تابع به روی بیضی $\frac{u^2}{\mathrm{ch}^2 c}+\frac{v^2}{\mathrm{sh}^2 c}=1$ و مستطیل $x=\pm c$ ، $y=\pm\frac{\pi}{2}$ به روی هذلولی $\frac{u^2}{\sin^2 c}-\frac{v^2}{\cos^2 c}=1$ یک به یک نگاشته می‌شود.

یادداشت ۵: با استفاده از نگاشت $w=\sin z$ می‌توان نگاشت‌هایی نظیر $w=\cos z$ و $w=\mathrm{sh}z$ و $w=\mathrm{ch}z$ را بررسی نمود. زیرا $(\cos z=\sin(z+\frac{\pi}{2}))$ که معادل انتقال به میزان $\frac{\pi}{2}$ و سپس به دنبال آن یک نگاشت سینوسی است. همچنین $\mathrm{sh}z=-i\sin iz$ و $\mathrm{ch}z=\cos iz$.

تست ۱۷: نگاشت $w=-\cos z$ ناحیه نیم نوار $\frac{\pi}{2}\le x\le\pi$ ، $y\ge 0$ از صفحه $-z$ را به چه ناحیه‌ای از صفحه $-w$ تبدیل می‌کند؟ (کارشناسی ارشد)



الف) ربع اول

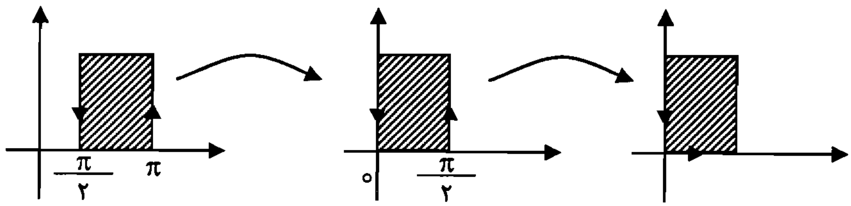
ب) ربع دوم

ج) نیم نوار $0\le x\le 1$، $y\ge 0$

د) نیم نوار $-1\le x\le 0$ ، $y>0$

حل: گزینه (ج) صحیح است.

زیرا $\cos z = \cos(z' - \frac{\pi}{۲}) = \sin z'$



فصل چهارم

انتگرال‌گیری در صفحه مختلط

۴-۱ انتگرال خط

برای انتگرال‌گیری در صفحه مختلط از توابع مختلط نیاز داریم که $x(t)$ و $y(t)$ را توابعی پیوسته از متغیر حقیقی t روی $[a,b]$ در نظر بگیریم. از اینرو

$$z = x + iy \rightarrow z(t) = x(t) + iy(t) \qquad , \qquad t \in [a,b]$$

مجموعه‌ای از نقاط با معادله پارامتری $z(t) = x(t) + iy(t)$ را یک منحنی با خم پیوسته نامند.

اگر $z(a) = z(b)$ در این صورت منحنی c را بسته نامند. اگر منحنی خودش را قطع نکند منحنی را ساده گویند. هر منحنی ساده بسته یک ***خم جردان*** نامند.

خمی که دارای مشتق پیوسته باشد ***هموار*** نامیده می‌شود.

منحنی ***قطعه‌ای هموار***، منحنی است متشکل از تعداد متناهی منحنی هموار که انتهای هر یک به ابتدای دیگری وصل است این منحنی را ***کانتور*** نیز نامند.

فرض کنید $\Delta z = z_i - z_{i-1}$ و δ_i نقطه دلخواهی بین z_i و z_{i-1} باشد. مجموع $s_n = \sum_{i=1}^{n} f(\delta_i)\Delta z_i$ را تشکیل می‌دهیم. اگر حد این مجموع وقتی که n به سمت بی‌نهایت میل می‌کند مستقل از نحوه تقسیم‌بندی و انتخاب نقاط باشد این حد را انتگرال تابع $f(z)$ روی خط در طول منحنی جهت‌دار c می‌نامیم و آن را با نماد زیر نشان می‌دهیم.

$$\int_a^b f(z)dz \quad \text{یا} \quad \int_c f(z)dz$$

نکته ۱: اگر $f(z)$ روی c پیوسته قطعه‌ای باشد آنگاه:

$$\int_c f(z)dz = \int_a^b f(z(t))\, z'(t)dt$$

مثال ۱: مطلوب است محاسبه $\int_A^B f(z)dz$ در طول سهمی $x = ۲t$ ، $y = t^۲ + ۳$ که $f(z) = (۲y + x^۲) + i(۳x - y)$ و $A(۰,۳)$ و $B(۲,۴)$.

حل: داریم

$$z = x + iy \to dz = dx + idy = ۲dt + ۲itdt = ۲(۱ + it)dt$$

بنابراین

$$\int_A^B f(z)dz = \int_{(۰,۳)}^{(۲,۴)} \left[(۲y + x^۲) + i(۳x - y)\right]\left[dx + idy\right] = \int_۰^۱ (۱۲ - ۶t + ۲۴t^۲ - ۲t^۳)dt = \frac{۳۳}{۲}$$

تذکر: بسیاری از خواص انتگرال توابع حقیقی در اینجا هم برقرارند، اما نمی‌توان مانند انتگرال‌ها معین آن را به عنوان مساحت یا یک مقدار فیزیکی تعبیر کرد، مگر در حالات خاص.

یادداشت ۱: می‌توان حاصل $\mathrm{Re}\int_c \bar{f}(z)dz$ را به عنوان مقدار کار انجام شده بوسیله نیروی $\vec{F} = u\,\vec{i} + v\,\vec{j}$ در طول مسیر c تعبیر نمود که در آن $\bar{f} = u - iv$.

مثال ۲: کار انجام شده توسط نیروی $\vec{F} = (x^۲ - y)\,\vec{i} + y^۲ j$ را روی مسیر $y = x^۲$ از نقطه $A(۰,۱)$ تا نقطه $B(۱,۱)$ بیابید.

حل: روی $y = x^۲$ داریم $dy = ۲xdx$ در نتیجه $dz = dx + idy = (۱ + ۲ix)dx$. لذا

$$\text{کار انجام شده} = \mathrm{Re}\int_c \bar{f}(z)dz = \mathrm{Re}\int_۰^۱ \left[(x^۲ - y) - iy^۲\right](۱ + ۲ix)dx = \int_۰^۱ ۲x^۵ dx = \frac{۱}{۳}.$$

اگر $f(z)$ و $g(z)$ روی منحنی‌های مورد نظر ما قابل انتگرال‌گیری باشند خواص زیر در مورد انتگرال آن‌ها برقرارند.

i) $\int_c kf(z)dz = k\int_c f(z)dz$ (k عدد ثابتی است)

ii) $\int_c (f(z) \pm g(z)dz = \int_c f(z)dz \pm \int_c g(z)dz$

iii) $\int_{c_۱+c_۲} f(z)dz = \int_{c_۱} f(z)dz \pm \int_{c_۲} f(z)dz$

iv) $\int_c f(z)dz = -\int_{c'} f(z)dz$ (c' در خلاف جهت c است)

v) $\int_c f(z)dz \le ML$ (M کران بالای $|f(z)|$ روی c و L طول c است)

نکته ۲: اگر c دایره $z - z_۰ = re^{i\theta}$ با جهتی عکس عقربه‌های ساعت و n عدد صحیح باشد آنگاه:

$$\oint_c (z - z_۰)^n dz = \begin{cases} ۲\pi i & , \quad n = -۱ \\ ۰ & , \quad n \ne -۱ \end{cases}$$

$\oint_c$ به معنی این است که انتگرال روی یک منحنی بسته نظیر c صورت می‌گیرد.

۲-۴ قضیه کوشی

قبل از بیان قضیه کوشی صورت قضیه گرین را بیان می‌کنیم.

اگر توابع $p(x,y)$ و $Q(x,y)$ و مشتق‌های مرتبه اول آن‌ها در ناحیه D و روی مرز آن c پیوسته باشند آنگاه:

$$\oint_c pdx + Qdy = \int_D\int\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}\right)dA$$

که شکل مختلط آن به صورت زیر است:

$$\oint_c F(z,\bar{z})dz = ۲i\int_D\int\frac{\partial F}{\partial \bar{z}}dA$$

و شکل کلی‌تر آن عبارت است از:

$$\oint_c p(z,\bar{z})dz + Q(z,\bar{z})d\bar{z} = ۲i\int_D\int\left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial \bar{z}}\right)dA$$

با استفاده از قضیه گرین می‌توان قضیه مشهور زیر را که به قضیه کوشی معروف است نتیجه گرفت.

قضیه: اگر تابع $f(z)$ در ناحیه D و روی مرز آن c تحلیلی و بعلاوه $f'(z)$ روی این مرز پیوسته باشد آنگاه $\oint_c f(z)dz = ۰$.

۳: حاصل $\oint_c \frac{z^۲e^z}{\cos z}dz$ را که $c:|z| = ۱$ است، بیابید.

حل: تابع $\oint_c \frac{z^۲e^z}{\cos z}dz$ روی c و درون D تحلیلی است از طرفی $f'(z)$ هم روی c پیوسته است پس بنابر قضیه کوشی مقدار انتگرال صفر می‌شود.

یادداشت ۲: گورسا قضیه کوشی را بدون در نظر گرفتن پیوستگی $f'(z)$ روی c اثبات نمود.

قضیه کوشی ـ گورسا: اگر $f(z)$ در D و روی c پیوسته باشد آنگاه $\oint_c f(z)dz = ۰$.

نکته ۳: انتگرال تمام توابع چند جمله‌ای روی هر مسیر بسته‌ای صفر است.

تست ۱: حاصل کدامیک از انتگرال‌های زیر روی دایره $|z| = a$ صفر می‌شود؟

الف) $\oint_c e^{\cos z}dz$ ب) $\oint_c e^{\sin z}dz$ ج) $\oint_c sh^۲ z dz$ د) همه موارد

حل: گزینه (د) صحیح است.

زیرا تمام توابع داده شده در زیر انتگرال‌ها همگی توابعی تحلیلی‌اند.

نکته ۴: اگر تابع زیر انتگرال در نقطه‌ای نظیر $z_۰$ تعریف نشود اما این نقطه خارج از منحنی c باشد با این وجود مقدار انتگرال صفر می‌شود.

تست ۲: حاصل $\oint_c \frac{\cos z}{z-۲}dz$ کدامیک از مقادیر زیر است اگر $c:|z|=۱$.

الف) صفر ب) $۴\pi i\cos ۲$ ج) $۴\pi i$ د) $۴\pi\cos ۲$

حل: گزینه (الف) صحیح است.

زیرا اگر چه $z=۲$ یک نقطه تکین برای تابع $f(z)$ به حساب می‌آید اما این نقطه خارج از دایره قرار دارد بنابراین تابع در داخل دایره و روی آن تحلیلی است پس مقدار انتگرال صفر می‌شود.

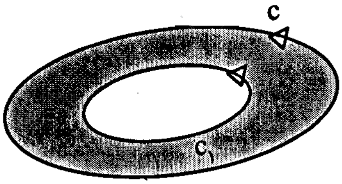
تست ۳: حاصل $\oint_c ze^{\frac{۱}{۲z}}dz$ کدامیک از مقادیر زیر است اگر $c:|z-۱|=\frac{۱}{۲}$.

الف) $۲\pi i$ ب) صفر ج) ۲π د) $\frac{\pi i}{۲}$

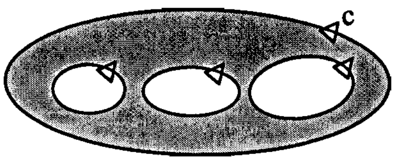
حل: مجدداً مقدار انتگرال صفر می‌شود زیرا تابع $e^{\frac{۱}{۲z}}$ در $z=۰$ تعریف نمی‌شود که خارج دایره قرار دارد پس گزینه (ب) صحیح است.

۳-۴ چند نتیجه از قضیه کوشی ـ گورسا

قبل از ذکر نتایج حاصل از قضیه کوشی ـ گورسا به معرفی ناحیه همبند ساده و ناحیه همبند چندگانه می‌پردازیم. ناحیه D که مرز آن c است را در نظر می‌گیریم. این ناحیه را *همبند ساده* گویند هر گاه بتوان هر منحنی بسته‌ای در آن را کوچک نمود بدون این که ناحیه D را ترک کند (شکل الف). در غیر این صورت ناحیه را چندگانه نامند (شکل ب).



(شکل الف)



(شکل ب)

حال با استفاده از این تعاریف چند نتیجه از قضیه کوشی ـ گورسا را بیان می‌داریم.

نتیجه ۱: اگر تابع $f(z)$ در ناحیه همبند ساده D تحلیلی باشد، در این صورت برای هر مرز ساده بسته‌ای نظیر c درون D داریم $\oint_c f(z)dz=۰$ (مراجعه شود به نکته ۴)

تست ۴: حاصل $\oint_c \frac{\text{ch}z}{3z}dz$ را بیابید که c محدود به دوایر $|z|=1$ و $|z|=2$ است.

الف) $2\pi i$ ب) $\frac{2\pi i}{3}$ ج) صفر د) $\frac{\pi}{3}$

حل: چون $z=0$ در محدوده بین دو دایره قرار ندارد پس بنابر نتیجه ۱ مقدار انتگرال صفر می‌شود یعنی گزینه (ج) صحیح است.

نتیجه ۲: اگر $f(z)$ در ناحیه همبند ساده D تحلیلی باشد و z_1 و z_2 دو نقطه در این ناحیه باشند، آنگاه انتگرال $f(z)$ بین z_1 و z_2 مستقل از مسیری است که z_1 را به z_2 وصل می‌کند.

مثال ۴: فرض کنید c قسمتی از منحنی به معادله $y=x^3-3x^2+5x-2$ باشد که نقاط $A(1,1)$ و $B(2,4)$ را به هم وصل می‌کند. مقدار انتگرال $\int_c (z^2-i)dz$ را بیابید.

حل: انتگرال داده شده مستقل از مسیر انتگرال‌گیری است بنابراین خط راست واصل بین این دو نقطه را انتخاب می‌کنیم. داریم:

$$\frac{y-1}{4-1}=\frac{x-1}{2-1}\rightarrow y=3x-2\rightarrow dy=3dx$$

لذا:

$$\int_c (z^2-i)dz=\int_c [x^2-y^2+i(2xy-1)](dx+idy)$$
$$=\int_1^2 [x^2-(3x-2)^2+i(2x(3x-2)-1][dx+3idx]$$
$$=\int_1^2 [-8x^2+12x-4+i(6x^2-4)(1+3i)dx]=(-\frac{8}{3}x^3+6x^2-4x)+i(2x^3-4x)\Big|_1^2(1+3i)$$
$$=-7+10i$$

نتیجه ۳: اگر $f(z)$ در ناحیه همبند ساده D تحلیلی و z_1 و z_2 دو نقطه باشند آنگاه $f(z)=\int_{z_1}^{z} f(w)dw$ در D تحلیلی است و $F'(z)=f(z)$.

نتیجه ۴: اگر D یک ناحیه همبند چندگانه باشد که بوسیله مرزهای c_1 و c_2 مشخص شود در این صورت اگر $f(z)$ در آن تحلیلی باشد آنگاه $\oint_{c_2} f(z)dz=\oint_{c_1} f(z)dz$.

اگر $f(z)$ در یک نقطه نظیر z_0 تحلیلی نباشد چه اتفاق می‌افتد؟ قضیه زیر پاسخ به این حالت می‌باشد.

۴-۴ قضیه فرمول انتگرال کوشی و تعمیم آن‌ها

اگر $f(z)$ در ناحیه همبند ساده D و روی مرز آن تحلیلی باشد آنگاه به ازای هر نقطه z_0 در D و هر مسیر بسته ساده c در D که z_0 را محصور کند

$$\oint_c \frac{f(z)\,dz}{z-z_0} = 2\pi i f(z_0)$$

تست۴: حاصل $\oint_c \frac{(z^2+3z-1)\,dz}{z^2+3z-4}$ که c در آن دایره $|z|=2$ است کدام است؟

الف) 0 ب) $17\pi i$ ج) $-3\pi i$ د) $-2\pi i$

حل: گزینه (ج) صحیح است.

زیرا تابع مخرج در دو نقطه $z=1$ و $z=-4$ صفر می‌شود که $z=1$ در داخل دایره قرار دارد. بنابراین می‌نویسیم:

$$\oint_c \frac{(z^2+3z-1)dz}{z^2+3z-4} = \oint_c \frac{\frac{z^2+3z-1}{z-3}}{z-1}dz = 2\pi i\left(\frac{1+3-1}{1-3}\right) = -3\pi i$$

نکته ۵: فرض کنید $c, c_1, c_2, \ldots, c_n$ کانتورهای بسته و $c_1, c_2, \ldots, c_n$ داخل c واقع باشند و نقاط اشتراکی نداشته باشند آنگاه:

$$\oint_c f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \oint_{c_k} f(z)dz$$

مثال ۵: حاصل $\oint_c \frac{dz}{z^4-1}$ را بیابید که $c_i : |z| = 2$.

حل: مخرج کسر در نقاط ± 1 و $\pm i$ صفر می‌شود زیرا $z^4-1=(z^2-1)(z^2+1)$. دوایر c_1 و c_2 و c_3 و c_4 را به مراکز ۱ و ۱- و i و $-i$ در داخل دایره $|z|=2$ در نظر می‌گیریم. در نتیجه:

$$\oint_c \frac{dz}{z^4-1} = \sum_{k=1}^{4} \int_{c_k} \frac{dz}{z^4-1} = 2\pi i(f_1(1)+f_2(-1)+f(i)+f(-i))$$

$$= 2\pi i\left(\frac{1}{(z_1^2+1)(z_1+1)} + \frac{1}{(z_2^2+1)(z_2-1)} + \frac{1}{(z_3^2-1)(z_3+i)} + \frac{1}{(z_4^2-1)(z_4-i)}\right)$$

$$= 2\pi i\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4i} + \frac{1}{4i}\right) = 0$$

تست ۵: مقدار $\int_{|z|=۲}\frac{e^{z}dz}{z^{۲}-۱}$ برابر است با:

الف) $۲\pi ei$ ب) $۲\pi ich۱$ ج) صفر د) $۲\pi ish۱$

حل: گزینه (د) صحیح است.

زیرا از $z^{۲}-۱=۰$ نقاط $z=\pm۱$ را داریم که هر دو در داخل دایره داده شده‌اند لذا:

$$\oint_{|z|=۲}\frac{e^{z}dz}{z^{۲}-۱}=\oint_{|z|=۲}\frac{\frac{e^{z}}{z+۱}}{z-۱}dz+\oint_{|z|=۲}\frac{\frac{e^{z}}{z-۱}}{z+۱}dz=۲\pi i(\frac{e}{۲}-\frac{e^{-۱}}{۲})=۲\pi ish۱$$

تست ۶: مقدار $\int_{|z|=۴}\frac{(۳z^{۲}+۲)dz}{(z-۱)(z^{۲}+۹)}$ برابر است با:

الف) $\pi(-۵+i)$ ب) $\frac{\pi}{۳}$ ج) $\frac{\pi}{۳}i$ د) صفر

حل: گزینه (الف) صحیح است.

زیرا مخرج در نقاط ۱ و $\pm۳i$ صفر می‌شود که همگی داخل دایره واقعند. لذا:

$$\oint_{|z|=۴}\frac{(۳z^{۲}+۲)dz}{(z-۱)(z^{۲}+۹)}=۲\pi i(\frac{۳z_{۱}^{۲}+۳}{z_{۱}^{۲}+۹}+\frac{۳z_{۲}^{۲}+۲}{z_{۲}^{۲}+۹}+\frac{۳z_{۳}^{۲}+۲}{z_{۳}^{۲}+۹})$$

$$=۲\pi i(\frac{۱}{۲}-\frac{۲۵}{۶i(۳i-۱)}-\frac{۲۵}{۶i(۳i+۱)})=\pi(-۵+i)$$

تست ۷: کدام گزینه در مورد تابع $f(z)=z^{۳}\bar{z}\cos z$ درست است؟

الف) $\oint_{|z|=۱}f(z)d\bar{z}=-۲\pi i$ ب) $\oint_{|z|=۱}f(z)d\bar{z}=۰$

ج) $\oint_{|z|=۱}f(z)dz=۲\pi$ د) $\oint_{|z|=۱}f(z)dz=۲\pi i$

حل: روی دایره $|z|=۱$ داریم $z\bar{z}=۱$ لذا:

$$f(z)=z^{۳}\bar{z}\cos z=z^{۲}(z\bar{z})\cos z=z^{۲}\cos z$$

پس $f(z)$ تابعی تحلیلی از اینرو $\oint_{|z|=۱}f(z)dz=۰$. یعنی گزینه (ب) صحیح است.

قضیه زیر که تعمیم قضیه فرمول انتگرال‌گیری کوشی است نشان می‌دهد اگر یک تابع در نقطه‌ای تحلیلی باشد مشتق‌های این تابع از هر مرتبه‌ای در این نقطه تحلیلی است.

قضیه تعمیم فرمول انتگرال کوشی: اگر تابع $f(z)$ در ناحیه همبند ساده D با مرز c تحلیلی باشد آنگاه در هر نقطه‌ای نظیر $z_{۰}$ از این ناحیه دارای مشتق از هر مرتبه‌ای است که تحلیلی‌اند و بعلاوه داریم:

$$f^{(n)}(z_{۰})=\frac{n!}{۲\pi i}\oint_{c}\frac{f(z)dz}{(z-z_{۰})^{n+۱}}$$

تذکر: قضیه فوق برای توابع حقیقی قابل استفاده نیست مثلاً تابع $f(x)=x^{\frac{3}{2}}$ در $x=0$ مشتق‌پذیر است اما مشتق دوم آن در این نقطه وجود ندارد.

نکته ۶: از قضیه تعمیم فرمول انتگرال کوشی داریم:

$$\oint_c \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}} = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0)$$

که برای وقتی در مخرج ریشه‌های تکراری داریم قابل استفاده است.

مثال ۶: نشان دهید $\oint_c \frac{e^{az}\sin bz dz}{z^2} = 2\pi bi$ که $c:|z|=1$ و اعداد a و b حقیقی‌اند.

حل: تابع زیر انتگرال در $z=0$ تحلیلی نیست لذا:

$$\oint_c \frac{e^{az}\sin bz dz}{z^2} = 2\pi i \frac{d}{dz}(e^{az}\sin bz)_{z=0} = 2\pi i\left[(b\cos bz + a\sin bz)e^{az}\right]_{z=0} = 2\pi bi$$

تست ۸: حاصل $\oint_{|z|=1} \frac{shz^2}{z^3} dz$ برابر است با:

الف) $2\pi i$ ب) صفر   ج) $6\pi i$ د) $-12\pi i$

حل: گزینه (الف) صحیح است.

زیرا داریم $f(z)=shz^2$ و $n=2$ در نتیجه:

$$\oint_{|z|=1} \frac{shz^2 dz}{z^3} = \frac{2\pi i}{2!}(shz^2)''_{z=0} = \pi i(2chz^2 + 4z^2 shz^2)_{z=0} = \pi i(2+0) = 2\pi i$$

تست ۹: حاصل $I = \oint_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{dz}{(z^2-1)(z^2-3z+2)}$ برابر است با:

الف) $\frac{2\pi i}{9}$ ب) $\frac{13\pi i}{9}$ ج) $\frac{-16\pi i}{9}$ د) صفر

حل: گزینه (ج) صحیح است.

زیرا مخرج در $z=1$ و $z=-1$ و $z=2$ صفر می‌شود که $z=1$ و $z=-1$ داخل دایره قرار دارند بعلاوه این که $z=1$ یک ریشه تکراری با تکرار دو است زیرا

$$f(z) = (z^2-1)(z^2-3z+2) = (z-1)(z+1)(z-1)(z-2) = (z-2)(z+1)(z-1)^2$$

بنابراین

$$I = 2\pi i\left[\left(\frac{1}{(z-1)^2(z+2)}\right)_{z=-1} + \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{(z+1)(z+2)}\right)_{z=1}\right]$$

$$= 2\pi i\left(\frac{1}{12} - \frac{35}{36}\right) = \frac{-16\pi}{9}.$$

قضایای زیر را می‌توان از قضیه تعمیم فرمول انتگرال کوشی نتیجه‌گیری نمود.

i) **قضیه مورا:** فرض کنید تابع $f(z)$ داخل دامنه همبند ساده D پیوسته و برای هر کانتور بسته (هر مسیر ساده بسته) c درون D داشته باشیم $\oint_c f(z)dz = 0$. در این صورت $f(z)$ در D تحلیلی است.

یادداشت ۳: قضیه مورا را می‌توان نوعی عکس قضیه کوشی ـ گورسا پنداشت.

ii) **قضیه نامساوی کوشی:** فرض کنید $f(z)$ در داخل و روی دایره $|z-z_0|=r$ تحلیلی و $M(r)=\max|f(z)|$. در این صورت

$$\frac{|f^{(n)}(z_0)|}{n!} \le \frac{M(r)}{r^n} \quad , \quad n = 0,1,2,\dots$$

نکته ۸: اگر در رابطه ذکر شده $n=1$ اختیار شود خواهیم داشت $|f'(z)| \le \frac{M(r)}{r}$. چون $|f(z)|$ کراندار است پس با انتخاب به اندازه کافی بزرگ برای r می‌گیریم $f'(z)=0$ یعنی $f(z)$ تابعی ثابت است.

iii) **قضیه لیوویل:** هر تابع تام و کراندار ثابت است.

