یادآوری : $y^{(n)}+P_1(t)y^{(n-1)}+P_2(t)y^{(n-2)}+\dots+P_{n-1}(t)y'+P_n(t)y=g(t)$

معادله همگن مرتبه n استاندارد

۱. الف) $y'''+ty''+t^2y'+t^3y=\ln t$

$P_1(t)=t$ و $P_2(t)=t^2$ و $P_3(t)=t^3$ و $g(t)=\ln t$

توابع P_1 و P_2 و P_3 همه جا پیوسته‌اند و تابع g بر بازه $(0,+\infty)$ پیوسته است بنابراین به طور همزمان P_1 و P_2 و P_3 و g بر بازه $(0,+\infty)$ پیوسته‌اند. در نتیجه بنا بر قضیه، معادله (الف) قطعاً بر بازه $(0,+\infty)$ دارای جواب است. یعنی اگر $t_0\in(0,+\infty)$ در این صورت حتماً یک جواب از معادله (الف) وجود دارد که از نقطه به طول t_0 عبور می‌کند.

۱. ب) $t(t-1)y^{(4)}+e^ty''+4t^2y=0$

در این صورت ابتدا معادله را استاندارد می‌کنیم یعنی باید ضریب بیشترین مرتبه مشتق گیری برابر با یک باشد بنابراین

$$y^{(4)}+\frac{e^t}{t(t-1)}y''+\frac{4t}{t-1}y=0$$

بنابراین $P_1(t)=0$ و $P_2(t)=\frac{e^t}{t(t-1)}$ و $P_3(t)=0$ و $P_4(t)=\frac{4t}{t-1}$ و $g(t)=0$

واضح است که P_1 و P_2 و P_3 و P_4 و g همزمان بر هر بازه‌ای که شامل $t_0=1$ و $t_0=0$ نیست پیوسته هستند. بنابراین معادله (ب) بر هر یک از بازه‌های $(-\infty,0)$ و $(0,1)$ و $(1,+\infty)$ قطعاً جواب دارد.

۱. ج) $(x-1)y^{(4)}+(x+1)y''+(\tan x)y=0$

استانداردسازی $\Rightarrow\ y^{(4)}+\frac{x+1}{x-1}y''+\frac{\tan x}{x-1}y=0$

$P_1(x)=0$ و $P_2(x)=\frac{x+1}{x-1}$ و $P_3(x)=0$ و $P_4(x)=\frac{\tan x}{x-1}$ و $g(x)=$

واضح است که P_1 تا P_4 و g همزمان بر بازه‌هایی پیوسته‌اند که شامل $x_0=1$ و $x_0=\frac{(2k+1)\pi}{2}$ نباشند. بنابراین معادله (ج) بر هر یک از بازه‌های $(-\frac{\pi}{2},1)$ و $(1,\frac{\pi}{2})$ و $(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$ و $(\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{2})$ و ..... و همچنین $(-\frac{3\pi}{2},-\frac{\pi}{2})$ و $(-\frac{5\pi}{2},-\frac{3\pi}{2})$ و ..... قطعاً جواب دارد.

$$t^3y^{(4)}+t^2y'''+ty''-2y=0$$ ۴.

چون معادله مرتبه ۴ است بنابراین هر مجموعه اساسی از جواب‌های آن شامل ۴ عضو y_1 و y_2 و y_3 و y_4 است که جواب‌های مستقل خطی معادله هستند.

$$W(y_1,y_2,y_3,y_4)=?$$

چون ضرایب معادله ثابت نیست بنابراین نمی‌توان y_1 تا y_4 مستقل خطی را مستقیم پیدا کرد و باید پس از استاندارد سازی معادله از فرمول آبل برای محاسبه رانسکین استفاده کنیم.

$$y^{(n)}+P_1(t)y^{(n-1)}+\cdots+P_{n-1}(t)y'+P_n(t)y=0$$

$$W(y_1,y_2,\dots,y_n)=ce^{-\int P_1(t)dt}$$

$$t^3y^{(4)}+t^2y'''+ty''-2y=0\Rightarrow y^{(4)}+\frac{1}{t}y'''+\frac{1}{t^2}y''-\frac{2}{t^3}y=0$$

$$P_1(t)=\frac{1}{t}$$

$$W(y_1,y_2,y_3,y_4)=ce^{-\int\frac{1}{t}dt}=ce^{-\ln t}=ce^{\ln t^{-1}}=ct^{-1}=\frac{c}{t}$$

