بسم الله الرحمن الرحیم

# ریاضیات مهندسی

ابراهیم شاه ابراهیمی

نوروز ۹۹

**پیشنیاز:** حاصل انتگرال‌های زیر را بیابید.

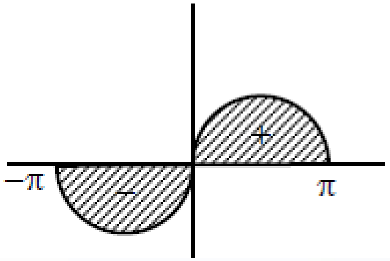
۱) $\int_{0}^{\pi}\sin(nx)dx$

$$=-\frac{1}{n}\cos(nx)\Big|_{0}^{\pi}=-\frac{1}{n}\Big(\overset{(-1)^n}{\cancel{\cos(n\pi)}}-\overset{1}{\cancel{\cos(0)}}\Big)=\begin{cases}0 & n \ \text{زوج}\\ \dfrac{2}{n} & n \ \text{فرد}\end{cases}$$

نکته: $\cos(n\pi)=(-1)^n$

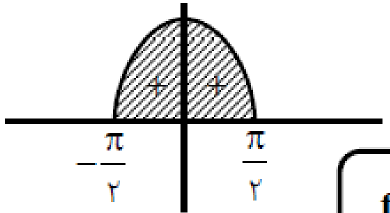
۲) $\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)dx$

= صفر




نکته: $f(-x)=-f(x)\rightarrow\int_{-a}^{a}f(x)dx=0$

۳) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos(nx)dx$




نکته: $f(-x)=f(x)\rightarrow\int_{-a}^{a}f(x)dx=2\int_{0}^{a}f(x)dx$

$$=2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos(nx)dx=2\Big(\frac{1}{n}\sin(nx)\Big)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{n}\sin\Big(\frac{n\pi}{2}\Big)$$


مقدمه

فصل۱)
آنالیز فوریه

فصل۲)
معادلات PDE

فصل۳)
آنالیز مختلط

**پیشنیاز:** حاصل انتگرال‌های زیر را بیابید.

$$۴)\ \int_{-\pi}^{\pi} x\sin(nx)dx$$

$$= ۲\int_{۰}^{\pi} x\sin(nx)dx$$

$$= ۲\left(-\frac{x}{\pi}\cos(nx)) + \frac{۱}{n^۲}\sin(nx)\right)\Big|_{۰}^{\pi}$$

$$= -\frac{۲\pi}{n}\overset{(-۱)^n}{\cancel{\cos(n\pi)}} = \frac{۲\pi}{n}(-۱)^{n+۱}$$

| (مشتق) | | (انتگرال) |
|---|---|---|
| $x$ | $+$ | $\sin(nx)$ |
| $۱$ | $-$ | $-\frac{۱}{n}\cos(nx)$ |
| $۰$ | $+\int$ | $-\frac{۱}{n^۲}\sin(nx)$ |

$$۵)\ \int_{-\pi}^{\pi} x^۲\cos(nx)dx$$

$$= ۲\int_{۰}^{\pi} x^۲\cos(nx)dx$$

$$= ۲\left(\frac{x^۲}{n}\sin(nx) + \frac{۲x}{n^۲}\cos(nx) - \frac{۲}{n^۳}\sin(nx)\right)\Big|_{۰}^{\pi}$$

$$= \frac{۴\pi}{n^۲}\overset{(-۱)^n}{\cancel{\cos(n\pi)}} = \frac{۴\pi}{n^۲}(-۱)^n$$

| (مشتق) | | (انتگرال) |
|---|---|---|
| $x^۲$ | $+$ | $\cos(nx)$ |
| $۲x$ | $-$ | $\frac{۱}{n}\sin(nx)$ |
| $۲$ | $+$ | $-\frac{۱}{n^۲}\cos(nx)$ |
| $۰$ | $-\int$ | $-\frac{۱}{n^۳}\sin(nx)$ |