مثال ۷: فرض کنید f تابعی تام باشد و عدد مختلط a به گونه‌ای موجود باشد که برای هر z داشته باشیم $|f(z)-a| > \varepsilon$. ثابت کنید f تابعی ثابت است.

حل: تابع $g(z) = \frac{1}{f(z)-a}$ را در نظر می‌گیریم. $g(z)$ تابعی تام است و داریم $|g(z)| \le \frac{1}{\varepsilon}$، لذا $g(z)$ کراندار است و با توجه به قضیه لیوویل این تابع ثابت است در نتیجه $f(z) = \frac{1}{g(z)} + a$ نیز تابعی ثابت است.

نکته ۹: اگر f تابعی تام باشد که به ازای n و $|z|$های به قدر کافی بزرگ $|f(z)| < |z|^n$ آنگاه $f(z)$ یک چند جمله‌ای است.

تست ۱۰: کدامیک از توابع زیر در قضیه لیوویل صادقند؟

الف) $\sin z$ ب) $\cos z$ ج) e^z د) هیچکدام

حل: گزینه (د) صحیح است.

زیرا اگر چه این توابع تام‌اند اما کراندار نیستند.

یک نتیجه مهم از قضیه لیوویل، **قضیه اساسی جبر** است که به صورت زیر بیان می‌شود.

هر چند جمله‌ای غیر ثابت حقیقی یا مختلط دست کم دارای یک صفر است.

نکته ۱۰: چنانچه $P_n(z)$ یک چند جمله‌ای درجه n باشد، $P_n(z)$ دقیقاً n صفر دارد.

نتیجه دیگری از فرمول انتگرال کوشی قضیه مقدار میانگین گاوس است که بیان می‌دارد اگر $f(z)$ در داخل و روی قرص $c:|z-z_0|=r$ تحلیلی باشد آنگاه:

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+re^{i\theta})d\theta$$

مثال ۸: مقدار میانگین x^2-y^2+x را روی دایره $|z-i|=2$ بیابید.

حل: داریم $x^2-y^2+x=\mathrm{Re}(z^2+z)$. مقدار میانگین روی $|z-i|=2$ با $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(i+2e^{i\theta})d\theta$ تعریف می‌شود که $f(z)=\mathrm{Re}(z^2+z)$. لذا با توجه به قضیه مقدار میانگین گاوس می‌گیریم:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(i+2e^{i\theta})d\theta=\mathrm{Re}(z^2+z)_{z=i}=\mathrm{Re}(-1+i)=-1\,.$$

با استفاده از قضیه مقدار میانگین گاوس می‌توان خاصیت مهمی از توابع تحلیلی را با قضیه زیر عنوان نمود.

iv) **قضیه ماکزیمم و می‌نیمم هنگ توابع:** اگر تابع $f(z)$ در داخل و روی منحنی بسته ساده c تحلیلی و ثابت نباشد آنگاه $|f(z)|$ مقدار ماکزیمم خود را روی c اختیار می‌کند. بعلاوه اگر $f(z)$ در هیچ نقطه‌ای از داخل c صفر نشودآنگاه $|f(z)|$ می‌نیمم خود را هم روی c برمی‌گزینند.

مثال ۹: مقدار ماکزیمم $|z^2+3z-1|$ را روی قرص $|z|\le 1$ به دست آورید.

حل: تابع $f(z)=z^2+3z-1$ یک چند جمله‌ای است پس تحلیلی است. از طرفی در داخل و روی این دایره مقداری ثابت نیست بنابراین مقدار ماکزیمم خود را روی آن اختیار می‌کند. چون $|z|=1$ از اینرو:

$$|z^2+3z-1|^2=(z^2+3z-1)(\bar{z}^2+3\bar{z}-1)=$$
$$(z\bar{z})^2+9z\bar{z}+3z\bar{z}(z+\bar{z})-3(z+\bar{z})-(z^2+\bar{z}^2)-1$$
$$=11-(z^2+\bar{z}^2)=11-2\mathrm{Re}(z^2)$$

بدیهی است سمت راست تساوی وقتی ماکزیمم خود را برمی‌گزینند که $z=\pm i$. از اینرو

$$\max|z^2+3z-1|^2=11+2=13\Rightarrow \max|z^2+3z-1|=\sqrt{13}$$

بدیهی است که می‌نیمم آن در $z=\pm 1$ است که مقدار آن ۳ خواهد بود.

تست۱۱: ماکزیمم $\left|z^{۲}-z\right|$ بر فرض $|z| \le ۱$ برابر است با: (کارشناسی ارشد)

الف) صفر　　ب) $\sqrt{۲}$　　ج) ۲　　د) $\sqrt{۲}+۱$

حل: گزینه (ج) صحیح است.

زیرا همانند مثال بالا می‌توان نوشت:

$$\left|z^{۲}-z\right|^{۲}=(z^{۲}-z)(\bar{z}^{۲}-\bar{z})=(z\bar{z})^{۲}-z^{۲}\bar{z}-z\bar{z}^{۲}+z\bar{z}=(z\bar{z})^{۲}-z(z\bar{z})-(z\bar{z})\bar{z}+z\bar{z}$$

چون $z\bar{z}=۱$ بنابراین

$$\left|z^{۲}-z\right|^{۲}=۲-(z+\bar{z})=۲-۲\operatorname{Re}(z)\,.$$

بدیهی است که ماکزیمم آن در $z=-۱$ اتفاق می‌افتد در نتیجه

$\max\left|z^{۲}-z\right|^{۲}=۴$ یعنی $\max\left|z^{۲}-z\right|=۲$

فصل پنجم

سری مختلط، قضیه مانده‌ها و کاربرد آن‌ها در حل انتگرال‌ها

۵-۱ دنباله‌ها و سریها

تابعی که دامنه آن مجموعه اعداد طبیعی باشد دنباله نامیده می‌شود. چنانچه مقادیر برد دنباله مختلط باشند دنباله را مختلط نامند. اگر $f: N \to ¢$ دنباله‌ای با ضابطه $f(n) = z_n$ باشد آنگاه این دنباله را با $\{z_n\}$ یا $\{z_n\}_1^\infty$ نشان می‌دهیم.

دنباله $\{z_n\}$ را همگرا به z_0 می‌نامیم هرگاه

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in N : n > N \Rightarrow |z_n - z_0| < \varepsilon$$

دنباله‌ای که همگرا نباشد واگرا نامیده می‌شود.

نکته ۱: دنباله $\{z_n\}_1^\infty$ که $z_n = x_n + iy_n$ همگرا به $c = a + ib$ است اگر و تنها اگر x_n به a و y_n به b همگرا باشد.

مثال ۱: همگرایی دنباله $z_n = (-1)^n + i\cos\frac{\pi}{n}$ را بررسی کنید.

حل: اگر چه $\lim\limits_{n\to\infty} \cos\frac{\pi}{n} = 1$ اما $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$ موجود نیست لذا دنباله z_n واگرا است.

نکته ۲: اگر دنباله $\{z_n\}$ همگرا باشد آنگاه دنباله $\{|z_n|\}$ نیز همگرا است و $\lim\limits_{n\to\infty}|z_n| = \left|\lim\limits_{n\to\infty} z_n\right|$

نکته ۳: ممکن است دنباله $\{z_n\}$ همگرا نباشد اما دنباله $\{|z_n|\}$ همگرا باشد.

تست ۱: حد دنباله $|z_n|$ کدام است اگر $z_n = \cos n + i\sin n$

الف) ۱ ب) i ج) $\frac{\pi}{2}$ د) حد موجود نیست.

حل: گزینه (الف) صحیح است.

زیرا اگر چه حد دنباله z_n موجود نیست اما $|z_n| = 1$ بنابراین حد آن یک می‌شود.

نکته۴: دنباله $z_n=(1+\frac{z}{n})^n$ به e^z همگرا است.

تست۲: حد دنباله $z_n=(1+\frac{2}{n})^n+\frac{i\sqrt{n}\ \sin n!}{n+1}$ کدام است؟

الف) $1+e$ ب) e^2 ج) 0 د) e^2+1

حل: گزینه (ب) صحیح است.

زیرا:

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{2}{n})^n=e^2\ \ ,\ \ \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}\ \sin n!}{n+1}=0$$

تست۳: حد دنباله $z_n=n\sin\frac{i}{n}$ کدام است؟

الف) i ب) 0 ج) -1 د) موجود نیست.

حل: گزینه (الف) صحیح است.

زیرا:

$$\lim_{n\to\infty}z_n=\lim_{n\to\infty}i\times\frac{\sin\frac{i}{n}}{\frac{i}{n}}=i\times 1=i$$

تست۴: حد دنباله $z_n=\arg\frac{(-1)^n}{n}$ برابر است با

الف) 0 ب) 1 ج) -1 د) دنباله حد ندارد.

حل: گزینه (د) صحیح است.

زیرا:

$$z_n=\arg\frac{(-1)^n}{n}=\begin{cases}0 & \text{، اگر } n \text{ زوج باشد}\\ \pi & \text{، اگر } n \text{ فرد باشد}\end{cases}$$

بنابراین جواب حد یکتا نیست یعنی دنباله حد ندارد.

نکته۴: اگر دنباله $\{z_n\}$ به c همگرا باشد هر زیر دنباله آن نیز به c همگراست.

نکته۵: هر دنباله همگرا کراندار است ولی عکس این مطلب درست نیست.

نکته: چون در میدان اعداد مختلط ترتیب وجود ندارد، مفهوم یکنوایی برای دنباله‌های مختلط تعمیم داده نمی‌شود.

خاصیت شرکت‌پذیری عمل جمع روی مجموعه اعداد مختلط ما را یاری می‌دهد که حاصل جمع هر تعداد متناهی از اعداد مختلط به صورت $\sum_{1}^{n} z_k$ تعریف شود. حال این مفهوم را برای تعداد نامتناهی اعداد مختلط تعمیم می‌دهیم.

اگر $\{z_n\}$ یک دنباله باشد حاصل جمع $\sum_{1}^{\infty} z_k$ را یک سری نامتناهی گویند و دنباله $\{s_n\}$ که $s_n = \sum_{1}^{n} z_k$ را دنباله مجموع جزیی این سری نامند.

سری $\sum_{1}^{\infty} z_n$ همگرا است هرگاه دنباله مجموعه جزیی آن همگرا باشد. اگر $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ در اینصورت $\sum_{1}^{\infty} z_n = s$

نکته۶: همانند سری‌های حقیقی اگر $\sum_{1}^{\infty} z_n$ همگرا باشد آنگاه $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$، اما عکس این مطلب درست نیست.

نکته۷: اگر $|z| < 1$ آنگاه $\sum_{0}^{\infty} z^n$ به $\frac{1}{1-z}$ همگراست و $\sum_{0}^{\infty} (-1)^n z^n$ به $\frac{1}{1+z}$ همگراست.

اما اگر $|z| \geq 1$ با شد این سریها واگرا خواهند بود.

مثال۲: همگرایی $\sum_{1}^{\infty} z^n(1-z)$ را بررسی کنید اگر $|z| < 1$ باشد.

حل: داریم $s_n = \sum_{1}^{n} z^k(1-z) = z - z^{n+1}$ که در حد مقدار s_n بسمت z میل می‌کند، زیرا $\lim_{n\to\infty} z^{n+1} = 0$ در نتیجه سری همگرا به z است.

سری $\sum_{1}^{\infty} z_n$ ***همگرای مطلق*** نامیده می‌شود اگر سری $\sum_{1}^{\infty} |z_n|$ همگرا باشد. اگر $\sum_{1}^{\infty} z_n$ همگرا اما $\sum_{1}^{\infty} |z_n|$ همگرا نبا شد گوییم سری $\sum_{1}^{\infty} z_n$ ***همگرای شرطی*** است.

آزمونهای زیر برای تعیین همگرایی سریها معمولاً مورد استفاده قرار می‌گیرند.

i) **آزمون نسبت:** اگر $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = L$ در این صورت سری همگراست اگر $L < 1$، واگراست اگر $L > 1$. اگر $L = 1$ با شد معلوم نیست که سری همگرا و یا واگراست.

ii) **آزمون ریشه:** اگر حد دنباله حقیقی $\left\{|z_n|^{\frac{1}{n}}\right\}$ کوچکتر از یک باشد سری $\sum_{1}^{\infty} z_n$ همگرای مطلق است و اگر بزرگتر از یک باشد واگرا و اگر یک باشد معلوم نیست.

iii) **آزمون مقایسه:** اگر $|z_n| \le \lambda_n$ و $\sum_{1}^{\infty} \lambda_n$ همگرا باشد در این صورت $\sum_{1}^{\infty} z_n$ همگرا ی مطلق است.

iv) **آزمون رابه:** اگر $\lim_{n\to\infty} n\left(1-\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right|\right) = L$ کوچکتر از یک باشد سری واگرا و اگر بزرگتر از یک باشد سری همگرا است. اگر $L = 1$ ، در مورد همگرایی نمی‌توان اظهارنظر کرد.

v) **آزمون گاوس:** با این فرض که $\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = 1 - \frac{L}{n} - \frac{\lambda_n}{n^2} + \dots$ که $|\lambda_n|$ برای هر $n > N$ کراندار است آنگاه سری $\sum_{1}^{\infty} z_n$ همگرای مطلق است اگر $L > 1$ باشد واگرا یا همگرای شرطی است اگر $L \le 1$.

مثال ۱۳: نشان دهید $\sum_{0}^{\infty} \frac{(1-i)^n}{n!}$ همگراست.

حل: با استفاده از آزمون نسبت داریم

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(1-i)^{n+1} n!}{(1-i)^n (n+1)!}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1-i}{n+1} = 0 < 1.$$

اگر $f_1(z), f_2(z)$ و ... توابعی مختلط باشند آنگاه یک سری نامتناهی از توابع مختلط

$$f_1(z) + f_2(z) + \dots = \sum_{1}^{\infty} f_n(z)$$

با $\{s_n(z)\}$ که دنباله مجموعه‌های جزیی این سری تابعی است مرتبط می‌باشد و این ارتباط به صورت $s_n(z) = \sum_{1}^{n} f_k(z)$ تعریف می‌شود. اگر حد این دنباله موجود باشد گوییم سری تابعی همگرا به تابعی نظیر $s(z) = f(z)$ است.

در مثال ۲ در اصل ما همگرایی یک سری تابعی را بررسی نمودیم که به تابع $f(z) = z$ همگرا شده بود.

فرض کنید $R_n(z) = s(z) - s_n(z)$ باقی‌مانده n جمله بعدی از سری تابعی باشد. گوییم این سری تابعی در ناحیه‌ای نظیر R ***همگرای یکنواخت*** به $s(z)$ است اگر و تنها اگر برای هر $\varepsilon > 0$ عددی نظیر $N(\varepsilon)$ موجود باشد طوریکه برای هر مقادیر z از این ناحیه و تمام $n > N$ داشته باشیم $|R_n(z)| < \varepsilon$.

در مثال ۲ اگر چه سری داده شده برای $|z| < 1$ همگرا به z بوده است ولی همگرایی یکنواخت نیست اما اگر $|z| < \frac{1}{2}$ باشد، سری همگرای یکنواخت به z خواهد بود.

یادداشت۱: همگرای یکنواخت بودن یک سری نامتناهی از توابع مختلط خاصیتی مهم برای آن بشمار می‌آید. ویژگی‌هایی نظیر پیوستگی یا تحلیلی بودن جزء اصلی توابع $f_k(z)$ به $s(z)$ منتقل می‌شود.

یادداشت۲: یک سری همگرای یکنواخت از توابع پیوسته را می‌توان جمله به جمله انتگرال‌گیری نمود یعنی

$$\int_c [\sum_{۱}^{\infty} f_n(z)]dz = \sum_{۱}^{\infty} \int_c f_n(z)dz$$

یادداشت۳: اگر $\sum_{۱}^{\infty} f'_n(z)$ همگرای یکنواخت باشد و $\sum_{۱}^{\infty} f_n(z)$ در این ناحیه همگرا باشد آنگاه

$$\frac{d}{dz}\sum_{۱}^{\infty} f_n(z) = \sum_{۱}^{\infty} f'_n(z)$$

مثال۴: نشان دهید برای $|z| < ۱$ داریم $\ln(۱-z) = \sum_{۱}^{\infty} \frac{z^n}{n}$.

حل: داریم

$$\frac{۱}{۱-z} = \sum_{\circ}^{\infty} z^n = ۱ + z + z^۲ + z^۳ + \dots$$

که با انتگرال‌گیری از طرفین تساوی فوق روی منحنی c از $z = \circ$ تا $z = z$ می‌گیریم.

$$\ln(۱-z) = z + \frac{z^۲}{۲} + \frac{z^۳}{۳} + \dots$$

یادداشت۵: آزمون وایراشتراس یک آزمون ساده برای همگرایی یکنواخت از یک سری نامتناهی از توابع مختلط را مهیا می‌سازد. این آزمون بیان می‌دارد که اگر $|f_n(z)| \le M_n$ که M_n مستقل از z در ناحیه R می‌باشد و سری $\sum_{۱}^{\infty} M_n$ همگرا باشد آنگاه $\sum_{۱}^{\infty} f_n(z)$ در R همگرای یکنواخت است.

انتخاب $f_n(z) = a_n(z - z_\circ)^n$ منجر به سری نامتناهی به نام سری توانی بسط داده شده در نقطه $z = z_\circ$ می‌شود. برای یک سری توانی $\sum_{\circ}^{\infty} a_n(z - z_\circ)^n$ عددی حقیقی نامنفی نظیر R وجود خواهد داشت که می‌تواند صفر یا بی‌نهایت هم در نظر گرفته شود طوریکه برای $|z - z_\circ| < R$ سری همگرای مطلق و برای $|z - z_\circ| > R$ واگرا باشد. R را ***شعاع همگرایی*** و دایره $|z - z_\circ| = R$ را ***دایره همگرایی*** نامند.

نکته۸: شعاع همگرایی از یک سری توانی را همیشه می‌توان با استفاده از فرمول‌های زیر یافت:

$$\text{(i)}\quad R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+۱}}\right| \quad , \quad \text{(ii)}\quad R = \lim_{n\to\infty}\frac{۱}{\sqrt[n]{|a_n|}}$$

نکته۹: هر سری توانی $\sum_{1}^{\infty} a_n z^n$ و سری مشتق متناظر آن یعنی $\sum_{1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ شعاع‌های همگرای یکسان دارند.

نکته۱۰: وقتی $R \neq 0$، یک سری توانی برای تمام نقاط درون دایره همگرایی، همگرای یکنواخت است.

نکته۱۱: اگر سری $\sum_{0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ در مجموعه‌ای مانند T همگرای یکنواخت به $f(z)$ و c یک کانتور واقع در آن باشد در این صورت

$$\sum_{1}^{\infty} \int_c a_n (z - z_0)^n dz = \int_c \sum_{0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n dz = \int_c f(z) dz$$

۲-۵ سریهای تیلور و لوران

اگر سوال شود آیا با داشتن یک تابع تحلیلی می‌توان یک سری توانی یافت که مجموع آن در ناحیه مشخصی برابر این تابع داده شده باشد، جواب مثبت است. فرض کنید تابع $f(z)$ در داخل و روی دایره‌ای به مرکز z_0 تحلیلی باشد. برای نمایش $f(z)$ بر حسب توان‌هایی از $(z - z_0)$ فرض می‌کنیم z داخل این دایره باشد. با استفاده از فرمول انتگرال کوشی مقدار تابع در z با

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_c \frac{f(z) dz}{z - z_0}$$

داده می‌شود. بر اساس قضیه تیلور در نظریه توابع مختلط نوشتن انتگرال کوشی از چنین توابعی به صورت یک سری توانی است.

قضیه تیلور: اگر تابع $f(z)$ در همسایگی $z = z_0$ تحلیلی باشد آنگاه نمایش دیگری برای $f(z)$ به صورت

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

است که در آن

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_c \frac{f(t) dt}{(t - z_0)^{n+1}}$$

نکته۱۲: با استفاده از تعمیم فرمول انتگرال کوشی به راحتی می‌توان مشاهده نمود که $a_n = \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$. بنابراین

$$f(z) = f(z_0) + \frac{(z - z_0) f'(z_0)}{1!} + \frac{(z - z_0)^2 f''(z_0)}{2!} + \dots$$

نکته ۱۳: اگر $z_\circ = \circ$ اختیار شود سری حاصل را ***سری مک لورن*** نامند که به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$f(z) = f(\circ) + \frac{z f'(z_\circ)}{۱!} + \frac{z^۲ f''(\circ)}{۲!} + \dots$$

فهرستی از بسط مک لورن توابع با دامنه همگرایی آن‌ها در زیر آمده است که دانشجو به عنوان تمرین می‌تواند درستی آن‌ها را ثابت نماید.

$$\text{(i)}\ e^z = ۱ + \frac{z}{۱!} + \frac{z^۲}{۲!} + \frac{z^۳}{۳!} + \dots \qquad , \quad |z| < \infty$$

$$\text{(ii)}\ \cos z = ۱ - \frac{z^۲}{۲!} + \frac{z^۴}{۴!} - \frac{z^۶}{۶!} + \dots \qquad , \quad |z| < \infty$$

$$\text{(iii)}\ \sin z = z - \frac{z^۳}{۳!} + \frac{z^۵}{۵!} - \frac{z^۷}{۷!} + \dots \qquad , \quad |z| < \infty$$

$$\text{(iv)}\ \tan z = z + \frac{z^۳}{۳} + \frac{۲z^۵}{۱۵!} + \dots \qquad , \quad |z| < \frac{\pi}{۲}$$

$$\text{(v)}\ \sec z = ۱ + \frac{z^۳}{۲} + \frac{۵z^۴}{۲۴} + \dots \qquad , \quad |z| < \frac{\pi}{۲}$$

$$\text{(vi)}\ \sec z = \frac{۱}{z} + \frac{z}{۶} + \frac{۷z^۳}{۳۶۰} + \dots \qquad , \quad \circ < |z| < \pi$$

$$\text{(vii)}\ \tan^{-۱} z = z - \frac{z^۳}{۳} + \frac{z^۵}{۵} - \frac{z^۷}{۷} + \dots \qquad , \quad |z| < ۱$$

$$\text{(viii)}\ \ln(۱+z) = z - \frac{z^۲}{۲} + \frac{z^۳}{۳} - \frac{z^۴}{۴} + \dots \qquad , \quad |z| < ۱$$

$$\text{(ix)}\ (۱+z)^k = ۱ + kz + \frac{k(k-۱)z^۲}{۲!} + \dots \qquad , \quad |z| < ۱$$

در قسمت (ix)، اگر $(۱+z)^k$ یک تابع چند مقداری باشد، شاخه‌ای را انتخاب می‌کنیم که تابع مقدار ۱ را دارد. وقتی $z = \circ$ است، در مورد توابع چند مقداری دیگر، شاخه اصلی مورد استفاده قرار می‌گیرد.

سری تیلور وقتی مناسب است که $f(z)$ در دامنه مورد نظر تحلیلی باشد در غیر این صورت شکل عمومی‌تر $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_\circ)^n$ مورد استفاده قرار می‌گیرد که سری لوران نامیده می‌شود. به این طریق می‌توان توابعی را که حول نقاطی نظیر $z = z_\circ$ تحلیلی نیستند بسط داد.

تست ۵: سه جمله بسط مک لورن $f(z)=\ln(1+z)$ با $|z|<1$ عبارت است از:

(کارشناسی ارشد)

الف) $1+z+z^2$

ب) $z+\dfrac{z^3}{3}+\dfrac{z^5}{5}$

ج) $z-\dfrac{z^3}{3}+\dfrac{z^3}{3}$

د) $z-\dfrac{z^3}{3}+\dfrac{z^5}{5}$

حل: گزینه (ج) صحیح است.

به فهرست داده شده نگاه کنید.

قضیه لوران: اگر تابع $f(z)$ در روی دو دایره هم مرکز c_1 و c_2 و داخل طوق بین آن‌ها تحلیلی و z نقطه‌ای داخل این طوق باشد در این صورت تابع $f(z)$ را می‌توان چنین نوشت

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n+\sum_{n=1}^{\infty} b_n(z-z_0)^{-n}$$

که در آن

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_c \frac{f(t)dz}{(t-z_0)^{n+1}},\quad b_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_c \frac{f(t)dt}{(t-z_0)^{1-n}}$$

که c یک منحنی بسته واقع در طوق است به طوری که دایره $|z-z_0|=r_1$ را احاطه کرده باشد.

تست ۶: سری لوران تابع $f(z)=\dfrac{3}{2+z-z^2}$ در ناحیه $1<|z|<2$ کدام است؟

(کارشناسی ارشد)

الف) $\sum_{0}^{\infty}\dfrac{z^n}{2^{n+1}}+\sum_{0}^{\infty}\dfrac{1}{z^n}$

ب) $\sum_{0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2^{n+1}}+\sum_{0}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{z^n}$

ج) $\sum_{0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n z^n}{2^{n+1}}+\sum_{0}^{\infty}\dfrac{1}{z^n}$

د) $\sum_{0}^{\infty}\dfrac{z^n}{2^{n+1}}+\sum_{0}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{z^{n+1}}$

حل: می‌نویسیم

$$f(z)=\frac{3}{2+z-z^2}=\frac{1}{1+z}+\frac{1}{2-z}$$

از طرفی برای ناحیه داده شده داریم:

$$\frac{1}{1+z}=\frac{1}{z(1+\frac{1}{z})}=\frac{1}{z}(1+\frac{1}{z})^{-1}=\frac{1}{z}(1-\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^3}+\ldots)$$

$$=\sum_{0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{z^{n+1}},\left|\frac{1}{z}\right|<1$$

$$\frac{1}{2-z}=\frac{1}{z2(1-\frac{z}{2})}=\frac{1}{2}(1-\frac{z}{2})^{-1}=\frac{1}{2}(1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{4}+\ldots)$$

$$=\sum_{0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}$$

$$\Rightarrow f(z)=\frac{3}{2+z+z^2}=\sum_{0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{z^{n+1}}+\sum_{0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}$$

بنابراین گزینه (د) صحیح است.