بنابراین $W(y_1,y_2,y_3,y_4)=\frac{c}{t}$ که اگر $c\neq0$ آنگاه y_1 تا y_4 مستقل خطی‌اند

اگر $c=0$ « « « اساسی نیستند

$\square$

۵.
$$t^3y''' - 3t^2y'' + 6ty' - 6y = 0$$

الف) نشان دهید $\varphi(t)=t$ برای $t>0$ جواب معادله است،

$$y(t)=t \Rightarrow y'(t)=1 \text{ و } y''(t)=0 \text{ و } y'''(t)=0 \quad \forall t>0$$

اکنون در معادله جایگذاری می‌کنیم

سمت چپ $= t^3(0) - 3t^2(0) + 6t(1) - 6(t) = 0$

سمت راست $= 0$

بنابراین چون به ازای $t>0$، $y(t)=t$ داریم: سمت راست = سمت چپ ، پس $\varphi(t)=t$ جواب معادله است □

ب) جواب عمومی معادله داده شده را بیابید.

توجه: چون ضرایب معادله غیرثابت هستند باید با توجه به داشتن یکی از جواب‌های معادله سایر جواب‌ها را به کمک روش کاهش مرتبه پیدا کنیم.

توجه: چون ضرایب ثابت نیست نمی‌توان از معادله مشخصه استفاده کرد.

$$y(t)=v(t)\varphi(t) \Rightarrow y=tv \xrightarrow[\text{نسبت به } t]{\text{مشتق}} y'=v+tv'$$

$$y''=v'+v'+tv''=2v'+tv''$$

$$y'''=2v''+v''+tv'''=3v''+tv'''$$

اکنون در معادله جانشین می‌کنیم:

$$t^3(3v''+tv''') - 3t^2(2v'+tv'') + 6t(v+tv') - 6(tv) = 0$$

$$\Rightarrow \cancel{3t^3v''} + t^4v''' - \cancel{6t^2v'} - \cancel{3t^3v''} + \cancel{6tv} + \cancel{6t^2v'} - \cancel{6tv} = 0$$

$$\Rightarrow t^4v''' = 0 \xRightarrow{\forall t>0} v''' = 0 \xRightarrow[\text{انتگرال}]{} v'' = c_1 \xRightarrow{\text{انتگرال}} v' = c_1t + c_2 \xRightarrow{\text{انتگرال}} v = c_1\frac{t^2}{2} + c_2t + c_3$$

$$\Rightarrow v(t) = \frac{1}{2}c_1t^2 + c_2t + c_3 \xRightarrow{y=tv} \boxed{y = \frac{1}{2}c_1t^3 + c_2t^2 + c_3t}$$

جواب عمومی

پایان □

توجه: $\{1, t^2, \frac{1}{2}t^3\}$ یک مجموعه اساسی از جواب‌های معادله است.

$y''' - 4y' = t + 3\cos t + e^{-2t}$.۶

$y(t) = ?$

برای محاسبه جواب خاص معادله ناهمگن ، ابتدا باید جواب عمومی معادله همگن $y''' - 4y' = 0$ را پیدا کنیم که چون ضرایب آن ثابت است از معادله مشخصه $r^3 - 4r = 0$ استفاده می کنیم که دارای ریشه های $r = +2, -2, 0$ است .

$y_c = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t} + c_3 e^{0t}$ جواب کامل معادله ناهمگن

جمله ناهمگن کننده $g(t) = t + 3\cos t + e^{-2t}$ از سه تابع خوب و مناسب روش ضرایب نامعین به صورت

$g_1(t) = t \Rightarrow$ چندجمله ای درجه یک

$g_2(t) = 3\cos t \Rightarrow \alpha = 0 , \beta = 1$ و چندجمله ای درجه صفر

$g_3(t) = e^{-2t} \Rightarrow \alpha = -2$ و چندجمله ای درجه صفر

تشکیل شده است . که هر کدام جواب خاص Y_1 و Y_2 و Y_3 را دارد .

