



سردشاخ شدن با کنکور

- خلاصه مطالب دروس
- جزوات بهترین اساتید
- آرایه نکات کنکوری
- مشاوره کنکور
- اخبار کنکوری ها

همه و همه در سردشاخ شدن با کنکور

www.konkoori.blog.ir



فصل یک

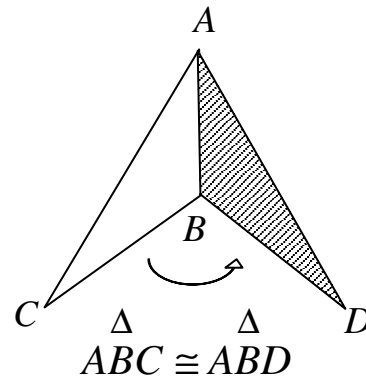
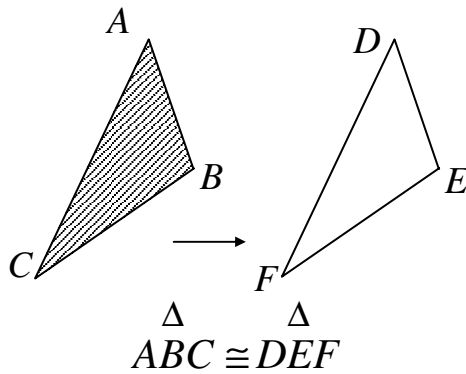
از خط تا چند ضلعی

تهیه کننده : جابر عامری دبیر ریاضی
شهرستان باوی

www.mathtower.org

☑ دو شکل همنهشت

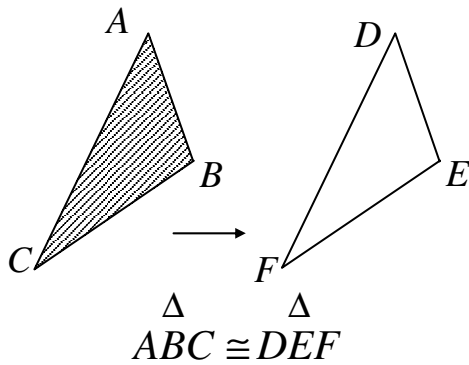
تعریف : دو شکل را همنهشت گویند ، هرگاه بدون تغییر آنها بر یکدیگر قابل انطباق باشند.



☑ انواع همنهشتی

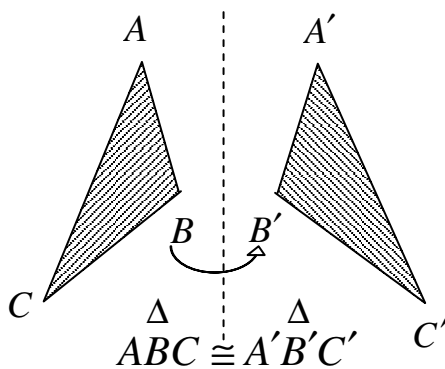
۱- اگر دو شکل همنهشت فقط با لغزاندن یکی بر هم منطبق شوند، در این

صورت همنهشتی را مستقیم و این دو شکل را هم جهت گویند.



۲- اگر دو شکل همنهشت علاوه بر لغزاندن با برگرداندن یکی بر هم منطبق

شوند در این صورت همنهشتی را معکوس و این دو شکل را غیرهم جهت گویند.



☑ اصل تغییر ناپذیری

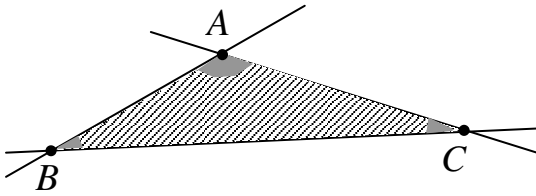
هر شکل هندسی ضمن جا به جا شدن تغییر نمی کند.

نتیجه : اگر دو شکل همنهشت باشند، آنگاه

الف) تمام اضلاع و زاویه های متناظر آنها مساویند.

ب) مساحت و محیط هر دو نیز مساوی است.

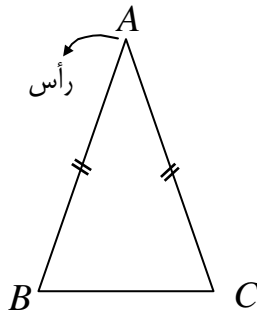
☑ مثلث



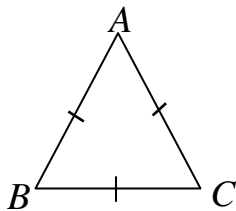
تعریف : هر گاه سه خط دو به دو همدیگر را در سه نقطه متمایز قطع کنند، شکل حاصل را مثلث می‌نامند.^۱

سه ضلع و سه زاویه ی هر مثلث را اجزای اصلی آن مثلث می‌نامند.