نکته ۱۴: برای تعیین بسط لوران توابع کسری می‌توان از بسط صورت و مخرج استفاده نمود.

نکته ۱۵: توجه کنید اگر $\frac{a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots}{b_0+b_1z+b_2z^2+\ldots}=c_0+c_1z+c_2z^2+\ldots$ آنگاه داریم:

$$a_1+a_1z+a_2z^2+\cdots=(b_0+b_1z+b_2z^2+\cdots)(c_0+c_1z+c_2z^2+\cdots)$$

سپس با مقایسه طرفین تساوی ضرایب $c_0, c_1, c_2, \cdots$ را می‌توانیم بیابیم.

مثال ۵: بسط لوران $\frac{\cot z}{z^4}$ را در همسایگی $z_0=0$ بنویسید.

حل: می‌نویسیم

$$\frac{\cot z}{z^4}=\frac{\cos z}{z^4\sin z}=\frac{1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}}{z^4(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}\cdots)}$$

$$=\frac{1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}\cdots}{z^5(1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}\cdots)}=\frac{1}{z^5}(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}\cdots)(1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}\cdots)^{-1}$$

$$=\frac{1}{z^5}(1+\frac{z^2}{3}-\frac{z^4}{45}\cdots)$$

همان‌طوری که مشاهده می‌شود سری لوران در محاسبه انتگرال‌های مختلط می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد. بویژه وقتی که تعداد مشتق‌گیری در تعمیم فرمول انتگرال‌کشی وقت‌گیر باشد. در بخش بعدی با توجه به

تعاریفی که ذکر می‌شوند قضیه مانده‌ها را عنوان می‌کنیم که کاربرد زیادی در حل انتگرال‌های مختلط حتی انتگرال‌های حقیقی دارد.

۳-۵ تکین‌ها و مانده

تابع تحلیلی $f(z)$ دارای صفر از مرتبه m در z_0 است اگر $f(z)=(z-z_0)^m g(z)$ که در آن $g(z)$ در z_0 تحلیلی و مخالف صفر باشد. اگر تابع $f(z)$ در z_0 تحلیلی نباشد این نقطه را تکین نامند. اگر در همسایگی z_0 هیچ نقطه تکین دیگری وجود نداشته باشد آن را ***تکین تنها*** گویند. اگر تابع $f(z)$ در z_0 دارای تکین تنها باشد، آنگاه در همسایگی $z=z_0$ این تابع دارای سری لوران است. سری لوران معرفی شده دارای دو قسمت است که قسمت دوم (شامل b_n) را ***بخش اصلی*** $f(z)$ در $z=z_0$ نامند.

الف) اگر بخش اصلی صفر باشد. نقطه تکین را ***برداشتی*** گویند.

ب) اگر بخش اصلی از تعدادی متناهی جمله تشکیل شده باشد، نقطه تکین را ***قطب*** نامند. توان آخرین جمله (مثلاً m) را مرتبه قطب نامند که اگر $m=1$ باشد قطب را ***ساده*** گویند.

ج) اگر بخش اصلی دارای تعداد نامتناهی جمله باشد نقطه تکین را ***اساسی*** نامند. به عنوان مثال، تابع $f(z)=e^{1/z}$ در $z=0$ نقطه تکین اساسی دارد و حال آن که تابع $f(z)=\dfrac{\sin z}{z^6}$ در $z=0$ قطبی از مرتبه $m=5$ دارد (جمله اول عبارت $\dfrac{1}{z^5}$ می‌باشد). همان‌طوری که در بخش قبل تعریف نمودیم b_1 یعنی ضریب $\dfrac{1}{z-z_0}$ در سری لوران را مانده $f(z)$ در $z=z_0$ نامیده‌ایم. مانده در z_0 را با نماد $\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)$ یا $Res(z_0)$ نشان می‌دهیم.

گیریم بخش اصلی $f(z)$ از تعداد متناهی جمله تشکیل شده باشد یعنی

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n+b_1(z-z_0)^{-1}+b_2(z-z_0)^{-2}+\dots+b_m(z-z_0)^{-m},$$

که آن را می‌توان به صورت زیر هم نوشت

$$(z-z_0)^m f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^{n+m}+b_1(z-z_0)^{m-1}+b_2(z-z_0)^{m-2}+\dots+b_m.$$

در این صورت با $(m-1)$ بار مشتق‌گیری از طرفین و سپس بررسی حد دو طرف تساوی وقتی $z\to z_0$ خواهیم داشت

$$b_1=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}(z-z_0)^m f(z)$$

که رابطه بالا فرمول محاسبه $\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)$ است وقتی قطبی از مرتبه m داریم. اگر $m=1$ باشد، از رابطه

بالا داریم

$$b_1 = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$$

اگر نقطه تکین اساسی باشد مانده را در این حالت می‌توان با بسط $f(z)$ حول $z=z_0$ و تعیین ضریب $\frac{1}{z-z_0}$ محاسبه نمود. به عنوان مثال، تابع $f(z)=e^{1/z}$ در $z=0$ نقطه تکین اساسی دارد. اما داریم

$$e^{1/z}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{3!z^3}+\dots$$

در نتیجه مانده در نقطه $z=0$ برابر یک خواهد بود.

قضیه مانده‌ها: اگر تابع $f(z)$ در داخل و روی مرز بسته C جز در تعداد متناهی از نقاط $z_1,z_2,\dots,z_n$ تحلیلی باشد، آنگاه

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \quad (\text{مجموع مانده‌ها در } z_1,z_2,\dots,z_n)$$

مثال ۶: مانده $f(z)=e^{z+\frac{1}{z}}$ را در $z_0=0$ بیابید.

حل: $z_0=0$ یک نقطه تکین اساسی $f(z)$ است و داریم:

$$f(z)=e^{z+\frac{1}{z}}=e^{z}.e^{\frac{1}{z}}=(1-z+\frac{z^2}{2!}+\cdots)(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2 2!}+\cdots)$$

$$=(1+\frac{1}{(1!)^2}+\frac{1}{(2!)^2}+\frac{1}{(3!)^2}+\cdots)z+\cdots+(1+\frac{1}{2!3!}+\frac{1}{3!4!}+\cdots)\frac{1}{z}+\cdots$$

در نتیجه ضریب $\frac{1}{z}$ که همان مانده مورد نظر ماست عبارت است از:

$$1+\frac{1}{2!3!}+\frac{1}{3!4!}+\cdots$$

محاسبه مانده‌ها در بسیاری مواقع نیاز به محاسبات زیادی دارد در زیر چند تکنیک برای محاسبه مانده‌ها را ذکر می‌کنیم. فرض کنید $g(z)$ و $h(z)$ توابعی تحلیلی در z_0 باشند و به علاوه z_0 یک تکین تنها f باشد در این صورت داریم.

i) اگر $\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)=0$ آنگاه z_0 یک نقطه تکین برداشتی f است و مانده f در این نقطه برابر صفر است.

ii) اگر $g(z)$ و $h(z)$ دارای ریشه z_0 باشند و مرتبه z_0 برای g و h یکسان باشد آنگاه z_0 یک نقطه تکین برداشتی $\frac{g(z)}{h(z)}$ است و مانده این تابع در z_0 برابر صفر است.

iii) اگر $\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$ موجود و برابر مقدار ناصفری مانند m باشد آنگاه z_0 یک قطب ساده $f(z)$ است و مانده f در z_0 برابر m است.

iv) اگر $h(z_0)=0$ و $g(z_0)\neq 0$ و $h'(z_0)\neq 0$ آنگاه z_0 یک قطب ساده $\dfrac{g(z)}{h(z)}$ است و مانده این تابع در z_0 برابر است با $\dfrac{g(z_0)}{h'(z_0)}$.

v) اگر $g(z)$ دارای صفر مرتبه kام z_0 باشد و بعلاوه z_0 صفر مرتبه $(k+1)$ام $h(z)$ باشد آنگاه z_0 یک قطب ساده $\dfrac{g(z)}{h(z)}$ است و مانده این تابع در z_0 برابر است با

$$(k+1)\frac{g^{(k)}(z_0)}{h^{(k+1)}(z_0)}$$

vi) چنانچه $g(z_0)\neq 0$ و $h'(z_0)=h(z_0)=0$ و $h''(z_0)\neq 0$ آنگاه z_0 یک قطب مرتبه دوم $\dfrac{g(z)}{h(z)}$ است و مانده این تابع در z_0 برابر است با:

$$\frac{2g'(z_0)}{h''(z_0)}-\frac{2g(z_0)h'''(z_0)}{3[h''(z_0)]^2}$$

vii) اگر $g(z_0)\neq 0$ آنگاه z_0 یک قطب مرتبه دوم $\dfrac{g(z)}{(z-z_0)^2}$ و مانده این تابع در z_0 برابر با $g'(z_0)$ است.

viii) اگر $g(z_0)=0$ و $g'(z_0)\neq 0$ و $h(z_0)=h'(z_0)=h''(z_0)=0$ و $h'''(z_0)\neq 0$ آنگاه z_0 یک قطب مرتبه دوم $\dfrac{g(z)}{h(z)}$ است و مانده این تابع در z_0 برابر است با:

$$\frac{3g''(z_0)}{h'''(z_0)}-\frac{3g'(z_0)h^{(4)}(z_0)}{2[h'''(z_0)]^2}$$

ix) اگر k کوچکترین عدد صحیح باشد که $\lim\limits_{z\to z_0}\phi(z_0)$ وجود دارد و $\phi(z)=(z-z_0)^k f(z)$ آنگاه z_0 قطب مرتبه kام $f(z)$ است و مانده f در z_0 برابر است با $\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{\phi^{(k-1)}(z_0)}{(k-1)!}$.

x) اگر $g(z)$ دارای صفر مرتبه Lام z_0 باشد و z_0 صفر مرتبه $(k+L)$ام $h(z)$ باشد آنگاه z_0 یک قطب مرتبه kام $\dfrac{g(z)}{h(z)}$ است و مانده این تابع در z_0 برابر است با $\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{\phi^{(k-1)}(z_0)}{(k-1)!}$ که $\phi(z)=(z-z_0)^k\dfrac{g}{h}$.

xi) اگر $g(z_0)\neq 0$ و $h(z_0)=h'(z_0)=\cdots=h^{(k-1)}(z_0)=0$ و $h^{(k)}(z_0)\neq 0$ آنگاه z_0 یک قطب مرتبه kام $\dfrac{g(z)}{h(z)}$ است و مانده این تابع در z_0 برابر است با:

$$\left[\frac{k!}{h^{(k)}(z_0)}\right]\begin{vmatrix} \frac{h^{(k)}(z_0)}{k!} & . & . & . & \cdots\cdots. & g(z_0) \\ \frac{h^{(k+1)}(z_0)}{(k+1)!} & \frac{h^{(k)}(z_0)}{k!} & . & . & \cdots\cdots. & g'(z_0) \\ \vdots & & & & & \vdots \\ \frac{h^{(2k-1)}(z_0)}{(2k-1)!} & \frac{h^{(2k-2)}(z_0)}{(2k-2)!} & . & & \cdots\cdots. & \frac{\overset{(k-1)}{g}(z_0)}{(k-1)!} \end{vmatrix}$$

مثال ۷: مانده $f(z)=\dfrac{e^z}{\sin^3 z}$ را در $z=0$ بیابید.

حل: $z=0$ قطب مرتبه سوم است داریم

$$\operatorname{Res}\left[\frac{e^z}{\sin^3 z}\,,\,z=0\right]=\left(\frac{3!}{6}\right)^3\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix}=1$$

مثال ۸: نقاط تکین تابع $\tan z$ را بیابید و مانده آن را مشخص کنید.

حل: نقاط تکین تابع، ریشه‌های معادله $\cos z=0$ هستند که عبارتند از $\cdots,\pm\frac{3\pi}{2},\pm\frac{\pi}{2}=z$. به عبارتی دیگر نقاط تکین تابع عبارتند از $z_n=(2n+1)\frac{\pi}{2}$ که n عددی صحیح است. بنابراین

$$\operatorname{Res}(\tan z,z_n)=\frac{\sin z_n}{\cos' z_n}=-1$$

تست ۷: مانده $f(z)=\dfrac{z^2-1}{(z^2+1)^2}$ در $z=i$ برابر است با:

الف) صفر ب) $i\pi$ ج) π د) $\frac{\pi}{2}$

حل: گزینه (الف) صحیح است.

زیرا $z=i$ ریشه دوم $(z^2+1)^2$ و مقدار z^2-1 در این نقطه ناصفر است، لذا $z=i$ قطب مرتبه دوم $f(z)$ است. با انتخاب $g(z)=z^2-1$ و $h(z)=(z^2+1)^2$ داریم:

$$g(i)=-2\;,\;g'(i)=2i\;,\;h'(i)=h(i)=0\;,h''(i)=-8,\;h'''(i)=24i$$

بنابراین مانده $f(z)$ در $z=i$ برابر است با:

$$\operatorname{Res}[f(z),i]=\frac{2(2i)}{-8}-\frac{2}{3}\cdot\frac{(-2).24i}{64}=0$$

تست ۸: مانده $f(z)=\frac{\sin 3z-3\sin z}{(\sin z-z)\sin z}$ در $z=0$ کدام است؟

الف) $\frac{1}{2}$ ب) $\frac{1}{4}$ ج) ۲۴ د) $\frac{5}{12}$

حل: با فرض $g(z)=\sin 3z-3\sin z$ و $h(z)=(\sin z-z)\sin z$ در این صورت $z_0=0$ صفر مشترک دو تابع است. از طرفی داریم:

$$g(z)=\sin 3z-3\sin z=3z-\frac{(3z)^3}{3!}+\frac{(3z)^5}{5!}-\cdots-3(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots)$$

$$=z^3(3(\frac{1}{3!}-\frac{9}{3!})-3(\frac{1}{5!}-\frac{81}{5!})z^2+\cdots)=z^3p(z)\ ,\ p(0)=-4\neq 0$$

$$h(z)=(\sin z-z)\sin z=(\frac{-z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots)(z-\frac{z^3}{3!}-\cdots)=$$

$$z^4Q(z)\ ,\ Q(0)=-\frac{1}{6}\neq 0$$

در نتیجه $f(z)=\frac{p(z)}{zQ(z)}$. بنابراین $z_0=0$ یک قطب ساده $f(z)$ است و بعلاوه داریم:

$$\mathrm{Res}\left[f(z),z_0=0\right]=\lim_{z\to 0}\left[z\frac{p(z)}{zQ(z)}\right]=\frac{-4}{-1/6}=24$$

نکته ۱۶: اگر r_1 و r_2 به ترتیب مانده‌های f_1 و f_2 در z_0 باشند آنگاه r_1+r_2 مانده f_1+f_2 در z_0 است.

نکته ۱۷: اگر z_0 قطب ساده f_1 و f_2 باشد آنگاه z_0 قطب مرتبه دوم f_1f_2 است.

می‌توان با استفاده مطالب گفته شده در مورد حساب مانده‌ها و قضیه مانده‌ها که بیان می‌دارد: اگر $f(z)$ در داخل و روی مرز بسته c جز در تعداد متناهی از نقاط $z_1,z_2,\cdots,z_n$ تحلیلی باشد، آنگاه:

$\oint_c f(z)dz=2\pi i$ (مجموع مانده‌ها در $z_1,z_2,\cdots,z_n$)

مثال ۹: حاصل $\oint_c\frac{(3z^2+2)dz}{(z-1)(z^2+9)}$ را بیابید که $c:|z|=4$.

حل: تابع زیر انتگرال سه نقطه تکین $z=1$ و $z=\pm 3i$ دارد. در نتیجه:

$$\oint_c\frac{(3z^2+2)dz}{(z-1)(z^2+9)}=2\pi i(\mathrm{Res}\,f(1)+\mathrm{Res}\,f(3i)+\mathrm{Res}\,f(-3i))$$

$$=2\pi i(\lim_{z\to 1}\frac{3z^2+2}{z^2+9}+\lim_{z\to 3i}\frac{3z^2+2}{(z-1)(z+3i)}+\lim_{z\to -3i}\frac{3z^2+2}{(z-1)(z-3i)})$$

$$=2\pi i(\frac{1}{2}-\frac{25}{6i(3i-1)}-\frac{25}{6i(3i+1)})=6\pi i$$

مثال ۱۰: حاصل $\oint_c \frac{dz}{z^4+z^3-2z^2}$ را به دست آورید که $c:|z|=3$.

حل: داریم $z^4+z^3-2z^2=z^2(z+2)(z-1)$، پس سه نقطه تکین در $z=0$، $z=-2$ و $z=1$ داریم که در $z=0$ یک قطب از مرتبه دو داریم. از اینرو:

$$\operatorname{Res} f(0)=\lim_{z\to 0}(z^2 f(z))'=\lim_{z\to 0}\frac{-(2z+1)}{(z^2+z-2)^2}=-\frac{1}{4}$$

$$\operatorname{Res} f(-2)=\lim_{z\to -2}((z+2)f(z))=\lim_{z\to -2}\frac{1}{z^2(z-1)}=-\frac{1}{12}$$

$$\operatorname{Res} f(1)=\lim_{z\to 1}((z-1)f(z))=\lim_{z\to 1}\frac{1}{z^2(z+2)}=\frac{1}{3}$$

مقدار انتگرال برابر می‌شود با $2\pi i(-\frac{1}{4}-\frac{1}{12}+\frac{1}{3})$ که مساوی صفر است.

نکته۱۸: اگر $f(z)$ در ناحیه همبند D بامرز c تحلیلی و روی c، $f(z)=0$ آنگاه $\oint_c \frac{f'(z)}{f(z)}dz=2\pi iN$ که N تعداد صفرهای تابع f در D است.

نکته۱۹: اگر تابع $f(z)$ در داخل و روی منحنی بسته c جز در تعداد متناهی از قطب‌ها تحلیلی و روی c، $f(z)\neq 0$ یا قطبی نداشته باشد آنگاه

$$\oint_c \frac{f'(z)}{f(z)}dz=2\pi i(N-P)$$

که N تعداد صفرها و P تعداد قطب‌ها $f(z)$ درون c است.

۴-۵ کاربرد قضیه مانده‌ها در حل انتگرالهای حقیقی

بسیاری از انتگرالها حقیقی را می‌توان با استفاده از حساب مانده‌ها محاسبه نمود در این بخش رده خاصی از این نوع انتگرالها را بررسی می‌کنیم.

الف) $\int_0^{2\pi} R(\cos n\theta,\sin n\theta)d\theta$ که R تابعی کسری است:

با انتخاب $\cos n\theta=\frac{1}{2}(z^n+z^{-n})$ و $\sin n\theta=\frac{1}{2i}(z^n-z^{-n})$ که $z=e^{i\theta}$ از آن $d\theta=\frac{dz}{iz}$ می‌توان انتگرال داده شده را به صورت $\oint_c f(z)dz$ نوشت که $c:|z|=1$ و سپس این انتگرال را با استفاده از قضیه مانده‌ها حل نمود.

مثال۱۱: نشان دهید $\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1+3\cos^2\theta}=\pi$.

حل: با انتخاب $n=1$، داریم $\cos\theta=\frac{1}{2}(z+z^{-1})=\frac{z^2+1}{2z}$

که از آن $\cos^2\theta = \frac{z^4+2z^2+1}{4z^2}$ از اینرو:

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1+3\cos^2\theta} = \oint_c \frac{\frac{dz}{iz}}{1+\frac{3}{4}\left(\frac{z^4+2z^2+1}{z^2}\right)} = \oint_c \frac{-4iz\,dz}{(3z^2+1)(z^2+3)}$$

که نقاط $z = \pm\frac{i}{\sqrt{3}}$ داخل دایره قرار دارند. در نتیجه

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1+3\cos^2\theta} = 2\pi i\left(\operatorname{Res} f\left(\frac{i}{\sqrt{3}}\right) + \operatorname{Res} f\left(-\frac{i}{\sqrt{3}}\right)\right) = 2\pi i\left(-\frac{i}{4}-\frac{i}{4}\right) = \pi.$$

مثال ۱۲: حاصل $\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{1+a^2-2a\cos\theta}$ را بیابید که $0 < a < 1$.

حل: با انتخاب $\cos\theta = \frac{z+z^{-1}}{2}$ و $d\theta = \frac{dz}{iz}$ و این موضوع که تابع زیر انتگرال تابعی زوج است، می‌گیریم

$$\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{1+a^2-2a\cos\theta} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1+a^2-2a\cos\theta} = \frac{i}{2}\oint_c\frac{dz}{-az^2+(1+a^2)z-a} = \frac{i}{2}\oint_c\frac{dz}{(z-a)(az-1)}$$

قطب‌ها عبارتند از $z = a$ و $z = \frac{1}{a}$. چون $0 < a < 1$ پس $z = a$ درون دایره قرار دارد. از اینرو

$$\int_{\pi}^{0}\frac{d\theta}{1+a^2-2a\cos\theta} = 2\pi i\left(\frac{i}{2}\right)\operatorname{Res} f(a) = \frac{\pi}{1-a^2}$$

توجه شود اگر $a > 1$ باشد در این صورت قطب $z = \frac{1}{a}$ درون دایره واقع می‌گردد و مقدار انتگرال $\frac{\pi}{a^2-1}$ می‌شود.

ب) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}dx$ که $P(x)$ و $Q(x)$ چند جمله‌ای هستند:

فرض کنید $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ و $P(x)$ و $Q(x)$ به ترتیب چند جمله‌هایی از درجات m و n هستند و $Q(z)$ صفرهای حقیقی نداشته باشد. اگر $Q(z)$ در $z_1, z_2, \ldots, z_k$ دارای قطب و $n \geq m+2$ باشد می‌توان نشان داد که

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{p(x)}{Q(x)}dx = 2\pi i \ (\text{مجموع مانده‌ها } f(z) \text{ در } z_1, z_2, \ldots, z_k)$$

که z_i با قسمت موهومی مثبت است. یعنی بالای محور x ها قرار دارند.

به انتگرال داده شده عددی را نسبت می‌دهیم که عبارت است از $\lim\limits_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)dx$ و آن را **مقدار اصلی کوشی انتگرال** داده شده می‌نامیم و با c.p.v نشان می‌دهیم. یعنی:

$$\text{c.p.v}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)\,dx$$

تذکر: وجود مقدار اصلی کوشی دلیلی بر همگرایی انتگرال نیست ولی عکس این مطلب درست است. یعنی اگر انتگرال همگرا باشد مقدار آن برابر با مقدار اصلی کوشی خواهد بود.

مثال ۱۳: نشان دهید $\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{dx}{(x^۲+۱)(x^۴+۴)}=\dfrac{\pi}{۶}$.

حل: تابع زیر انتگرال دارای چهار نقطه تکین $\pm i$ و $\pm ۲i$ است که نقاط i و $۲i$ بالای محور x هاست از اینرو:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^۲+۱)(x^۴+۴)}=۲\pi i(\operatorname{Res} f(i)+\operatorname{Res} f(۲i))=۲\pi i\left(-\frac{i}{۶}+\frac{i}{۱۲}\right)=\frac{\pi}{۶}$$

نکته ۲۰: با استفاده از تکنیک (iv) گفته شده در این فصل داریم $\operatorname{Res} f(z_۰)=\dfrac{P(z_۰)}{Q'(z_۰)}$.

مثال ۱۴: ثابت کنید $\int_{۰}^{\infty}\dfrac{x^۴dx}{۱+x^۶}=\dfrac{\pi}{۳}$.

حل: تابع زیر انتگرال زوج است پس:

$$\int_{۰}^{\infty}\frac{x^۴}{۱+x^۶}dx=\frac{۱}{۲}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^۴}{۱+x^۶}dx$$

تابع زیر انتگرال شش نقطه تکین دارد که نقاط $z=i$، $z=\dfrac{\pm\sqrt{۳}+i}{۲}$ در بالای محور x ها قرار دارند. لذا:

$$\int_{۰}^{\infty}\frac{x^۴}{۱+x^۶}dx=\frac{۱}{۲}(۲\pi i)\left(\frac{zk^۴}{۶z_k^۵}\right)=\frac{\pi i}{۶z_k}$$
$$=\frac{\pi i}{۶}\left(\frac{۱}{i}+\frac{۱}{i+\sqrt{۳}}+\frac{۱}{i-\sqrt{۳}}\right)=\frac{\pi}{۳}$$

ج) انتگرال‌های ناسره $\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{p(x)}{Q(x)}\cos ax\,dx$ ، $\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{p(x)}{Q(x)}\sin ax\,dx$:

برای حل این گونه انتگرال‌ها، $\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{p(x)e^{iax}dx}{Q(x)}$ را بررسی می‌کنیم.