مقدمه
فصل۱) آنالیز فوریه
فصل۲) معادلات PDE
فصل۳) آنالیز مختلط

**پیشنیاز:** حاصل انتگرال‌های زیر را بیابید.

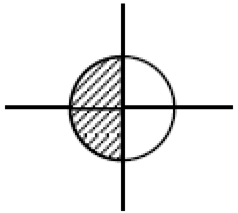
$$8)\ \int_0^{\pi} \sin(nx)\ \ \cos(x)dx$$

نکته: $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta))$

$$=\frac{1}{2}\int\ (\sin((n+1))+\sin(n-1)x))dx$$

$$=\frac{1}{2}(-\frac{\cos((n+1)x)}{n+1}-\frac{\cos(n-1)x}{n-1})\Big|_0^{\pi}=\frac{n(1-\cos n\pi)}{n^2-1}\quad n\neq 1$$

نکته: $\cos(\pi\pm n\pi)=-\cos(n\pi)$



نکته: برای $n=1$ حاصل انتگرال را جداگانه محاسبه می‌کنیم :

$$\xrightarrow{n=1}\int_0^{\pi}\sin(x)\cos(x)dx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin(2x)dx=-\frac{1}{4}\cos(2x)\Big|_0^{\pi}=0$$

۱) سری فوریه:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)+b_n\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

$$\begin{cases} a_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,.\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx \xrightarrow{n=0} a_0=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)dx \\ b_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,.\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx \end{cases}$$

$$\boxed{\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f^2(x)dx=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)}$$ (اتحاد پارسوال)

۲) انتگرال فوریه:

۳) تبدیل فوریه:

مقدمه

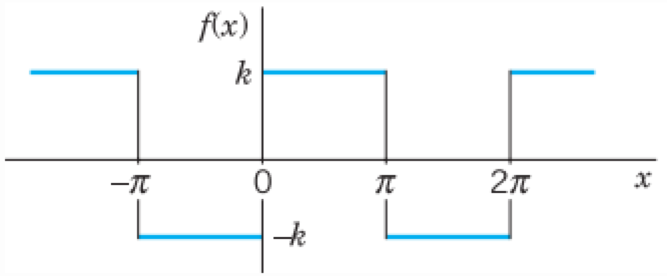
فصل۱)
آنالیز فوریه

فصل۲)
معادلات PDE

فصل۳)
آنالیز مختلط

$$f(x) = \begin{cases} -k & \text{if} \quad -\pi < x < 0 \\ k & \text{if} \quad 0 < x < \pi \end{cases} \quad \text{and} \quad f(x + 2\pi) = f(x).$$

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + - \cdots$$




$$\boxed{f(x) = \frac{a_۰}{۲} + \sum_{n=۱}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)}$$

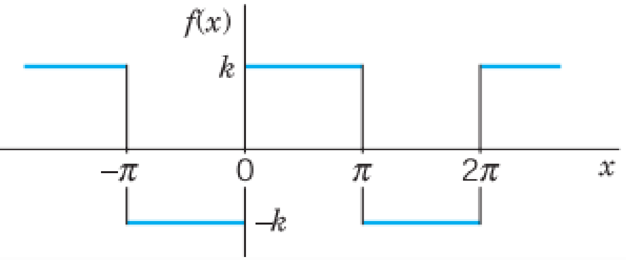
$$\begin{cases} a_n = \dfrac{۱}{L}\displaystyle\int_{-L}^{L} f(x)\,.\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-k)\cos nx\,dx + \int_{0}^{\pi} k\cos nx\,dx\right] = \frac{1}{\pi}\left[-k\frac{\sin nx}{n}\Big|_{-\pi}^{0} + k\frac{\sin nx}{n}\Big|_{0}^{\pi}\right] = 0 \\ a_۰ = \dfrac{۱}{L}\displaystyle\int_{-L}^{L} f(x)dx = 0 \\ b_n = \dfrac{۱}{L}\displaystyle\int_{-L}^{L} f(x)\,.\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-k)\sin nx\,dx + \int_{0}^{\pi} k\sin nx\,dx\right] = \frac{1}{\pi}\left[k\frac{\cos nx}{n}\Big|_{-\pi}^{0} - k\frac{\cos nx}{n}\Big|_{0}^{\pi}\right] \end{cases}$$