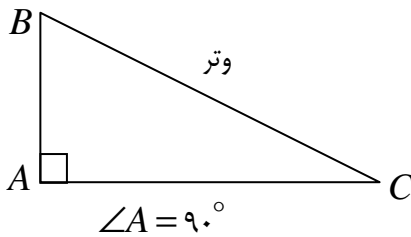
☑ انواع مهم مثلث



۱- مثلث متساوی الساقین : مثلثی که دو ضلع مساوی داشته باشد. دو ضلع مساوی را ساق و ضلع سوم را قاعده می‌نامند. رأس مقابل به قاعده را رأس مثلث می‌نامند.



۲- مثلث متساوی الاضلاع : مثلثی که سه ضلع آن برابرند.



۳- مثلث قائم الزاویه : مثلثی که یک زاویه قائمه داشته باشد. ضلع مقابل به زاویه قائمه را وتر می‌نامند.

نتیجه : هر مثلث متساوی الاضلاع، متساوی الساقین است.

1. تعریف دیگر مثلث : هرگاه سه نقطه غیر واقع بر یک خط راست را دو به دو به هم وصل کنیم، شکل حاصل را مثلث می‌نامند.

☑ حالت‌های عمومی همنهشتی مثلث‌ها

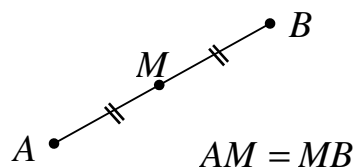
اصل ۱) هر گاه دو ضلع و زاویه ی بین آنها از یک مثلث با دو ضلع و زاویه ی بین آنها از مثلث دیگری مساوی باشند، آن دو مثلث همنهشت هستند. (اصل ض‌ض‌ز).

اصل ۲) هر گاه دو زاویه و ضلع بین آنها از یک مثلث با دو زاویه و ضلع بین آنها از مثلث دیگری مساوی باشند، آن دو مثلث همنهشت هستند. (اصل زض‌ز).

اصل ۳) هر گاه سه ضلع از مثلثی با سه ضلع از مثلث دیگری مساوی باشند، آن دو مثلث همنهشت هستند. (اصل ض‌ض‌ض).

☑ نقطه ی میانی پاره خط :

نقطه ی میانی پاره خط، نقطه‌ای از همان پاره‌خط است که آن را به دو پاره‌خط مساوی تقسیم می‌کند.



نتیجه : اگر M نقطه ی میانی پاره خط AB باشد، در این صورت :

$$AM = \frac{AB}{2} \quad \text{و} \quad MB = \frac{AB}{2}$$

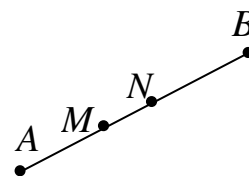
قضیه ی ۱) هر پاره خط فقط یک نقطه ی میانی دارد.

اثبات : (به روش برهان خلف) فرض کنیم که پاره خط AB دو نقطه ی میانی M و N داشته باشد ، آنگاه داریم :

$$AB \text{ میانی } M \rightarrow AM = MB \rightarrow AM = \frac{AB}{2}$$

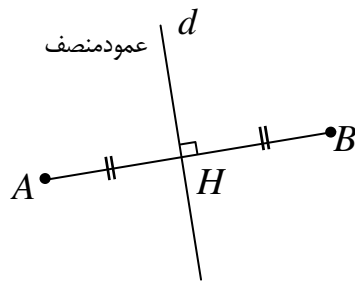
$$AB \text{ میانی } N \rightarrow AN = NB \rightarrow AN = \frac{AB}{2}$$

$$\rightarrow AM = AN$$



این وقتی ممکن است که دو نقطه ی M و N روی هم قرار گیرند و لذا پاره خط AB یک نقطه میانی دارد.

☑ عمود منصف یک پاره خط



تعریف : هر خط که هم از نقطه ی میانی یک پاره خط بگذرد و هم عمود بر آن باشد

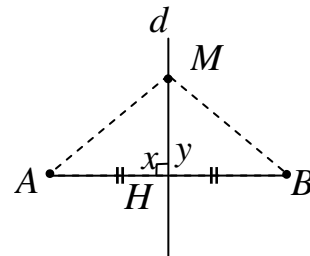
را عمود منصف آن پاره خط می نامند.

نتیجه : هر پاره خط فقط یک عمود منصف دارد.

