

# مثلثات

اثبات رابطه عددی معکوس تانژانت

دکتر یوسف کوه‌مسکن

ریاضی ۱۱م



AvaEducation16.blog.ir



AvaEducation16@gmail.com



@AvaEducation16



@AvaEducation16

## توضیحات

- این فایل علاوه بر سایت [AvaEducation16.blog.ir](http://AvaEducation16.blog.ir) در کانال تلگرامی [@AvaEducation16](https://t.me/AvaEducation16) نیز موجود و قابل دانلود می‌باشد.
- این فایل جهت گسترش آموزش رایگان ارائه شده است، اما به جهت رعایت حقوق معنوی درخواست می‌شود نام منبع ذکر گردد.
- در این دسته از فایل‌ها که با روجلدی صورتی [ ] آغاز می‌شوند، مطالب مربوط به دوره **متوسطه** و در آن دسته که با روجلدی آبی [ ] آغاز می‌شوند، مطالب مربوط به دوره **دانشگاه** ارائه خواهد شد.
- نکات موجود در متن با علامت 💡 نمایش داده شده‌اند.
- در بخش پاسخنامه سوالات از علائم زیر استفاده شده است:
  - بسیار ساده جهت آشنایی با نمونه‌های اولیه سوالات 🧐
  - ساده جهت تثبیت مطالب 🧐
  - متوسط جهت تمرین بیشتر مطالب 🧐
  - سخت جهت کسب مهارت کافی و آشنایی با روش‌های حل مسائل خاص 🧐

## ۱ مسئله

رابطه زیر را ثابت کنید.

$$4 \tan^{-1} \frac{1}{5} - \tan^{-1} \frac{1}{70} + \tan^{-1} \frac{1}{99} = \frac{\pi}{4}$$

## ۲ روش حل مسئله

پاسخ: برای اثبات این مسئله به دو نکته نیاز است. 🤔

$$\tan(\alpha + \beta + \gamma) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta + \tan \gamma - \tan \alpha \tan \beta \tan \gamma}{1 - \tan \alpha \tan \beta - \tan \alpha \tan \gamma - \tan \beta \tan \gamma} \quad \text{💡}$$

اثبات رابطه فوق به سادگی صورت می گیرد:

$$\begin{aligned} \tan(\alpha + \beta + \gamma) &= \tan((\alpha + \beta) + \gamma) \\ &= \frac{\tan(\alpha + \beta) + \tan \gamma}{1 - \tan(\alpha + \beta) \tan \gamma} \\ &= \frac{\frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} + \tan \gamma}{1 - \frac{(\tan \alpha + \tan \beta) \tan \gamma}{1 - \tan \alpha \tan \beta}} \\ &= \frac{\frac{\tan \alpha + \tan \beta + \tan \gamma - \tan \alpha \tan \beta \tan \gamma}{1 - \tan \alpha \tan \beta}}{\frac{1 - \tan \alpha \tan \beta - (\tan \alpha + \tan \beta) \tan \gamma}{1 - \tan \alpha \tan \beta}} \\ &= \frac{\tan \alpha + \tan \beta + \tan \gamma - \tan \alpha \tan \beta \tan \gamma}{1 - \tan \alpha \tan \beta - \tan \alpha \tan \gamma - \tan \beta \tan \gamma} \end{aligned}$$

نکته دوم به صورت زیر ارائه می گردد.

$$\tan(4\alpha) = \frac{4 \tan \alpha (1 - \tan^2 \alpha)}{(1 - \tan^2 \alpha)^2 - 4 \tan^2 \alpha} \quad \text{💡}$$

اثبات رابطه فوق ساده تر از قبلی است:

$$\begin{aligned} \tan(4\alpha) &= \frac{2 \tan(2\alpha)}{1 - \tan^2(2\alpha)} \\ &= \frac{2 \left( \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \right)}{1 - \left( \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \right)^2} \\ &= \frac{\frac{4 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}}{1 - \frac{4 \tan^2 \alpha}{(1 - \tan^2 \alpha)^2}} \\ &= \frac{4 \tan \alpha (1 - \tan^2 \alpha)}{(1 - \tan^2 \alpha)^2 - 4 \tan^2 \alpha} \end{aligned}$$