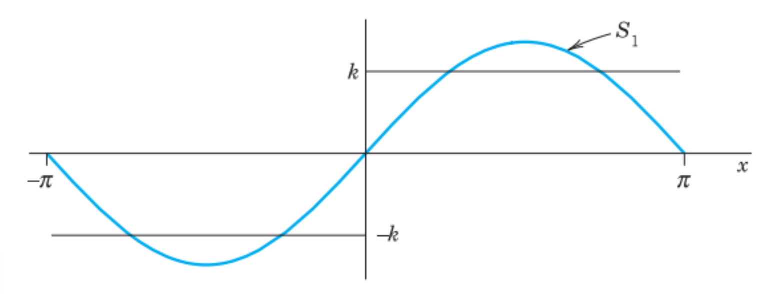
$$= \frac{k}{n\pi}[\cos 0 - \cos(-n\pi) - \cos n\pi + \cos 0] = \frac{2k}{n\pi}(1 - \cos n\pi)$$

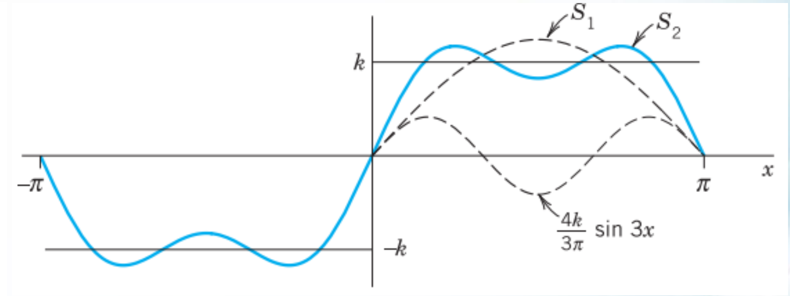
$$\boxed{\begin{array}{c} (-۱)^n \\ \cancel{\cos(n\pi)} \end{array}}$$

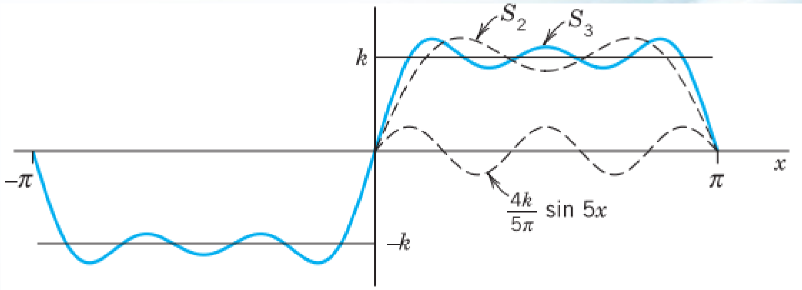
$$1 - \cos n\pi = \begin{cases} 2 & \text{for odd } n, \\ 0 & \text{for even } n. \end{cases}$$

$$b_1 = \frac{4k}{\pi}, \quad b_2 = 0, \quad b_3 = \frac{4k}{3\pi}, \quad b_4 = 0, \quad b_5 = \frac{4k}{5\pi}, \cdots.$$




$$\boxed{f(x)=\frac{a_\circ}{۲}+\sum_{n=۱}^{\infty} a_n\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)+b_n\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)}$$

$$a_n = 0$$

$$b_1=\frac{4k}{\pi},\qquad b_2=0,\qquad b_3=\frac{4k}{3\pi},\qquad b_4=0,\qquad b_5=\frac{4k}{5\pi},\cdots.$$

$$f(x)=\frac{4k}{\pi}\left(\sin x+\tfrac{1}{3}\sin 3x+\tfrac{1}{5}\sin 5x+\cdots\right).$$

$$x=\pi/2$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{4k}{\pi}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-+\cdots\right)$$

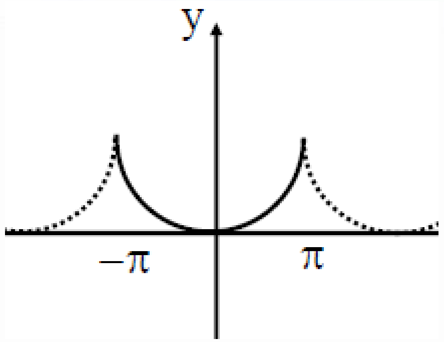
$$k=\frac{4k}{\pi}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-+\cdots\right)$$