قضیه ی ۲) هر نقطه که روی عمود منصف یک پاره خط قرار دارد، از دو سر آن پاره خط به یک فاصله است.

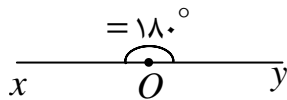
فرض : $M \in d$ (عمود منصف)

حکم : $MA = MB$



$$\left. \begin{array}{l} \text{مشترک} \\ MH = MH \\ \angle x = \angle y = 90^\circ \\ AH = BH \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} \triangle AMH \cong \triangle BMH \\ \text{(ض ز ض)} \end{array} \rightarrow MA = MB$$

اصل زاویه ی نیم صفحه : هر طرف یک خط راست، یک زاویه ی نیم صفحه (180°) است.



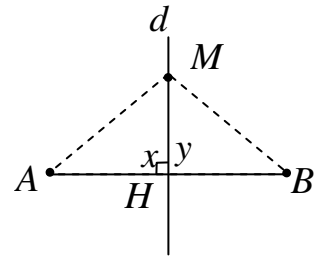
قضیه ی ۳) اگر نقطه ای از دو سر یک پاره خط به یک فاصله باشد، آن نقطه روی عمود منصف پاره خط قرار دارد.

فرض : $MA = MB$

d عمود منصف AB است. : حکم

اثبات : از نقطه ی M خطی چنان رسم می کنیم که از نقطه ی میانی پاره خط AB بگذرد. پس :

$$\left. \begin{array}{l} \text{طبق فرض} \quad MA = MB \\ \text{مشترک} \quad MH = MH \\ \quad \quad AH = BH \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{c} \Delta \quad \quad \Delta \\ AMH \cong BMH \rightarrow \angle x = \angle y \\ \text{(ض ض ض)} \end{array}$$

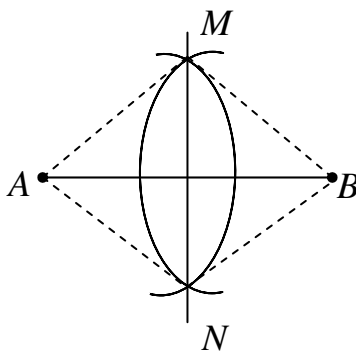


از طرفی طبق اصل زاویه ی نیم صفحه، واضح است که $\angle x + \angle y = 180^\circ$ پس:

$$\angle x = \angle y = 90^\circ \rightarrow d \perp AB$$

و چون $AH = BH$ و $d \perp AB$ پس d عمود منصف AB است.

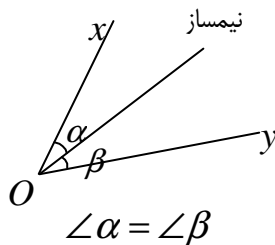
☑ **طریقه ی رسم عمود منصف یک پاره خط به کمک خط کش و پرگار**



به مرکز A کمانی که شعاع آن از نصف طول پاره خط AB بیشتر باشد رسم می کنیم. سپس به مرکز B و به همان شعاع کمان دیگری رسم می کنیم به طوری که کمان اول را در نقاط M و N قطع کند. خط MN عمود منصف AB است. (چرا؟)

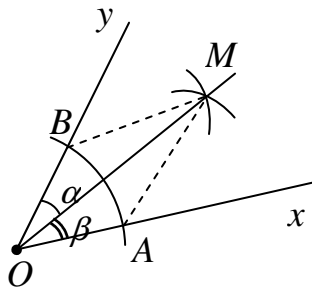
چون نقاط M و N از دو سر پاره خط AB به یک فاصله هستند، پس روی عمود منصف آن قرار دارند و چون از M و N فقط یک پاره خط می گذرد، پس MN عمود منصف AB است.

☑ **نیمساز زاویه**



تعریف : نیمساز زاویه خطی است که از رأس زاویه می گذرد و آن را به دو زاویه ی مساوی تقسیم می کند.

☑ **طریقه ی رسم نیمساز زاویه به کمک خط کش و پرگار**

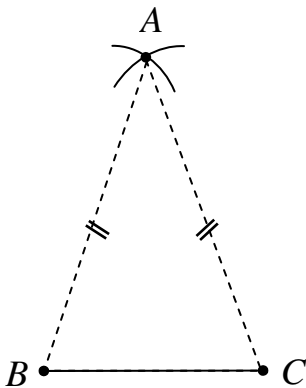


به مرکز O (رأس زاویه) کمانی رسم می‌کنیم تا اضلاع زاویه را در نقاط A و B قطع کند سپس به مرکز A و B کمانهایی به شعاع‌های مساوی رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در نقطه ی M قطع کنند. OM نیمساز زاویه است (چرا؟)