اگر $z_1, z_2, ..., z_k$ صفرهای $Q(z)$ در نیم صفحه فوقانی باشند در این صورت با فرض $n \geq m+1$ می‌توان نشان داد که:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)e^{iax}dx}{Q(x)} = 2\pi i \text{ (مجموع مانده } f(z) \text{ در } z_1, z_2, ..., z_k)$$

آنگاه با توجه به این که $e^{iax} = \cos ax + i\sin ax$ حاصل انتگرال را به دست می‌آوریم.

مثال ۱۵: نشان دهید $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin x dx}{x^2+4} = \frac{\pi}{e^2}$.

حل: اول حاصل $\oint_c \frac{ze^{iz}dz}{z^2+4}$ را به دست می‌آوریم. نقاط $z = \pm 2i$ نقاط تکین تابع‌اند که تنها $z = 2i$ بالا محور x هاست. بنابراین:

$$\oint_c \frac{ze^{iz}dz}{z^2+4} = 2\pi i(\text{Res} f(2i)) = 2\pi i(\frac{2ie^{-2}}{4i}) = \frac{\pi i}{e^2}$$

حل با استفاده از این که $e^{iz} = \cos z + i\sin z$ و مقایسه طرفین تساوی نتیجه مورد نظر بدست می‌آید.

مثال ۱۶: حاصل $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x dx}{x^4+4}$ را بیابید.

حل: فرض کنید $f(z) = \frac{e^{iz}}{z^4+4}$ که چهار نقطه تکین دارد که از این نقاط دو نقطه $z = i \pm 1$ بالای محور x هاست. از اینرو

$$\oint_c f(z)dz = 2\pi i(\text{Res} f(i+1) + \text{Res}(i-1)) = \frac{\pi(\cos 1 + \sin 1)}{4e}$$

از مقایسه طرفین تساوی با استفاده از رابطه $e^{iz} = \cos z + i\sin z$ می‌گیریم:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x dx}{x^4+4} = \frac{\pi(\cos 1 + \sin 1)}{4e}$$

د) انتگرال‌های ناسره با قطب‌های حقیقی: در این حالت به ازای برخی نقاط روی محور x ها، $Q(x) = 0$ می‌باشد. این نوع انتگرال‌ها را با تو رفتگی ایجاد کردن روی منحنی در آن قسمت که شامل نقطه تکین است بررسی می‌کنیم. به این صورت که نیم دایره‌ای با مرکز نقطه تکین و به شعاع r را از شکل جدا می‌سازیم و در حد، حاصل انتگرال را وقتی که $r \to 0$ محاسبه می‌کنیم.

مثال ۱۷: نشان دهید $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xdx}{x^3-8} = \frac{\pi\sqrt{3}}{6}$.

حل: تابع $f(z)=\frac{z}{z^3-8}$ دارای سه نقطه تکین است که $z=2$ روی محور x ها و $z=-1+i\sqrt{3}$ بالا محور x ها. از اینرو:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xdx}{x^3-8} = 2\pi i\left(f(-1+i\sqrt{3}) + \frac{1}{2}f(2)\right) = \frac{\pi\sqrt{3}}{6}$$

نکته ۲۱: اگر نقطه روی c باشد مقدار انتگرال $\pi i \operatorname{Res} f(z)$ می‌شود.

یادداشت ۶: مقادیر محاسبه شده از انتگرال‌ها زیر برای محاسبات می‌توانند مفید واقع گردند.

i) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^{2n}} = \frac{\pi}{2n} e^{i\frac{\pi}{2n}} \quad , (n \geq 1)$

ii) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{\pi}{2a}$

iii) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin axdx}{x^2+b^2} = \pi e^{-ab} \quad , (a,b>0)$

iv) $\int_{0}^{2\pi} \frac{d\theta}{a+b\cos\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}} , (a>b>0)$

v) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}} = \frac{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n-1)}{2\times 4\times 6\times\cdots\times 2n}$

vi) $\int_{0}^{2\pi} \frac{d\theta}{a+b\sin\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}} \quad , (a>b>0)$

vi) $\int_{0}^{2\pi} \frac{d\theta}{(a+b\sin\theta)^2} = \frac{2\pi a}{(a^2-b^2)^{\frac{3}{2}}} ,(a>b>0)$

viii) $\int_{0}^{\infty} \frac{x^{a-1}}{x+1}dx = \frac{\pi}{\sin a\pi} \quad , 1>a>0$

فصل ششم

نگاشت همدیس و کاربردهای آن

۶-۱ نگاشت همدیس

در فصل ۳ نگاشت‌ها را برای توابع مقدماتی بررسی نمودیم و سعی کردیم توابعی نظیر $w = f(z)$ را که بین مقادیر z و w تناظر یک به یک برقرار می‌کنند مورد توجه قرار دهیم. نوع دیگری از نگاشت که در مسائل کاربردی نقش بسیار مهمی دارد بنام نگاشت همدیس است. به نگاشت $w = f(z)$ از D در صفحه $-z$ به D' در صفحه $-w$ همدیس گوییم اگر زاویه بین هر دو منحنی هموار برابر و جهت آن‌ها تحت این نگاشت تغییر نکند.

یادداشت ۱: اگر $f(z)$ در D تحلیلی و در هر نقطه داخل آن $f'(z) \neq 0$، در این صورت نگاشت همدیس است.

نکته ۱: نگاشت‌های $w = az + b$ و $w = e^z$ همدیس‌اند.

نکته ۲: نگاشت $w = z^n (n = 2,3,\cdots)$ در تمام نقاط غیر از $z = 0$ همدیس است.

نکته ۳: توابع همساز تحت نگاشت همدیس، همساز باقی می‌مانند.

یادداشت ۲: اگر f یک تابع تحلیلی و همدیس در D باشد آنگاه f^{-1} در $f(D)$ تحلیلی و همدیس است. یکی از مفیدترین نگاشت از نگاشت‌های همدیس، نگاشت دو خطی است که در بخش بعدی به خاطر اهمیت آن به تفصیل مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

۶-۲ نگاشت دو خطی

تبدیل $ad \neq bc$ ، $w = \dfrac{az+b}{cz+d}$

را که در آن اعداد a,b,c و d حقیقی یا مختلط‌اند *تبدیل دو خطی* یا *تبدیل موبیوس* نامند. در حالتی که $ad = bc$ باشد این تبدیل به صورت ثابت درمی‌آید. یعنی هر نقطه از صفحه $-z$ به روی یک نقطه از صفحه $-w$ نگاشت می‌شود.

اگر $c=0$، آنگاه $w=\frac{az+b}{d}$ و بنابراین نگاشت خطی است. پس با این فرض که c و $ad-bc$ صفر نباشند داریم

$$w=\frac{a}{c}+\frac{bc-ad}{c^{2}(z+\frac{d}{c})}$$

که می‌توان آنرا به عنوان دنباله‌ای از نگاشت که به صورت زیر است در نظر گرفت.

i) $w_1=z+\frac{d}{c}$ که یک انتقال است. ii) $w_2=\frac{1}{w_1}$ که یک انعکاس است.

iii) $w_3=\frac{bc-ad}{c^{2}}w_2$ که یک دوران است . iv) $w_4=\frac{a}{c}+w_3$ که یک انتقال است.

یادداشت۳: تحت این نگاشت نقطه $z=0$ به روی $w=\frac{b}{d}$ و نقطه $z=-\frac{b}{a}$ به روی $w=0$ و نقطه $z=-\frac{c}{d}$ به روی $w=\infty$ و نقطه $z=\infty$ به روی $w=\frac{a}{c}$ نگاشت می‌شود.

مثال۱: نشان دهید تابع $w=\frac{i(1-z)}{1+z}$ ناحیه $|z|\le 1$ را به صورت یک به یک به روی $v\ge 0$ می‌نگارد.

حل: رابطه داده شده را به صورت $z=\frac{-w+i}{w+i}$ می‌نویسیم. اگر $|z|=1$ باشد در این صورت $|-w+i|=|w+i|$ که از آن $u^{2}+(1-v^{2})=u^{2}+(1+v^{2})$. از این تساوی $v=0$ به دست می‌آید که روی محور u است. از $|z|<1$ نتیجه می‌گیریم که $v>0$. با ترکیب این دو نتیجه $v\ge 0$.

مثال۲: نشان دهید تابع $w=\frac{z+1}{z+2}$ دایره $|z+1|=1$ را به روی خط $Re(w)=\frac{1}{2}$ می‌نگارد.

حل: رابطه داده شده را به صورت $z=\frac{1-2w}{w-1}$ می‌نویسیم که از آن $z+1=\frac{-w}{w-1}$. لذا از اینرو از $|z+1|=1$ می‌گیریم $|w|=|w-1|$ یعنی $w\overline{w}=(w-1)(\overline{w}-1)$. بعد از ساده کردن این رابطه می‌رسیم به $w\overline{w}=1$. اما $w+\overline{w}=2Re(w)$ پس $Re(w)=\frac{1}{2}$.

برای تعیین چهار ثابت c, b, a و d چهار نقطه کافی است اما اگر بنویسیم

$$w=\frac{az+b}{cz+d}=\frac{a}{c}\left(\frac{z+\frac{b}{a}}{z+\frac{d}{c}}\right)$$

بنابراین سه شرط برای مشخص کردن این تبدیل دو خط کافی است. این دلیل صوری منتهی به قضیهٔ زیر می‌شود:

قضیه: تنها یک تبدیل دوخطی وجود دارد که همواره سه نقطه متمایز z_1, z_2 و z_3 را به ترتیب بر روی نقاط متمایز w_1, w_2 و w_3 می‌نگارد و با رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$\frac{(w-w_1)(w_2-w_3)}{(w-w_3)(w_2-w_1)}=\frac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z-z_3)(z_2-z_1)}$$

مثال۳: تبدیل دو خطی‌ای را بیابید که سه نقطه $z_1=0$، $z_2=1$ و $z_3=i$ را به ترتیب به روی سه نقطه $w_1=i$, $w_2=0$ و $w_3=-i$ می‌نگارد.

حل: می‌نویسیم

$$\frac{(w-i)(0+i)}{(w+i)(0-i)}=\frac{(z-0)(1-i)}{(z-i)(1-0)}$$

که از آن

$$(w-i)(z-i)=-(w+i)z(1-i)\Rightarrow$$
$$w(z-i)-iz-1=-w(1-i)z+z(-i-1)$$
$$w(z-i)+(1-i)zw=iz+1+z(-i-1)\to w=\frac{-z+1}{(2-i)z-i}$$

یادداشت ۴: اگر یکی از نقاط ∞ باشد بجای آن $\frac{1}{t}$ قرار می‌دهیم و بعد از ساده کردن بجای t مقدار صفر می‌گذاریم.

تست ۱: تبدیل خط کسری که نقاط $z_1=-2$ و $z_2=0$ و $z_3=2$ را به ترتیب بر روی $w_1=\infty$، $w_2=\frac{1}{4}$ و $w_3=\frac{3}{8}$ می‌نگارد کدام است؟ (کارشناسی ارشد)

الف) $w=\frac{2z+1}{2z-4}$ ب) $w=\frac{z+1}{2z+4}$

ج) $w=\frac{z-1}{2z+4}$ د) $w=\frac{z+3}{2z-4}$

حل: گزینه (ب) صحیح است.

زیرا داریم:

$$\frac{(w-\frac{1}{t})(\frac{1}{4}-\frac{3}{8})}{(w-\frac{3}{8})(\frac{1}{4}-\frac{1}{t})}=\frac{(z+2)(0-2)}{(z-2)(0+2)}\Rightarrow$$

$$\frac{(tw-1)(-4)}{(8w-3)(t-4)}=\frac{-2(z+2)}{2(z-2)}\Rightarrow w=\frac{z+1}{2(z+2)}$$

تست ۳: تبدیل خط کسری که به ترتیب نقاط ۱−، i و $i+1$ در صفحه − z را بر روی نقاط ۰، ∞ و $2+i$ از صفحه − w تصویر می‌کند کدام است؟ (کارشناسی ارشد)

الف) $w=\dfrac{z+1}{z-i}$

ب) $w=\sqrt{2}\,\dfrac{z+1}{z-i}$

ج) $w=\dfrac{z-i}{z+1}$

د) $w=\dfrac{z+i}{2(z-i)}$

حل: گزینه (الف) صحیح است.

زیرا داریم:

$$\frac{(w-0)(\frac{1}{t}-2-i)}{(w-2-i)(\frac{1}{t}-0)}=\frac{(z+1)(i-1-i)}{(z-1-i)(i-1)}\Rightarrow w=\frac{z+1}{z-i}$$

۶-۳ نگاشت‌های کسری خطی خاص

فرض کنید بخواهیم ترکیب دو خطی‌ای را بیابیم که نیم صفحه $y\ge 0$ را به روی $|w|\le 1$ نگاشت کند. از آنجا که تبدیل دو خطی هر خط راست را به روی دایره یا خط راست نگاشت می‌کند پس باید خط $y=0$ به دایره $|w|=1$ تبدیل شود در غیر این صورت به خاطر وجود تناظر یک به یک به تناقض خواهیم رسید. با انتخاب سه نقطه $z=0,1,\infty$ روی این خط راست (انتخاب سه نقطه دلخواه است)، نتیجه می‌گیریم که $|a|=|c|, |b|=|d|$. حال با نوشتن تبدیل دو خطی به صورت

$$w=\frac{az+b}{cz+d}=\frac{a}{c}\left(\frac{z+\frac{b}{a}}{z+\frac{d}{c}}\right)$$

و انتخاب $z_0=-\dfrac{b}{a}$ و $z_1=-\dfrac{d}{c}$ و $e^{i\alpha}=\dfrac{a}{c}$ (α عددی حقیقی است) می‌گیریم:

$$w=e^{i\alpha}\frac{z-z_0}{z-z_1}$$

از تساوی $\left|\dfrac{d}{c}\right|=\left|\dfrac{b}{a}\right|$ نتیجه می‌شود $|z_1|=|z_0|$ که اگربر رابطه قبل اعمال کنیم تساوی $z_1=\bar{z}_0$ را خواهیم داشت. به این ترتیب رابطه فوق را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$w=e^{i\alpha}\frac{z-z_0}{z-\bar{z}_0}$$

و این همان تبدیل دو خطی است که نیم صفحه $y\ge 0$ را به روی $|w|\le 1$ می‌نگارد.

نکته ۴: نگاشت دو خطی $w=e^{i\alpha}\dfrac{z-z_0}{z-\bar{z}_0}$ نیم صفحه $x\ge 0$ را به روی $|w|\le 1$ می‌نگارد.

مثال ۴: نشان دهید که نمی‌توان تبدیل دو خطی‌ای را یافت که نیم صفحه $x \geq 0$ را به روی $|w| \leq 1$ به گونه‌ای بنگارد که نقطه $z = 0$ به روی $w = 0$ نگاشت می‌شود.

حل: با قرار دادن $z = 0$ و $w = 0$ خواهیم داشت $z_0 = 0$ یعنی $\bar{z}_0 = 0$ که امکان‌پذیر نیست زیرا $w = e^{i\alpha}$.

مثال ۵: تبدیل دو خطی را بیابید که نیم صفحه فوقانی از صفحه $-z$ را به توی دایره واحد $|w| \leq 1$ در صفحه $-w$ می‌نگارد طوری که نقاط $z = i, \infty$ به ترتیب به روی نقاط $w = 0, -1$ نگاشت می‌شوند.

حل: با جاگذاری $w = 0$ و $w = -1$ متناظر با $z = i$ و $z = \infty$ دو معادله بر حسب α و z_0 خواهیم داشت که از حل آن‌ها $z_0 = i$ و $\alpha = \pi$. لذا تبدیل مورد نظر عبارت است از $w = \dfrac{i - z}{i + z}$.

نکته ۵: نگاشت دو خطی $w = e^{i\alpha} \dfrac{z - z_0}{z\bar{z}_0 - 1}$ دایره $|z| \leq 1$ را به روی $|w| \leq 1$ می‌نگارد.

۶-۴ کاربردهای نگاشت‌های همدیس

در انتهای این فصل چند کاربرد از نگاشت‌های همدیس را ذکر می‌کنیم. فرض بر این می‌باشد که ناحیه داده شده ناحیه مطلوبی برای حل مسأله نیست به همین منظور سعی داریم با استفاده ه از تابع تبدیل مسأله با مقدار مرزی به مسأله با مقدار مرزی دیگر تبدیل شود، این نگاشت می‌تواند به روی ناحیه ساده‌تری نظیر نیم صفحه یا دایره‌ای یکه باشد، و سپس آن را حل می‌کنیم.

الف) مسأله دریکله

مسأله زیر که به نام مسأله دریکله است در وضعیت‌های گوناگونی از مکانیک سیالات، نظریه میدان الکتریکی، هدایت گرما و الاستیسیته ناشی می‌شود که عبارت است از پیدا کردن تابعی نظیر $u(x, y)$ که در D همساز و روی مرز آن c مقادیر مرزی مشخصی داشته باشد و به علاوه در معادله لاپلاس صدق کند. اگر c منحنی دایره واحد باشد در این صورت $u(1, \theta) = f(\theta) = 1$ را می‌توان با استفاده از فرمول انتگرال پواسن

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y g(t) dt}{y^2 + (x - t)^2}$$

به دست آورد.

برای حل در هر دو حالت اول تابع نگاشتی را در نظر می‌گیریم که مسأله با مقدار مرزی برای ناحیه D را به ناحیه متناظر آن نظیر دایره واحد یا نیم صفحه تبدیل کند، سپس مسأله را حل می‌کنیم و جواب حاصل را بر حسب متغیرهای لازم می‌نویسیم. بسیاری از این مسائل را می‌توان با استفاده از نظریه‌های معادلات با مشتقات نسبی حل نمود.

مثال ۶: تابع $\phi(x,y)$ که در نیمه فوقانی صفحه $Im(z) > 0$ همساز و مقادیر مرزی زیر را دارد را بیابید.

الف) برای $|x| < 1$ و $\phi(x,0) = 1$ و ب) برای $|x| > 1$ و $\phi(x,0) = 0$.

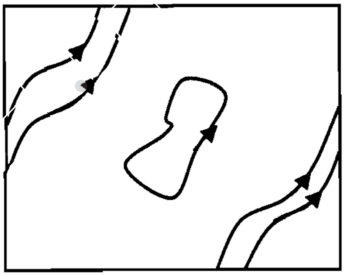
حل: با استفاده از فرمول قبل داریم:

$$\phi(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{y\,dt}{(x-t)^2+y^2} = \frac{1}{\pi}\text{Arctan}\left(\frac{y}{x-t}\right)\Bigg|_{-1}^{1}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\text{Arctan}\left(\frac{y}{x-t}\right) - \text{Arctan}\left(\frac{y}{x+1}\right)\right]$$

کاربرد در هیدرودینامیک

نگاشت همدیس را می‌توان در مسائل هیدرودینامیک به طرق گوناگونی به کار برد. به عنوان مثال مسأله‌ای را که می‌توان به عنوان مسأله با مقدار مرزی طرح و با کمک نگاشت همدیس حل نمود. بررسی می‌کنیم. مسأله جریان سیالی که در شکل زیر نمایش داده شده است را در نظر می‌گیریم. چون ناحیه همبند ساده نیست نمی‌توان مطمئن بود که یک تابع (تک مقدار) بایستی در پتانسیل مختلط (تک مقدار) نظیر $F(z)$ وجود داشته باشد اما اگر درباره جریان سیال در ∞ فرضی را در نظر بگیریم چنین $F(z)$ای وجود خواهد داشت.



فرض طبیعی این است که جریان با سرعت ثابت در ∞به یک جریان یکنواخت برسد و از این رو $f(z) = F'(z)$ در ∞ تحلیلی است:

$$f(z) = a_0 + \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \cdots, |z| > R$$

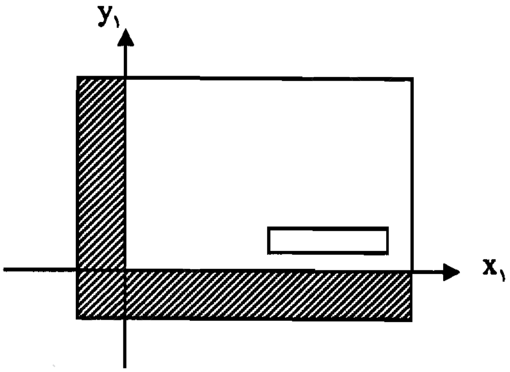
$$F(z) = \text{ثابت} + a_0 z + b_1 \ln z - \frac{b_2}{z} + \cdots, |z| > R$$

چون $F(z)$ باید تک مقداری باشد پس باید $\ln z$ حذف شود که انتخاب $b_1 = 0$ برای این منظور کافی است. بنابراین

$$F(z) = \text{ثابت} + a_0 z + \frac{b_2}{z}$$

ثابت $a_\circ$ همانند مقدار $f(\infty)$ است، طوری که $\bar{a}_\circ$ سرعت حدی جریان یکنواخت است. تابع جریان $\psi = \operatorname{Im} F$ در طول c ثابت است، زیرا (در نبود چسبندگی) بردار سرعت باید مماس بر c باشد. طبیعی است که باید رابطه حاصل برای $F(z)$ در ∞ و شرط ثابت بودن $\operatorname{Im} F$ را در c فرمول‌بندی کرد که نشان می‌دهد $z_1 = f(z)$ ناحیه D را به صورت یک به یک بر روی D_1 از صفحه z_1 به طور همدیس نگاشت می‌کند.

چون $\operatorname{Im}(z_1) = y_1$ روی منحنی c ثابت است تصویر c باید یک پاره‌خط ثابت y_1 و صفحه z_1 باشد. بنابراین D_1 شامل کل صفحه z منهای یک شکاف است که در شکل زیر نمایش داده شده است. برعکس، اگر F در D تحلیلی باشد و آن را یک به یک بر چنین شکافی نگاشت کند آنگاه F باید یک قطب ساده در ∞ داشته باشد و لازم می‌شود $\psi = \operatorname{Im} F$ روی c ثابت باشد. پس هر نگاشت D بر روی شکاف ناحیه D_1 یک پتانسیل سرعت مناسبی نظیر $F(z)$ را فراهم می‌سازد.



مثال ۱۷: تابع پتانسیل مختلط برای یک سیال کامل گذرا از سمت چپ به قسمت راست از صفحه مختلط و روی دایره $|z| = 1$ را بیابید.

حل: تابع $w = z + \frac{1}{z}$ ناحیه $D = \{z : |z| < 1\}$ را به صورت یک به یک بر روی صفحه w در $|u| \le 2$، $v = \circ$ نگاشت می‌کند. تابع پتانسیل مختلط برای این جریان افقی یکنواخت که موازی این قسمت از صفحه w است به صورت $F_1(w) = Aw$ خواهد بود که A عددی حقیقی و مثبت است. تابع جریان برای چنین جریانی در صفحه w به شکل $\phi(u, v) = Au$ است طوری که قسمت مورد نظر در طول خط جریان $\psi(u, v) = \circ$ قرار می‌گیرد. تابع مرکب $F_2(z) = F(w)$، جریان شاره در دامنه D، مشخص می‌سازد که

$$F_2(z) = A(z + \frac{1}{z}) \ , A > \circ$$

الکترواستیک‌های دو بعدی

در نظریه الکترواستیک‌های دو بعدی نشان داده می‌شود که میدان برداری $\vec{E}(x,y)$ کنسرواتیو است و از تابع پتانسیل الکتریکی $\phi(x,y)$ به دست می‌آید طوری که

$$\vec{E}(x,y) = -\operatorname{grad}\phi(x,y) = -\frac{\partial\phi}{\partial x} - \vec{i}\,\frac{\partial\phi}{\partial y}$$

و $\phi(x,y)$ تابعی همساز است.

اگر $\psi(x,y)$ تابع مزدوج همساز آن باشد آنگاه تابع $F(z) = \phi(x,y) + i\psi(x,y)$ یک تابع پتانسیل مختلط خواهد بود. همان طوری که قبلاً هم اشاره نمودیم $\phi(x,y) = c_1$ را قسمت‌های هم پتانسیل و $\psi(x,y) = c_2$ را خطوط جریان نامند.

مسائل مقدار مرزی برای تابع پتانسیل $\phi(x,y)$ از نقطه نظر ریاضی شبیه جریان گرمایی حالت مانا است و همانند مسأله دریکله عمل می‌شود که در این جا تابع همساز تابع $\phi(x,y)$ می‌باشد.

مثال ۸: تابع پتانسیل الکتریکی $\phi(x,y)$ را برای قرص $D: |z| < 1$ طوری بیابید که مقادیر مرزی زیر را شامل شود.

الف) روی $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ و $c_1 : z = e^{i\theta}$ و $\phi(x,y) = 80$ و ب) روی $\frac{\pi}{2} < \theta < 2\pi$ و $c_2 : z = e^{i\theta}$ و $\phi(x,y) = 0$

حل: نگاشت به وسیله تابع $w = \frac{(1-i)(z-i)}{z-1}$ یک به یک و همدیس است و D را به نیمه فوقانی صفحه $\operatorname{Im}(w) > 0$ می‌نگارد، به این صورت که c_1 به قسمت منفی محور u و c_2 به قسمت مثبَت u نگاشته می‌شود. تابع پتانسیل $\phi(u,v)$ در این نیم صفحه مقادیر مرزی زیر را داراست:

الف) برای $u < 0$ و $\phi(u,0) = 80$

ب) برای $u > 0$ و $\phi(u,0) = 0$

و $\phi(u,v) = \frac{80}{\pi}\operatorname{Arg} w = \frac{80}{\pi}\tan^{-1}\frac{v}{u}$.