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+-\cdots=\frac{\pi}{4}$$

**مثال ۴:** الف) سری فوریه $f(x)=\frac{x^2}{4}$ ، $-\pi<x<\pi$ و $f(x+2\pi)=f(x)$ را بیابید.

ب) به کمک قسمت الف حاصل عبارت زیر را بیابید.

$$A=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\dots\qquad B=1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\dots$$




با توجه به نمودار تابع مشخص است که تابع داده شده «زوج» است $\leftarrow \boxed{b_n=0}$

$$a_0=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)dx \xrightarrow{L=\pi} a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x^2}{4}dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{x^2}{4}dx=\boxed{\frac{\pi^2}{6}}$$

$$a_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\cos(\frac{n\pi}{L}x)dx \xrightarrow{L=\pi} a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x^2}{4}\cos(nx)dx=\frac{2}{4\pi}\int_{0}^{\pi}$$

| | |
|---|---|
| $x^2$ | $\cos(nx)dx$ |
| $2x$ (+) | $\frac{1}{n}\sin(nx)$ |
| $2$ (−) | $-\frac{1}{n^2}\cos(nx)$ |
| $0$ (+) | $-\frac{1}{n^3}\sin(nx)$ |
| (−) $\int$ | |

$$=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{x^2}{n}\sin(nx)+\frac{2x}{n^2}\cos(nx)-\frac{2}{n^3}\sin(nx)\right)\Bigg|_0^{\pi}$$

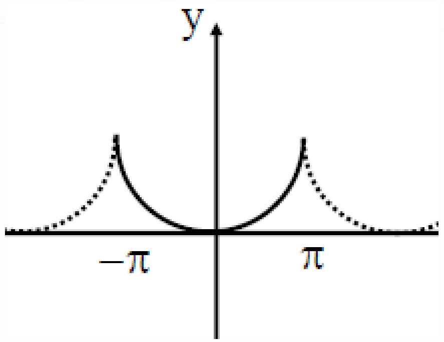
$$=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{2\pi}{n^2}\underbrace{\cancel{\cos(n\pi)}}_{}\right)^{(-1)^n}=\boxed{\frac{(-1)^n}{n^2}}$$

$$\boxed{f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(\frac{n\pi}{L}x)+b_n\sin(\frac{n\pi}{L}x)}\rightarrow\boxed{f(x)=\frac{\pi^2}{12}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx)}$$

**مثال ۴:** الف) سری فوریه $f(x)=\dfrac{x^2}{4}$ ، $-\pi<x<\pi$ و $f(x+2\pi)=f(x)$ را بیابید.

ب) به کمک قسمت الف حاصل عبارت زیر را بیابید.

$$A=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\ldots\ldots \qquad B=1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\ldots\ldots$$




$$\boxed{f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)+b_n\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)} \rightarrow \boxed{f(x)=\frac{\pi^2}{12}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx)}$$

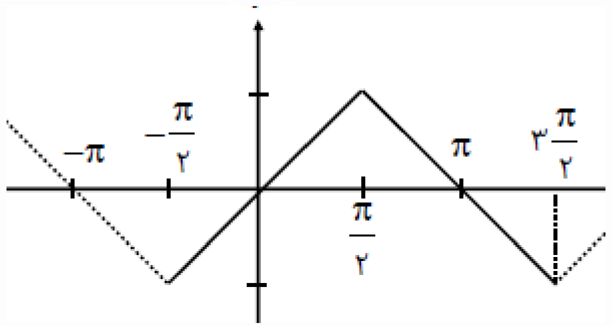
ب: $\xrightarrow[\text{با توجه به خواسته سوال}]{x=\pi} f(\pi)=\dfrac{\pi^2}{12}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\overset{(-1)^n}{\cancel{\cos(n\pi)}} \rightarrow \dfrac{\pi^2}{4}=\dfrac{\pi^2}{12}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \rightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{4}-\frac{\pi^2}{12}=\frac{\pi^2}{6} \rightarrow \boxed{A=\dfrac{\pi^2}{6}}$

$\xrightarrow[\text{با توجه به خواسته سوال}]{x=0} f(0)=\dfrac{\pi^2}{12}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} \rightarrow 0=\dfrac{\pi^2}{12}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} \rightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=\frac{-\pi^2}{12} \rightarrow -B=\dfrac{-\pi^2}{12} \rightarrow \boxed{B=\dfrac{\pi^2}{12}}$

**مثال ۶:** الف) سری فوریه تابع $f(x)=\begin{cases} x & -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2} \\ \pi-x & \frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2}\end{cases}$ و $f(x+2\pi)=f(x)$ را بیابید.