جواب :

$$\left. \begin{array}{l} OA = OB \\ OM = OM \\ AM = BM \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{مشترک} \\ \rightarrow \triangle MAO \cong \triangle MBO \\ \text{(ض ض ض)} \end{array} \rightarrow \angle \alpha = \angle \beta$$

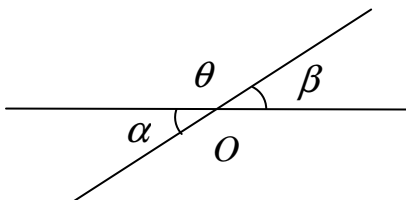
☑ **طریقه ی رسم مثلث متساوی‌الساقین به کمک خط کش و پرگار**



ابتدا پاره خط دلخواه BC را رسم می‌کنیم. سپس از نقاط B و C کمانهایی با شعاع‌های مساوی رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در نقطه A قطع کنند. چون $AB = AC$ پس مثلث ABC متساوی‌الساقین است.

تذکر : اگر پرگار را به اندازه ی پاره خط BC باز کنیم و سپس کمانها را رسم کنیم. مثلث متساوی الاضلاع به دست می‌آید.

☑ **دو زاویه ی متقابل به رأس**



تعریف : دو زاویه مقابل حاصل از دو خط متقاطع را دو زاویه ی متقابل به رأس

می‌نامند. مانند زاویه‌های α و β در شکل زیر:

نتیجه : دو زاویه ی متقابل به رأس در یک رأس مشترک بوده و اضلاع آنها در امتداد همدیگر می‌باشند.

قضیه ی ۴) هر دو زاویه ی متقابل به رأس مساویند.

زاویه های α و β متقابل به رأس هستند : فرض

حکم : $\angle \alpha = \angle \beta$

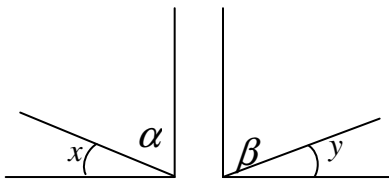
اثبات : با توجه به شکل فوق داریم :

$$\left. \begin{array}{l} \angle \alpha + \angle \theta = 180^\circ \\ \angle \beta + \angle \theta = 180^\circ \end{array} \right\} \rightarrow \angle \alpha + \angle \theta = \angle \beta + \angle \theta \rightarrow \angle \alpha = \angle \beta$$

☑ دو زاویه ی متمم

تعریف : دو زاویه را متمم گویند، هرگاه مجموع اندازه های آنها ۹۰ درجه باشد.

قضیه ی ۵) اگر دو زاویه مساوی باشند، متممهای آنها نیز مساویند.



فرض : $\angle x = \angle y$

حکم : $\angle \alpha = \angle \beta$

است. α متمم x $\rightarrow \angle x + \angle \alpha = 90^\circ$

است. β متمم y $\rightarrow \angle y + \angle \beta = 90^\circ$

$\angle x + \angle \alpha = \angle y + \angle \beta \xrightarrow{\angle x = \angle y} \angle \alpha = \angle \beta$

☑ دو زاویه ی مکمل

تعریف : دو زاویه را مکمل گویند، هرگاه مجموع اندازه های آنها ۱۸۰ درجه باشد.

قضیه ی ۶) اگر دو زاویه مساوی باشند، مکملهای آنها نیز مساویند.



فرض : $\angle x = \angle y$

حکم : $\angle \alpha = \angle \beta$



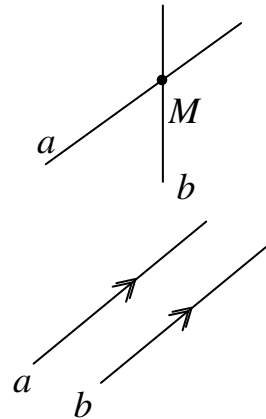
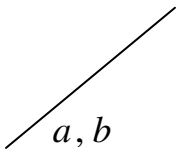
است. α مکمل x $\rightarrow \angle x + \angle \alpha = 180^\circ$

است. $\beta \rightarrow \angle y + \angle \beta = 90^\circ$ مکمل y

$$\angle x + \angle \alpha = \angle y + \angle \beta \xrightarrow{\angle x = \angle y} \angle \alpha = \angle \beta$$

☑ حالت‌های مختلف دو خط در صفحه

ج) تمام نقاط دو خط مشترک است،
در این صورت دو خط را منطبق گویند.