با محاسبه مستقیم داریم:

$$u + iv = \frac{(x-1)^2 + (u-1)^2 - 1 + i(1 + x^2 - y^2)}{(x+1)^2 + y^2}$$

که با مقایسه طرفین تساوی و محاسبه u و v می‌گیریم:

$$\phi(x,y) = \frac{80}{\pi}\tan^{-1}\left(\frac{1 - x^2 - y^2}{(x-1)^2 + (y-1)^2 - 1}\right)$$

د) نگاشت ژوکوفسکی

نگاشت تعریف شده با

$$w=\frac{1}{2}[z+\frac{1}{z}],(z\neq 0)$$

را نگاشت ژوکوفسکی نامند. این نگاشت جز در نقاط $z=\pm 1$ در بقیه نقاط همدیس است. این نگاشت دایره c را به بال‌های هواپیمایی با لبه انتهایی تیز با زاویه درونی صفر نگاشت می‌کند که به بال‌های ژوکوفسکی (بال‌های هواپیما) مفروضند. به خاطر لبه تیز، این دایره باید به طوری مناسب انتخاب شود طوری که از یکی از نقاط بگذرد. برای مثال می‌توان دایره مورد نظر را طوری انتخاب کنیم که از $z=1$ بگذرد و $z=-1$ روی محور حقیقی x در داخل دایره باشد.

شکل دیگری از نگاشت ژوکوفسکی به صورت

$$w=z+\frac{a^2}{z},(z\neq 0)$$

است که به جز در نقاط $z=\pm a$ در سایر نقاط از صفحه z همدیس است. این نوع نگاشت در جریان سیال گذرا از استوانه مورد استفاده قرار می‌گیرد.

مثال ۸: با استفاده از تابع ژوکوفسکی نقش قلمرو $|z|>1$ و $D:\operatorname{Im}z>0$ را به دست آورید.

حل: D را با نیم دایره‌های $|z|>1$ و $\operatorname{Im}z>0$ می‌پوشانیم. تابع ژوکوفسکی آن‌ها را روی بیضی‌هایی می‌نگارد که نیم صفحه بالایی $\operatorname{Im}w>0$ را می‌پوشانند. نیم دایره $|z|=1$ به توی بازه $[-1,1]$ و شعاع $(-\infty,-1]$ و شعاع $[1,+\infty)$ به توی شعاع $[1,+\infty)$ نگاشته می‌شود و لذا D به توی صفحه بالایی $\operatorname{Im}w>0$ نگاشته می‌شود.

فصل هفتم

سری فوریه

۷-۱ تعاریف و مفاهیم اولیه

در حساب دیفرانسیل و انتگرال یک تابع را بر حسب یک مجموعه از توابع نوشتیم و آن را بسط نامیده‌ایم که نمونه‌ای از آن‌ها بسط تیلور (یا بسط مک لورن) بوده است. اگر چه برای توابع متناوب مثلثاتی توانستیم بسط تیلور مربوط به آن‌ها را بنویسیم اما اگر توابع ناپیوسته داشته باشند این بسط‌ها دیگر نمی‌توانند مورد استفاده قرار گیرند. و بسط آن به صورت سری‌های سینوسی و کسینوسی مناسب‌ترین روش برای یک تابع با دوره تناوب T خواهد بود. اما قبل از معرفی این سری (بسط) تعاریف زیر را در نظر می‌گیریم.

(i) تابع $f(x)$ را متناوب با دوره تناوب T گوییم اگر برای هر عدد صحیح n داشته باشیم:

$$f(x+nT)=f(x)$$

کوچکترین عدد مثبتی مانند T (در صورت وجود) که در رابطه $f(x+T)=f(x)$ صدق می‌کند، تناوب اصلی تابع f نامند.

نکته ۱: اگر $f_1, f_2, \cdots, f_n$ توابعی متناوب با دوره تناوب T باشند آنگاه

$$f(x)=a_1f_1+a_2f_2+\cdots+a_nf_n$$

هم تابعی متناوب با دوره تناوب T خواهد بود.

با توجه به این نکته مجموع $a_0+a_1\cos x+a_2\cos 2x+\cdots+b_1\sin x+b_2\sin 2x+\cdots$ دارای دوره تناوب 2π است.

نکات زیر را به خاطر می‌سپاریم:

۱- دوره تناوب اصلی توابع $f_1(x)=\sin^{2n-1}ax$ و $f_2(x)=\cos^{2n-1}ax$ برابر $\frac{2\pi}{|a|}$ و توابع $f_3(x)=\tan^n ax$ و $f_4=\cot^n ax$ برابر $\frac{\pi}{|a|}$ است که n عدد صحیح و مثبتی است.

۲- تناوب اصلی $f_1(x)=\sin^{2n}ax$ و $f_2(x)=\cos^{2n}ax$ برابر $\frac{\pi}{|a|}$ است.

۳- اگر f تابعی متناوب با تناوب اصلی T باشد در این صورت $|f|$ نیز متناوب با تناوب اصلی T و یا $\frac{T}{2}$ است که با امتحان کردن به راحتی معلوم می‌شود.

۴- اگر تابعی از اعمال جبری روی چند تابع متناوب حاصل شده باشد، کوچکترین مضرب مشترک تناوب‌های آن توابع، تناوب اصلی تابع اصلی را تشکیل می‌دهد.

تست۱: **اگر** $f(x)=\tan\frac{x}{2}+\sin^2\frac{3x}{2}+\cos^2\frac{4x}{3}$ **در این صورت دوره تناوب اصلی** $f(x)$ **کدام است؟**

الف) $\frac{4\pi}{3}$ ب) $\frac{3\pi}{2}$ ج) 6π د) 4π

حل: گزینه (ج) صحیح است.

داریم $T_1=\frac{\pi}{\frac{1}{2}}=2\pi, T_2=\frac{\pi}{\frac{3}{2}}=\frac{2\pi}{3}, T_3=\frac{2\pi}{\frac{4}{3}}=\frac{3\pi}{2}$ که کوچکترین مضرب مشترک آنها 6π است.

تست۲: **تابع با ضابطه** $f(x)=\sin^2x+\cos 3\pi x$ **دارای کدام دوره تناوب زیر است؟**

الف) $\frac{3\pi}{2}$ ب) $\frac{2\pi}{3}$ ج) $\frac{2}{3}$ د) دوره تناوب ندارد.

حل: گزینه (د) صحیح است.

زیرا داریم $T_1=\frac{\pi}{2}$ و $T_2=\frac{2}{3}$ که نمی‌توان برای آن کوچکترین مضرب مشترک تعریف کرد.

ii) تابع $f(x)$ را زوج گوییم اگر $f(-x)=f(x)$ و فرد گوییم اگر $f(-x)=-f(x)$ با این فرض که اگر x متعلق به دامنه تعریف باشد، $-x$ هم به این دامنه تعلق داشته باشد.

نکته۲: اگر تابع $f(x)$ در فاصله $(-l,l)$ پیوسته و زوج با شد آنگاه $\int_{-l}^{l}f(x)dx=2\int_{0}^{l}f(x)dx$ و اگر فرد باشد $\int_{-l}^{l}f(x)dx=0$.

تست۱۳: اگر $f(x)$ در $[-\pi,\pi]$ پیوسته و فرد باشد آنگاه کدام انتگرال زیر صفر می‌شود.

الف) $\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx f(x)dx$ ب) $\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx$

ج) $\int_{-\pi}^{\pi}f^{2}(x)\cos nxdx$ د) $\int_{-\pi}^{\pi}f^{2}(x)dx$

حل: گزینه (ب) صحیح است.

چون $f(x)$ تابعی فرد و $\cos nx$ تابعی زوج است پس تابع $f(x)\cos nx$ تابعی فرد است لذا بنابر نکته ۲ حاصل آن صفر می‌شود.

iii) مجموعه‌ای از دنباله توابع $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ را نسبت به تابع وزن $w(x)$ در بازه $[a,b]$ ***متعامد*** گویند اگر $\int_a^b f_m(x)f_n(x)w(x)dx=0\ ,\ m\neq n$ و اگر $m=n$ آنگاه، حاصل $\left[\int_b^a f_n^{2}(x)w(x)dx\right]^{\frac{1}{2}}$ را ***نرم*** دستگاه متعامد $\{f_n\}$ می‌نامیم. اگر حاصل نرم یک شود توابع را ***متعامد یکه*** گوییم. به راحتی می‌توان نشان داد که مجموعه توابع $\{\cos\frac{n\pi x}{l}\}$ و $\{\sin\frac{n\pi x}{l}\}$ با تابع وزن $w(x)=1$ در فاصله $[-l,l]$ متعامد هستند و نرم برای هر دو مجموعه برابر $\sqrt{l}$ است.

یادداشت۱: مجموعه چند جمله‌ای لژاندر $\{P_n(x)\}_1^{\infty}$ با تابع وزن $w(x)=1$ در فاصله $[-1,1]$ متعامد است.

چند جمله‌ای‌های چبیشف $\{T_n(x)\}_0^{\infty}$ که در آن $n=0,1,2,...$ و $T_n(x)=\cos(n\arccos x)$ با تابع وزن $w(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}$ در فاصله $[-1,1]$ متعامد است.

مجموعه توابع بسل $\{J_p=(\frac{\mu_n x}{l})\}_0^{\infty}$ از مرتبه صحیح P با تابع وزن $w(x)=x$ درفاصله $[0,l)$ متعامد است که μ_n عبارت است از n امین ریشه مثبت $J_p(x)$.

iv) تابع $f(x)$ را در فاصله $[a,b]$ ***تکه‌ای ـ پیوسته*** می‌نامیم.

اگر نقاطی نظیر $a=<x_1<x_2<...<x_n=b$ وجود داشته باشند به گونه‌ایکه $f(x)$ در بازه (x_i,x_{i+1}) پیوسته و حدهای یکطرفه $f(x_i^{+})$ و $f(x_i^{-})$ به ازای تمام $i=1,2,...,n-1$ وجود داشته باشند. اگر $f'(x)$ هم مانند تابع $f(x)$ شرایط بالا را دارا باشد $f(x)$ را ***تکه‌ای ـ هموار*** نامند.

۲-۷ سری فوریه

فرض می‌کنیم تابع $f(x)$ در فاصله $(-l,l)$ تعریف شده باشد و $f(x+2l)=f(x)$. سری فوریه یا بسط فوریه $f(x)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{1}^{\infty}\left[a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right]$$

که در آن a_n و b_n ***ضرایب سری فوریه*** نامیده می‌شوند و از روابط زیر به دست می‌آیند.

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx\ ,\quad n=0,1,2,\ldots$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx\ ,\quad n=1,2,3,\ldots$$

مثال ۱: سری فوریه تابع متناوب $f(x)$ با دوره تناوب 2π را که در فاصله $(-\pi,\pi)$ به صورت $f(x)=\pi-x$ تعریف می‌شود را بنویسید.

حل: داریم

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi-x)dx=\frac{-(\pi-x)^2}{2\pi}=2\pi$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi-x)\cos nx dx=0$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi-x)\sin nx dx=\frac{2}{n}\cos n\pi=\frac{2}{n}(-1)^n$$

به این ترتیب

$$\pi-x=\pi+2\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin nx}{n}$$

یادداشت ۲: از رابطه فوق می‌توان دریافت که $x=2\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sin nx}{n}$. یعنی سری فوریه تابع $f(x)$ با استفاده از نتیجه مثال ۱ بدست آمده است.

همچنین اگر $x=\frac{\pi}{2}$ اختیار شود می‌گیریم $f(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{2}$ لذا:

$$\frac{\pi}{2}=2\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sin\frac{\pi}{2}}{n}=2\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots\right)$$

$$\Rightarrow 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots=\frac{\pi}{4}$$

که نشان می‌دهد می‌توان از سری فوریه برای محاسبه حاصل برخی از سری‌ها استفاده نمود.

نکته ۳: اگر تابع $f(x)$ زوج باشد در این صورت $b_n=0$ و

$$a_0=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx \qquad a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx$$

و اگر $f(x)$ فرد باشد $a_0=a_n=0$ و

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx$$

مثال ۲: سری فوریه تابع متناوب $f(x)$ با دوره تناوب ۲ را که در فاصله $(-1,1)$ به صورت $f(x)=\begin{cases}1 & 0<x<1\\ -1 & -1<x<0\end{cases}$ تعریف شده است را بیابید.

حل: تابع داده شده تابعی فرد است پس $a_0=a_n=0$ و

$$b_n=\frac{2}{1}\int_0^1 f(x)\sin n\pi x\,dx=2\int_0^1\sin n\pi x\,dx=\frac{-2}{n\pi}\cos\pi x\Big|_0^1=\begin{cases}0 & \text{های زوج}n\\ \dfrac{4}{n\pi} & \text{های فرد}n\end{cases}$$

در نتیجه:

$$f(x)=\frac{4}{\pi}\sum_1^\infty\frac{\sin(2n-1)\pi x}{2n-1}$$

مثال ۳: سری فوریه تابع متناوب $f(x)$ با دوره تناوب 2π را که در فاصله $(-\pi,\pi)$ به صورت $f(x)=|x|$ تعریف می‌شود بنویسید.

حل: تابع داده شده تابعی زوج است پس $b_n=0$ و $a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi|x|dx=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi xdx=\pi$ و

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi|x|\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos x\,dx$$

$$=\frac{2x\sin x}{n\pi}\Big|_0^\pi-\frac{2}{\pi n}\int_0^\pi-\sin nxdx=\begin{cases}0 & \text{های زوج}n\\ \dfrac{-4}{\pi n^2} & \text{های فرد}n\end{cases}$$

بنابراین:

$$|x|=\frac{a_0}{2}+\sum_{1}^{\infty}a_n\cos nx=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$$

اگر $x=0$ اختیار شود می‌گیریم $\frac{\pi^2}{8}=\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$.

تست ۴: مقدار a_2 در سری فوریه تابع $f(x)=\begin{cases}0 & , -\pi<x<0\\ x^2 & , 0<x<\pi\end{cases}$ **کدام است؟**

(کارشناسی ارشد)

الف) $\frac{1}{2}$ ب) ۱ ج) ۰ د) ۱-

حل: گزینه (الف) صحیح است.

زیرا داریم:

$$a_2=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos 2x\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}x^2\cos 2x\,dx=\frac{1}{2}$$

۳-۷ قضایای مربوط به سری فوریه

قضیه دریکله: گیریم تابع متناوب $f(x)$ با دوره تناوب 2π در فاصله $(0,2\pi)$ تکه‌ای ـ هموار باشد، آنگاه در هر نقطه از ناپیوستگی سری فوریه برای تابع $f(x)$ همگرا به $f(x)$ می‌باشد و در هر نقطه از ناپیوستگی، تابع $f(x)$ همگرا به میانگین حسابی از مقادیر $f(x^+)$ و $f(x^-)$ است.

تست ۵: مقدار $f(0)$ کدامیک از مقادیر داده شده است اگر $f(x)=\begin{cases}1-x & , 0<x<\pi\\ x^2 & , -\pi<x<0\end{cases}$.

الف) ۰ ب) ۱ ج) $\frac{1}{2}$ د) $\frac{3}{2}$

حل: گزینه (ج) صحیح است.

زیرا داریم:

$$f(0)=\frac{f(0^+)+f(0^-)}{2}=\frac{(1-0)+(0)^2}{2}=\frac{1}{2}$$

قضیه مشتق‌گیری از سری فوریه: گیریم تابع $f(x)$ در فاصله $[-\pi,\pi]$ پیوسته و $f(-\pi)=f(\pi)$ بعلاوه در این فاصله تکه‌ای ـ هموار باشد در این صورت سری فوریه $f'(x)$ را می‌توان با مشتق‌گیری جمله به جمله تابع $f(x)$ به دست آورد و در هر نقطه ناپیوستگی مقدار $f'(x)$ برابر است با میانگین حسابی $f'(x^+)$ و $f'(x^-)$.

مثال ۴: اگر سری فوریه تابع $f(x)=\begin{cases}0 & , -\pi<x<0\\ \sin x & , 0<x<\pi\end{cases}$ به صورت زیر داده شود:

$$f(x)=\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\sin x-\frac{2}{\pi}\sum_{1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{4n^2-1}$$

سری فوریه تابع متناوب $g(x)=\begin{cases}0 & , -\pi<x<0\\ \cos x & , 0<x<\pi\end{cases}$ را بنویسید.

حل: داریم $f(\pi)=f(-\pi)$ و همچنین $f(x)$ تابعی پیوسته است و لذا تمام مشتق‌های $f(x)$ تکه‌ای - پیوسته‌اند. از اینرو بنا بر قضیه مشتق‌گیری از سری فوریه می‌گیریم:

$$g(x)=\frac{1}{2}\cos x-\frac{4}{\pi}\sum_{1}^{\infty}\frac{n\sin 2nx}{4n^2-1}$$

توجه شود که $\frac{1}{2}=\frac{g'(0^+)+g(0^-)}{2}=g(0)$ و این دقیقاً مقدار سری فوریه در $x=0$ است.

قضیه انتگرال‌گیری فوریه: گیریم $f(x)$ تابعی متناوب با دوره تناوب 2π باشد و در فاصله $[-\pi,\pi]$ تکه‌ای - پیوسته باشد در این صورت از بسط فوریه تابع $f(x)$ می‌توان جمله به جمله انتگرال‌گیری نمود.

مثال ۵: با توجه به این که $x=2\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin nx$، سری فوریه تابع $f(x)$ و $g(x)$ با دوره تناوب 2π را بیابید که به ترتیب در فاصله $(-\pi,\pi)$ با $f(x)=x^2$, $g(x)=x^3$ تعریف شده‌اند.

حل: با انتگرال‌گیری از طرفین تساوی داده شده از $t=0$ تا $t=x$ می‌گیریم.

$$\int_0^x t\,dt=2\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\int_0^x \sin t\,dt$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{2}=2\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\cos nx$$

اما $\frac{\pi^2}{12}=\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ در نتیجه:

$$\frac{x^2}{2}=\frac{\pi^2}{6}-2\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cos nx}{n^2}\Rightarrow x^2=\frac{\pi^2}{3}-4\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cos nx}{n^2}$$

حال اگر از طرفین رابطه به دست آمده از $x=0$ تا $x=x$ مجدداً انتگرال‌گیری کنیم، خواهیم داشت:

$$\frac{x^3}{3}=\frac{\pi^2 x}{3}-4\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\sin nx}{n^3}\Rightarrow x^3=\pi^2 x-12\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\sin nx}{n^3}$$

اما $x = 2\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\sin nx}{n}$ در نتیجه با جاگذاری می‌گیریم:

$$x^3 = 2\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{\pi^2}{n}-\frac{6}{n^3}\right)(-1)^{n-1}\sin nx$$

تست ۶: اگر سری فوریه تابع $f(x)=\begin{cases}-1 & , -\pi \le x < 0 \\ 1 & , 0 < x \le \pi\end{cases}$ به صورت $f(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$ داده شود سری فوریه $f(x)=|x|$ را برای فاصله $-\pi \le x \le \pi$ کدام است؟

الف) $f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$

ب) $f(x)=\sum_{1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{2n-1}$

ج) $f(x)=\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}\sum_{1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$

د) $f(x)=\pi-\sum_{1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{2n-1}$

حل: با توجه به مثال ۳ گزینه (الف) باید صحیح باشد. درستی آن را با استفاده از قضیه انتگرال‌گیری نشان می‌دهیم. با انتگرال‌گیری از طرفین تابع داده شده می‌گیریم.

$$\begin{cases}-x & , -\pi \le x < 0 \\ x & , 0 \le x \le \pi\end{cases} \Rightarrow |x| = c-\frac{4}{\pi}\sum_{1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$$

در اینجا نیاز به محاسبه c نیست زیرا تنها گزینه (الف) دارای ضریب $\frac{4}{\pi}$ است اما برای محاسبه c قرار دهید $x=0$ در نتیجه $0=c-\frac{4}{\pi}\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$ اما $\sum\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$ در نتیجه $c=\frac{\pi}{2}$. به این ترتیب درستی گزینه (الف) ثابت می‌شود.

یادداشت ۳: روابط زیر در حل مسائل می‌توانند موارد استفاده قرار گیرند.

$$(i)\sum_{1}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}\ ,\quad (ii)\sum_{1}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}\ ,\quad (iii)\sum_{1}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$$

$$,\ (v)\sum_{1}\frac{1}{(2n-1)^4}=\frac{\pi^4}{96}\ ,\quad (vi)\sum_{1}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}\ ,\quad (iv)\sum_{1}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}=\frac{\pi^3}{36}$$

نکته ۴: رابطه زیر که به نام ***اتحاد پارسوال*** است رابطه‌ای بین ضرایب فوریه و تابع $f(x)$ است.

$$\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f^2(x)dx=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$$

مثال ۶: با استفاده از این نتیجه که $|x|=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$ درستی اتحاد پارسوال را نشان دهید.

حل: داریم $f(x)=|x|$، $a_0=\pi$ و $a_n=\frac{-4}{\pi(2n-1)^2}$ در نتیجه:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|^2dx=\frac{\pi^2}{2}+\sum_{1}^{\infty}\frac{16}{\pi^2(2n-1)^4}\Rightarrow$$

$$\frac{2}{3}\pi^2=\frac{\pi^2}{2}+\frac{16}{\pi^2}\sum_{1}\frac{1}{(2n-1)^4}\Rightarrow\sum_{1}\frac{1}{(2n-1)^4}=\frac{\pi^4}{96}$$

که درستی این نتیجه در یادداشت بالا درج شده است.

نکته: در برخی مواقع شاید به نظر آید که تمام ضرایب a_0 و a_n و b_n صفر باشند که چنین امکانی وجود نخواهد داشت و مثال ۴ کتاب در صفحه ۱۴۲ را ببینید.

مثال ۷: سری فوریه تابع f را که در فاصله $(-\pi,\pi)$ به صورت $f(x)=\sin x$ تعریف شده است را بنویسید.

حل: تابع فرد است پس $a_0=a_n=0$ از طرفی

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\sin nx dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[\cos(1-n)x-\cos(1+n)x]dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(1-n)x}{1-n}-\frac{\sin(1+n)x}{1+n}\right]_0^{\pi}=0\ ,\ n\neq 1$$

یعنی b_1 می‌تواند صفر نباشد اما بقیه صفراند. برای $n=1$ داریم:

$$b_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin x \sin x dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi 2\sin^2 x dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (1-\cos 2x)dx = 1$$

بنابراین سری فوریه $f(x)=\sin x$ همان $\sin x$ خواهد بود.

تست ۷: سری فوریه تابع متناوب $f(x)=\sin^2 x$ در فاصله $(-\pi,\pi)$ کدام است؟

الف) $\sin^2 x$ ب) $\frac{1}{2}-\frac{\cos 2x}{2}$

ج) $\frac{1}{2}+\sin 2x$ د) $\frac{1}{2}+\cos 2x$

حل: گزینه (ب) صحیح است.

می‌توانیم به جای محاسبه a_0 و a_n بنویسیم.

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} = \frac{1}{2}-\frac{\cos 2x}{2}$$

۷- ۴ بسط نیم دامنه‌ای

سری‌های فوریه گفته شده تا کنون برای دامنه $(-l,l)$ مورد نظر بوده‌اند. حال فرض کنید بخواهیم سری فوریه تابع $f(x)$ را برای نیم دامنه $(0,l)$ بنویسیم. برای این منظور ابتدا $f(x)$ را به دامنه $(-l,l)$ گسترش داده و سری فوریه مربوط به این دامنه را پیدا می‌کنیم. به این ترتیب که با استفاده از $f(x)$ تابع $F(x)$ را به صورت:

$$F(x)=\begin{cases} f(-x) , & -l<x<0 \\ f(x) , & 0<x<l \end{cases}$$

تعریف می‌کنیم. بدیهی است که تابع $F(x)$ زوج و در دامنه $(0,l)$ با $f(x)$ یکسان می‌باشد. با استفاده از زوج بودن $F(x)$ داریم $b_n=0$ و

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l F(x)dx = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx$$

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l F(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx$$

چون $F(x)$ با تابع $f(x)$ در دامنه $(0,l)$ یکی است بنابراین می‌توان $f(x)$ را در نیم دامنه $(0,l)$ به صورت:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_1 a_n \cos\frac{n\pi x}{l}$$

نشان داد. این سری را ***سری فوریه کسینوسی*** تابع $f(x)$ نامند.

به طریقی مشابه اگر به جای زوج در نظر گرفتن تابع $F(x)$ آن را فرد در نظر بگیریم. یعنی بنویسیم:

$$F(x)=\begin{cases}-f(-x) & , \quad -l<x<0 \\ f(x) & , \quad 0<x<l\end{cases}$$

در این صورت $a_0=a_n=0$ و

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l F(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx$$

به این ترتیب می‌توان $f(x)$ را در نیم دامنه $(0,l)$ به صورت $f(x)=\sum_1^\infty b_n\sin\frac{n\pi x}{l}$ نشان داد. سری حاصل را ***سری فوریه سینوسی*** تابع $f(x)$ نامند.

مثال ۸: سری فوریه سینوسی تابع $f(x)$ را که در فاصله $(0,1)$ به صورت $f(x)=|x|$ تعریف شده است را بیابید.