$$Y_1(t) = t^s (At + B) = t^1 (\underbrace{At + B}_{\text{چندجمله ای درجه اول}}) = At^2 + Bt$$

که s تعداد دفعاتی که صفر ریشه معادله مشخصه است

$$Y_2(t) = t^s [(\overset{\text{چندجمله ای درجه صفر}}{C}) \cos t + (D) \sin t] = t^0 (C\cos t + D\sin t) = C\cos t + D\sin t$$

که s تعداد دفعاتی است که $\alpha + i\beta = i$ ریشه معادله مشخصه است

$$Y_3(t) = t \overset{\text{چندجمله ای درجه صفر}}{E} e^{-2t} = t^1 E e^{-2t} = t E e^{-2t}$$

که s تعداد دفعاتی که است که $\alpha = -2$ ریشه معادله مشخصه است

پس شکل کلی جواب خاص معادله ناهمگن به صورت زیر است

$$Y(t) = Y_1(t) + Y_2(t) + Y_3(t) = At^2 + Bt + C\cos t + D\sin t + tEe^{-2t}$$

و جواب عمومی معادله ناهمگن به صورت $y_g(t) = y_c(t) + Y(t)$ است .

$\rightsquigarrow$ general(عمومی)

$$y''' + y' = \sec t \quad \text{که} \quad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$$ .9

چون ضرایب ثابت و $g(t) = \sec t$ تابع مناسب روش ضرایب نامعین نیست بنابراین باید از روش تغییر پارامتر لاگرانژ برای یافتن جواب خاص معادله ناهمگن استفاده کنیم.

برای این کار ابتدا جواب مکمل معادله ناهمگن (جواب عمومی معادله همگن نظیر) را بیابیم.

$$y''' + y' = 0$$

$$r^3 + r = 0 \Rightarrow r(r^2+1) = 0 \Rightarrow r = 0, \pm i$$

بنابراین $\lambda = 0$، $\mu = 1$

$$y_c(t) = c_1 e^{0t} + e^{0t}(c_2 \cos t + c_3 \sin t)$$

$$= c_1 + c_2 \cos t + c_3 \sin t = c_1(1) + c_2(\cos t) + c_3(\sin t)$$

در نتیجه

$y_1(t) = 1$

$y_2(t) = \cos t$

$y_3(t) = \sin t$

جوابهای مستقل خطی معادله همگن هستند یعنی

$\{y_1, y_2, y_3\}$ تشکیل یک مجموعه اساسی از جوابهای معادله همگن می دهند و جواب خاص معادله همگن بر روش تغییر پارامتر لاگرانژ به صورت زیر است:

$$Y(t) = y_1(t)\int_{t_0}^{t} \frac{W_1(s)}{W(s)}ds + y_2(t)\int_{t_0}^{t} \frac{W_2(s)}{W(s)}ds + y_3(t)\int_{t_0}^{t} \frac{W_3(s)}{W(s)}ds$$

t_0 دلخواه و مناسب

که در آن

$$W(t) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix}, \quad W_1(t) = \begin{vmatrix} 0 & y_2 & y_3 \\ 0 & y_2' & y_3' \\ \sec t & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix}, \quad W_2(t) = \begin{vmatrix} y_1 & 0 & y_3 \\ y_1' & 0 & y_3' \\ y_1'' & \sec t & y_3'' \end{vmatrix}$$

$$W_3(t) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & 0 \\ y_1' & y_2' & 0 \\ y_1'' & y_2'' & \sec t \end{vmatrix}$$

$$W_1(t) = \begin{vmatrix} 0 & \cos t & \sin t \\ 0 & -\sin t & \cos t \\ \sec t & -\cos t & -\sin t \end{vmatrix} = +\cos^2 t \sec t + \sin^2 t \cdot \sec t = +\sec t$$

$$\Rightarrow W_2(t) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \sin t \\ 0 & 0 & \cos t \\ 0 & \sec t & -\sin t \end{vmatrix} = -1 \quad , \quad W_3(t) = \begin{vmatrix} 1 & \cos t & 0 \\ 0 & -\sin t & 0 \\ 0 & -\cos t & \sec t \end{vmatrix} = -\sin t \cdot \sec t$$

$$W(t)=\begin{vmatrix} 1 & \cos t & \sin t \\ 0 & -\sin t & \cos t \\ 0 & -\cos t & -\sin t \end{vmatrix} = 1 \quad , \quad \begin{aligned} &W_1(t)=+\sec t \\ &W_2(t)=-1 \\ &W_3(t)=-\sin t\cdot\sec t \end{aligned}$$