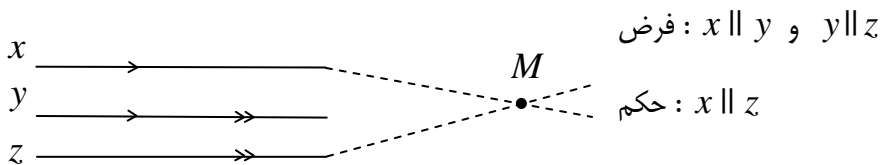


الف) دو خط یک نقطه مشترک دارند.
در این صورت دو خط را متقاطع گویند.

ب) دو خط هیچ نقطه مشترکی ندارند،
در این صورت دو خط را موازی گویند.

توجه: در بعضی از کتب هندسه دو خط را در حالت‌های ب و ج را موازی می‌گویند.

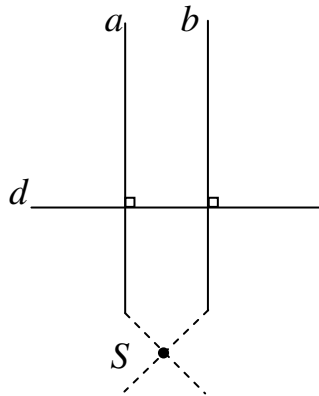
قضیه ی ۷) هر دو خط که با خط سوم موازی باشند، خود با هم موازیند.



اثبات: (به روش برهان خلف)، گیریم که خط x موازی z نباشد. لذا همدیگر را در نقطه‌ای مانند M قطع می‌کنند، در این صورت از

نقطه ی M دو خط موازی y رسم شده است و این خلاف اصل توازی اقلیدس می‌باشد، پس $x \parallel z$.

قضیه ی ۸) در هر صفحه دو خط عمود بر یک خط موازی یکدیگرند.



فرض : $a \parallel d$ و $b \parallel d$

حکم : $a \parallel b$

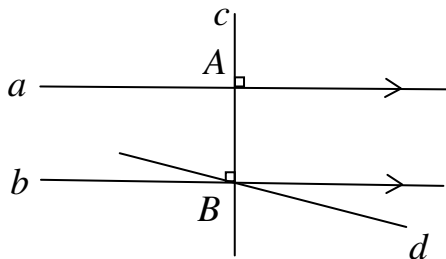
اثبات : (به روش برهان خلف)، فرض کنیم که $a \parallel b$ نباشد، پس a و b همدیگر را در نقطه‌ای مانند S قطع می‌کنند و لذا از یک نقطه دو خط بر d عمود شده است و این خلاف

اصل تعامد اقلیدس است. پس $a \parallel b$

قضیه ی ۹) اگر خطی بر یکی از دو خط موازی عمود باشد، بر دیگری نیز عمود است.

فرض : $a \parallel b$ و $c \perp a$

حکم : $c \perp b$



اثبات: گیریم که $a \parallel b$ و $c \perp a$ است ولی c بر b عمود نباشد. (به روش برهان خلف)

پس از نقطه ی B خط دیگری مانند d چنان رسم می‌کنیم که بر c عمود باشد طبق

قضیه ی قبل d نیز موازی a است، یعنی از نقطه ی B دو خط موازی a رسم شده

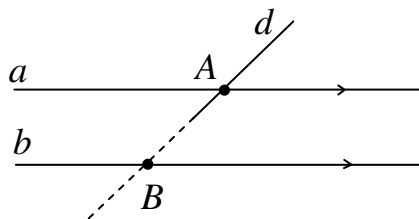
است و این ممکن نیست و لذا $c \perp b$

قضیه ی ۱۰) اگر خطی یکی از دو خط موازی را قطع کند، دیگری را نیز قطع می‌کند.

خط d خط b را قطع می‌کند. : حکم دو خط a و b موازیند و دو خط a و d متقاطعند. : فرض

اثبات : اگر خط d خط b را قطع نکند. پس با آن موازی است (به روش برهان خلف) و لذا از نقطه ی B دو خط موازی a رسم

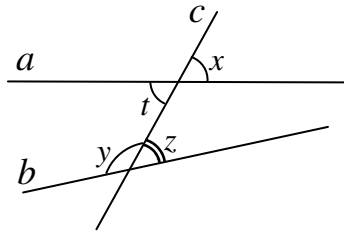
شده است و این ممکن نیست.



خطهای مورب

تعریف : هرگاه دو خط را خط سومی قطع کند، این خط را مورب (قاطع) گویند.