حل: داریم $a_0=a_n=0$ و $b_n=2\int_0^1|x|\sin nx\,dx=2\int_0^1 x\sin nx\,dx=\frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}$ از اینرو

$$|x|=\frac{2}{\pi}\sum_1\frac{(-1)^{n+1}\sin n\pi}{n}$$

تست ۸: تابع f در فاصله $[0,\pi]$ با ضابطه $f(x)=\cos^2 x$ تعریف شده است. سری فوریه کسینوسی f برابر است با: (کارشناسی ارشد)

الف) $\frac{1}{2}+\sum_1\frac{\cos nx}{n}$

ب) $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x$

ج) $\frac{1}{2}+\sum_1\frac{(-1)^n\sin nx}{n}$

د) هیچکدام

حل: می‌توانیم مستقیماً با نوشتن $\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$ گزینه (ب) را انتخاب نماییم. برای درستی ادعا خود می‌توانیم همانند مثال ۸ عمل نماییم. داریم $b_n=0$ و

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\cos^2 x\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi(1+\cos 2x)dx=\frac{1}{\pi}\left(x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_0^\pi=1$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\cos^2 x\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi(1+\cos 2x)\cos nx\,dx$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\cos x\,dx+\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\cos 2x\cos nx\,dx$$

$$=\frac{1}{n\pi}\sin nx\Big|_{0}^{\pi}+\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}(\cos(2+n)x+\cos(2-n)x)dx$$

$$=0+\frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sin(2+n)x}{2+n}+\frac{\sin(2-n)x}{2-n}\right]_{0}^{\pi}=0$$

با این شرط که $n\neq 2$. برای $n=2$ جداگانه a_2 را بدست می‌آوریم. داریم:

$$a_2=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos^2 x\cos 2x dx=\frac{1}{2}\Rightarrow \cos^2 x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x$$

۷- ۵ سری فوریه نمایی

با استفاده از فرمول اویلر یعنی $e^{\pm i\theta}=\cos\theta\pm i\sin\theta$ داریم:

$$\cos\theta=\frac{e^{\pm i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \quad , \quad \sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$$

حال اگر قرار دهیم $\theta=\frac{n\pi x}{l}$ در آن‌ها و جاگذاری در سری فوریه می‌رسیم به

$$f(x)=\sum_{-\infty}^{\infty}c_n e^{\frac{in\pi x}{l}}$$

که در آن $c_0=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(x)dx$ و $c_u=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(x)e^{-\frac{in\pi x}{l}}dx$.

شکل حاصل را سری فوریه نمایی تابع $f(x)$ نامند.

مثال ۹: سری فوریه نمایی تابع موج مربعی که به صورت زیر تعریف می‌شود را بنویسید.

$$f(x)=\begin{cases}-k\ , & -\pi<x<0\\ k\ , & 0<x<\pi\end{cases}$$

حل: داریم

$$c_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}(-k)dx+\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}(k)dx=0$$

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-inx}dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}(-k)e^{-inx}dx+\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}(k)e^{-inx}dx$$

$$=\frac{-k}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}e^{-inx}dx+\frac{k}{2\pi}\int_{0}^{\pi}e^{-inx}dx=\frac{k}{2in\pi}e^{-inx}\Big|_{-\pi}^{0}-\frac{k}{2in\pi}e^{-inx}\Big|_{0}^{\pi}$$

$$= \frac{k}{2in\pi}\left[2 - e^{in\pi} - e^{-in\pi}\right] = \frac{k}{n\pi i}\left(1 - \frac{e^{in\pi} + e^{-in\pi}}{2}\right)$$

$$= \frac{k}{n\pi i}(1 - \cos n\pi) = \begin{cases} 0 & \text{های زوج} n \\ \dfrac{2k}{n\pi i} & \text{های فرد} n \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{2k}{\pi i}\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i(2n-1)\pi x}}{2n-1}$$

یادداشت ۴: سری فوریه نمایی در مقایسه با سری فوریه مثلثاتی راحت‌تر است و در تجزیه و تحلیل سیستم با استفاده از ریاضی، به کارگیری سیگنال‌های نمایی و طیف نمایی مناسب‌تر است ولی برای درک کیفی شرایط فیزیکی عبارات سینوسی و طیف مثلثاتی بهتراند.

۷- ۶ خواص سری فوریه نمایی

(همان مطالب کتاب خوانده شود).

۷- ۷ کاربردی از سری فوریه

(مطالب گفته شده در کتاب کافی است، مطالب خوانده شود).

۷-۸ سری فوریه دوگانه

در بررسی مسأله مربوط به ارتعاش یک غشا در فصل ۹، سری فوریه سینوسی تابع دو متغیره مورد استفاده قرار خواهد گرفت. مسائلی از این نوع، لزوم سری‌های فوریه دوگانه را طلب می‌کنند. خوشبختانه با توجه به نتایج گفته شده در این بخش می‌توان سری‌های فوریه کسینوسی یا سینوسی را برای توابع دو متغیره هم تعمیم داد. برای مثال سری فوریه کسینوسی $f(x,y)$ به صورت

$$f(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}\cos\frac{m\pi x}{l_1}\cos\frac{n\pi y}{l_2}$$

نوشته می‌شود که در آن

$$a_{mn} = \frac{4}{l_1 l_2}\int_0^{l_1}\int_0^{l_2} f(x,y)\cos\frac{m\pi x}{l_1}\cos\frac{n\pi y}{l_2}\,dxdy$$

با این شرط که $f(-x,y) = f(x,-y) = f(x,y)$.

به طریقی مشابه سری فوریه سینوسی تابع $f(x,y)$ به شکل:

$$f(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} b_{mn}\sin\frac{m\pi x}{l_1}\sin\frac{n\pi y}{l_2}$$

نوشته می‌شود که در آن

$$b_{mn}=\frac{۴}{l_۱l_۲}\int_۰^{l_۱}\int_۰^{l_۲}f(x,y)\sin\frac{m\pi x}{l_۱}\sin\frac{n\pi y}{l_۲}dxdy$$

با این شرط که $f(-x,y)=f(x,-y)=-f(x,y)$..

مثال ۱۰: سری فوریه دوگانه تابع $f(x,y)=y\sin x$ را در دامنه $-\pi<x<\pi$ $-\pi<y<\pi$ بنویسید.

حل: چون $f(-x,y)=f(x,-y)=-f(x,y)$ پس تابع داده شده تابعی فرد است داریم:

$$f(x,y)=y\sin x=\sum_{m=۱}^{\infty}\sum_{n=۱}^{\infty}b_{mn}\sin mx\ \sin nx$$

که

$$b_{mn}=\frac{۴}{\pi^۲}\int_۰^{\pi}\int_۰^{\pi}y\sin x\ \sin mx\sin ny dx\,dy$$

$$=\frac{-۲}{\pi^۲}\int_۰^{\pi}y\sin ny\left[\frac{\sin(۱+m)x}{۱+m}-\frac{\sin(۱-m)x}{۱-m}\right|_۰^{\pi}dy=۰\ ,\ m\neq ۱$$

برای $m=۱$ داریم:

$$b_{۱n}=\frac{۴}{\pi^۲}\int_۰^{\pi}\int_۰^{\pi}y\sin^۲ x\ \sin ny\,dx\,dy=\frac{۲}{n}(-۱)^{n+۱}$$

$$\Rightarrow y\sin x=۲\sin x\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{n+۱}\sin ny}{n}$$

فصل هشتم

انتگرال فوریه

۸-۱ انتگرال فوریه

مسائلی را که در فصل قبل بررسی نموده‌ایم برای دامنه‌های متناهی بوده است، اما اگر دامنه نامتناهی یا نیمه-متناهی باشد، یا به عبارتی دیگر $1 \to \infty$، چه اتفاقی خواهد افتاد؟ سوال دیگر اینکه برای توابعی که متناوب نیستند چگونه باید عمل نمود؟ می‌توان اینگونه اظهار داشت که در حالت کلی وقتی تابع متناوب نباشد، یا اگر فاصله متناوب زیاد شود به جای سری فوریه انتگرال فوریه خواهیم داشت که به صورت قضیه زیر بیان می‌گردد.

قضیه انتگرال فوریه: اگر تابع $f(x)$ در هر بازه نظیر $(-1,1)$ تکه‌ای ـ هموار با شد و در $(-\infty,\infty)$ مطلقاً انتگرال‌پذیر باشد آنگاه در هر نقطه از پیوستگی داریم:

$$f(x)=\int_0^\infty [A(\alpha)\cos\alpha x+\beta(\alpha)\sin\alpha x]d\alpha$$

که در آن

$$A(\alpha)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\alpha t dt \ , \ \beta(\alpha)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\alpha t dt$$

و در نقاط ناپیوستگی همانند قضیه سری فوریه برابر میانگین حسابی $f(x^+)$ و $f(x^-)$ می‌شود.

یادداشت: $f(x)$ در $(-\infty,\infty)$ مطلقاً انتگرال‌پذیر است اگر $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx$ همگرا باشد.

نکته: می‌توان $A(\alpha)$ و $B(\alpha)$ را در انتگرال اولی جاگذاری کرد و نوشت:

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(x-t)dt d\alpha$$

تذکر: شرایط گفته شده در قضیه فوق شرایط کافی‌اند ولی لازم نیستند به عنوان مثال تابع $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ یکی از شرایط فوق را ندارد اما انتگرال فوریه دارد.

مثال ۱: تابع $f(x)=\begin{cases}\sin x \ , & 0\le x<\pi \\ 0\end{cases}$ را به صورت انتگرال فوریه بنویسد و با استفاده از آن نشان دهید:

$$\int_0^\infty \frac{\cos(\frac{\pi x}{2})dx}{1-x^2}=\frac{\pi}{2}$$

حل: داریم:

$$A(\alpha)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(t)\cos\alpha t\,dt=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin t\cos\alpha t\,dt=\frac{1+\cos\alpha\pi}{\pi(1-\alpha^2)}$$

$$B(\alpha)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(t)\sin\alpha t\,dt=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin t\sin\alpha t\,dt=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi(1-\alpha^2)}$$

در نتیجه:

$$f(x)=\int_0^\infty (A(\alpha)\cos\alpha x+B(\alpha)\sin\alpha x)dx=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos\alpha x+\cos(\pi-x)\alpha}{1-\alpha^2}d\alpha$$

که انتگرال فوریه تابع $f(x)$ است. حال اگر $x=\frac{\pi}{2}$ و $\alpha=x$ اختیار شود می‌گیریم:

$$f(\frac{\pi}{2})=1=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{2\cos(\frac{\pi x}{2})dx}{1-x^2}dx \to \int_0^\infty \frac{\cos(\frac{\pi}{2}x)dx}{1-x^2}=\frac{\pi}{2}$$

این مثال نشان می‌دهد که همانند استفاده از سری فوریه در محاسبه مجموع یک سری، می‌توان با استفاده از انتگرال فوریه، بسیاری از انتگرال‌های ناسره را حل نمود.

نکته ۲: با استفاده از انتگرال فوریه می‌توان درستی جواب‌های انتگرال‌های زیر که به انتگرال‌های لاپلاس معروفند را ثابت نمود.

i) $\int_0^\infty \frac{\cos\alpha x dx}{\alpha^2+x^2}=\frac{\pi}{2\alpha}e^{-\alpha} \quad , \quad \alpha>0 \quad , \quad x>0$

ii) $\int_0^\infty \frac{\alpha\sin\alpha x dx}{\alpha^2+x^2}=\frac{\pi}{\alpha}e^{-\alpha} \quad , \quad \alpha>0 \quad , \quad x>0$

تست ۱: انتگرال فوریه تابع $f(x)=e^{-x}$ برای $x>0$ و $f(-x)=f(x)$ کدام گزینه زیر است.

الف) $\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin 1x\,dx}{1+\alpha^2}$ ب) $\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos 1x\,dx}{1+\alpha^2}$

ج) $\int_0^\infty \frac{e^{-x}\cos\alpha x\,dx}{1+x^2}$ د) $\int_0^\infty \frac{e^{-x}\sin\alpha x\,dx}{1+x^2}$

حل: گزینه (ب) صحیح است.

کافی است در انتگرال لاپلاس قرار دهید $\alpha=1$.

تست ۲: اگر $f(x)=\begin{cases} e^{-x} & , \quad x>0 \\ 0 & , \quad x<0 \end{cases}$، حاصل $\int_0^\infty \frac{\cos kx + x\sin kx}{x^2+1}dx$ برابر می‌شود با:

الف) e^{-k} ب) πe^{-k} ج) $\frac{1}{\pi}e^{k}$ د) صفر

حل: با محاسبه $A(\alpha)$ و $B(\alpha)$ می‌توان نشان داد که گزینه (ب) صحیح می‌باشد. به صفحه ۱۷۲ کتاب مرجع مراجعه کنید.

یادداشت ۲: اگر $f(x)$ تابعی زوج باشد در این صورت $B(\alpha)=0$ و $A(\alpha)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(t)\cos\alpha t\,dt$ یعنی:

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty f(t)\cos\alpha x\cos\alpha t\,dt\,d\alpha$$

انتگرال حاصل را ***انتگرال فوریه کسینوسی*** تابع $f(x)$ نامند.

اگر $f(x)$ تابعی فرد باشد در این صورت $A(\alpha)=0$ و $B(\alpha)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(t)\sin\alpha t\,dt$ که در این صورت:

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty f(t)\sin\alpha x\ \sin\alpha t\,dt\,d\alpha$$

این انتگرال را انتگرال فوریه سینوسی تابع $f(x)$ می‌نامیم.

مثال ۲: انتگرال فوریه تابع $f(x)=\begin{cases} 1 & , \quad |x|<k \\ 0 & \text{جاهای دیگر} \end{cases}$ را بنویسید و با استفاده از آن نشان دهید که $\int_0^\infty \frac{\sin kx}{x}dx=\frac{\pi}{2}$.

حل: تابع داده شده تابعی زوج است پس $B(\alpha)=0$ و

$$A(\alpha)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(t)\cos\alpha t\,dt=\frac{2}{\pi}\int_0^k \cos\alpha t\,dt=\frac{2}{\pi\alpha}\sin\alpha k$$

بنابراین:

$$f(x)=\frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{\infty}\frac{\sin\alpha k\cos\alpha x}{\alpha}d\alpha$$

که انتگرال فوریه تابع $f(x)$ است. چون $f(۰)=۱$ لذا با انتخاب $\alpha=x$ می‌گیریم:

$$f(۰)=۱=\frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{\infty}\frac{\sin\alpha k\,d\alpha}{\alpha}\Rightarrow\int_{۰}^{\infty}\frac{\sin kx}{x}dx=\frac{\pi}{۲}$$

نکته ۳: تساوی $\int_{۰}^{\infty}\frac{\sin kx}{x}dx=\frac{\pi}{۲}$ برای هر $k\neq۰$ درست است.

یادداشت ۳: با استفاده از فرمول اویلر داریم $\cos\alpha x=\frac{e^{i\alpha x}+e^{-i\alpha x}}{۲}$ و $\sin\alpha x=\frac{e^{i\alpha x}-e^{-i\alpha x}}{۲i}$ که اگر در انتگرال فوریه جایگذاری شود نتیجه چنین می‌شود:

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}c(\alpha)e^{i\alpha x}dx$$

که در آن

$$c(\alpha)=\frac{۱}{۲\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\alpha t}dt$$

که انتگرال فوریه حاصل شکل نمایی انتگرال فوریه است.

تست ۳: اگر $f(x)=e^{-|x|}$ باشد حاصل $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{iz}dz}{z^{۲}+۱}$ کدام گزینه زیر است؟

الف) $\frac{\pi}{e}$ ب) $\frac{e}{\pi}$ ج) π د) e

حل: به خاطر وجود تابع نمایی از انتگرال فوریه نمایی استفاده می‌کنیم. داریم:

$$c(\alpha)=\frac{۱}{۲\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\alpha t}dt=\frac{۱}{\pi(\alpha^{۲}+۱)}$$

در نتیجه:

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}c(\alpha)e^{i\alpha x}d\alpha=\frac{۱}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\alpha x}d\alpha}{\alpha^{۲}+۱}$$

حال اگر $x=۱$ و $\alpha=z$ اختیار شود چون $f(۱)=e^{-۱}$ گزینه (الف) را خواهیم داشت. (به صفحه ۱۷۴ کتاب مراجعه شود).

۲-۸ تبدیل فوریه

اگر فرمول انتگرال فوریه نمایی را به صورت:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\alpha t}\right]e^{i\alpha x}d\alpha$$

بنویسیم و فرض کنیم که:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\alpha t}dt=F(\alpha)$$

در این صورت:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(\alpha)e^{i\alpha t}d\alpha$$

$F(\alpha)$ را ***تبدیل فوریه*** تابع $f(x)$ می‌نامیم و با نماد $\Im\{f\}$ نمایش می‌دهیم. پس:

$$\Im\{f\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(\alpha)e^{-i\alpha t}dt=F(\alpha)$$

تابع $f(x)$ را ***تبدیل فوریه معکوس*** تابع $F(\alpha)$ گفته و با نماد $\Im^{-1}\{f\}$ نشان می‌دهیم.

نکته ۴: با وجود این که تبدیل لاپلاس توابعی نظیر $f(x)=k$ و $f(x)=e^{x}$ وجود دارند اما تبدیل فوریه ندارند.

مثال ۳: تبدیل فوریه $f(x)=e^{-kx^{2}}$ را برای $k>0$ بیابید.

حل: با استفاده از تعریف داریم:

$$\Im\left\{e^{-kx^{2}}\right\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-kt^{2}}.e^{-i\alpha t}dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(kt^{2}+i\alpha t)}dt$$

اما

$$kt^{2}+i\alpha t=(\sqrt{k}t+\frac{i\alpha}{2\sqrt{k}})^{2}+\frac{\alpha^{2}}{4k}$$

از اینرو

$$\Im\left\{e^{-kx^{2}}\right\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-\alpha^{2}}{4k}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(\sqrt{k}\,t+\frac{i\alpha}{2\sqrt{k}})^{2}}dt$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi k}}e^{\frac{-\alpha^2}{4k}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(u)^2}du=\frac{1}{\sqrt{2\pi k}}e^{\frac{-\alpha^2}{4k}}.\sqrt{\pi}=\frac{1}{\sqrt{2k}}e^{\frac{-\alpha^2}{4k}}$$

که در آن $u=\sqrt{k}\,t+\frac{i\alpha}{2\sqrt{k}}$ و $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-u^2}du=\sqrt{\pi}$ در نتیجه:

$$\Im\left\{e^{-kx^2}\right\}=\frac{1}{\sqrt{2k}}e^{\frac{-\alpha^2}{4k}}$$

نکته ۵: تبدیل فوریه دارای خواص زیر است:

(خاصیت انتقال) i) $\Im\{f(x+c)\}=e^{ic\alpha}\,\Im\{f\}$

(خاصیت انتقال) ii) $\Im\left\{e^{icx}f(x)\right\}=F(\alpha+c)$

(خاصیت قیاس) iii) $\Im\{f(cx)\}=\frac{1}{|c|}F(\alpha/c)$

(خاصیت ضرب در چندجمله‌ای) iv) $\Im\left\{x^n f(x)\right\}=(-i)^n F^{(n)}(\alpha)$

تست ۴: تبدیل فوریه تابع xe^{-x^2} کدام گزینه زیر است؟

الف) $\frac{\alpha}{\sqrt{2}}e^{-\frac{\alpha^2}{4}}$ ب) $\frac{i\alpha}{2\sqrt{2}}e^{-\frac{\alpha^2}{4}}$

ج) $\sqrt{2}\,i\alpha e^{-\frac{\alpha^2}{4}}$ د) $\frac{\sqrt{2}}{4}i\alpha e^{-\frac{\alpha^2}{4}}$

حل: گزینه (ب) صحیح است.

زیرا داریم $\Im\left\{e^{-x^2}\right\}\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{\alpha^2}{4}}$ از طرفی با استفاده از خاصیت (iv) داریم

$$\Im\{xf(x)\}=-iF'(\alpha)$$

در نتیجه:

$$\Im\left\{xe^{-x^2}\right\}\frac{-i}{\sqrt{2}}\left(\frac{-\alpha}{2}\right)e^{-\frac{\alpha^2}{4}}=\frac{i\alpha e^{\frac{-\alpha^2}{4}}}{2\sqrt{2}}$$

اگر انتگرال فوریه کسینوسی را به صورت:

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\left[\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}f(t)\cos\alpha t\,dt\right]\cos\alpha x\,d\alpha$$

دوباره‌نویسی کنیم، با این فرض که:

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(t)\cos\alpha t\,dt = F_c(\alpha)$$

$F_c(\alpha)$ را ***تبدیل فوریه کسینوسی*** تابع $f(x)$ می‌نامیم و با نماد $\Im_c\{f\}$ نمایش می‌دهیم. به این ترتیب

$$\Im_c\{f\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(t)\cos\alpha t\,dt = F_c(\alpha)$$

بطریقی مشابه اگر ***انتگرال فوریه سینوسی*** را به شکل:

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty\left[\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(t)\sin\alpha t\,dt\right]\sin\alpha x\,d\alpha$$

بنویسیم و فرض کنیم که:

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(t)\sin\alpha t\,dt = F_s(\alpha)$$

در این صورت $F_s(\alpha)$ را ***تبدیل فوریه سینوسی*** تابع $f(x)$ نامند و با نماد $\Im_c\{f\}$ نشان داده می‌شود. یعنی:

$$\Im_c\{f\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(t)\sin\alpha t\,dt = F_s(\alpha)$$

نکته ۱۶: تبدیل فوریه کسینوسی و سینوسی تابع $f(x) = e^{-kx}$ برای $k > 0$ و $x \geq 0$ به ترتیب عبارتند از:

$$\text{i)}\quad \Im_c\left\{e^{-kx}\right\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{\alpha}{k^2+\alpha^2}\right)\quad,\quad \text{ii)}\quad \Im_s\left\{e^{-kx}\right\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{\alpha}{k^2+\alpha^2}\right)$$

یادداشت ۱۴: $\Im_c\left\{e^{-kx}\right\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\mathcal{L}\{\cos kx\}$ و $\Im_s\left\{e^{-kx}\right\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\mathcal{L}\{\sin kx\}$ که $\mathcal{L}$ نماد تبدیل لاپلاس است.

تست ۵: اگر $\text{Ł}\{\sin\sqrt{2}\,x\}=\dfrac{\sqrt{2}}{k^2+2}$، تبدیل فوریه سینوسی $e^{-\sqrt{2}\,x}$ کدام گزینه زیر است؟

الف) $\dfrac{\sqrt{2\pi}}{k^2+2}$ ب) $\dfrac{2}{\sqrt{\pi}\,(k^2+2)}$

ج) $\dfrac{\sqrt{\pi}}{k^2+2}$ د) $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,(k^2+2)}$

حل: گزینه (ب) صحیح است.

زیرا داریم:

$$\mathfrak{F}_s\{e^{-\sqrt{2}\,x}\}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\text{Ł}\{\sin\sqrt{2}\,x\}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\;=\frac{2}{\sqrt{\pi}\,(k^2+2)}=\frac{2}{\sqrt{\pi}\,(k^2+2)}$$

مثال ۴: تبدیل فوریه کسینوسی $f(x)=\begin{cases}x & , \ |x|<1\\ 0 & , \ |x|>1\end{cases}$ را بیابید و با استفاده از آن ثابت کنید:

$$\int_0^\infty\frac{(\sin 2x-2x\cos 2x)\sin x\,dx}{x^2}=\frac{\pi}{2}$$

حل: داریم

$$F_s(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(t)\sin\alpha t\,dt=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^1 t\sin\alpha t\,dt=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\;\frac{\sin\alpha-\alpha\cos\alpha}{\alpha^2}$$

از طرفی داریم:

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f_s(\alpha)\sin\alpha x\,d\alpha=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\sin\alpha-\alpha\cos\alpha}{\alpha^2}\sin\alpha x\,d\alpha$$

حال اگر قرار دهیم $x=\frac{1}{2}$ می‌گیریم:

$$f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\sin\alpha-\alpha\cos\alpha}{\alpha^2}\sin\frac{\alpha}{2}\,d\alpha$$

حال قرار دهید $\alpha=2x$ در نتیجه $d\alpha=2dx$ و

$$\frac{1}{2}=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\sin 2x-2x\cos 2x}{4x^2}\sin x(2dx)$$

$$\Rightarrow\int_0^\infty\frac{\sin 2x-2x\cos 2x}{x^2}\sin x\,dx=\frac{\pi}{2}$$

تذکر: توجه شود که انتخاب $\sqrt{\frac{۲}{\pi}}$ اختیاری است می‌توانیم بنویسیم $۱\times\frac{۲}{\pi}=\frac{۲}{\pi}$ یا $\frac{۲}{\pi}\times ۱=\frac{۲}{\pi}$ یا $\sqrt{\frac{۲}{\pi}}\sqrt{\frac{۲}{\pi}}=\frac{۲}{\pi}$ که در اینجا ما سومی را انتخاب نمودیم. قبلاً هم در تبدیل فوریه نوشتیم:

$$\frac{۱}{۲\pi}=\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\cdot\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}$$

۸-۳ خواص تبدیل فوریه

غیر از ویژگی‌های گفته شده تبدیل‌های فوریه دارای ویژگی‌های دیگری‌اند که به قضیه تبدیل مشتق و قضیه کانولوشن معروفند.