ب) به کمک قسمت الف و اتحاد پارسوال حاصل عبارت زیر را بیابید.

$$A=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\dots\dots\dots \qquad B=1+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{7^4}+\dots\dots\dots$$




با توجه به نمودار تابع مشخص است که تابع داده شده «فرد» است $\leftarrow \boxed{a_0=a_n=0}$

$$b_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin(\frac{n\pi}{L}x)dx \xrightarrow{L=\pi} =\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx=\frac{1}{\pi}(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\sin(nx)dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}(\pi-x)\sin(nx)\,dx)$$

$$=\frac{1}{\pi}((\frac{-2x}{n}\cos(nx)+\frac{2}{n^2}\sin(nx)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+(\frac{x-\pi}{n}\cos(nx)-\frac{1}{n^2}\sin(nx)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}})$$

| | |
|---|---|
| $x$ | $\sin(nx)dx$ |
| $1$ | $-\frac{1}{n}\cos(nx)$ |
| $0$ | $-\frac{1}{n^2}\sin(nx)$ |

| | |
|---|---|
| $(\pi-x)$ | $\sin(nx)\ dx$ |
| $-1$ | $-\frac{1}{n}\cos(nx)$ |
| $0$ | $-\frac{1}{n^2}\sin(nx)$ |

$$=\frac{2}{\pi}(-\frac{\pi}{2n}\cos(\frac{n\pi}{2})+\frac{1}{n^2}\sin(\frac{n\pi}{2}))+\frac{1}{2n}(\cos(\frac{3n\pi}{2})+\cos(\frac{n\pi}{2}))-\frac{1}{\pi n^2}\sin(\frac{3n\pi}{2})-\sin(\frac{n\pi}{2}))$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi}{2n}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)+\frac{1}{n^2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)\quad+\frac{1}{2n}\left(\cos\left(\frac{3n\pi}{2}\right)+\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)\quad-\frac{1}{\pi n^2}\left(\sin\left(\frac{3n\pi}{2}\right)-\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)$$

$$\rightarrow \boxed{b_n=\begin{cases}0 & n \text{ زوج} \\ \dfrac{4}{\pi n^2}\sin\left(\dfrac{n\pi}{2}\right) & n \text{ فرد}\end{cases}}$$

$$\boxed{f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)+b_n\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)} \xrightarrow{\text{سری فوریه}} \boxed{f(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\sin(nx)}$$

$$=\frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin(x)}{1^2}-\frac{\sin(3x)}{3^2}+\frac{\sin(5x)}{5^2}\ldots\ldots\right)$$

ب) $\xrightarrow[\text{با توجه به خواسته‌ی سوال}]{x=\frac{\pi}{2}}$ $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\ldots\ldots\right)$ $\rightarrow \frac{\pi}{2}=\frac{4}{\pi}A$ $\rightarrow \boxed{A=\frac{\pi^2}{8}}$

اتحاد پارسوال $\boxed{\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f^2_{(x)}dx=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)}$

$$\rightarrow \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}f^2(x)dx=0+\sum_{n=1}^{\infty}0+\frac{16}{\pi^2n^4}\cancel{\sin^2\left(\frac{n\pi}{2}\right)}$$

همواره ۱

$$\rightarrow \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}x^2dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}(\pi-x)^2dx\right)=\frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}\rightarrow \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi^3}{12}+\frac{\pi^3}{12}\right)=\frac{\pi^2}{6}=\frac{16}{\pi^2}B\rightarrow \boxed{B=\frac{\pi^4}{96}}$$

# پایان جلسه اول

# ۱۴ فروردین ۹۹

# با تشکر از توجه شما