همچنین :



۱- هر دو زاویه که در یک طرف خط مورب واقع باشند را متقابل گویند. مانند زاویه های

(x و z) یا زاویه های (t و z)

۲- هر دو زاویه که در دو طرف خط مورب واقع باشند را متبادل گویند. مانند زاویه های

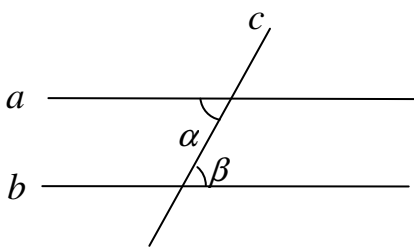
(x و t) یا زاویه های (x و z)

۳- هر زاویه که بین دو خط قطع شده قرار گرفته باشد داخلی و در غیر این صورت خارجی گویند. برای مثال زاویه x خارجی و

زاویه های t و z و y داخلی می باشند.

قضیه ی ۱۱ (قضیه ی خطوط موازی): اگر دو خط موازی را خط سومی قطع کند، زاویه های متبادل داخلی مساوی به دست می آید.

فرض : $a \parallel b$ حکم : $\angle \alpha = \angle \beta$

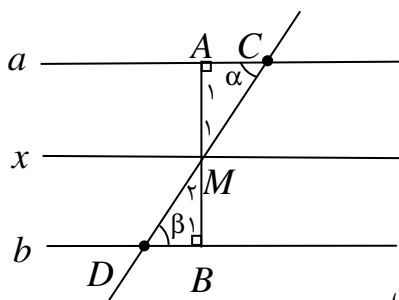


اثبات : پاره خط AM که بر دو خط موازی x و a عمود است را به اندازه خودش از

طرف نقطه M امتداد می دهیم تا نقطه B به دست آید. از نقطه B خطی مانند

b موازی a رسم می کنیم و قاطع CD را طوری رسم می کنیم که از نقطه M بگذرد. واضح است که $AB \perp b$ پس می توان

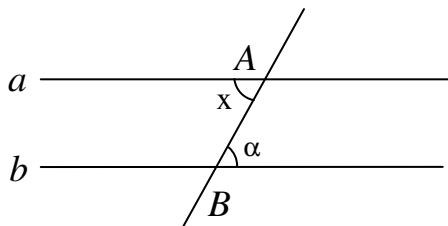
نوشت:



$$\left. \begin{array}{l} \angle A_1 = \angle B_1 = 90^\circ \\ AM = BM \\ \angle M_1 = \angle M_1 \text{ متقابل به رأس} \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} \Delta AMC \cong \Delta BMD \\ \text{(ز ض ز)} \end{array} \rightarrow \angle \alpha = \angle \beta$$

قضیه ی ۱۲) اگر دو خط را خط سومی قطع کند و دو زاویه ی متبادل داخلی متساوی باشند، آن دو خط موازی یکدیگرند.

حکم : $a \parallel b$ فرض : $\angle x = \angle \alpha$

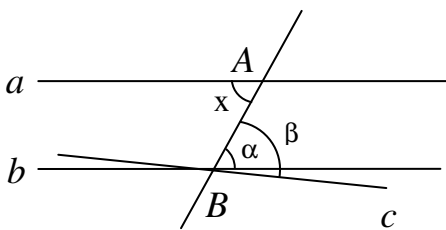


اثبات (به روش برهان خلف) : گیریم که $a \parallel b$ نباشد. پس از نقطه ی B خط c را

موازی a رسم می کنیم و لذا می توان نوشت: $\angle x = \angle \beta$

از طرفی طبق فرض داشتیم $\angle x = \angle \alpha$ لذا $\angle \alpha = \angle \beta$ این وقتی ممکن است

که خط c باید روی b واقع باشد. پس $a \parallel b$



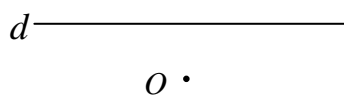
نتیجه : اگر خط موربی دو خط موازی را قطع کند، در این صورت :

۱- تمام زاویه های حاده^۲ با یکدیگر مساویند.

۲- تمام زاویه های منفرجه^۳ با یکدیگر مساویند.

۳- یک زاویه منفرجه و یک زاویه حاده مکمل یکدیگرند.

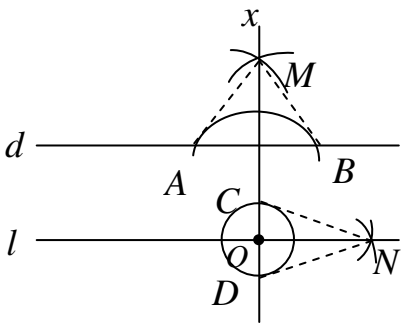
☑ رسم خط موازی با خط دیگر از یک نقطه ی خارج آن به کمک خط کش و پرگار



^۲ هر زاویه که اندازه ی آن کمتر از ۹۰ درجه باشد را حاده (تند) می نامند.