قضیه تبدیل مشتق بیان می‌دارد که اگر تابع $f(x)$ در $(-\infty,\infty)$ پیوسته و تکه‌ای ـ هموار باشد، بعلاوه $f\to ۰$ وقتی $|x|\to\infty$ و f' مطلقاً انتگرال‌پذیر باشد آنگاه:

$$\Im\{f'\}=i\alpha\Im\{f\}$$

و در حالت کلی‌تر با استفاده از روش استقراء می‌توان نشان داد که:

$$\Im\left\{f^{(n)}\right\}=(i\alpha)^n\Im\{f\}$$

یکی از ویژگی‌های عملی مهم تبدیل فوریه، قضیه کانولوشن (پیچش) است که در حل معادلات انتگرالی می‌تواند مفید واقع گردد. کانولوشن دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ را که با نماد $f*g$ نشان می‌دهیم به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$f*g=\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x-t)g(t)dt$$

قضیه کانولوشن دو تابع بیان می‌دارد که اگر $\Im\{f\}=f(\alpha)$ و $\Im\{g\}=\cos(\alpha)$ آنگاه:

$$\Im^{-۱}\{F(\alpha)\cos(\alpha)\}=f*g$$

یا به عبارتی دیگر

$$\Im\{f*g\}=F(\alpha)\cos(\alpha)=\frac{۱}{۲\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\varepsilon t}f(u)g(t-u)du\,dt$$

نکته ۶: اگر $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha)\overline{a(\alpha)}\,d\alpha$ و $F(\alpha)=a(\alpha)$ آنگاه:

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^{2}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(\alpha)|^{2}d\alpha$$

این رابطه به *اتحاد پارسوال* برای انتگرال‌های فوریه تبدیل می‌شود.

یادداشت ۵: برای بازه $(0,\infty)$ از تبدیل‌های فوریه کسینوسی و سینوسی استفاده می‌کنیم. قضیه تبدیل فوریه کسینوسی بیان می‌دارد که اگر f و f' به سمت صفر میل کنند وقتی $x\to\infty$ آنگاه:

$$\text{(i)}\quad \mathfrak{I}_c\{f'\}=\alpha F_s(\alpha)-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,f(0)\quad,\quad \text{(ii)}\quad \mathfrak{I}_c\{f''\}=-\alpha^{2}F_c(\alpha)-\sqrt{\frac{2}{\pi}}f'(0)$$

و تبدیل فوریه سینوسی مشتق با همان شرایط قضیه قبلی بیان می‌دارد که:

$$\text{(iii)}\quad \mathfrak{I}_s\{f'\}=-\alpha F_c(\alpha)\quad,\quad \text{(iv)}\quad \mathfrak{I}_s\{f''\}=-\alpha^{2}F_s(\alpha)+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\alpha f(0)$$

می‌توان به طریقی مشابه، انتگرال‌های پیچش دیگری شامل سینوس و کسینوس را به دست آورد که عبارتند از:

$$\text{i)}\quad \int_0^{\infty}\cos\alpha t\,F_s(\alpha)G_s(\alpha)d\alpha=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}f(u)\big[g(u+t)+g(u-t)\big]du$$

$$\text{ii)}\quad \int_0^{\infty}\sin\alpha t\,F_s(\alpha)G_s(\alpha)d\alpha=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}f(u)\big[g|t-u|-g(u+t)\big]du$$

$$\text{iii)}\quad \int_0^{\infty}\sin\alpha t\,F_c(\alpha)G_s(\alpha)d\alpha=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}f(u)\big[g(u+t)-g(u-t)\big]du$$

$$\text{iv)}\quad \int_0^{\infty}\cos\alpha t\,F_c(\alpha)G_c(\alpha)d\alpha=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}f(u)\big[g(|t-u|)+g(t+u)\big]du$$

مثال ۵: نشان دهید $\frac{\pi}{4}=\int_0^{\infty}\frac{x^{2}dx}{(x^{2}+1)^{2}}=\int_0^{\infty}\frac{dx}{(x^{2}+1)^{2}}$.

حل: با انتخاب $t=0$ در (i) و (iv) می‌گیریم:

$$\int_0^{\infty}F_s(\alpha)G_s(\alpha)d\alpha=\int_0^{\infty}f(u)\,g(u)\,du$$

$$\int_0^{\infty}F_c(\alpha)F_c(\alpha)d\alpha=\int_0^{\infty}f(u)\,g(u)\,du$$

حال اگر فرض کنیم $f(x)=g(x)=\frac{x}{x^{۲}+۱}$ در این صورت $F_s(\alpha)=\sqrt{\frac{\pi}{۲}}\,e^{-\alpha}$. به عبارتی:

$$\int_{\circ}^{\infty} f^{۲}u\,du=\int_{\circ}^{\infty}F_s^{۲}(\alpha)\,d\alpha=\frac{\pi}{۲}\int_{\circ}^{\infty}e^{-۲\alpha}d\alpha=\frac{\pi}{۴}$$

اما اگر $f(x)=g(x)=\frac{۱}{x^{۲}+۱}$، در نتیجه $F_c(\alpha)=\sqrt{\frac{\pi}{۲}}\,e^{-\alpha}$، که با جاگذاری در رابطه آخری مجدداً جواب $\frac{\pi}{۴}$ را خواهیم داشت.

۸-۴ کاربرد تبدیل فوریه

کاربرد تبدیل‌های فوریه را در فصل بعدی برای حل معادله دیفرانسیل جزیی توضیح خواهیم داشت در این بخش به کاربرد آن در حل معادله دیفرانسیل معمولی اکتفا می‌کنیم.

مثال ۶: مسأله با مقدار مرزی زیر را حل کنید.

$$y''-y=-h(۱-|x|)\quad,\quad |x|<\infty$$

$$|x|\to\infty \Rightarrow y(x)\to\circ\,,\ \ y'(x)\to\circ$$

که h معرف تابع هوی ساید است.

حل: اول از طرفین تبدیل فوریه می‌گیریم. خواهیم داشت:

$$(\alpha^{۲}+۱)Y(\alpha)=\sqrt{\frac{۲}{\pi}}\,\frac{\sin\alpha}{\alpha}\to Y(\alpha)=\sqrt{\frac{۲}{\pi}}\,\frac{\sin\alpha}{\alpha(\alpha^{۲}+۱)}$$

حال با توجه به این که $\mathfrak{I}^{-۱}\left\{\frac{۱}{\alpha^{۲}+۱}\right\}=\sqrt{\frac{\pi}{۲}}\,e^{-|x|}$ و $\mathfrak{I}^{-۱}\left\{\sqrt{\frac{۲}{\pi}}\,\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right\}=h(۱-|x|)$ از اینرو با استفاده از قضیه کانولوشن می‌گیریم:

$$y(x)=\frac{۱}{۲}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-|u|}h(۱-|x-u|)du=\frac{۱}{۲}\int_{x-۱}^{x+۱}e^{-|u|}du$$

$$=\begin{cases} e^{x}\mathrm{sh}(۱) & ,\quad -\infty<x<-۱\\ ۱-e^{-۱}\mathrm{ch}x & ,\quad -۱\le x\le ۱\\ e^{-x}\mathrm{sh}(۱) & ,\quad ۱<x<\infty\end{cases}$$

تست ۶: در مسأله پخش گرمایی نامتناهی $0 < x < \infty$، $t > 0$ و $u_t = c^2 u_{xx}$ از طریق تبـدیل فوریه سینوسی اگر $u(0,t) = A$ و $u(x,0) = 0$ آنگاه تبدیل فوریه سینوسی u در صفر کـدامیک از گزینه‌های زیر می‌باشد؟

الف) $U(0) = 0$ ب) $U(0) = A$ ج) $U(0) = c^2 A$ د) $U(0) = 1$

حل: گزینه (الف) صحیح است.

به مثال ۱۳ از کتاب مرجع در صفحه ۱۸۴ مراجعه کنید.

فصل نهم

معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی

۹-۱ مفاهیم اولیه

هر معادله شامل یک یا چند مشتق جزیی را یک *معادله دیفرانسیل با مشتق‌های جزیی (نسبی)* نامیده بالاترین مشتق موجود را مرتبه معادله و بزرگترین توان از بالاترین مرتبه را درجه *معادله* گویند. مثلاً معادله از مرتبه دو و درجه چهار است.

$$(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2})^4 + (\frac{\partial u}{\partial x})^6 + u^5 = \sin^8 x$$

معادله را *خطی* گوییم اگر متغیر وابسته و مشتق‌های آن از درجه یک باشند در غیر این صورت معادله را غیر*خطی* گویند، اگر بالاترین مشتق از درجه یک باشد معادله را شبه خطی نامند.

تست ۱: کدامیک از معادلات زیر شبه خطی است؟

الف) $(u_{xx})^2 + u_x + u = 1$ ب) $u_{xx} + u_x^2 = \sin x$

ج) $u_{xx}^3 x + u_{xx} = u$ د) $u + u_x + u_{xx}^2 = \cos x$

حل: گزینه (ب) صحیح است.

زیرا اگر چه خطی نیست اما درجه بالاترین مرتبه یک است.

جوابی نظیر u که در معادله دیفرانسیل صدق می‌کند جواب معادله نامند.

تذکر: معادله دیفرانسیل جزیی بویژه در حالت خطی برعکس معادلات دیفرانسیل معمولی می‌تواند بیشمار جواب داشته باشد.

تست ۲: کدامیک از جواب‌های زیر جواب معادله $u_x + u_y = 0$ است.

الف) $u = x - y$ ب) $u = e^{x-y}$

ج) $u = \cos 2(x - y)$ د) همه موارد

حل: گزینه (د) صحیح است.

به راحتی می‌توان امتحان نمود که هر سه گزینه، جوابی از معادله داده شده می‌باشند.

یادداشت: فهرستی از معادلات دیفرانسیل که در ریاضیات مهندسی مورد نظرانْد در زیر درج شده است.

i) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ معادله موج یک بعدی

ii) $\dfrac{\partial u}{\partial t} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ معادله انتشار حرارت

iii) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ معادله لاپلاس

iv) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + c^2 \dfrac{\partial^4 \theta}{\partial x^4} = 0$ معادله ارتعاش عرض یک تیر

v) $\dfrac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}$ معادله ارتعاش پیچشی یک محور

vi) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x,y)$ معادله پواسن

vii) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha u_t + \beta u$ معادله تلگراف

مثال ۱: نشان دهید تابع $u = \tan^{-1}(\dfrac{y}{x})$ در معادله لاپلاس صدق می‌کند.

حل: داریم

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{-x}{x^2+y^2} \to \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{y}{x^2+y^2} \to \frac{\partial^2 u}{\partial y} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} \end{aligned} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

نکته ۱: اگر $u = u(x,y,z)$، معادله لاپلاس $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$ است.

نکته ۲: تمام توابع به صورت $u = f(x+ct) + g(x-ct)$ در معادله انتشار حرارت صدق می‌کنند.

تست ۳: کدامیک از توابع زیر جواب معادله $u_{tt} = u_{xx}$ است.

الف) $u = (x+t)(x-t)$ ب) $u = 1 + \cos^2(x-t)$

ج) $u = \sin(x^2 - t^2)$ د) $u = (x-y)e^{x+y}$

حل: گزینه (ب) صحیح است.

زیرا بقیه به صورت $f(x+t)g(x-t)$ می‌باشند.

نکته ۳: تعویض متغیرهای $\alpha = x + ct$ و $\beta = x - ct$ معادله موج یک بعدی را تبدیل می‌کند به معادله

$u_{\alpha\beta}=0$

نکته ۴: تعویض متغیرهای $x=r\cos\theta$ و $y=r\sin\theta$ معادله لاپلاس را تبدیل می‌کند به معادله

$$u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0$$

نکته ۵: معادله لاپلاس در مختصات استوانه‌ای به صورت معادله

$$u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}+u_{zz}=0$$

است. و در مختصات استوانه‌ای به شکل $u_{rr}+\frac{2}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\phi\phi}+\frac{\cot\phi}{c^2\sin^2\phi}u_{\theta\theta}=0$

است.

۹-۲ حل تعدادی از معادلات دیفرانسیل جزیی ساده

می‌توان بسیاری از معادلات دیفرانسیل جزیی را با استفاده از دانسته‌هایمان در حل معادلات دیفرانسیل معمولی حل نمود.

مثال ۲: معادله $u_{xy}=0$ را حل کنید.

حل: کافی است دو بار متوالی به ترتیب بر حسب x و y انتگرال بگیریم. نتیجه چنین می‌شود:

$$u=F(x)+G(y)$$

مثال ۳: معادله $u_{xx}=x+e^y$ را حل کنید.

حل: دو بار متوالی بر حسب x انتگرال می‌گیریم. خواهیم داشت:

$$u_x=\frac{x^2}{2}+xe^y+f(y)\Rightarrow u=\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{2}e^y+F(y)$$

مثال ۴: معادله $\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y}+6xy^2+2e^{x-2y}=0$ را حل کنید.

حل: اول دو بار متوالی بر حسب x انتگرال می‌گیریم. نتیجه چنین می‌شود:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+3x^2y+2e^{x-2y}=f(y)\rightarrow\frac{\partial u}{\partial y}+x^3y+2e^{x-2y}=xf(y)+g(y)$$

حال بر حسب y انتگرال می‌گیریم. خواهیم داشت:

$$u+\frac{x^3y^2}{2}-e^{x-2y}=xF(y)+G(y)+H(x)$$

تست ۴: جواب معادله $u_{xx}-4u_{xy}+3u_{yy}=0$ کدام گزینه زیر است؟

الف) $u=e^{n(y+3x)}+e^{n(y-3x)}$ ب) $u=e^{n(y-x)}+e^{n(y+x)}$

ج) $u=e^{n(3x+y)}+e^{n(x+y)}$ د) $u=e^{n(3y+x)}+e^{n(y+x)}$

حل: در اینجا یک معادله با ضرایب ثابت داریم برای این منظور همانند معادلات دیفرانسیل معمولی فرض کنید $u=e^{mx+ny}$ که با جاگذاری لازم می‌شود.

$m^2-4mn+3n^2=0$ در نتیجه $(m-n)(m-3n)=0$ در نتیجه $m=n$ و $m=3n$ بنابراین

$$u_1=e^{mx+ny}=e^{nx+ny}=e^{n(x+y)}$$
$$u_2=e^{mx+ny}=e^{3nx+ny}=e^{n(3x+y)}$$

یعنی

$$u=u_1+u_2=e^{n(x+y)}+e^{n(3x+y)}$$

پس گزینه (د) صحیح است.

۹-۳ طبقه‌بندی معادلات خطی مرتبه دو و شکل متعارف آن‌ها

شکل عمومی معادله مرتبه دو خطی به صورت

$$Au_{xx}+Bu_{xy}+Cu_{yy}+Du_x+Eu_y+Fu=G$$

است که درآن A, B, C, D, E, F و G می‌توانند توابعی از x و y باشند. بر حسب این که B^2-4AC در این حوزه مثبت، منفی و یا صفر باشد این معادله به ترتیب ***هذلولیگون، بیضیگون و سهمیگون*** نامیده می‌شود.

تست ۵: کدامیک از معادلات زیر بیضی‌وار است. $(|x|<1 \quad , \quad |y|<1)$؟

الف) $yu_{xx}+yu_{xy}+u_{yy}=e^x$ ب) $u_{xx}+u_{yy}=0$

ج) $u_{xx}=u_{yy}$ د) $x^2u_{xx}+xyu_{xy}+y^2u_{yy}=0$

حل: گزینه (ب) صحیح است.

اگر چه در گزینه (د) داریم $B^2-4AC=-3x^2y^2$ که عددی منفی است اما در $x=y=0$ برابر صفر است.

یادداشت ۲: معادله $u_{xy}=f(x,y,u,u_x,u_y)$ را *شکل کانونی* (یا *متعارف*) معادلات هذلولیگون نامند و معادله $u_{yy}=f(x,y,u,u_x,u_y)$ را شکل کانونی معادلات سهمیگون گویند و معادله $u_{xx}+u_{yy}=f(x,y,u,u_x,u_y)$ را شکل کانونی معادلات بیضیگون نامند.

نکته ۶: برای به دست آوردن شکل کانونی باید از معادله مشخصه که به صورت

$$A(\frac{dy}{dx})^{۲}-B(\frac{dy}{dx})+c=\circ$$

می‌باشد استفاده نمود.

اگر معادله هذلولیگون باشد، معادله مشخصه دارای دو جواب $f(x,y)=c_{۱}$ و $f_{۲}(x,y)=c_{۲}$ می‌باشد و می‌توان با تغییر متغیرهای $\alpha(x,y)=f_{۱}$ و $\beta(x,y)=f_{۲}$ معادله را به شکل کانونی تبدیل کرد.

اگر معادله سهمیگون باشد معادله مشخصه تنها یک جواب $f(x,y)=c$ دارد که با انتخاب $\alpha(x,y)=\phi$ و $\beta(x,y)$ تابعی دلخواه، معادله به شکل کانونی تبدیل می‌شود.

اگر معادله بیضیگون باشد معادله دارای دو جواب مختلط خواهد بود.

مثال ۵: معادله $x^{۲}u_{xx}+۲xyu_{xy}+y^{۲}u_{yy}=\circ$.

حل: با توجه به این که $B^{۲}-۴AC=\circ$ بنابراین معادله سهمیگون است. معادله مشخصه آن $\frac{y}{x}=\frac{\partial y}{\partial x}$ است که از آن $\frac{y}{x}=c$ به این ترتیب می‌نویسیم $\alpha=\frac{y}{x}$ و $\beta=y$ که β به دلخواه انتخاب شده است. این تغییر متغیرها معادله را به $\beta^{۲}u_{\beta\beta}=\circ$ تبدیل می‌کند که از آن $u_{\beta\beta}=\circ$ یعنی:

$u=\beta f(\alpha)+g(\alpha)$ پس $u(x,y)=yf(\frac{y}{x})+g(\frac{y}{x})$.

مثال ۶: معادله $۴u_{xx}+۵u_{xy}+u_{yy}=x-y$ را حل کنید.

حل: داریم $B^{۲}-۴AC>\circ$ پس معادله هذلولیگون است. معادلات مشخصه عبارتند از $۱=\frac{dy}{dx}$ و $\frac{۱}{۲}=\frac{dy}{dx}$ که از آن‌ها به ترتیب $y=x+c_{۱}$ و $y=\frac{x}{۴}+c_{۲}$.

یعنی $\alpha=y-x$ و $\beta=y-\frac{x}{۴}$ که با اعمال قاعده زنجیره‌ای شکل متعارف معادله به صورت $u_{\alpha\beta}=\frac{۴}{۹}u_{\alpha}$ خواهد بود که می‌توان به راحتی نشان داد که

$$u(\alpha,\beta)=\frac{۲\beta\alpha^{۲}}{۹}+F(\alpha)+G(\beta)$$

کافی است قرار دهیم $\alpha=y-x$ و $\beta=y-\frac{x}{۴}$.

۹-۴ حل معادلات دیفرانسیل با مشتق‌های جزیی با استفاده از روش جداسازی متغیرها

یکی از روش‌های ساده و مفید برای حل معادلات دیفرانسیل جزیی که در کاربردهای فیزیکی و مهندسی در دامنه‌های متناهی مورد بررسی قرار می‌گیرد روش جداسازی متغیرها است. ایده اصلی این است که معادله داده شده را به چند معادله دیفرانسیل معمولی ساده تبدیل کرده که حل آن‌ها را از قبل می‌دانیم. در این روش بر حسب این که معادله دو یا سه متغیر باشد به ترتیب جوابی به صورت $u = XY$ یا $u = XYZ$ را که در آن $X = X(x)$، $Y = Y(y)$ و $Z = Z(z)$ مورد استفاده قرار می‌گیرند. با محاسبه مشتق‌های لازم و جاگذاری در معادله اولیه آن را به یک دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل کرده و بعد از بدست آوردن X، Y و Z تابع u را مشخص می‌سازیم.

مثال ۷: معادله $u_x + u_y = 0$ را با شرط $u(0, y) = 4e^{2y}$ حل کنید.

حل: فرض کنید $u = XY$ در این صورت $u_x = X'Y$ و $u_y = XY'$ که اگر در معادله جاگذاری کنیم می‌گیریم $X'Y + X'Y = 0$. متغیر را از هم جدا می‌کنیم. یعنی می‌نویسیم:

$$\frac{X'}{X} = -\frac{Y'}{Y}$$

بدیهی است که این تساوی وقتی می‌تواند برقرار باشد که برابر عدد ثابتی نظیر λ باشد، یعنی

$$\frac{X'}{X} = -\frac{Y'}{Y} = \lambda$$

که از آن دستگاه معادلات زیر را خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \dfrac{X'}{X} = \lambda \\ \dfrac{Y'}{Y} = -\lambda \end{cases}$$

از حل اولی داریم $X = c_1 e^{\lambda x}$ و از حل دومی $Y = c_2 e^{-\lambda y}$ در نتیجه:

$$u = XY = c_1 e^{\lambda x} \times c_2 e^{-\lambda y} = c_1 c_2 e^{(x-y)\lambda} = ce^{(x-y)\lambda}$$

که در آن $c = c_1 c_2$ حال اگر شرط $u(0, y) = 4e^{2y}$ را اعمال کنیم می‌گیریم:

$$4e^{2y} = ce^{-\lambda y} \to c = 4\ ,\ \lambda = -2 \Rightarrow u = 4e^{2(y-x)}$$

روش گفته شده برای حل معادلات معرفی شده در شروع فصل می‌تواند بکار گرفته شود در هر بخش سعی داریم یک نمونه از آن را حل نماییم.

۹-۵ معادله موج

معادله موج در حالت کلی می‌تواند بصورت زیر داده شود:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad , \quad 0 < x \quad , \quad t > 0$$

$u(0,t)=f_1(t) \qquad ,u(l,t)=f_2(t)$ شرایط مرزی

$u_t(x,0)=g(x) \qquad ,u(x,0)=f(x)$ شرایط اولیه

اگر شرایط مرزی صفر در نظر گرفته شوند گوییم شرایط همگن است. اگر $g(x)=0$ فرض شود گوییم سرعت اولیه صفر است.

نکته ۷: اگر معادله شرایط مرزی غیر صفر داشته باشد جواب $u(x,t)=v(x,t)+w(x)$ را امتحان می‌کنیم که در آن $w(x)=ax+b$ و a و b را طوری محاسبه می‌کنیم $a=\frac{1}{l}(f_2-f_1)$ و $b=f_1$ و معادله به معادله با شرایط مرزی صفر تبدیل می‌شود.

چون تبدیل شرایط مرزی غیر هم به همگن را دانستیم بنابراین حل یک معادله با شرایط مرزی همگن را بررسی می‌کنیم.

مثال ۸: معادله داده شده را حل کنید.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad , \quad 0<x<1 \quad , \quad t>0$$

$$u(0,t)=u(1,t)=0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0 \qquad , \qquad u(x,0)=x(1-x)$$

حل: جواب $u=XT$ را امتحان می‌کنیم که در آن $X=X(x)$ و $T=T(t)$ در این صورت $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=XT''$ و $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=X''T$ در نتیجه $XT''=X''T$. متغیرها را به صورت تفکیک کرده می‌نویسیم:

$$\frac{T''}{T}=\frac{X''}{X}=-\lambda^2$$

این که به جای λ پارامتر $-\lambda^2$ را قرار دادیم به خاطر این است که اگر λ^2 انتخاب می‌شد با شرایط داده شده به جواب مورد قبولی نخواهیم رسید بویژه که جواب صفر یا بی‌کران را به عنوان جواب در نظر نمی‌گیریم.

با توجه به تساوی بالا دستگاه معادلات

$$T''+\lambda^2 T=0 \qquad , \qquad X''+\lambda^2 X=0$$

را خواهیم داشت که به ترتیب جواب‌های زیر را خواهیم داشت:

$$T=A_1\cos\lambda t+B_1\sin\lambda t \quad \text{و} \quad X=A_2\cos\lambda x+B_2\sin\lambda x$$

یعنی

$$u=TX=(A_1\cos\lambda t+B_1\sin t)(A_2\cos\lambda x+B_2\sin\lambda x)$$

شرط $u(0,t)=0$ منجر به $A_2=0$ می‌شود در نتیجه:

$$u=B_2\sin\lambda x(A_1\cos\lambda t+B_1\sin\lambda t)=(A\cos\lambda t+B\sin\lambda t)\sin\lambda x$$

شرط $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0$ منجر به $B=0$ می‌شود. لذا $u=A\cos\lambda t\sin\lambda x$. شرط $u(1,t)=0$ منتهی به $\lambda=n\pi$ می‌شود. در نتیجه $u=A\cos\pi t\sin n\pi x$.