اکنون نیاز است از طرف اول رابطه داده شده تانژانت گرفته شود:

$$\tan \left( \underbrace{4 \tan^{-1} \frac{1}{5}}_{\alpha} - \underbrace{\tan^{-1} \frac{1}{70}}_{\beta} + \underbrace{\tan^{-1} \frac{1}{99}}_{\gamma} \right) = \frac{\tan(4\alpha) - \tan \beta + \tan \gamma + \tan(4\alpha) \tan \beta \tan \gamma}{1 + \tan(4\alpha) \tan \beta - \tan(4\alpha) \tan \gamma + \tan \beta \tan \gamma} \quad (1)$$

باید اثبات شود عبارت فوق برابر با یک می‌باشد، چون طرف دوم آن زاویه  $\frac{\pi}{4}$  قرار دارد و تانژانت آن واحد است.

هر کدام از جملات باید به صورت مجزا محاسبه و در رابطه فوق جایگذاری شوند. جمله اول به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{1}{5}, \quad \Rightarrow \quad \tan \alpha = \frac{1}{5}$$

$$\begin{aligned} \tan(4\alpha) &= \frac{4 \tan \alpha (1 - \tan^2 \alpha)}{(1 - \tan^2 \alpha)^2 - 4 \tan^2 \alpha} \\ &= \frac{\frac{4}{5} (1 - \frac{1}{25})}{(1 - \frac{1}{25})^2 - \frac{4}{25}} \\ &= \frac{\frac{4}{5} (\frac{24}{25})}{(\frac{24}{25})^2 - \frac{4}{25}} \\ &= \frac{\frac{4 \times 24}{125}}{(\frac{24}{25} - \frac{2}{5})(\frac{24}{25} + \frac{2}{5})} \\ &= \frac{\frac{4 \times 24}{125}}{\frac{14}{25} \times \frac{34}{25}} \\ &= \frac{4 \times 24 \times 5}{14 \times 34} \\ &= \frac{120}{119} \end{aligned}$$

جمله مربوط به زاویه  $\beta$  و  $\gamma$ :

$$\begin{aligned} \beta &= \tan^{-1} \frac{1}{70}, \quad \Rightarrow \quad \tan \beta = \frac{1}{70} \\ \gamma &= \tan^{-1} \frac{1}{99}, \quad \Rightarrow \quad \tan \gamma = \frac{1}{99} \end{aligned}$$

با داشتن این مقادیر، اکنون باید در رابطه (۱) جایگذاری شوند:

$$\begin{aligned}
 \frac{\frac{120}{119} - \frac{1}{70} + \frac{1}{99} + \left(\frac{120}{119}\right)\left(\frac{1}{70}\right)\left(\frac{1}{99}\right)}{1 + \left(\frac{120}{119}\right)\left(\frac{1}{70}\right) - \left(\frac{120}{119}\right)\left(\frac{1}{99}\right) + \left(\frac{1}{70}\right)\left(\frac{1}{99}\right)} &= \frac{1 + \frac{(70)(99) - (119)(99) + (119)(70) + 120}{(119)(70)(99)}}{1 + \frac{(120)(99) - (120)(70) + 119}{(119)(70)(99)}} \\
 &= \frac{1 + \frac{3599}{(119)(70)(99)}}{1 + \frac{3599}{(119)(70)(99)}} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

در نتیجه رابطه خواسته شده اثبات گردید.

کیفیت زندگی شما را دو چیز تعیین  
می‌کند: کتاب‌هایی که می‌خوانید و  
انسان‌هایی که ملاقات می‌کنید.  
مارشال مک لوهان



 [AvaEducation16.blog.ir](https://AvaEducation16.blog.ir)

 [@AvaEducation16](https://www.instagram.com/AvaEducation16)

   [@AvaEducation16](https://www.youtube.com/AvaEducation16)

 [AvaEducation16@gmail.com](mailto:AvaEducation16@gmail.com)