^۳ هر زاویه که اندازه ی آن بین ۹۰ و ۱۸۰ درجه باشد را منفرجه یا (باز) می نامند.

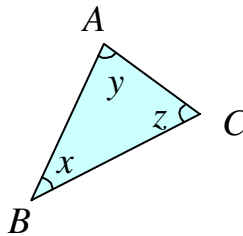
به مرکز O و شعاع دلخواه دایره‌ای رسم می‌کنیم که خط d را در دو نقطه ی A و B قطع کند. خط x را طوری رسم می‌کنیم که عمود منصف AB باشد. حال از نقطه ی O دایره‌ای رسم می‌کنیم که خط x را در نقاط C و D قطع کند. سپس خط l را طوری رسم می‌کنیم که عمود منصف CD باشد. خط l موازی d است (چرا؟)



$$\left. \begin{array}{l} d \perp x \\ l \perp x \end{array} \right\} \rightarrow l \parallel d$$

قضیه ی ۱۳ (مجموع زاویه‌های داخلی هر مثلث ۱۸۰° درجه است).

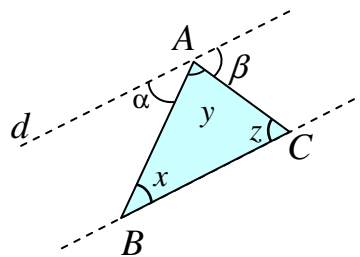
حکم : $\angle x + \angle y + \angle z = 180^\circ$



اثبات : از رأس A خطی موازی ضلع BC رسم می‌کنیم. آنگاه داریم :

مورب AB و $d \parallel BC \rightarrow \angle x = \angle \alpha$

مورب AC و $d \parallel BC \rightarrow \angle z = \angle \beta$

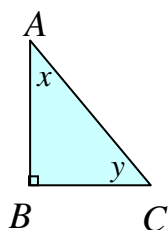


از طرفی بنا بر اصل زاویه نیم صفحه می‌توان نوشت :

$$\angle \alpha + \angle y + \angle \beta = 180^\circ \rightarrow \angle x + \angle y + \angle z = 180^\circ$$

نتیجه : در هر مثلث قائم‌الزاویه دو زاویه ی حاده ، متمم یکدیگرند.

$$\angle x + \angle y = 90^\circ$$

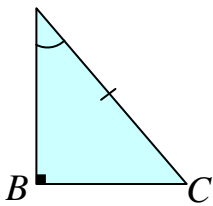


قضیه ی ۱۴) هرگاه وتر و یک زاویه ی حاده از یک مثلث قائم‌الزاویه با وتر و یک زاویه ی حاده از مثلث قائم‌الزاویه ی دیگری مساوی باشند، آن دو مثلث همنهشت هستند.

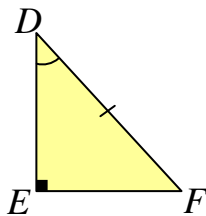
فرض : $AC = DF$ و $\angle A = \angle D$

حکم : $\triangle ABC \cong \triangle DEF$

اثبات : طبق قضیه ی قبل چون مجموع زاویه‌های داخلی هر مثلث 180° است، پس $\angle C = \angle F$. حال داریم :

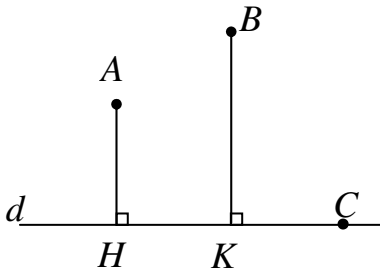


$$\left. \begin{array}{l} \angle C = \angle F \\ AC = DF \\ \angle A = \angle D \end{array} \right\} \rightarrow \triangle ABC \cong \triangle DEF \text{ (ز ض ز)}$$



☑ فاصله ی نقطه تا خط

تعریف : فاصله ی نقطه ی خارج یک خط تا همان خط، برابر اندازه ی پاره‌خطی تعریف می‌کنند که از نقطه ی مورد نظر بر خط عمود باشد.

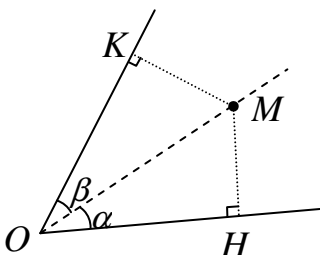


تذکر : فاصله ی نقطه ی روی خط تا همان خط برابر صفر است.