قبل از استفاده از شرط آخر اصل بر هم نهی را بکار می‌بریم در نتیجه $u=\sum_{1}^{\infty}A_n\cos n\pi t\sin n\pi x$. از شرط $u(x,0)=x(1-x)$ می‌گیریم $x(1-x)=\sum_{1}^{\infty}A_n\sin n\pi x$ که اگر طرفین را مقایسه کنیم نتیجه می‌گیریم A_n ضریب سری فوریه سینوسی تابع $f(x)=x(1-x)$ است. اما

$$b_n=\frac{2}{1}\int_0^1 x(1-x)\sin n\pi x\,dx=0+\frac{2}{n\pi}\int_0^1(1-2x)\cos n\pi x\,dx$$

$$=0+\frac{4}{n^2\pi^2}\int_0^1\sin n\pi x\,dx=-\frac{4}{n^3\pi^3}\cos n\pi x\Big|_0^1=-\frac{4}{n^3\pi^3}(\cos n\pi-1)$$

$$=\begin{cases}0 & \text{های زوج}\ n\ ،\\ \frac{8}{n^3\pi^3} & \text{های فرد}\ n\ ،\end{cases}$$

بنابراین $b_n=A_n=\begin{cases}\frac{8}{n^3\pi^3} & \text{های فرد}\ n\ ،\\ 0 & \text{های زوج}\ n\ ،\end{cases}$ لذا جواب معادله چنین می‌شود:

$$u(x,t)=\frac{8}{\pi^3}\sum_{1}^{\infty}\frac{\cos n\pi t\sin n\pi x}{n^3}$$

نکته ۸: مقدار λ در مسأله مربوط به ارتعاش (معادله موج) از دستور $\lambda=\frac{n\pi}{l}$ بدست می‌آید.

مثال ۹: معادله زیر را حل کنید.

$$u_{tt}=u_{xx}\quad,\quad 0<x<\pi\ ,\ t>0$$
$$u(0,t)=0\quad,\quad u(\pi,t)=1$$
$$u_t(x,0)=0\quad,\quad u(x,0)=2x$$

حل: چون شرط مرزی غیر صفر است در این صورت فرض می‌کنیم $u(x,t)=v(x,t)+w(x)$ که در آن

$$w(x)=ax+b=\frac{1}{\pi}(1-0)x+0=\frac{x}{\pi}$$

حال اگر $u(x,t)=v(x,t)+x$ را در معادله بالا جاگذاری کنیم می‌گیریم:

$$u_{tt}=v_{xx}\quad,\quad 0<x<\pi\ ,\ t>0$$

$$v(0,t) = v(\pi,t) = 0$$
$$v_t(x,0) = 0 \quad , \quad v(x,0) = x$$

اگر حل مسأله قبلی را برای این مسأله اعمال کنیم می‌گیریم $v = A\cos nt \sin nx$. توجه شود که $\lambda = \frac{n\pi}{l} = n$.

حال اگر اصل بر هم نهی را بکار ببریم می‌گیریم $v(x,t) = \sum_1 A_n \cos nt \sin nx$.

شرط $v(x,0) = x$ منتهی می‌شود به $x = \sum_1^\infty A_n \sin nx$. کافی است b_n یعنی ضریب فوریه سینوسی تابع $f(x) = x$ را بیابیم. داریم:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x \sin nx \, dx = \frac{-2x}{n\pi}\cos nx\Big|_0^\pi + \frac{2}{n\pi}\int_0^\pi \cos nx \, dx = -\frac{2}{n}(\cos n\pi - 1)$$

$$= \begin{cases} \frac{4}{n} & \text{، n های فرد} \\ 0 & \text{، n های زوج} \end{cases}$$

به این ترتیب:

$$v(x,t) = 4\sum_1^\infty \frac{\cos nt \sin nx}{n}$$

در نتیجه:

$$u(x,t) = 4\sum_1^\infty \frac{\cos nt \sin nx}{n} + x$$

۹-۶ معادله پخش گرما

در این حالت شکل کلی زیر را خواهیم داشت:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad , \quad 0 < x < l \quad , \quad t > 0$$
$$u(0,t) = f_1(t) \quad , \quad u(l,t) = f_2(t)$$
$$u(x,0) = f(x)$$

طرز عمل برای حل این معادله همانند معادلات بخش قبلی است.

مثال ۱۰: معادله زیر را حل کنید.

$$u_t = u_{xx} \quad , \quad 0 < x < 1 \, , \, t > 0$$
$$u(0,t) = u(l,t) = 0$$
$$u(x,0) = x^2$$

حل: فرض می‌کنیم $u = TX$ در نتیجه $u_t = T'X$ و $u_{xx} = TX''$ در نتیجه:

$$\frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{T'}{T} = -\lambda^2 \rightarrow T = A_1 e^{-\lambda^2 t} \\ X'' + \lambda^2 x = 0 \rightarrow X = A_2 \cos\lambda x + B_2 \sin\lambda x \end{cases}$$

$$\Rightarrow u = TX = A_1 e^{-\lambda^2 t}(A_2 \cos\lambda x + B_2 \sin\lambda x) = e^{-\lambda^2 t}(A\cos\lambda x + B\sin\lambda x)$$

که $A = A_1 A_2$ و $B = A_1 B_2$. شرط $u(0,t) = 0$ منتهی به $A = 0$ لذا $T = Be^{-\lambda^2 t}\sin\lambda x$.

شرط $u(1,t) = 0$ به $\lambda = n\pi$ منجر می‌شود در نتیجه:

$$u(x,t) = \sum_1^\infty B_n e^{-n^2\pi^2 t}\sin n\pi x$$

اگر شرط $u(x,0) = x^2$ را بکار ببریم خواهیم داشت:

$$x^2 = \sum_1^\infty B_n \sin n\pi x$$

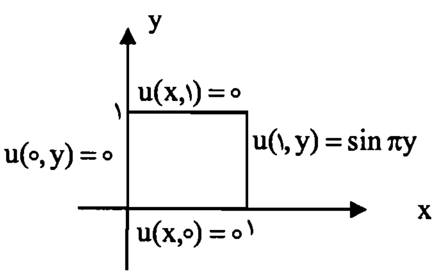
که در آن

$$B_n = b_n = \frac{2}{1}\int_0^1 x^2 \sin n\pi x\, dx = \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} + \frac{2}{n^3\pi^3}(1 - \cos n\pi)$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \sum_1^\infty e^{-n^2\pi^2 t}\left[\frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} + \frac{2}{n^3\pi^3}(1 - \cos n\pi)\right]\sin n\pi x$$

نکته ۹: حالت دو بعدی معادله پخش گرما به صورت $\frac{\partial u}{\partial t} = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$ می‌باشد که اگر حالت مانا (پایدار) داشته باشیم یعنی $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ معادله لاپلاس را خواهیم داشت.

مثال ۱۱: دمای حالت مانا از یک تیغه مربعی شکل به طول ۱ را با توجه به شکل زیر مشخص کنید.



حل: باید معادله زیر را با توجه به شکل داده شده حل نماییم. (معادله لاپلاس)

$$u_{xx}+u_{yy}=0 \quad , \quad 0<x<1 \quad , \quad 0<x<1$$

$$u(x,0)=u(x,1)=u(0,y)=0$$

$$u(1,y)=\sin \pi y$$

با فرض $u=XX$ داریم $u_{xx}=X''Y$ و $u_{yy}=XY''$ که اگر در معادله لاپلاس قرار دهیم می‌گیریم:

$$-\frac{X''}{X}=\frac{Y''}{Y}=-\lambda^2$$

از این رابطه دستگاه زیر را خواهیم داشت که مستقیماً جواب‌های عمومی آن‌ها را می‌توان به راحتی بدست آورد.

$$X''-\lambda^2X=0 \rightarrow X=A_1\text{ch}\lambda x+B_1\text{sh}\lambda x$$

$$Y''+\lambda^2Y=0 \rightarrow Y=A_2\cos\lambda y+B_2\sin\lambda y$$

در نتیجه:

$$u(x,t)=(A_1\text{ch}\lambda x+B_1\text{sh}\lambda x)(A_2\cos\lambda y+B_2\sin\lambda y)$$

توجه شود که برای X می‌توانستیم جواب $X=c_1e^{\lambda x}+c_2e^{-\lambda x}$ را انتخاب نماییم. در اینجا توابع نمایی بر حسب توابع هذلولولی نوشته شده‌اند. روی جواب اصلی تاثیری ندارد.

با اعمال شرایط داده شده و استفاده از اصل بر هم نهی، می‌گیریم:

$$u(x,y)=\sum_1^\infty B_n\text{sh}\, n\pi x\sin n\pi y$$

با استفاده از شرط آخر داریم:

$$u(1,y)=\sin \pi y=\sum_1^\infty B_n\text{sh}\ n\pi\sin n\pi y$$

که کافی است سری فوریه سینوسی تابع $f(y)=\sin \pi y$ برای فاصله $(0,b)$ نوشته شود. داریم $a_0=a_n=0$ و

$$B_n=\frac{2}{\text{sh}\, n\pi}\int_0^b \sin \pi y\sin n\pi y\, dy=0$$

$$=\frac{1}{\text{sh} n\pi}\left[\frac{\sin(1-n)\pi y}{1-n}-\frac{\sin(1+n)\pi y}{1+n}\right]_0^1=0 \quad , \quad n\neq 1$$

اما اگر $n=1$، آنگاه

$$B_1=\frac{2}{\text{sh}\,\pi}\int_0^1 \sin^2\pi y\, dy=\frac{1}{\text{sh}\pi}$$

به این ترتیب جواب معادله چنین می‌شود:

$$u(x,y)=\frac{\operatorname{sh}\pi x\sin\pi y}{\operatorname{sh}\pi}\ .$$

۹-۷ معادلات غیرهمگن

در تبدیل شرایط مرزی غیر صفر به شرایط مرزی صفر ممکن است معادله همگن به یک معادله غیر همگن تبدیل شود. در این حالت اول معادله همگن را حل می‌کنیم و سپس جواب خصوصی را با استفاده از $v_p=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\frac{n\pi y}{l}$ به دست می‌آوریم.

مثال ۱۲: مسأله زیر را با شرایط داده شده آن حل کنید.

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+1\quad,\quad 0<x<1\quad,\quad t>0$$

$$u(0,t)=u(1,t)=0\qquad,\quad u(x,0)=0$$

حل: معادله دارای شرایط مرزی صفر است اما همگن نیست. از حل معادله همگن جواب $u_n=\{\sin nx\}$ را خواهیم داشت بنابراین جواب خصوصی معادله به صورت

$$u=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin n\pi x$$

خواهد بود. با قرار دادن u در معادله، نتیجه زیر بدست می‌آید

$$\sum_{n=1}^{\infty}(T_n'+n^2\pi^2T_n)\sin n\pi x=1$$

که از آن

$$T_n'+n^2\pi^2T_n=2\int_0^1\sin n\pi x\,dx=\frac{2}{n\pi}(1-\cos n\pi)$$

پس کافی است معادله خطی مرتبه یک حاصل را حل کنیم و آنگاه در رابطه بالا برای مشخص کردن u جاگذاری کنیم. مقدار ثابت حاصل از حل معادله مرتبه یک را می‌توان با شرط داده شده معادله محاسبه نمود.

مثال ۱۳: معادله زیر را با شرایط داده شده آن حل کنید.

$$u_{tt}=u_{xx}+1\quad,\quad 0<x<1\quad,\quad t>0$$

$$u(0,t)=1\quad,\quad u(1,t)=2$$

$$u_t(x,0)=0\quad,\quad u(x,0)=x\quad x>0$$

حل: چون شرایط مرزی همگن نیست جوابی به صورت $u(x,t)=v(x,t)+w(x)$ را امتحان می‌کنیم جایی که $w=ax+b$ است.

$$a=\frac{1}{1}(2-1)\quad,\quad b=1$$

بنابراین $w=x+1$ و معادله به صورت زیر در می‌آید

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+1\quad,\quad 0<x<1\quad,\quad t>0$$

$$v(0,t)=v(1,t)=0\qquad,\quad t\geq 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}(x,0)=0\quad,\quad v(x,0)=1\quad,\quad t\geq 0$$

جوابی به صورت $v=\sum_{n=1}^{\infty}T_n\sin n\pi x$ را در نظر می‌گیریم و در معادله قرار می‌دهیم. خواهیم داشت

$$\sum_{n=1}^{\infty}(T_n^n+n^2\pi^2T_n)\sin n\pi x=1$$

که از آن

$$T_n^n+n^2\pi^2T_n=2\int_0^1\sin n\pi x\,dx=\frac{2}{n\pi}(1-\cos n\pi)$$

این یک معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه دو خطی با ضرایب ثابت است که از حل آن جواب عمومی چنین می‌شود

$$T_n=a_n\cos n\pi t+b_n\sin n\pi t+\frac{2}{n^3\pi^3}(1-\cos n\pi).$$

بنابراین

$$v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n(\cos n\pi t+b_n\sin n\pi t)+\frac{2}{n^3\pi^3}(1-\cos n\pi)\right]\sin n\pi x.$$

از شرط $\frac{\partial v}{\partial t}(x,0)=0$ داریم

$$\sum_{n=1}^{\infty}n\pi b_n\sin n\pi x=0\Rightarrow b_n=0$$

و از شرط $v(x,0)=1$ خواهیم داشت

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n+\frac{2}{n^3\pi^3}(1-\cos n\pi)\right]\sin n\pi x=1$$

که با نوشتن سری فوریه سینوسی برای تابع $f(x)=1$ به رابطه زیر می‌رسیم

$$a_n+\frac{2}{n^3\pi^3}(1-\cos n\pi)=2\int_0^1\sin n\pi x=\frac{2}{n\pi}(1-\cos n\pi)$$

که از آن $(1-\cos n\pi)(n^2\pi^2-1)\dfrac{2}{n^3\pi^3}= a_n$. پس

$$v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^3\pi^3}(n^2\pi^2-1)(1-\cos n\pi)(1+\cos n\pi t)\sin n\pi x$$

پس تابع $u(x,t)$ برای n های فرد به صورت زیر خواهد بود

$$u(x,t)=\frac{4}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n^2\pi^2-1)(1+\cos n\pi t)\sin n\pi x}{n^3}+1.$$

۹-۸ بررسی مسائل موج و پخش گرمایی برای طول نامتناهی

برای حل این‌گونه معادلات تنها روش جداسازی متغیرها کافی نیست. چون مقدار l نامتناهی در نظر گرفته می‌شود می‌توانیم از تبدیل فوریه استفاده کنیم که نمونه‌هایی از آن را به عنوان مثال در زیر مورد بررسی قرار می‌دهیم.

مثال ۱۴: مسأله زیر را با استفاده از تبدیل فوریه حل کنید.

$$\frac{\partial u}{\partial t}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\quad,\quad -\infty<x<\infty$$

$$u(x,0)=f(x)\quad,\ -\infty<x<\infty .$$

حل: از طرفین تبدیل فوریه می‌گیریم. داریم

$$\Im\left\{\frac{\partial u}{\partial t}\right\}=\frac{\partial}{\partial t}\Im\{u\}\ ,\quad \Im\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\}=-a^2\,\Im(u)\quad ,\quad \Im\{u(x,0)\}=F(a)$$

این نتایج را در معادله قرار می‌دهیم. لذا خواهیم داشت

$$\frac{\partial}{\partial t}\Im\{u\}=-c^2a^2\,\Im(u)$$

حال اگر تبدیل فوریه u را U که در واقع $U(a,t)$ است اختیار کنیم خواهیم داشت

$$\frac{\partial U}{\partial t}=-a^2U\quad ,\ U(0)=F(a)$$

که از حل این معادله دیفرانسیل معمولی جواب

$$U=F(a)e^{-c^2a^2t}$$

بدست می‌آید. از طرفین تبدیل معکوس می‌گیریم. خواهیم داشت

$$u(x,t)=\Im^{-1}\{U(a,t)\}=\Im^{-1}\left\{F(a)e^{-c^2a^2t}\right\}$$

$$=\Im^{-1}\{F(a)\}*\Im^{-1}\left\{e^{-c^2a^2t}\right\}$$

$$= f(x) * \left[\frac{1}{2c\sqrt{\pi t}} e^{-x^2/4c^2 t} \right]$$
$$= \frac{1}{2c\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(a) e^{-(x-a)^2/4c^2 t} da .$$

مسأله‌ای نظیر مسأله بالا را می‌توان با استفاده از تبدیل کسینوسی و یا سینوسی فوریه هم حل نمود قبل از بررسی یادآوری می‌کنیم که

$$\Im_c\{f''(x)\} = -a^2 \quad \Im_c\{f\} - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ f'(0)$$
$$\Im_c\{f''(x)\} = -a^2 \quad \Im_s\{f\} + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ af(0)$$

مثال ۱۵: **معادله دما با مقادیر اولیه داده شده زیر را با استفاده از تبدیل فوریه کسینوسی حل کنید.**

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad , x > 0 \quad , \quad t > 0$$
$$u(x, 0) = 0 \quad , \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = f(t)$$
$$u \to 0 \ u_x \to \infty \Rightarrow x \to \infty \ \text{وقتی}$$

حل: گیریم $\Im_c\{u\} = U(a, t)$، بنابراین با گرفتن تبدیل فوریه کسینوسی از طرفین معادله و استفاده از شرایط داده شده به معادله

$$\frac{dU}{dt} + a^2 u \equiv \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ f(t)$$
$$U(a, 0) = 0$$

می‌رسیم که از حل آن جواب

$$U(a, t) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^t f(s) e^{-a^2(t-s)} ds$$

را خواهیم داشت. داریم $u(x, t) = \Im^{-1}\{U(a, t)\}$، پس

$$u(x, t) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\int_0^t f(s) e^{-a^2(t-s)} ds \right] \cos ax\, da$$
$$= -\frac{2}{\pi} \int_0^t f(s) ds \int_0^{\infty} e^{-a^2(t-s)} \cos ax\, da$$

از طرفی داریم (به عنوان تمرین ثابت کنید)

$$\int_0^{\infty} e^{-a^2(t-s)} \cos ax\, da = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{t-s}}\ e^{-x^2/4(t-s)}$$

پس جواب به صورت زیر خواهد بود

$$u(x,t) = \frac{-1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{f(s)}{\sqrt{t-s}} e^{-x^2/4(t-s)} ds .$$

مثال ۱۶: تابع همساز $H(x,y)$ را برای $x>0$ و $y>0$ طوری بیابید که $\frac{\partial H}{\partial x}(0,y)$ و $H(x,0)=e^{-2x}$.

حل: چون حوزه $x>0$ و $y>0$ مورد نظر است طبیعی است که از تبدیل کسینوسی یا سینوسی فوریه استفاده نماییم. از طرفی تابع همساز است پس $H_{xx}+H_{yy}=0$ و تبدیل فوریه کسینوسی را نسبت به x بکار می‌بریم و فرض می‌کنیم $\mathfrak{F}_c\{H\}=\phi(a,y)$. بنابراین

$$\phi(a,y)=\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty H(x,y)\cos ax\, dx$$

$$\mathfrak{F}_c\{H_{xx}\}=-a^2\phi(a,y)-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\partial H}{\partial x}(0,y)=-a^2\phi(a,y)$$

حال اگر از معادله لاپلاس تبدیل فوریه کسینوسی بگیریم، خواهیم داشت

$$-a^2\phi+\frac{d^2\phi}{dy^2}=0$$

که از حل آن داریم

$$\phi(a,y)=A(a)e^{ay}+B(a)e^{-ay}.$$

چون $\phi \to 0$ وقتی $x\to\infty$، نتیجه می‌گیریم که $A=0$. از شرط $H(x,0)=e^{-2x}$ داریم

$$\phi(a,0)=\mathfrak{F}_c\{e^{-2x}\}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{2}{a^2+4}$$

بنابراین

$$\phi(a,y)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left\{\frac{2e^{-ay}}{a^2+4}\right\}$$

و از اینرو،

$$H(x,y)=\frac{4}{\pi}\int_0^\infty \frac{e^{-ay}}{a^2+4}\cos xa\,da .$$

به غیر از تبدیل فوریه می‌توان به گونه‌ای دیگر هم که منتهی به کاربرد انتگرال‌های فوریه می‌شود این‌گونه مسائل را حل نمود. برای درک این موضوع دو مثال زیر را بررسی می‌کنیم.

مثال ۱۷: جواب معادله لاپلاس را برای کل نیم صفحه $y>0$ بدست آورید طوری که برای $y=0$ مقدار u تابع $f(x)$ را اختیار نماید.

حل: با توجه به مسأله حل شده در مورد معادله لاپلاس جواب

$$u(x,y)=(A_1\cos\lambda x+B_1\sin\lambda x)(A_2e^{\lambda y}+B_2e^{-\lambda y})$$

را خواهیم داشت. با فرض این که $\lambda>0$، چون u باید کراندار باشد پس $A_2=0$ و u به صورت زیر درمی‌آید

$$u(x,y)=e^{-\lambda y}(A\cos\lambda x+B\sin\lambda x)$$

که در آن $A=A_1B_2$ و $B=B_1B_2$. در اینجا برای λ محدودیتی انتخاب نمی‌کنیم به همین علت به جای A و B به ترتیب $A(\lambda)$ و $B(\lambda)$ قرار می‌دهیم. به این ترتیب u از رابطه

$$u(x,y)=\int_0^\infty e^{-\lambda y}[A(\lambda)\cos\lambda x+B(\lambda)\sin\lambda x]d\lambda$$

بدست می‌آید. شرط $u(x,0)=f(x)$ نتیجه می‌دهدکه

$$f(x)=\int_0^\infty [A(\lambda)\cos\lambda x+B(\lambda)\sin\lambda x]d\lambda$$

که مقایسه آن با انتگرال فوریه باعث می‌شود بتوانیم $A(\lambda)$ و $B(\lambda)$را که از روابط

$$A(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\lambda t\,dt \quad , \quad B(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\sin\lambda t\,dt$$

بدست می‌آیند مشخص کرده تا $u(x,y)$ تعیین شود.

مثال ۱۸: یک نخ نامتناهی در نظر گرفته شده را یک جابجایی اولیه $u(x,0)=f(x)$ داده و سپس از حالت سکون رها نموده‌ایم. جابجایی آن را در هر زمان بعدی t مشخص کنید.

حل: روش جداسازی متغیرها را با شرایط داده شده برای معادله بکار می‌بریم که با توجه به حل معادله موج جواب زیر را خواهیم داشت

$$u(x,t)=\cos\lambda t(A\cos\lambda x+B\sin\lambda x)$$

حال با جاگذاری $A(\lambda)$ و $B(\lambda)$ به جای A و B و انتگرال‌گیری از $\lambda=0$ تا $\lambda=\infty$ نتیجه می‌گیریم که

$$u(x,t)=\int_0^\infty [A(\lambda)\cos\lambda x+B(\lambda)\sin\lambda x]\cos\lambda t\,d\lambda$$

با استفاده از شرط $u(x,0)=f(x)$ انتگرال فوریه

$$f(x)=\int_0^\infty [A(\lambda)\cos\lambda x+B(\lambda)\sin\lambda x]d\lambda$$

را خواهیم داشت که به راحتی با معلوم بودن $f(x)$ تابع $u(x,t)$ معین می‌شود.

در انتهای این فصل کاربرد تبدیل لاپلاس را هم برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی توضیح خواهیم داد، زیرا به خاطر میرایی e^{-st} این تبدیل در بسیاری از مواقع بهتر از تبدیل فوریه عمل می‌کند.

۹-۹ کاربرد تبدیل لاپلاس در حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

در معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل لاپلاس تابع f را که با $Ł\{f\}$ نشان دادیم به صورت

$$Ł\{f\}=\int_0^\infty fe^{-st}dt$$

تعریف نمودیم. اگر $Ł\{u(x,t)\}=U(x,s)$ فرض شود، می‌توان نشان داد که

$$Ł\{u_t\}=sU(x,s)-u(x,0)$$

$$Ł\{u_{tt}\}=s^2U(x,s)-su(x,0)-u_t(x,0)$$

$$Ł\{u_x\}=\frac{\partial U}{\partial x} \quad , \quad Ł\{u_{xx}\}=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}.$$

همچنین کانولوشن متناهی دو تابع f و g را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$f*g=\int_0^t f(s)f(t-s)ds$$

که طبق قضیه کانولوشن

$$Ł\{f*g\}=Ł\{f\}\ell\{g\}$$

مثال ۱۹: مسأله با مقدار اولیه زیر را با تبدیل لاپلاس حل کنید.

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad , \quad -\infty<x<\infty \quad , \quad t>0$$

$$u(x,0)=\sin x \quad , \quad -\infty<x<\infty .$$

حل: از طرفین تبدیل لاپلاس می‌گیریم. خواهیم داشت

$$sU-\sin x=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

با ثابت در نظر گرفتن s معادله دیفرانسیل معمولی

$$U''-sU=\sin x$$

را حل می‌کنیم. چون s مثبت است بنابراین جواب عمومی آن

$$U(x,s)=c_1e^{\sqrt{s}\,x}+c_2e^{-\sqrt{s}\,x}$$

می‌شود. فرض می‌کنیم جواب خصوصی آن به صورت

$$U_p=A\sin x+B\cos x$$

باشد که با جاگذاری آن در معادله و مقایسه طرفین تساوی داریم

$$A = \frac{-1}{s^2+1} \quad , \quad B = 0$$

پس

$$U(x,s) = c_1 e^{\sqrt{s}\,x} + c_2 e^{-\sqrt{s}\,x} - \frac{1}{s^2+1}\sin x \,.$$

حال از طرفین تبدیل معکوس می‌گیریم. خواهیم داشت

$$\mathcal{L}^{-1}\{U\} = u(x,t) = c_1\ \mathcal{L}^{-1}\left\{e^{\sqrt{s}x}\right\} + c_2 \mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-\sqrt{s}x}\right\} - \sin x\, \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3+1}\right\}$$

که با توجه به جدول تبدیلات لاپلاس، $u(x,t)$ چنین می‌شود

$$u(x,t) = \frac{-c_1 x}{2\sqrt{\pi t^3}} e^{-x^2/4t} + \frac{c_2 x}{2\sqrt{\pi t^3}} e^{-x^2/4t} - \sin x \sin t \,.$$