برای سادگی فرض می‌کنیم $t_0=0$.

$$Y(t)=(1)\int_{t_0 \leftarrow 0}^{t}\frac{+\sec(s)}{1}ds+(\cos t)\int_{t_0 \leftarrow 0}^{t}\frac{-1}{1}ds+(\sin t)\int_{t_0 \leftarrow 0}^{t}\frac{-\sin s\cdot\sec s}{1}ds$$

$$Y(t)=\int_0^t \sec s\,ds+(\cos t)\int_0^t -ds-(\sin t)\int_0^t \sin s\cdot\sec s\,ds$$

$$\Rightarrow Y(t)=\ln|\sec t+\tan t|-t\cos t+(\sin t)\ln|\cos t|$$

$$|\sec t+\tan t|=\sec t+\tan t,\ |\cos t|=\cos t \Leftarrow -\tfrac{\pi}{2}<t<\tfrac{\pi}{2}$$ در

$$\Rightarrow \boxed{Y(t)=\ln(\sec t+\tan t)-t\cos t+(\sin t)\ln(\cos t)}$$

جواب خاص معادله ناهمگن

$$\Rightarrow y_g=y_c+Y \Rightarrow y_g=c_1+c_2\cos t+c_3\sin t+\ln(\sec t+\tan t)-t\cos t+\sin t\cdot\ln(\cos t)$$

y_g: جواب عمومی معادله ناهمگن — y general

$\square$

.11 $x^2y''' - 3x^2y'' + 6xy' - 6y = g(x)$ ، $x>0$

$y_1(x) = x$ ، $y_2(x) = x^2$ ، $y_3(x) = x^3$ جواب‌های مستقل خطی معادله همگن متناظر

الف) $Y(t) = ?$

چون $g(x)$ نامشخص است باید از روش تغییر پارامترها استفاده کرد.

$$W(x) = \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix} = 2x^3$$

$$W_1(x) = \begin{vmatrix} 0 & x^2 & x^3 \\ 0 & 2x & 3x^2 \\ g(x) & 2 & 6x \end{vmatrix} = 3x^4 g(x) - 2x^4 g(x) = x^4 g(x)$$

$$W_2(x) = \begin{vmatrix} x & 0 & x^3 \\ 1 & 0 & 3x^2 \\ 0 & g(x) & 6x \end{vmatrix} = 3x^3 g(x) + x^3 g(x) = x^4 g(x)$$

$$W_3(x) = \begin{vmatrix} x & x^2 & 0 \\ 1 & 2x & 0 \\ 0 & 2 & g(x) \end{vmatrix} = 2x^2 g(x) - x^2 g(x) = x^2 g(x)$$

$$Y(x) = y_1(x)\int_{x_0}^{x} \frac{W_1(s)}{W(s)}ds + y_2(x)\int_{x_0}^{x} \frac{W_2(s)}{W(s)}ds + y_3(x)\int_{x_0}^{x} \frac{W_3(s)}{W(s)}ds$$

x_0 دلخواه و مناسب

$$\Rightarrow Y(x) = x\int_{x_0}^{x} \frac{s^4 g(s)}{2s^3}ds + x^2\int_{x_0}^{x} \frac{s^4 g(s)}{2s^3}ds + x^3\int_{x_0}^{x} \frac{s^2 g(s)}{2s^3}ds$$

$$\boxed{\Rightarrow Y(x) = x\int_{x_0}^{x} \frac{1}{2}s g(x) ds + x^2\int_{x_0}^{x} \frac{1}{2}s g(x) ds + x^3\int_{x_0}^{x} \frac{1}{2s} g(s) ds}$$

x_0 دلخواه و مناسب

ب) جواب کلی (general عمومی) $y_g = y_c + Y$ پس $y_g = c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + Y(x)$.