قضیه ی ۱۵) هر نقطه روی نیمساز یک زاویه ، از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است.

حکم : $MK = MH$

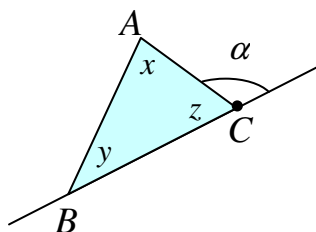
اثبات : دو مثلث $\triangle OHM$ و $\triangle OKM$ قائم‌الزاویه هستند. پس :



$$\left. \begin{array}{l} \angle \alpha = \angle \beta \\ OM = OM \text{ (وتر مشترک)} \end{array} \right\} \rightarrow \triangle OHM \cong \triangle OKM \rightarrow MH = MK \text{ (وتر و یک زاویه ی حاده)}$$

☑ زاویه ی خارجی مثلث

تعریف : زاویه ی خارجی زاویه ای است که بین یک ضلع و امتداد ضلع دیگر مثلث باشد. مانند زاویه ی α در شکل زیر



بدیهی است که هر زاویه ی خارجی و زاویه ی داخلی مجاور آن، مکمل یکدیگرند.

$$\angle z + \angle \alpha = 180^\circ$$

قضیه ی ۱۶) در هر مثلث هر زاویه ی خارجی با مجموع دو زاویه ی داخلی غیرمجاور آن برابر است.

حکم : $\angle \alpha = \angle x + \angle y$

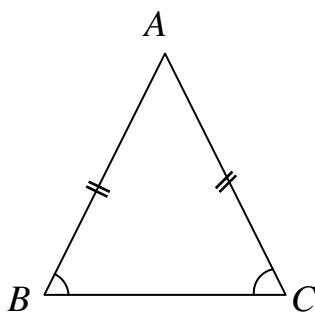
اثبات : با توجه به شکل فوق داریم :

$$\left. \begin{array}{l} \angle z + \angle \alpha = 180^\circ \\ \angle x + \angle y + \angle z = 180^\circ \end{array} \right\} \rightarrow \angle z + \angle \alpha = \angle x + \angle y + \angle z \rightarrow \angle \alpha = \angle x + \angle y$$

قضیه ی ۱۷) در هر مثلث متساوی الساقین، زاویه های روبرو به اضلاع مساوی با یکدیگر مساویند.

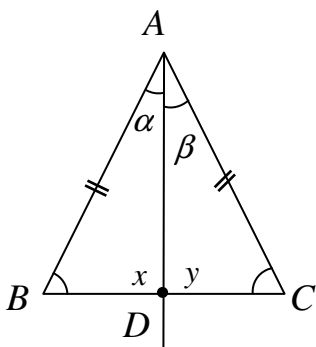
فرض : $AB = AC$

حکم : $\angle B = \angle C$



اثبات : از رأس مثلث (رأس A) خطی چنان رسم می کنیم که نیمساز زاویه ی متناظر آن (زاویه ی A) باشد و قاعده ی مثلث

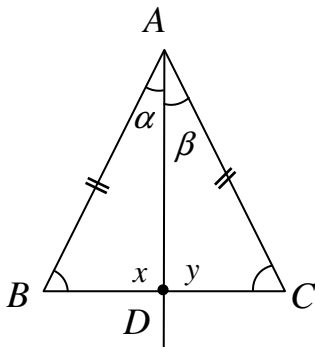
(ضلع BC) را در نقطه ی D قطع کند. در این صورت داریم :



$$\left. \begin{array}{l} AB = AC \\ \angle \alpha = \angle \beta \\ AD = AD \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{مشرکى}} \begin{array}{l} \triangle AMC \\ \triangle BMD \end{array} \cong \begin{array}{l} \triangle \\ \triangle \end{array} \rightarrow \angle B = \angle C$$

(ض ز ض)

قضیه ی ۱۸) هر مثلث که دو زاویه ی آن مساوی داشته باشد، متساوی الساقین است.



فرض : $\angle B = \angle C$

حکم : $AB = AC$

اثبات : از رأس A خطی چنان رسم می‌کنیم که نیمساز زاویه A باشد و ضلع BC را در

نقطه ی D قطع کند. چون مجموع زاویه‌های داخلی هر مثلث 180° است. پس $\angle x = \angle y$

حال می‌توان نوشت :

$$\left. \begin{array}{l} \angle \alpha = \angle \beta \\ AD = AD \text{ مشترک} \\ \angle x = \angle y \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{c} \triangle \\ \triangle \end{array} ABD \cong \triangle ACD \rightarrow AB = AC \text{ (ز ض ز)}$$
